

第5章

n 阶传递函数



本章将第 4 章中所介绍的 2 阶传递函数公式进行扩展,以便将其应用于高阶电路网络。无论电路复杂程度如何,分析方法不变:首先关闭激励源计算各种时间常数值;然后通过观测法、NDI 或广义形式的简单增益法计算零点值。由于传递函数为很多项的组合,所以整理高阶传递函数时需要巨大耐心。利用参考表达式或电路仿真求得的动态响应可能存在错误,将原始电路分解成单个独立电路的方法能够对电路进行更加详尽分析,以便对其错误进行识别。应用上述步骤能够求得排列规整但非常复杂的传递函数表达式,通过对所得表达式进行细致分析,可准确求得 3 阶或更高阶电路的极点和零点值。本章首先从广义 n 阶表达式讲解开始,然后立即将其应用于复杂 4 阶电路分析。

5.1 从 2EET 到 n EET

高阶电路分析方法与前面章节所讲方法并无不同。当 $s=0$ 时计算参考增益,此时所有电容移除、所有电感短路。然后将激励源设置为零,观测每个储能元件端口并计算驱动电阻值——计算电路固有时间常数。通常 n 阶分母表达式遵循以下格式:

$$D(s) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \cdots + b_n s^n \quad (5.1)$$

由第 1 章分析可得,典型传递函数由主导项与比例因子构成。此时,如果传递函数具有单位量纲,则该量纲由主导项进行标识。因此分子与分母之比 $N(s)/D(s)$ 必定无量纲。如果式(5.1)中表达式 $D(s)$ 无单位,则 b_1 的量纲为时间[s], b_2 的量纲为时间的平方[s²], b_3 的单位为时间的立方[s³], b_4 的量纲为时间的 4 次方[s⁴],以此类推,所以 b_n 的单位为时间的 n 次方。

首先计算 b_1 ,因为其单位为秒,所以当激励源设置为 0 时所有时间常数之和即为 b_1 ,通用计算公式为:

$$b_1 = \sum_{i_1=1}^n \tau_{i_1} \quad (5.2)$$

当研究 n 阶电路时 b_1 中含有 n 项。如果对 4 阶电路网络进行分析,可将 4 个时间常数

组合如下:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \quad (5.3)$$

计算 b_2 时, 因为其量纲为时间平方, 所以将时间常数乘积进行相加即可求得 b_2 值。第2章已经对形如 $\tau_1\tau_2^1$ 或 $\tau_2\tau_1^1$ 的时间常数乘积进行定义: 当2阶电路网络中的两个储能元件同时工作时计算系数项 b_2 。将相同理论扩展到高阶电路网络, 但是必须将双储能元件的所有组合全部涵盖: 每次仍然从 n 个储能元件中选定两个元件。当同时选定多个电抗时, 利用图 5.1 对标识符号进行具体解释: 时间常数数字出现在指数中的电抗设置于高频状态, 然后计算储能元件的驱动电阻值, 该储能元件由下角标进行标识。在上述计算过程中, 其余所有电抗均保持在直流状态。

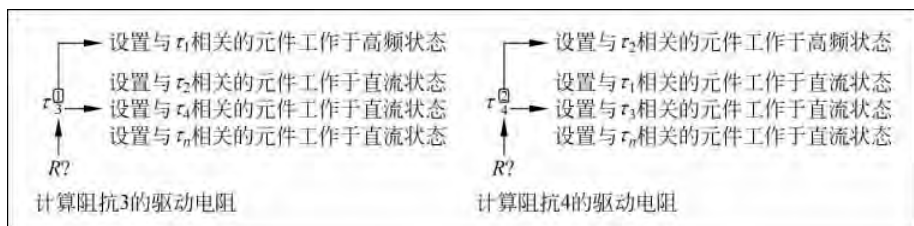


图 5.1 某一储能元件工作于高频状态, 其他所有元件均工作于直流(参考)状态

那么 b_2 共由多少种组合构成呢? 当从一组储能元件中进行某种组合选择时, 根据二项式系数计算公式可求得组合数量为:

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (5.4)$$

其中 n 为电路网络阶数, j 为系数参考; 则 b_2 项的 j 为 2、 b_3 项的 j 为 3, 以此类推, 直至 $j=n$ 为止。于是利用式(5.4)可求得 4 阶电路网络 b_2 项的组合数量为:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \quad (5.5)$$

首先计算式(5.3)中 τ_1 的组合项:

$$b_{2a} = \tau_1\tau_2^1 + \tau_1\tau_3^1 + \tau_1\tau_4^1 \quad (5.6)$$

接下来计算 τ_2 的组合项。如果继续书写 $\tau_2\tau_1^1$, 将会与式(5.6)中的 $\tau_1\tau_2^1$ 冗余。按照图 5.2 所示方式可轻松识别冗余项、重新组合时间常数。当原始组合产生中间复杂电路或者产生不确定项时, 重新组合显得尤为重要。

由于时间常数 τ_3 和 τ_4 还未与 τ_2 相关联, 所以直接计算下一项, 即:

$$b_{2b} = \tau_2\tau_3^2 + \tau_2\tau_4^2 \quad (5.7)$$

然后利用 τ_3 和最后一项时间常数 τ_4 计算得:

$$b_{2c} = \tau_3\tau_4^3 \quad (5.8)$$

如果继续利用 τ_3 与 τ_2 和 τ_1 相结合, 可分别得到 $\tau_3\tau_2^3$ 或 $\tau_3\tau_1^3$, 然后可以使用 $\tau_2\tau_3^2$ 或 $\tau_1\tau_3^1$ 建立冗余(如图 5.2)。将式(5.6)、式(5.7)和式(5.8)相加可得 b_2 值为:

$$b_2 = \tau_1\tau_2^1 + \tau_1\tau_3^1 + \tau_1\tau_4^1 + \tau_2\tau_3^2 + \tau_2\tau_4^2 + \tau_3\tau_4^3 \quad (5.9)$$

与式(5.5)计算结果一致, b_2 共包含 6 项。式(5.9)推广可得:

$$b_2 = \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n \tau_{i_1}\tau_{i_2}^1 \quad (5.10)$$

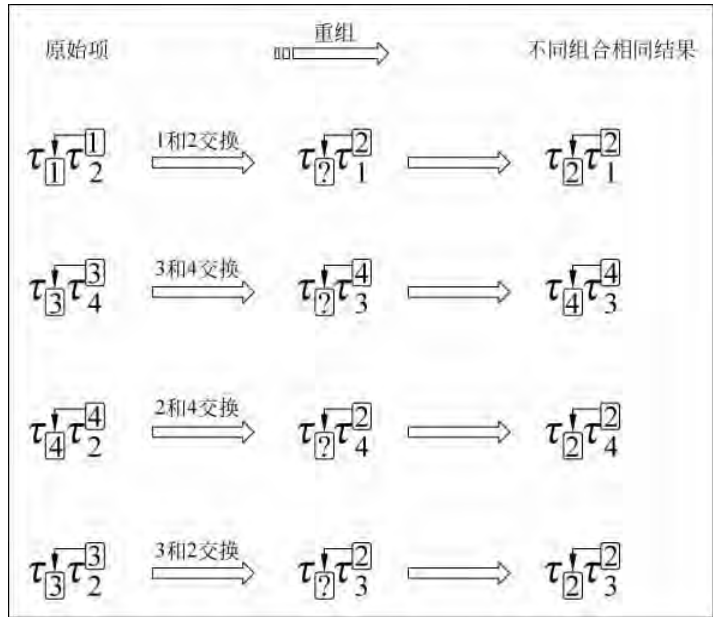


图 5.2 将时间常数重新组合有助于消除不确定性及求得更简单组合方式

因为表达式中很多项需要重新整理,所以上述广义表达式并无实际意义。式(5.10)旨在说明开始进行电路分析时如何构建 b_2 项,如果实际计算时需要,可以再对其进行组合调整。

第 3 项 b_3 主要对 3 个时间常数乘积进行管理。理想情况下, b_2 中所得结果可以重复使用,但也有例外。由式(5.5)可得 b_3 中总共包含的项数:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4 \quad (5.11)$$

首先可以利用 b_2 中所得时间常数进行乘积计算。第 1 项为 $\tau_1 \tau_2^1$,所以第 3 时间常数的指数应该为 1 和 2、下角标可能为 3,具体如下:

$$b_{3a} = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \quad (5.12)$$

图 5.3 显示如何轻松构建 3 阶项。当需要重新整理时,也可通过向后整理的方式从最后指数项重新建立前面项。由图 5.4 所示原理可得,当 $\tau_3^{12} = \tau_3^{21}$ 时两指数项相同,所以与时间常数 τ_1 和 τ_2 相关联的储能元件设置于高频状态:无论计算 τ_3^{12} 还是 τ_3^{21} ,电路设置相同。

尽管 τ_3^{12} 的指数位置包含两个元素,但计算过程相同:将与时间常数 τ_1 和 τ_2 相关联的储能

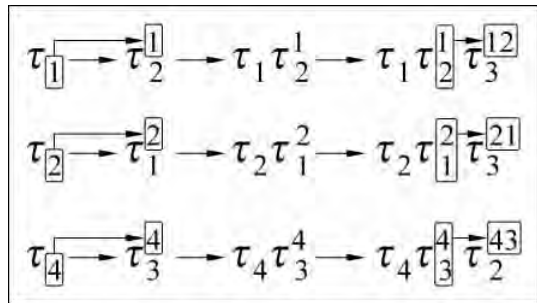


图 5.3 将前面两项进行逻辑组合可轻易构建出第 3 项

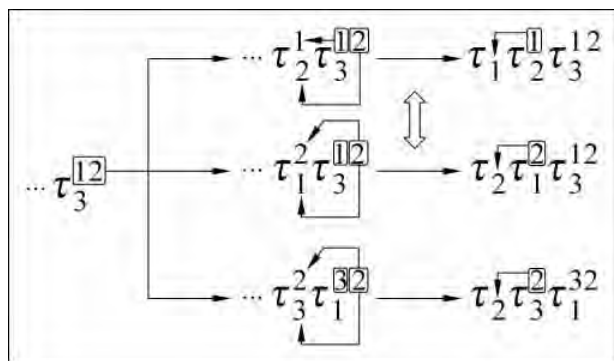


图 5.4 因为右侧两项完全相同,所以当重新组合 3 元素项时,从右侧指数开始向后进行有时更容易和便捷

元件设置于高频状态,而其他所有元件(例如与 τ_3 和 τ_4 相关联的储能元件)均保持 $s=0$ 的参考状态;然后计算第 3 元件的驱动电阻。图 5.5 以图形方式对上述两示例计算过程进行说明。

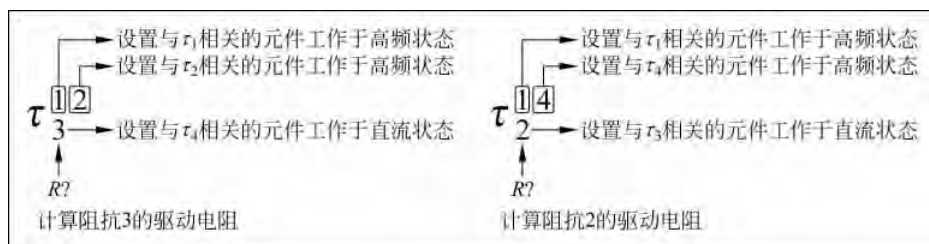


图 5.5 将指数中参考的两储能元件设置为高频状态,而其他元件均处于其参考状态($s=0$)时,然后计算下标元件的驱动电阻

在 4 阶电路网络中,将 $\tau_1 \tau_2^1$ 与 τ_4 相乘可得:

$$b_{3b} = \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} \quad (5.13)$$

式(5.9)中的下一项为 $\tau_1 \tau_3^1$ 与 τ_4 相结合,即:

$$b_{3c} = \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} \quad (5.14)$$

下一项为最后一项,即 $\tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23}$:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23} \quad (5.15)$$

所以 b_3 的广义计算公式为:

$$b_3 = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=i_1+1}^3 \sum_{i_3=i_2+1}^4 \tau_{i_1} \tau_{i_2}^{i_1} \tau_{i_3}^{i_1 i_2} \quad (5.16)$$

最后一项为 b_4 ——4 个时间常数的乘积。此时式(5.4)的计算值为 1,所以 b_4 的定义式为:

$$b_4 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \tau_4^{123} \quad (5.17)$$

当计算下标数字所标识电抗元件的驱动电阻时,需要将其余 3 元件设置为高频状态。上述工作原理的计算过程如图 5.6 所示。

如果需要重新计算,可以按照图 5.7 中实例进行重新整理。

b_4 的通用公式为:

$$b_4 = \sum_{i_1=1}^1 \sum_{i_2=i_1+1}^2 \sum_{i_3=i_2+1}^3 \sum_{i_4=i_3+1}^4 \tau_{i_1} \tau_{i_2}^{i_1} \tau_{i_3}^{i_1 i_2} \tau_{i_4}^{i_1 i_2 i_3} \quad (5.18)$$

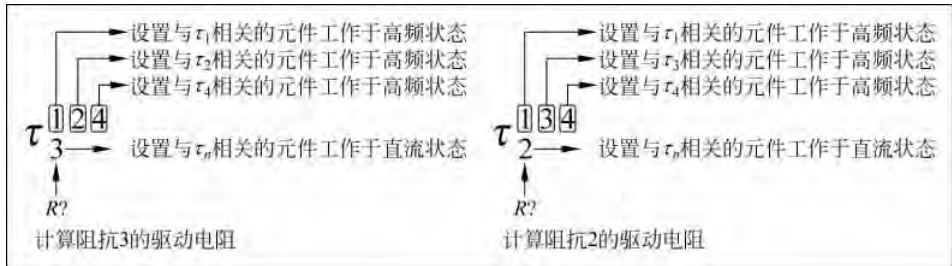


图 5.6 将指数中 3 个参考储能元件设置为高频状态,而其他元件(如果有)均处于其参考状态($s=0$)时,计算下标元件的驱动电阻

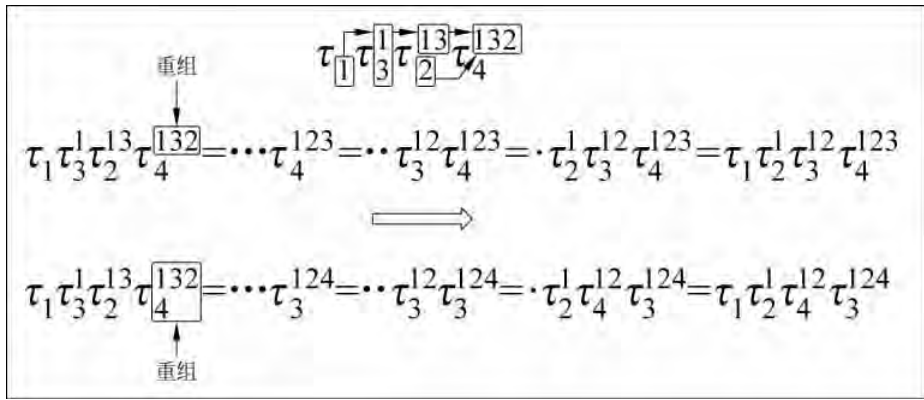


图 5.7 建立 4 元素项并不复杂,可从左边开始然后一直向右进行,或从最后一个元素开始返回计算

最后,任何阶数的传递函数完整通用表达式为:

$$b_j = \sum_{i_1=1}^{n+1-j} \sum_{i_2=i_1+1}^{n+2-j} \cdots \sum_{i_j=i_{j-1}+1}^n \tau_{i_1} \tau_{i_2}^{i_1} \tau_{i_3}^{i_1 i_2} \cdots \tau_{i_j}^{i_1 i_2 \cdots i_{j-1}} \quad (5.19)$$

其中 n 为电路阶数, j 为多项式系数下标: $b_1, b_2, \dots$, 以通用公式为向导,可以得到构成该多项式各项的第一组元素。但是,如果利用计算机程序对式(5.19)进行自动计算,由于软件无法去除可能存在的不确定性,所以可能无法得到正确的计算结果。由于上述原因,对电路进行分析时需要重新整理,所得最终表达式很可能与式(5.19)不同。图 5.8 对 4 次之内的可能分母表达式进行详细总结。

1 ~ 4 阶分母表达式	
1 阶	$D(s) = 1 + \tau_2 s$
2 阶	$D(s) = 1 + (\tau_1 + \tau_2)s + (\tau_1 \tau_2^1)s^2 = 1 + (\tau_1 + \tau_2)s + (\tau_2 \tau_1^2)s^2$
3 阶	$D(s) = 1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)s + (\tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2)s^2 + (\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^1)s^3$
4 阶	$D(s) = 1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)s + (\tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_1 \tau_4^1 + \tau_2 \tau_3^2 + \tau_2 \tau_4^2 + \tau_3 \tau_4^3)s^2 + (\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^1 + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^1 + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^1 + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^2)s^3 + (\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^1 \tau_4^1)s^4$

图 5.8 1~4 阶电路的可能分母表达式

5.1.1 3 阶传递函数实例

现在已经知道如何求解分母表达式,接下来将所学新技术应用于图 5.9 所示电路。因为该电路包含 3 个储能元件,所以为 3 阶系统(各状态变量独立)。无论 L_1 、 L_2 独自开路或者 C_3 短路,或者将其任意组合,输出响应均消失,所以该电路无零点。为求解电路网络的各个系数,将电路进行分解,每个电路对应一个特定参数计算,具体如图 5.10 所示。当 $s=0$ 时可得:

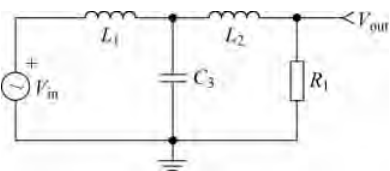


图 5.9 该电路分母表达式为 3 阶

$$H_0 = 1 \quad (5.20)$$

由图 5.10(b)可求得第一时间常数,将其简化为:

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad (5.21)$$

由图 5.10(c)和(d)可得:

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_1} \quad (5.22)$$

以及

$$\tau_3 = 0 \cdot C_3 = 0 \quad (5.23)$$

于是分母表达式中的第一项为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_1} = \frac{L_1 + L_2}{R_1} \quad (5.24)$$

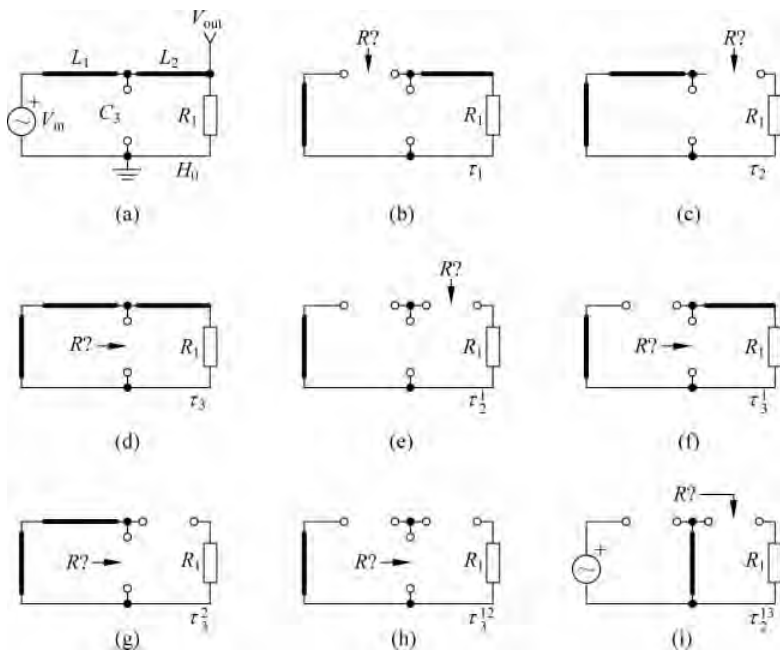


图 5.10 相对 2 阶电路而言,研究 3 阶电路并非高不可攀。因为其函数表达式更长,所以求解系数时需要更加注意

计算 τ_2^1 时将 L_1 设置为高频状态(从电路中移除),然后计算电抗 2 的驱动电阻。该模式下其余元件(C_3)均保持在参考状态(C_3 从电路中移除),所以其中一支路开路,因此:

$$\tau_2^1 = \frac{L_2}{\infty} = 0 \quad (5.25)$$

计算 τ_3^1 时仍将 L_1 设置为高频状态,但是 C_3 的端口电阻为 R_1 ,具体如图 5.10(f)所示。此时时间常数计算公式为:

$$\tau_3^1 = R_1 C_3 \quad (5.26)$$

现在计算 τ_3^2 : L_2 设置为高频状态(从电路中移除),然后查看 C_3 两端的驱动电阻。 L_1 保持其参考状态并由短路代替。由图 5.10(g)可得:

$$\tau_3^2 = 0 \cdot C_3 = 0 \quad (5.27)$$

将上述计算结果组合可得:

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 = \frac{L_1}{R_1} \cdot 0 + \frac{L_1}{R_1} R_1 C_3 + \frac{L_2}{R_1} \cdot 0 = L_1 C_3 \quad (5.28)$$

求解图 5.10(h)中电路的最高次项时,将两电感均设置为高频状态(从电路中移除),通过计算电容两端驱动阻抗计算时间常数 τ_3^{12} 。解得:

$$\tau_3^{12} = \infty \cdot C_3 \quad (5.29)$$

当式(5.29)与式(5.25)中的 τ_2^1 相乘时将产生不确定性。通过对其最后一项进行重新整理可使其恢复稳定,此时:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \quad (5.30)$$

由图 5.4 所示,可将 b_3 调整为如下不同组合形式:

$$b_3 = \tau_2 \tau_3^2 \tau_1^{23} \quad (5.31)$$

或者

$$b_3 = \tau_1 \tau_3^1 \tau_2^{13} \quad (5.32)$$

由于 τ_3^{21} 已经通过式(5.29)进行定义,所以不能采用 $\tau_2 \tau_1^2 \tau_3^{21}$ 的形式。在图 5.10(i)中,应用式(5.32)可得:

$$\tau_2^{13} = \frac{L_2}{R_1} \quad (5.33)$$

整理得:

$$b_3 = \tau_1 \tau_3^1 \tau_2^{13} = \frac{L_1}{R_1} R_1 C_3 \frac{L_2}{R_1} = \frac{L_1 L_2 C_3}{R_1} \quad (5.34)$$

将式(5.24)、式(5.28)和式(5.34)组合得分母表达式为:

$$D(s) = 1 + s \left(\frac{L_1 + L_2}{R_1} \right) + s^2 L_1 C_3 + s^3 \frac{L_1 L_2 C_3}{R_1} \quad (5.35)$$

可否将式(5.35)修改为其他匹配形式,例如 2 阶多项式形式? 第 2 章已经推导出 3 阶方程的不同表达式形式。式(5.35)的重新排列主要取决于极点分布。例如,如果式(5.35)由低频单极点控制,然后在更高频率处包含双极点,那么可将式(5.35)重新排列如下:

$$D(s) \approx \left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right) \quad (5.36)$$

式(5.36)中参数具体计算数值为(参见第 2 章):

$$\omega_p = \frac{1}{b_1} \quad (5.37)$$

$$Q = \frac{b_1 b_3 \sqrt{\frac{b_1}{b_3}}}{b_1 b_2 - b_3} = \frac{L_2 (L_1 + L_2)}{L_1 R_1} \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C_3 L_1 L_2}} \quad (5.38)$$

以及

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C_3 L_1 L_2}} \quad (5.39)$$

如果 $b_3 = b_1 b_2$, 则式(5.36)可进一步简化为:

$$D(s) \approx (1 + b_1 s) \left(1 + s \frac{b_2}{b_1} + s^2 \frac{b_3}{b_1} \right) \quad (5.40)$$

将 L_1 、 L_2 、 C_3 和 R_1 分别设置为具体数值, 以便验证通过简化表达式所得计算结果是否足够准确。通过上述计算可得 V_{out} 与 V_{in} 的最终传递函数表达式为:

$$H(s) = \frac{1}{1 + s \left(\frac{L_1 + L_2}{R_1} \right) + s^2 L_1 C_3 + s^3 \frac{L_1 L_2 C_3}{R_1}} \quad (5.41)$$

为测试上述表达式, 需要设定参考传递函数。应用戴维南定理与阻抗分压器原理求解图 5.9 所示电路传递函数为:

$$\begin{aligned} H_{\text{ref}}(s) &= \frac{\frac{1}{sC_3}}{sL_1 + \frac{1}{sC_3}} \frac{R_1}{R_1 + sL_2 + \left(\frac{1}{sC_3} \parallel sL_1 \right)} \\ &= \frac{1}{1 + s^2 L_1 C_3} \frac{R_1}{R_1 + sL_2 + \left(\frac{1}{sC_3} \parallel sL_1 \right)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

现在将上述表达式输入 Mathcad 工作表中, 并与式(5.42)动态响应特性进行对比。

当采用实际元件值时, 幅度与相位曲线均完美吻合。如果现在对简化表达式(5.40)进行测试, 输出曲线如图 5.12(a)所示, 尽管曲线峰值略低, 但是总体响应特性仍可接受。当电容 C_3 从 1nF 增加至 1 μ F 时, 用于式(5.40)的因数假设不再有效, 所以其响应无法预测峰值。如果按照式(5.36)绘制频率特性波形, 输出曲线仍然精确匹配。

5.1.2 传递函数零点

所有应用于确定极点的表达式均可同样应用于零点。唯一区别如下: 利用 NDI 对电路进行分析时, 当响应为零时计算驱动电抗的所有电阻。该模式下将激励源重新接通, 测试电流源 I_T 与电抗端口相连接, 从而使得响应为零。此时电阻即为电抗端口电压 V_T 与电流源 I_T 之比。如果需要, 可以按照与分母系数相同的描述方法对其进行重新整理。图 5.13 对 1 阶至 4 阶分子表达式进行了详细总结, 其中下标 N 表示某个分子系数(1 阶表达式分子中的 τ_1 和第 2 章及后续章节分母中的 τ_2 除外)。

将上述零点计算方法应用于图 5.14 所示的 3 阶电路。首先利用第 4 章定义计算电路零点数量: 将多少储能元件同时置于高频状态时输出响应仍然存在?

如果 C_2 短路, 无论 L_3 和 C_1 状态如何, 输出响应均为零, 所以无须尝试将 C_2 与其他电抗相关联。如果 C_1 短路时将 L_1 断开, 则通过 r_c 输出响应仍然存在: 分子为 2 阶, 两个零点分别与 C_1 和 L_3 相关联。所以一旦求得系数 a_2 , 则无须计算系数 a_3 。

当输出为零时, 通过各种电路配置计算每个电抗端口的电阻值, 从而确定零点值。所有步骤均收集整理在图 5.15 中, 求解过程非常简单。

第一个 NDI 时间常数与图 5.15(a)中 C_1 相关联。由图可得, 因为输出响应为零, 所以测试电流源 I_T 通过电阻 r_c 返回, 求得时间常数为:

$$\tau_{1N} = r_C C_1 \quad (5.43)$$

在图 5.15(b)中, r_C 右端为 0V(响应为零),但是电流源上端与 L_3 相连接,当 $s=0$ 时电感 L_3 短路。因此 $V_T=0V$,所以时间常数为:

$$\tau_{2N} = 0 \cdot C_2 \quad (5.44)$$

$$L_1 := 10\mu\text{H} \quad L_2 := 500\mu\text{H} \quad C_3 := 1\text{nF} \quad R_1 := 0.1\text{k}\Omega \quad \parallel(x, y) := \frac{xy}{x+y} \quad R_{\text{inf}} := 10^{23}\Omega$$

01

$$H_0 := 1 \quad \tau_1 := \frac{L_1}{R_1} = 0.1\mu\text{s} \quad \tau_2 := \frac{L_2}{R_1} = 5\mu\text{s} \quad \tau_3 := 0 \cdot C_3 = 0\mu\text{s}$$

$$H_{\text{ref}}(s) := \frac{\frac{1}{s \cdot C_3}}{s \cdot L_1 + \frac{1}{s \cdot C_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + s \cdot L_2 + \left[\left(\frac{1}{s \cdot C_3} \parallel (s \cdot L_1) \right) \right]}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 5.1\mu\text{s}$$

$$\tau_{12} := \frac{L_2}{R_{\text{inf}}} = 0\mu\text{s} \quad \tau_{13} := R_1 \cdot C_3 = 0.1\mu\text{s} \quad \tau_{23} := 0 \cdot C_3 = 0\mu\text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 0.01\mu\text{s}^2$$

$$\tau_{132} := \frac{L_2}{R_1} = 5 \cdot \mu\text{s} \quad \tau_{123} := R_{\text{inf}} \cdot C_3 \quad b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{132} = 0.05 \cdot \mu\text{s}^3 \quad b_{33} := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 0.05\mu\text{s}^3$$

$$H_1(s) := H_0 \cdot \frac{1}{1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3}$$

$$\omega_p := \frac{1}{b_1} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 31.207\text{kHz}$$

$$Q := \frac{b_1 \cdot b_3 \cdot \sqrt{\frac{b_1}{b_3}}}{b_1 \cdot b_2 - b_3} = 2.575 \times 10^3 \quad Q_{00} := \frac{L_2 \cdot (L_1 + L_2) \cdot \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C_3 \cdot L_1 \cdot L_2}}}{L_1 \cdot R_1} = 2.575 \times 10^3$$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} = 1.01 \times 10^7 \frac{1}{\text{s}} \quad \omega_{00} := \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C_3 \cdot L_1 \cdot L_2}} = 1.01 \times 10^7 \frac{1}{\text{s}} \quad f_0 := \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = 1.607\text{MHz}$$

$$H_2(s) := H_0 \cdot \frac{1}{(1 + b_1 \cdot s) \left(1 + s \cdot \frac{b_2}{b_1} + s^2 \cdot \frac{b_3}{b_1} \right)} \quad H_3(s) := H_0 \cdot \frac{1}{(1 + b_1 \cdot s) \cdot \left[1 + \frac{s}{\omega_0 \cdot Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right]}$$

$$H_5(s) := \frac{1}{1 + s \cdot \left(\frac{L_1 + L_2}{R_1} \right) + s^2 \cdot L_1 \cdot C_3 + s^3 \cdot \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot C_3}{R_1}}$$

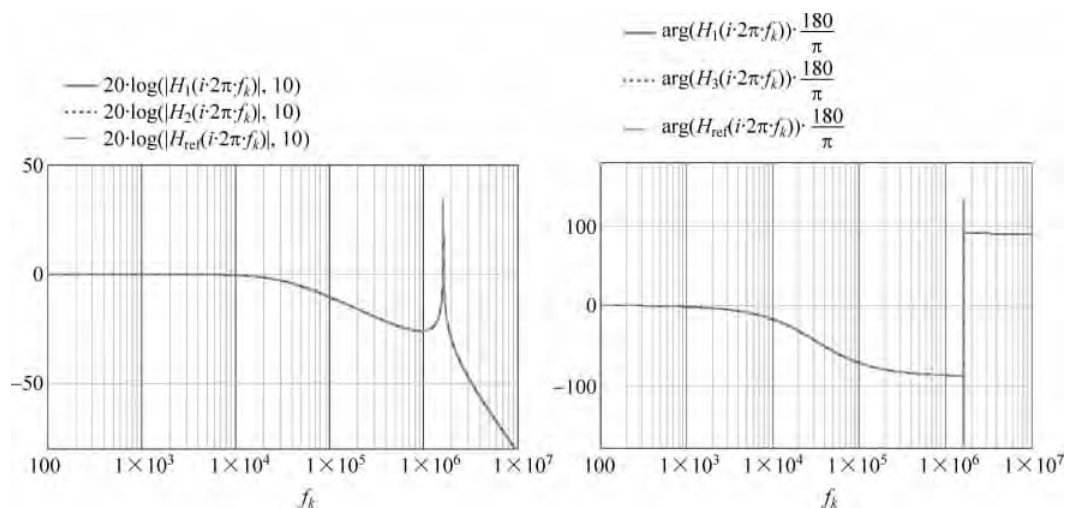


图 5.11 当传递函数的双极点与低频极点清晰分离时,Mathcad 频率特性曲线相互吻合:

$H_1(s)$ 与 $H_{\text{ref}}(s)$ 响应一致,而与 $H_3(s)$ 十分接近

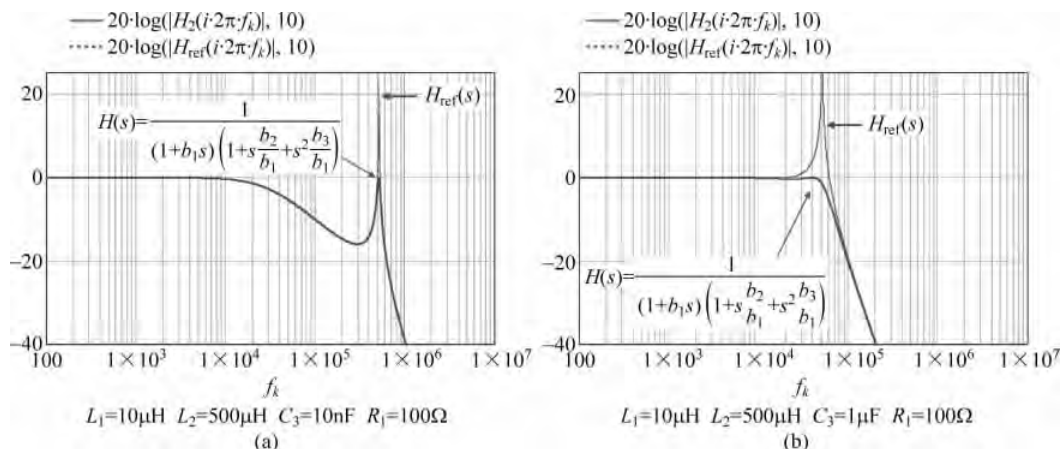


图 5.12 式(5.40)中的简化表达式的特性曲线与左侧图中的参考曲线十分相似。

当 $C_3 = 1\mu\text{F}$ 时两极点越来越接近,从而无法预测峰值

1 ~ 4 阶分子表达式	
1 阶	$N(s) = 1 + \tau_1 s$
2 阶	$N(s) = 1 + (\tau_{1N} + \tau_{2N})s + (\tau_{1N}\tau_{2N}^1)s^2 = 1 + (\tau_{1N} + \tau_{2N})s + (\tau_{2N}\tau_{1N}^2)s^2$
3 阶	$N(s) = 1 + (\tau_{1N} + \tau_{2N} + \tau_{3N})s + (\tau_{1N}\tau_{2N}^1 + \tau_{1N}\tau_{3N}^1 + \tau_{2N}\tau_{3N}^2)s^2 + (\tau_{1N}\tau_{2N}^1\tau_{3N}^{12})s^3$
4 阶	$N(s) = 1 + (\tau_{1N} + \tau_{2N} + \tau_{3N} + \tau_{4N})s + (\tau_{1N}\tau_{2N}^1 + \tau_{1N}\tau_{3N}^1 + \tau_{1N}\tau_{4N}^1 + \tau_{2N}\tau_{3N}^2 + \tau_{2N}\tau_{4N}^2 + \tau_{3N}\tau_{4N}^3)s^2 + (\tau_{1N}\tau_{2N}^1\tau_{3N}^{12} + \tau_{1N}\tau_{2N}^1\tau_{4N}^{12} + \tau_{1N}\tau_{3N}^1\tau_{4N}^{13} + \tau_{2N}\tau_{3N}^2\tau_{4N}^{23})s^3 + (\tau_{1N}\tau_{2N}^1\tau_{3N}^{12}\tau_{4N}^{123})s^4$

图 5.13 响应为零时确定分子表达式

接下来计算输出响应为零时与电感相关联的时间常数,由图 5.15(c)可得,如果测试电流 I_T 等于 0 则输出响应为零。因此时间常数为:

$$\tau_{3N} = \frac{L_3}{\infty} = 0 \quad (5.45)$$

于是系数 a_1 的定义式为:

$$a_1 = \tau_{1N} + \tau_{2N} + \tau_{3N} = r_C C_1 \quad (5.46)$$

求解 a_2 项时将某些储能元件设置于高频状态。在图 5.15(d)中,当测试源对电容 C_2 端口进行偏置时电容 C_1 由短路线代替。该工作模式下 r_C 通过 L_3 短路,只有当 $V_T = 0$ 时才能使得输出响应为零。此时求得时间常数为:

$$\tau_{2N}^1 = 0 \cdot C_2 \quad (5.47)$$

当 C_1 仍处于高频状态并且输出响应为零时,可对 L_3 两端阻抗进行分析计算,具体如图 5.15(e)所示,此时测试电流通过电阻 r_C 返回。所示时间常数为:

$$\tau_{3N}^1 = \frac{L_3}{r_C} \quad (5.48)$$

最后计算输出响应为零、电容 C_2 设置为高频状态时电感 L_3 的端口电阻,具体电路如

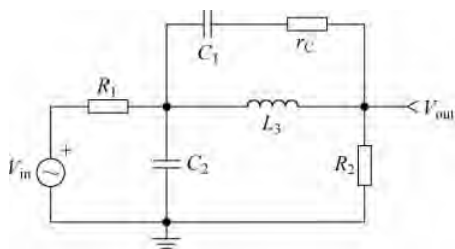


图 5.14 3 阶电路零点计算

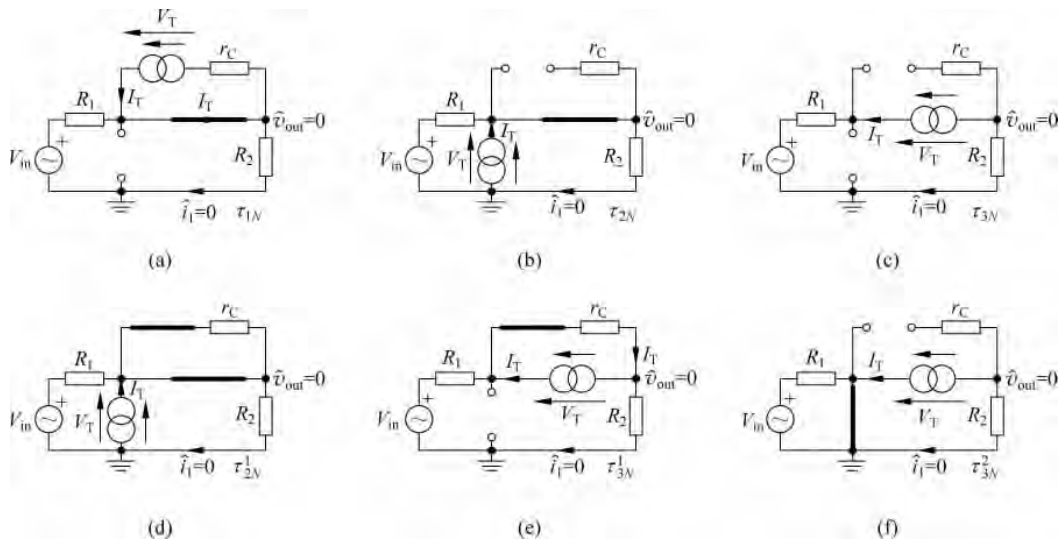


图 5.15 当输出响应为零时将原始电路分解为小电路以求解零点值

图 5.15(f)所示。由于 r_c 断开,所以电流 I_T 不能通过 R_2 返回,所以只有当 $I_T=0$ 时才能使通过电阻 R_2 的电流也为 0。此时电流源两端电压也为 0V,并且具有不确定性。通过在电流源两端并联电阻 R_{dum} 可将该不确定性消除,此时电流只通过电阻 R_{dum} 进行循环,而未流经电阻 R_2 。

图 5.16 为原理图更新之后所对应的 SPICE 仿真电路。对其进行 NDI 分析可求得与 L_3 相关联的时间常数为:

$$\tau_{3N}^2 = \frac{L_3}{R_{\text{dum}}} \quad (5.49)$$

整理得

$$\tau_{3N}^2 = \frac{L_3}{\infty} \quad (5.50)$$

当 R_{dum} 无限大时求得系数 a_2 为:

$$\begin{aligned} a_2 &= \tau_{1N}\tau_{2N}^1 + \tau_{1N}\tau_{3N}^1 + \tau_{2N}\tau_{3N}^2 \\ &= r_c C_1 \cdot 0 \cdot C_2 + r_c C_1 \frac{L_3}{r_c} + 0 \cdot C_2 \frac{L_3}{\infty} = L_3 C_1 \end{aligned} \quad (5.51)$$

将分子表达式定义如下:

$$N(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 = 1 + s r_c C_1 + s^2 L_3 C_1 \quad (5.52)$$

因为式(5.52)为二次多项式,所以满足以下形式:

$$N(s) = 1 + \frac{s}{\omega_{0N}(Q_N)} + \left(\frac{s}{\omega_{0N}}\right)^2 \quad (5.53)$$

其中

$$Q_N = \frac{\sqrt{a_2}}{a_1} = \frac{\sqrt{L_3 C_1}}{r_c C_1} = \frac{1}{r_c} \sqrt{\frac{L_3}{C_1}} \quad (5.54)$$

以及

$$\omega_{0N} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_1}} \quad (5.55)$$

由上述分析可得:求解零点值需要 8 个步骤。本实例并非十分复杂,但是绘制所有分

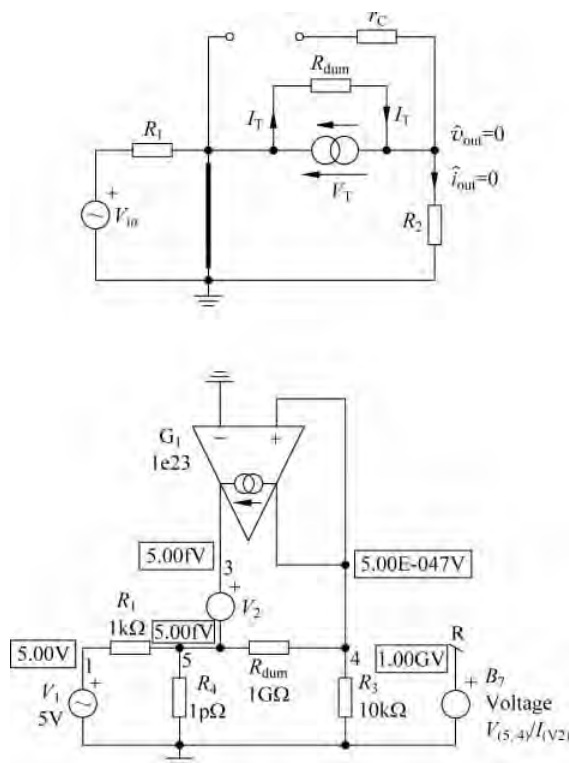


图 5.16 对电路进行 NDI 分析时,通过在 L_3 两端添加虚拟阻抗消除不确定性。

通过 SPICE 仿真证实,对电路进行 NDI 分析时 L_3 两端阻抗为 R_{dum}

解电路图需要很多时间,而且有时还会出现不确定性。那么有没有更加快捷的方法求解分子表达式呢? 可以用观察法。如图 5.14 所示,当 $s=s_z$ 时是否存在使得输出响应为零的条件呢? 当电容 C_2 短路时是否满足呢? 回答是否定的,因为只有当 s 接近无限大时电容短路才会发生。那么串联阻抗会变成开路吗? 确切地说该阻抗由 L_3 与 C_1 和 r_c 的串联组合并联构成。如果阻抗表达式的分母为零,则其阻抗值无穷大。因为阻抗传递函数的零点值已经确定,接下来需要求解其极点值。图 5.17(a)展示了如何利用电流源求解阻抗值。只要求得分母表达式,阻抗传递函数即可确定。

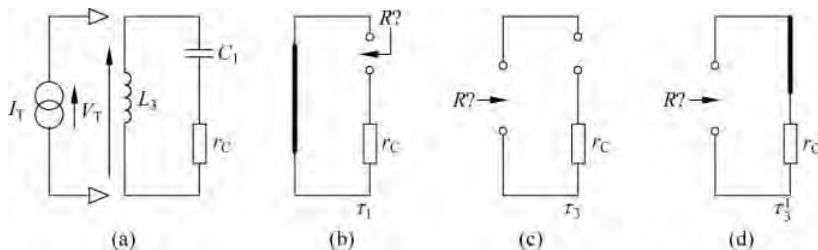


图 5.17 阻抗极点为传递函数零点

由图 5.17(b)可求得与电容 C_1 相关联的第一时间常数为:

$$\tau_1 = r_c C_1 \quad (5.56)$$

在图 5.17(c)中,因为电感两端的电阻无穷大,所示时间常数为:

$$\tau_3 = \frac{L_3}{\infty} = 0 \quad (5.57)$$

最后由图 5.17(d)求得 2 阶项的局部为:

$$\tau'_3 = \frac{L_3}{r_c} \quad (5.58)$$

根据上述计算整理得分母 $D(s)$ 表达式为:

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_3) + s^2 \tau_1 \tau_3^1 = 1 + s r_c C_1 + s^2 C_1 L_3 \quad (5.59)$$

式(5.59)与式(5.52)中的分子定义式相符。求解表达式零点和极点时,如有允许,观测法总比 NDI 技术速度更快。现在已经求得分子表达式,接下来确定分母表达式。除激励源设置为零外,计算过程完全按照图 5.15 中步骤进行。通常首先计算直流增益,由图 5.15(a)可得:

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.60)$$

由图 5.17(b)、(c)和(d)所示的分解电路分别求得 3 个时间常数为:

$$\tau_1 = r_c C_1 \quad (5.61)$$

$$\tau_2 = C_2 (R_1 \parallel R_2) \quad (5.62)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{R_1 + R_2} \quad (5.63)$$

求得第 1 系数 b_1 的定义式为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = r_c C_1 + C_2 (R_1 \parallel R_2) + \frac{L_3}{R_1 + R_2} \quad (5.64)$$

此时 C_1 设置于高频状态,通过图 5.15(e)计算 C_2 的驱动电阻。由于 r_c 被 L_3 短路,所以驱动电阻即为 R_1 和 R_2 并联,从而求得时间常数为:

$$\tau_2^1 = C_2 (R_1 \parallel R_2) \quad (5.65)$$

电路设置相同,由图 5.15(f)计算电感 L_3 的驱动电阻,求得时间常数为:

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{r_c \parallel (R_1 + R_2)} \quad (5.66)$$

在图 5.15(g)中, C_2 设置于高频状态,此时电感 L_3 的驱动电阻为 R_2 ,求得时间常数为:

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{R_2} \quad (5.67)$$

根据上述计算结果整理得系数 b_2 的表达式为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 \\ &= r_c C_1 C_2 (R_1 \parallel R_2) + r_c C_1 \frac{L_3}{r_c \parallel (R_1 + R_2)} + C_2 (R_1 \parallel R_2) \frac{L_3}{R_2} \end{aligned} \quad (5.68)$$

由图 5.18(h)求得 $\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12}$ 中的最后一项为:

$$\tau_3^{12} = \frac{L_3}{r_c \parallel R_2} \quad (5.69)$$

系数 b_3 只由一项构成,即:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} = r_c C_1 C_2 (R_1 \parallel R_2) = \frac{L_3}{r_c \parallel R_2} \quad (5.70)$$

通过上述计算求得分母表达式为:

$$\begin{aligned}
 D(s) = & 1 + s \left(r_c C_1 + C_2 (R_1 \parallel R_2) + \frac{L_3}{R_1 + R_2} \right) + \\
 & s^2 \left(r_c C_1 C_2 (R_1 \parallel R_2) + r_c C_1 \frac{L_3}{r_c \parallel (R_1 + R_2)} + C_2 (R_1 \parallel R_2) \frac{L_3}{R_2} \right) + \\
 & s^3 r_c C_2 (R_1 \parallel R_2) \frac{L_3}{r_c \parallel R_2}
 \end{aligned} \quad (5.71)$$

可将分母表达式简化为单低频极点和 2 阶多项式的组合形式,其品质因数 Q 定义式为:

$$Q = \frac{b_1 b_3 \sqrt{\frac{b_1}{b_3}}}{b_1 b_2 - b_3} \quad (5.72)$$

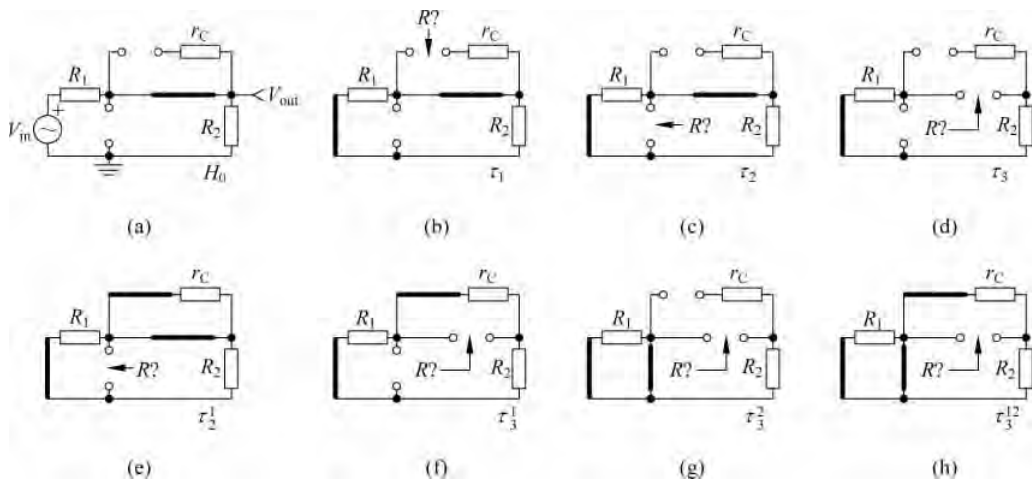


图 5.18 当激励源设置为 0V 时计算每个时间常数

谐振频率 ω_0 为:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} \quad (5.73)$$

低频极点为:

$$\omega_p = \frac{1}{b_1} \quad (5.74)$$

将传递函数的简化表达式重新整理为:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \approx H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_{0N} Q_N} + \left(\frac{s}{\omega_{0N}} \right)^2}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right) \left[1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right]} \quad (5.75)$$

对传递函数进行动态响应测试之前,首先建立原始参考传递函数。 R_1 和 C_2 为戴维南电压源的组成部分,并且电压源受 R_1 和 C_2 组成的并联输出阻抗影响,此时新的传递函数表达式为:

$$H_{\text{ref}}(s) = \frac{1}{sC_2} \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC_2} R_2 + \left[\left(\frac{1}{sC_2} \right) \parallel R_1 \right] \left[\left(\frac{1}{sC_1} + r_c \right) \parallel (sL_3) \right]} \quad (5.76)$$

如图 5.19 所示,将上述所有表达式全部输入到 Mathcad 文件中。通过式(5.76)绘制

参考传递函数特性曲线,由式(5.52)和式(5.71)构成完整传递函数表达式,输出曲线一致性非常完美。在图 5.20 中,式(5.75)与式(5.76)进行对比,由所选元件参数组合得到的输出结果同样非常匹配。

$$L_3 := 1\text{mH} \quad C_2 := 22\text{nF} \quad C_1 := 22\text{nF} \quad R_1 := 1\text{k}\Omega \quad R_2 := 1\text{k}\Omega \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y} \quad R_{\text{inf}} := 10^{23} \Omega$$

$$r_c := 1.5 \Omega$$

$$H_0 := \frac{R_2}{R_2 + R_1} \quad H_{\text{ref}}(s) := \frac{\frac{1}{s \cdot C_2}}{R_1 + \frac{1}{s \cdot C_2}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + \left[\left(\frac{1}{s \cdot C_2} \right) \parallel R_1 \right] + \left[\left(\frac{1}{s \cdot C_1} + r_c \right) \parallel (s \cdot L_3) \right]}$$

$$\tau_1 := r_c \cdot C_1 = 0.033 \mu\text{s} \quad \tau_2 := C_2 \cdot (R_1 \parallel R_2) = 11 \mu\text{s} \quad \tau_{23} := \frac{L_3}{R_1 + R_2} = 0.5 \mu\text{s}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 11.533 \mu\text{s}$$

$$\tau_{12} := C_2 \cdot (R_1 \parallel R_2) = 11 \mu\text{s} \quad \tau_{13} := \frac{L_3}{r_c \parallel (R_1 + R_2)} = 667.167 \mu\text{s} \quad \tau_{23} := \frac{L_3}{R_2} = 1 \mu\text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 33.38 \mu\text{s}^2$$

$$\tau_{123} := \frac{L_3}{r_c \parallel R_2} = 667.667 \mu\text{s}$$

$$b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 242.363 \mu\text{s}^3$$

$$\tau_{1N} := C_1 \cdot r_c \quad \tau_{2N} := C_2 \cdot 0 \Omega = 0 \quad \tau_{3N} := \frac{L_3}{R_{\text{inf}}} = 0 \text{ s}$$

$$a_1 := \tau_{1N} + \tau_{2N} + \tau_{3N} = 33 \text{ ns}$$

$$\tau_{12N} := C_2 \cdot 0 \Omega = 0 \quad \tau_{13N} := \frac{L_3}{r_c} \quad \tau_{23N} := \frac{L_3}{R_{\text{inf}}} = 0 \mu\text{s}$$

$$a_2 := \tau_{1N} \tau_{12N} + \tau_{1N} \tau_{13N} + \tau_{2N} \tau_{23N} = 2.2 \times 10^{-11} \text{ s}^2$$

$$Q_N := \frac{\sqrt{a_2}}{a_1} = 142.134 \quad \omega_{0N} := \frac{1}{\sqrt{a_2}} = 2.132 \times 10^5 \frac{1}{\text{s}}$$

$$f_{0N} := \frac{\omega_{0N}}{2\pi} = 33.932 \text{ kHz}$$

$$H_1(s) := H_0 \cdot \frac{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2}{1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3}$$

$$N_1(s) := 1 + s \cdot r_c \cdot C_1 + s^2 \cdot C_1 \cdot L_3$$

$$\omega_p := \frac{1}{b_1} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 13.8 \text{ kHz}$$

$$Q := \frac{b_1 \cdot b_3 \cdot \sqrt{\frac{b_1}{b_3}}}{b_1 \cdot b_2 - b_3} = 4.276$$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} = 2.181 \times 10^5 \frac{1}{\text{s}} \quad f_0 := \frac{\omega_0}{2\pi} = 34.718 \cdot \text{kHz}$$

$$H_2(s) := H_0 \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_{0N} \cdot Q_N} + \left(\frac{s}{\omega_{0N}} \right)^2}{(1 + b_1 \cdot s) \cdot \left(1 + s \cdot \frac{b_2}{b_1} + s^2 \cdot \frac{b_3}{b_1} \right)}$$

$$H_3(s) := H_0 \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_{0N} \cdot Q_N} + \left(\frac{s}{\omega_{0N}} \right)^2}{(1 + b_1 \cdot s) \cdot \left[1 + \frac{s}{\omega_0 \cdot Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right]}$$

$$H_4(s) := H_0 \cdot \frac{N_1(s)}{(1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3)}$$

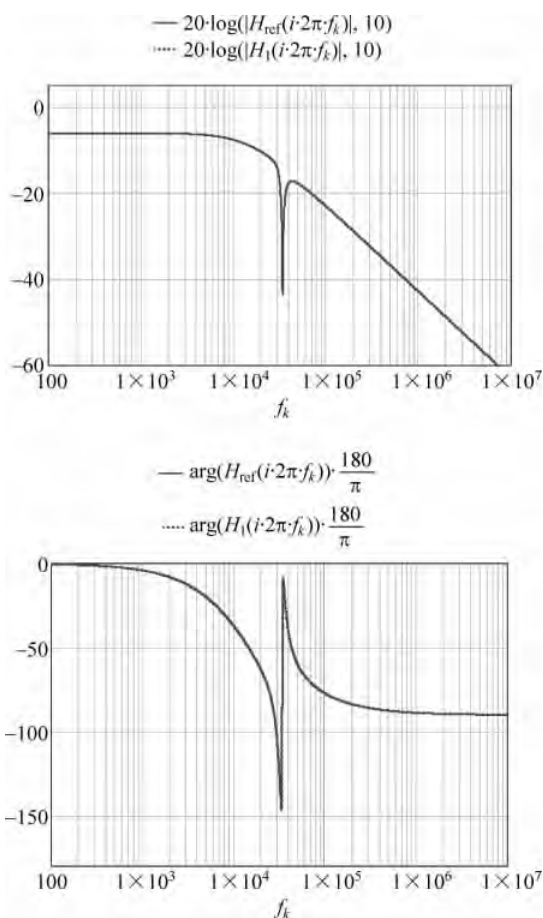


图 5.19 参考表达式 $H_{\text{ref}}(s)$ 与 $H_1(s)$ 频率特性曲线完全吻合

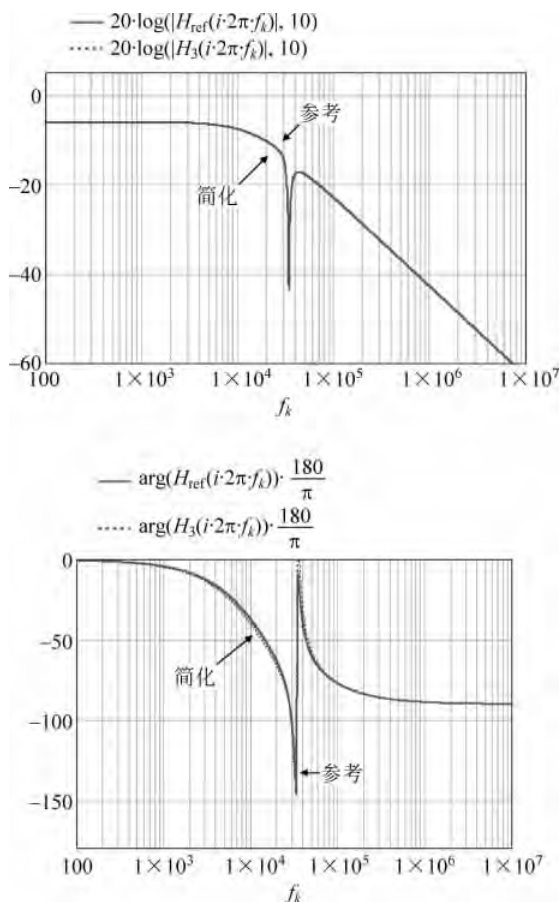


图 5.20 使用选定元件参数组合时简化表达式与实际响应相差甚微

5.1.3 广义 n 阶传递函数

第 3 章利用其他方式而非 NDI 求得 EET, 具体步骤如下所示: 重新利用激励源设置为 0 时确定的分母时间常数, 并将与其相关联的储能元件设置为高频状态求得增益值, 然后将两者进行组合。第 4 章将表达式扩展为 2 阶电路, 具体如文献[1]所示。在论文中, 阿里哈基米日利用类似分析方法将该技术推广至 n 阶传递函数: 再次利用分母时间常数, 并将其与确定增益值相组合, 计算增益值时将某些储能元件设置为高频或直流状态。图 5.21 为利用上述方法计算 1~4 阶分子表达式的详细总结。

1 阶	$N(s) = H_0 + H^1 \tau_1 s, D(s) = 1 + s\tau_1$
2 阶	$N(s) = H_0 + (\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2)s + (\tau_1 \tau_2^1 H^{12})s^2 = H_0 + (\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2)s + (\tau_2 \tau_1^2 H^{21})s^2$
3 阶	$N(s) = H_0 + s(\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3) + s^2(\tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23}) + s^3(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^2 H^{123})$
4 阶	$N(s) = H_0 + s(\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3 + \tau_4 H^4) +$ $s^2(\tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_1 \tau_4^1 H^{14} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23} + \tau_2 \tau_4^2 H^{24} + \tau_3 \tau_4^3 H^{34}) +$ $s^3(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^2 H^{123} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^2 H^{124} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^3 H^{134} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^3 H^{234}) +$ $s^4(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^2 \tau_4^3 H^{1234})$

图 5.21 1~4 阶广义传递函数分子表达式总结

当 $s=0$ 传递函数增益存在并且为 H_0 时,可将其按照图 5.22 方式进行因式分解。

当 H_0 非零时,可将其分解为分子表达式的主导项

$$N(s) = H_0 \left(1 + \frac{H_1}{H_0} \tau_1 s \right), D(s) = 1 + s \tau_1$$

$$N(s) = H_0 \left[1 + \left(\tau_1 \frac{H^1}{H_0} + \tau_2 \frac{H^2}{H_0} \right) s + \left(\tau_1 \tau_2 \frac{H^{12}}{H_0} \right) s^2 \right]$$

$$N(s) = H_0 \left[1 + s \left(\tau_1 \frac{H^1}{H_0} + \tau_2 \frac{H^2}{H_0} + \tau_3 \frac{H^3}{H_0} \right) + s^2 \left(\tau_1 \tau_2 \frac{H^{12}}{H_0} + \tau_1 \tau_3 \frac{H^{13}}{H_0} + \tau_2 \tau_3 \frac{H^{23}}{H_0} \right) + s^3 \left(\tau_1 \tau_2 \tau_3 \frac{H^{123}}{H_0} \right) \right]$$

$$N(s) = H_0 \left[1 + s \left(\tau_1 \frac{H^1}{H_0} + \tau_2 \frac{H^2}{H_0} + \tau_3 \frac{H^3}{H_0} + \tau_4 \frac{H^4}{H_0} \right) + \right.$$

$$s^2 \left(\tau_1 \tau_2 \frac{H^{12}}{H_0} + \tau_1 \tau_3 \frac{H^{13}}{H_0} + \tau_1 \tau_4 \frac{H^{14}}{H_0} + \tau_2 \tau_3 \frac{H^{23}}{H_0} + \tau_2 \tau_4 \frac{H^{24}}{H_0} + \tau_3 \tau_4 \frac{H^{34}}{H_0} \right) +$$

$$s^3 \left(\tau_1 \tau_2 \tau_3 \frac{H^{123}}{H_0} + \tau_1 \tau_2 \tau_4 \frac{H^{124}}{H_0} + \tau_1 \tau_3 \tau_4 \frac{H^{134}}{H_0} + \tau_2 \tau_3 \tau_4 \frac{H^{234}}{H_0} \right) +$$

$$\left. s^4 \left(\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \frac{H^{1234}}{H_0} \right) \right]$$

图 5.22 当 H_0 非 0 时变为主导因子,代表传递函数的单位量纲(如果有量纲)

如图 5.23 所示,构建分子表达式并不复杂。 H 符号中的指数表明该储能元件设置为高频状态,而其余元件均保持其直流状态。正如第 3 章和第 4 章所述,广义传递函数表达式有时比利用 NDI 技术或者更实用的观察法得到的表达式更复杂。无论选择两种方法中的任何一种,均能得到相同的动态响应。

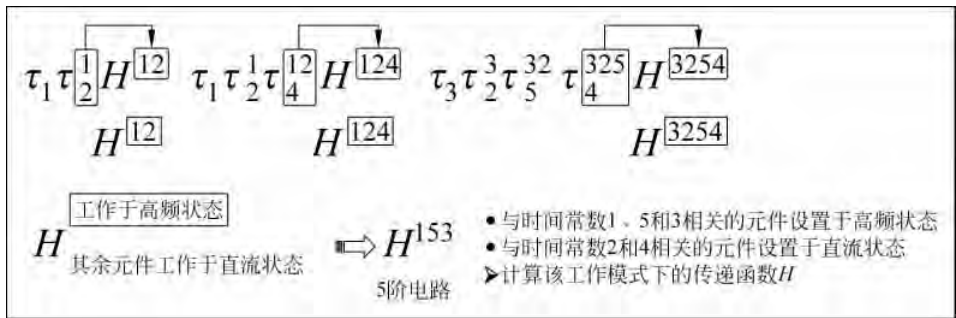


图 5.23 构建 $N(s)$ 广义表达式系数项时需要计算增益表达式 H ,并将与之相关联的储能元件设置为高频或直流状态

现在传递函数广义表达式的基本形式已经确定,接下来对图 5.24 中的 3 阶电路实例进行分析。与之前电路分析方法一致,首先将电路分步绘图,以计算电路固有时间常数,分解电路如图 5.25 所示。

首先从左侧电路开始分析,由图 5.25 (a) 可得:

$$H_0 = 0 \quad (5.77)$$

整理得

$$\tau_1 = R_1 C_1 \quad (5.78)$$

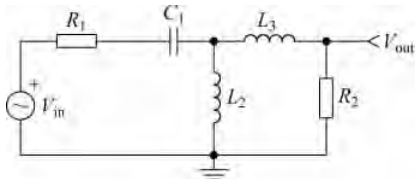


图 5.24 利用图 5.21 中的广义表达式可快速求得 3 阶电路的传递函数

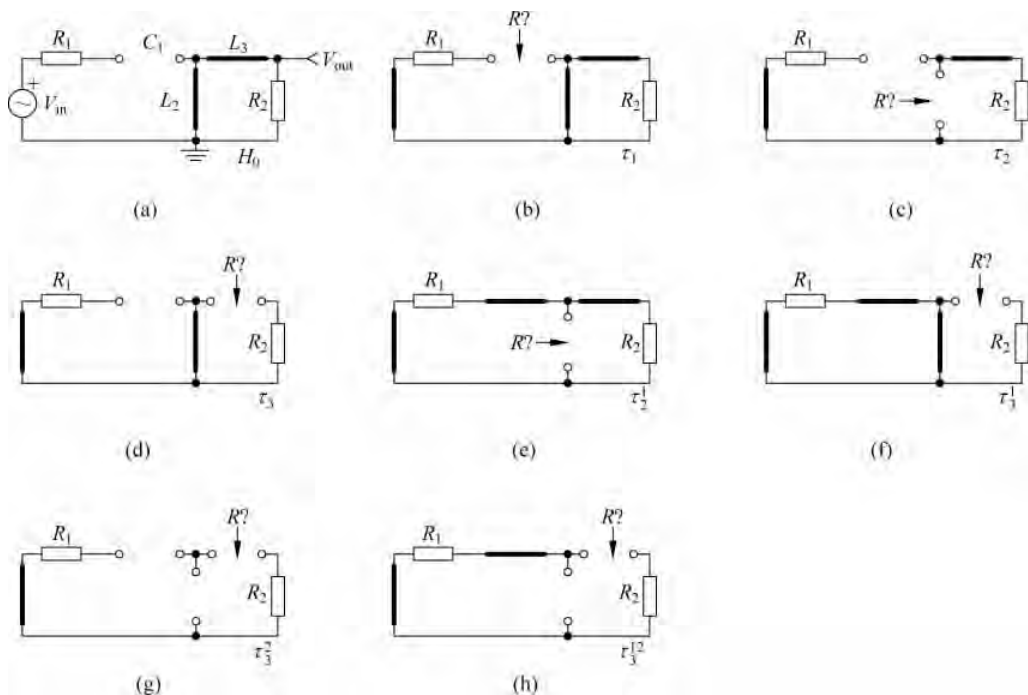


图 5.25 断开电路以求解固有时间常数。仅当计算直流增益 H_0 时激励源才开启，其他情况下激励源均关闭

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_2} \quad (5.79)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{R_2} \quad (5.80)$$

求得系数 b_1 为：

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = R_1 C_1 + \frac{L_2 + L_3}{R_2} \quad (5.81)$$

如果 $R_1 = R_2 = R$ ，则 b_1 表达式重新整理为：

$$b_1 = RC_1 + \frac{L_2 + L_3}{R} \quad (5.82)$$

继续对图 5.25(e) 进行分析，可求得如下时间常数：

$$\tau_2^1 = \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} \quad (5.83)$$

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{R_2} \quad (5.84)$$

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{\infty} = 0 \quad (5.85)$$

于是系数 b_2 的表达式为：

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 = R_1 C_1 \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_2} + \frac{L_2}{R_2} \cdot 0$$

$$= R_1 C_1 \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_2} \quad (5.86)$$

如果 $R_1 = R_2 = R$, 则 b_2 表达式可简化为:

$$b_2 = RC_1 \frac{L_2}{\frac{R}{2}} + RC_1 \frac{L_3}{R} = C_1 (2L_2 + L_3) \quad (5.87)$$

最后对图 5.25(h) 进行分析, 求得时间常数为:

$$\tau_3^{12} = \frac{L_3}{R_1 + R_2} \quad (5.88)$$

解得:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} = R_1 C_1 \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} \frac{L_3}{R_1 + R_2} \quad (5.89)$$

如果 $R_1 = R_2 = R$, 则 b_3 表达式可简化为:

$$b_3 = 2L_2 C_1 \frac{L_3}{2R} = \frac{C_1 L_2 L_3}{R} \quad (5.90)$$

将式(5.82)、式(5.87)和式(5.90)进行组合整理, 求得分母表达式为:

$$D(s) = 1 + s \left(RC_1 + \frac{L_2 + L_3}{R} \right) + s^2 C_1 (2L_2 + L_3) + s^3 \frac{L_2 L_3 C_1}{R} \quad (5.91)$$

既然分母表达式已经求得, 接下来利用图 5.26 中的各种配置电路计算对应增益值, 以求解广义传递函数表达式。

在图 5.26(a)中, 电容 C_1 设置于高频状态(短路), 其他元件均工作于直流状态。该模式下电感 L_2 将信号接地, 因此增益为 0, 即:

$$H^1 = 0 \quad (5.92)$$

当储能元件设置为其他组合方式计算 H^2 和 H^3 时, 增益同样为 0:

$$H^2 = H^3 = 0 \quad (5.93)$$

在图 5.26(d)中, 当 L_3 工作于直流状态(短路)时, C_1 和 L_2 处于高频状态(分别对应短路和开路)。此时增益存在, 计算公式为:

$$H^{12} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.94)$$

如果 $R_1 = R_2 = R$, 则 H^{12} 简化为:

$$H^{12} = \frac{R}{2R} = 0.5 \quad (5.95)$$

然后对电路图 5.26(e)和(f)进行分析, 解得增益均为 0, 即:

$$H^{13} = H^{23} = 0 \quad (5.96)$$

最后, 当所有元件均工作于高频状态时, 由图 5.26(g)可得:

$$H^{123} = 0 \quad (5.97)$$

将上述增益表达式与已求得时间常数进行组合, 整理得分子表达式为:

$$N(s) = h_0 + s(\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3) + s^2(\tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23}) + s^3(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^2 H^{123}) \quad (5.98)$$

因为式(5.98)中有多项为 0, 所以消除该项后可将分子简化为:

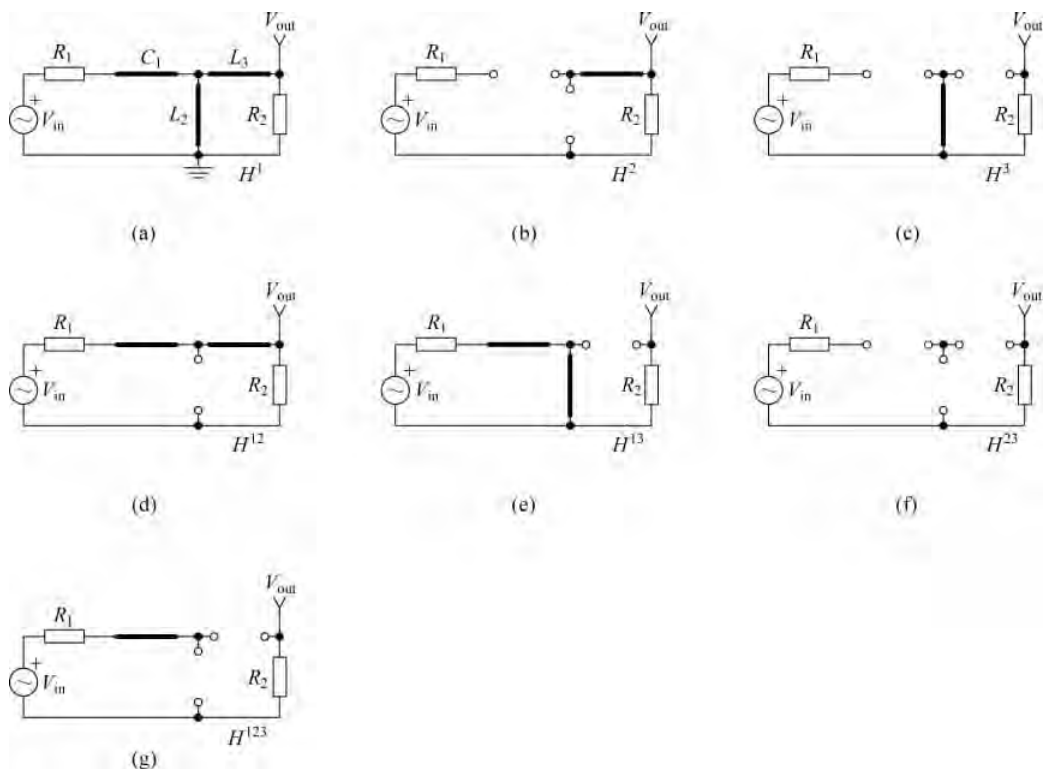


图 5.26 除恢复激励源之外其他设置均与前面相同,当储能元件交替设置为直流或高频状态时计算各种传递函数

$$\begin{aligned}
 N(s) &= s^2 \tau_1 \tau_2^1 H^{12} = s^2 R_1 C_1 \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\
 &= s^2 R_1 C_1 \frac{L_2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = s^2 L_2 C_1
 \end{aligned} \quad (5.99)$$

将式(5.91)和式(5.99)进行组合,解得最终传递函数为:

$$H(s) = \frac{s^2 L_2 C_1}{1 + s \left(RC_1 + \frac{L_2 + L_3}{R} \right) + s^2 C_1 (2L_2 + L_3) + s^3 \frac{L_2 L_3 C_1}{R}} \quad (5.100)$$

以分子为公因式,对表达式(5.100)进行因式分解和简化得:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{s^2 L_2 C_1} + \frac{s \left(RC_1 + \frac{L_2 + L_3}{R} \right)}{s^2 L_2 C_1} + \frac{s^2 C_1 (2L_2 + L_3)}{s^2 L_2 C_1} + \frac{s^3 \frac{L_2 L_3 C_1}{R}}{s^2 L_2 C_1}} \quad (5.101)$$

对传递函数表达式(5.101)整理得:

$$H(s) = \frac{L_2}{2L_2 + L_3} \frac{1}{1 + \frac{L_2 + L_3 + C_1 R^2}{s R C_1 (2L_2 + L_3)} + \frac{s L_2 L_3}{R (2L_2 + L_3)} + \frac{1}{s^2 C_1 (2L_2 + L_3)}} \quad (5.102)$$

式(5.102)为第一种传递函数表达式形式,也可应用第2章定义对式(5.100)进行修正,将3阶分母改写为低频极点与2阶多项式的乘积形式,具体如下所示:

$$D(s) \approx \left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right) \quad (5.103)$$

根据定义可得：

$$\omega_p = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{RC_1 + \frac{L_2 + L_3}{R}} \quad (5.104)$$

$$Q = \frac{b_1 b_3 \sqrt{\frac{b_1}{b_3}}}{b_1 b_2 - b_3} = \frac{(L_2^2 L_3 + L_2 L_3^2 + C_1 L_2 L_3 R^2) \sqrt{\frac{R^2 C_1 + L_2 + L_3}{C_1 L_2 L_3}}}{2(L_2^2 R + L_2 L_3 R + C_1 L_2 R^2) + L_3^2 R + R^3 C_1 L_3} \quad (5.105)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 R^2 + L_2 + L_3}{C_1 L_2 L_3}} \quad (5.106)$$

则可将传递函数重新定义如下：

$$H(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{\omega_z}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)} \quad (5.107)$$

其中

$$\omega_z = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}} \quad (5.108)$$

对分母表达式提取公因式 $(s/\omega_0)^2$ 并将传递函数重新排列, 所得表达式形式略有变化, 如下所示：

$$H(s) \approx \left(\frac{\omega_0}{\omega_z}\right)^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right) \left(1 + \frac{\omega_0}{sQ} + \left(\frac{\omega_0}{s}\right)^2\right)} \quad (5.109)$$

为了将上述计算结果与参考表达式进行对比, 需要从图 5.24 中提取原始表达式。如果将阻抗分压器应用于戴维南定理之后, 可得传递函数表达式为：

$$H_{\text{ref}}(s) = \frac{sL_2}{sL_2 + R_1 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{R_2}{(sL_2) \parallel \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) + sL_3 + R_2} \quad (5.110)$$

当 $R_1 = R_2 = R$ 时式(5.110)并未真正改变, 如下所示：

$$H_{\text{ref}}(s) = \frac{sL_2}{sL_2 + R + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{R}{(sL_2) \parallel \left(R + \frac{1}{sC_1}\right) + sL_3 + R} \quad (5.111)$$

接下来对上述所有表达式的动态响应进行对比。图 5.27 为所有方程计算结果和图形曲线, 图 5.28 为 SPICE 仿真波形。

通过 Mathcad 计算和 SPICE 仿真可得, 尽管传递函数表达式求解方法和步骤不同, 并且最终表达式形式也可能不同, 但是输出响应一致。应当注意, 因为主导因式与谐振峰值不相符, 所以表达式(5.109)与期望格式并不完全一致。如果能够将该表达式以更加完美的格式进行描述将求之不得。

$$R_1 := 10\Omega \quad C_1 := 10\text{nF} \quad L_2 := 47\mu\text{H} \quad L_3 := 22\mu\text{H} \quad R_2 := 10\Omega \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y} \quad R_{\text{inf}} := 10^{23}\Omega \quad R := R_1$$

$$\tau_1 := R_1 \cdot C_1 = 0.1\mu\text{s} \quad \tau_2 := \frac{L_2}{R_2} = 4.7\mu\text{s} \quad \tau_3 := \frac{L_3}{R_2} = 2.2\mu\text{s}$$

$$H_{\text{ref}}(s) := \frac{s \cdot L_2}{s \cdot L_2 + R_1 + \frac{1}{s \cdot C_1}} \cdot \frac{R_2}{(s \cdot L_2) \parallel \left(R_1 + \frac{1}{s \cdot C_1}\right) + s \cdot L_3 + R_2}$$

$$\tau_{12} := \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} = 9.4\mu\text{s} \quad \tau_{13} := \frac{L_3}{R_2} = 2.2\mu\text{s} \quad \tau_{23} := \frac{L_3}{R_{\text{inf}}} = 0\text{s}$$

$$\tau_{123} := \frac{L_3}{R_1 + R_2} = 1.1\mu\text{s} \quad b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 7\mu\text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 1.16\mu\text{s}^2 \quad b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 1.034\mu\text{s}^3$$

$$D_1(s) := 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3 \quad H_0 := 0 \quad H_1 := 0 \quad H_2 := 0$$

$$H_3 := 0 \quad H_{13} := 0 \quad H_{12} := 0.5 \quad H_{23} := 0 \quad H_{123} := 0$$

$$a_1 := \tau_1 \cdot H_1 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3 = 0\mu\text{s}$$

$$a_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot H_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23} = 0.47\mu\text{s}^2$$

$$a_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot H_{123} = 0\mu\text{s}^3 \quad N_1(s) := H_0 + (s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + s^3 \cdot a_3)$$

$$H_{10}(s) := \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$H_{20}(s) := \frac{s^2 \cdot}{1 + s \cdot \left(R_1 \cdot C_1 + \frac{L_2 + L_3}{R_2}\right) + s^2 \cdot (2 \cdot L_2 \cdot C_1 + L_3 \cdot C_1) +}$$

$$\rightarrow \frac{L_2 \cdot C_1}{s^3 \cdot \frac{L_2 \cdot L_3 \cdot C_1}{R_2}}$$

$$H_{30}(s) := \frac{L_2}{2 \cdot L_2 + L_3} \cdot$$

$$\left[\frac{1}{s^2 \cdot C_1 \cdot (2 \cdot L_2 + L_3)} + \frac{L_2 + L_3 + C_1 \cdot R_1 \cdot R_2}{s \cdot C_1 \cdot R_2 \cdot (2 \cdot L_2 + L_3)} + 1 + \frac{s \cdot L_2 \cdot L_3}{R_2 \cdot (2 \cdot L_2 + L_3)} \right]$$

$$\omega_p := \frac{1}{b_1} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 22.736\text{kHz} \quad Q := \frac{b_1 \cdot b_3 \cdot \sqrt{\frac{b_1}{b_3}}}{b_1 \cdot b_2 - b_3} = 2.658$$

$$\frac{(L_2^2 \cdot L_3 + L_2 \cdot L_3^2 + C_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot R^2) \cdot \sqrt{\frac{C_1 \cdot R^2 + L_2 + L_3}{C_1 \cdot L_2 \cdot L_3}}}{2 \cdot L_2^2 \cdot R + 2 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot R + 2 \cdot C_1 \cdot L_2 \cdot R^3 + L_3^2 \cdot R + C_1 \cdot L_3 \cdot R^3} = 2.658$$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} \quad f_0 := \frac{\omega_0}{2\pi} = 414.103\text{kHz}$$

$$\sqrt{\frac{C_1 \cdot R^2 + L_2 + L_3}{C_1 \cdot L_2 \cdot L_3}} \cdot \frac{1}{2\pi} = 414.103\text{kHz}$$

$$\omega_z := \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C_1}} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 232.151\text{kHz}$$

$$H_{33}(s) := \left(\frac{\omega_0}{\omega_z}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right) \cdot \left[1 + \frac{\omega_0}{s \cdot Q} + \left(\frac{\omega_0}{s}\right)^2\right]}$$

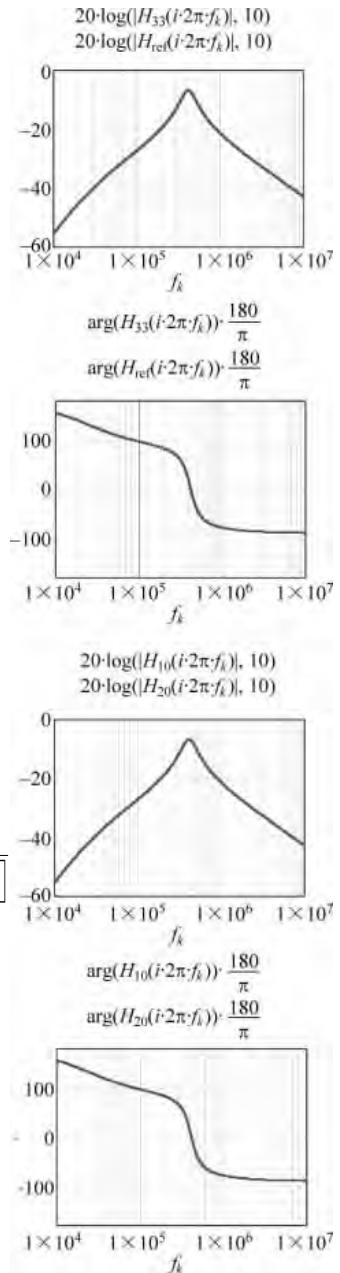


图 5.27 利用 Mathcad 证明通过不同方法求得的传递函数输出响应一致

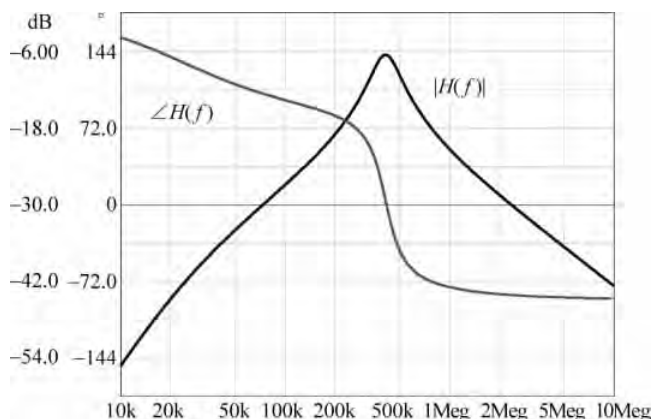


图 5.28 SPICE 仿真波形与 Mathcad 曲线完全一致

5.2 高阶传递函数实例

5.2.1 实例 1——3 阶电路

如图 5.29 所示,实例 1 为第 2 章中所涉及电路,用于讲解如何通过观测法求得电路零点。初看电路非常复杂,但可以通过十分简单的方法快速求得其传递函数。

与前面章节分析步骤一致,首先求解固有时间常数,所有与其相关的分解电路全部整理在图 5.30 中。首先从图 5.30 左侧电路开始分析,如图 5.30(a)所示,直流增益由简单电阻分压器构成—— r_L 和 R_3 并联,然后再与 R_1 和 R_2 相串联,所以直流增益 H_0 的表达式为:

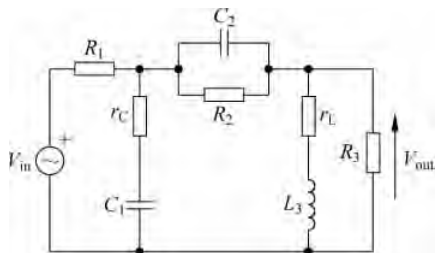


图 5.29 包含两个电容和一个电感的 3 阶电路

$$H_0 = \frac{r_L \parallel R_3}{r_L \parallel R_3 + R_1 + R_2} \quad (5.112)$$

由图 5.30(b)、(c)、(d)分别求得时间常数 τ_1 、 τ_2 和 τ_3 为:

$$\tau_1 = C_1 [r_C + (r_L \parallel R_3 + R_2) \parallel R_1] \quad (5.113)$$

$$\tau_2 = C_2 [R_2 \parallel (R_1 + r_L \parallel R_3)] \quad (5.114)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel (R_2 + R_1)} \quad (5.115)$$

将上述时间常数相加求得系数 b_1 为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = C_1 \{r_C + [(r_L \parallel R_3) + R_2] \parallel R_1\} + C_2 [R_2 \parallel (R_1 + r_L \parallel R_3)] + \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel (R_2 + R_1)} \quad (5.116)$$

在图 5.30(e)中,电容 C_1 短路,通过 C_2 两端求解时间常数 τ_2^1 :

$$\tau_2^1 = C_2 [R_2 \parallel (R_1 \parallel r_C + r_L \parallel R_3)] \quad (5.117)$$

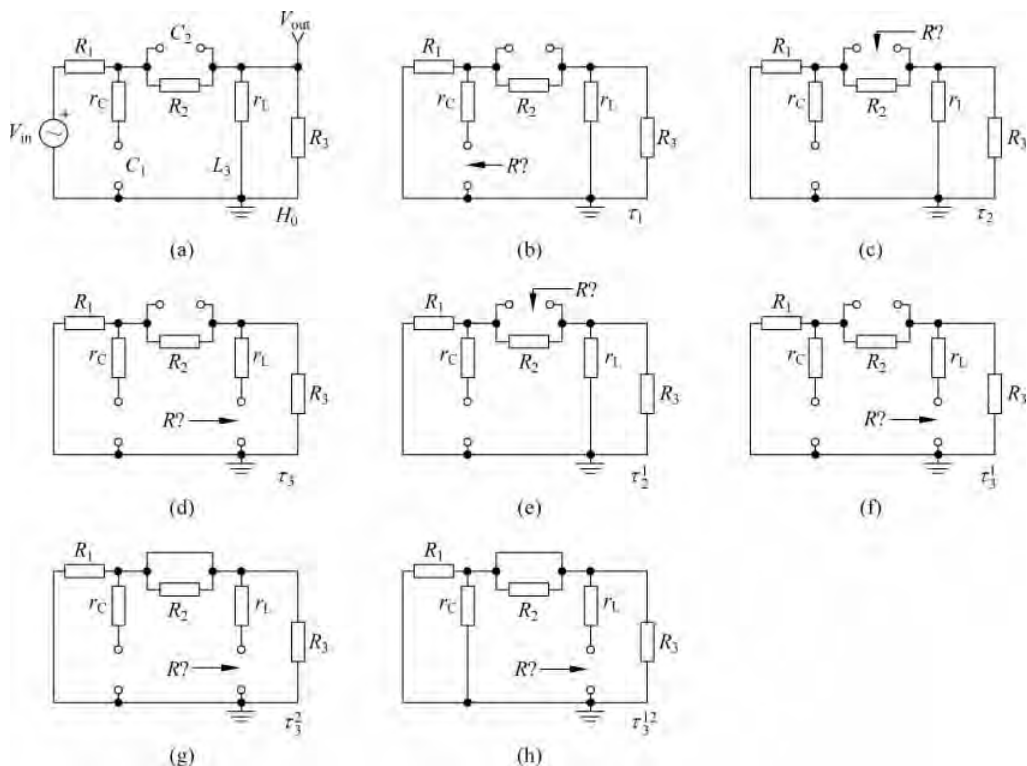


图 5.30 利用分解电路有助于确定所有固有时间常数(关闭激励源时),并能轻易发现并纠正错误(如果有错误)

在图 5.30(f)中,电容 C_1 仍然短路,通过 L_3 两端求解时间常数 τ_3^1 :

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel (R_2 + R_1 \parallel r_C)} \quad (5.118)$$

最后由图 5.30(g)求得系数 b_2 的最后一项,即:

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel R_1} \quad (5.119)$$

将上述时间常数相加即得 b_2 项,具体表达式为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 \\ &= C_1 \{ r_C + [(r_L \parallel R_3) + R_2] \parallel R_1 \} C_2 \{ R_2 \parallel [(R_1 \parallel r_C) + (r_L \parallel R_3)] \} + \\ &\quad C_1 \{ r_C + [(r_L \parallel R_3) + R_2] \parallel R_1 \} \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel (R_2 + R_1 \parallel r_C)} + \\ &\quad C_2 [R_2 \parallel (R_1 + r_L \parallel R_3)] \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel R_1} \end{aligned} \quad (5.120)$$

通过分析图 5.30(h)求得系数 b_3 的最后一项,即:

$$\tau_3^{12} = \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel r_C \parallel R_1} \quad (5.121)$$

所以系数 b_3 的表达式为:

$$\begin{aligned} b_3 &= \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \\ &= C_1 \{ r_C + [(r_L \parallel R_3) + R_2] \parallel R_1 \} C_2 \{ R_2 \parallel [(R_1 \parallel r_C) + (r_L \parallel R_3)] \} \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel r_C \parallel R_1} \end{aligned} \quad (5.122)$$

最后将式(5.116)、式(5.120)和式(5.122)进行组合,求得分母 $D(s)$ 表达式为:

$$\begin{aligned}
 D(s) &= 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 \\
 &= 1 + s \left(C_1 \{r_c + [(r_L \parallel R_3) + R_2] \parallel R_1\} + C_2 [R_2 \parallel (R_1 + r_L \parallel R_3)] + \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel (R_2 + R_1)} \right) + \\
 &\quad s^2 \left[C_1 \{r_c + [(r_L \parallel R_3) + R_2] \parallel R_1\} C_2 \{R_2 \parallel [(R_1 \parallel r_c) + (r_L \parallel R_3)]\} + \right. \\
 &\quad \left. C_1 \{r_c + [(r_L \parallel R_3) + R_2] \parallel R_1\} \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel (R_2 + R_1 \parallel r_c)} + \right. \\
 &\quad \left. C_2 [R_2 \parallel (R_1 + r_L \parallel R_3)] \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel R_1} \right] + \\
 &\quad s^3 \left(C_1 \{r_c + [(r_L \parallel R_3) + R_2] \parallel R_1\} C_2 \{R_2 \parallel [(R_1 \parallel r_c) + (r_L \parallel R_3)]\} \frac{L_3}{r_L + R_3 \parallel r_c \parallel R_1} \right)
 \end{aligned} \quad (5.123)$$

确定电路零点值可选择如下方法: ①利用 NDI 技术; ②求解固有时间常数的通用方法; ③直接观察法。毋庸置疑,只要允许,直接观察法为最佳选择而且倍受青睐。因为观察法能够以最快捷的速度确定零点位置,并且所得分子表达式始终最简。那么电路中总共包含多少零点呢? 当图 5.29 中输出响应 V_{out} 存在时,总共可以将多少储能元件同时设置于高频状态? 当 C_1 和 C_2 短路而 L_3 物理开路时,没有任何元件阻止输入信号传播至输出端: 所以该电路中含有 3 个零点(3 阶分子)。图 5.31 对零点时的阻抗值进行具体展示。当 Z_1 和 Z_3 变换为短路时电路含有 2 个零点。当 $s=s_z$ 时 Z_2 开路,此时确定第 3 零点值。零点具体计算公式分别如下所示:

$$Z_1(s) = r_c + \frac{1}{sC_1} = \frac{1 + sr_c C_1}{sC_1} \quad (5.124)$$

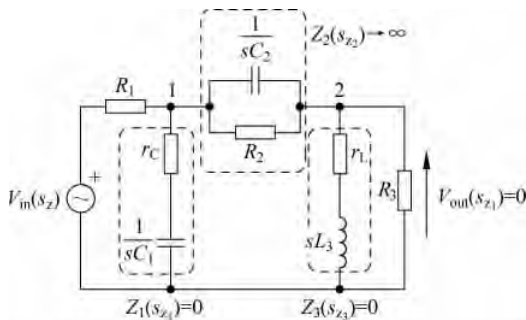


图 5.31 利用观察法确定电路零点时,首先检查变换电路中储能元件如何组合才能阻止输入信号产生输出响应: Z_2 开路、 Z_1 和 Z_3 短路

当 $1 + sr_c C_1 = 0$ 时 $Z_1(s_{z1}) = 0$, 即零点角频率为:

$$s_{z1} = -\frac{1}{r_c C_1} \quad \text{或者} \quad \omega_{z1} = \frac{1}{r_c C_1} \quad (5.125)$$

C_2 和 R_2 并联,然后将节点 1 和节点 2 相连接。为阻止信号传播,当阻抗 $s=s_{z2}$ 时 Z_2 阻抗变为无穷大。 C_2 和 R_2 并联阻抗定义为:

$$Z_2(s) = R_2 \parallel \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2}{1 + sR_2 C_2} \quad (5.126)$$

当分母为零时可求得另一零点值,此时 Z_2 阻抗变为无穷大:

$$1 + sR_2 C_2 = 0 \quad (5.127)$$

由式(5.127)可得

$$s_{z2} = -\frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{或者} \quad \omega_{z2} = \frac{1}{R_2 C_2} \quad (5.128)$$

电感 L_3 与其 ESR 等效电阻 r_L 相串联,然后在节点 2 与负载并联。那么,当 $s=s_{z3}$ 时电感和电阻串联组合能够短路吗?

通过观察可得:

$$Z_3(s) = sL_3 + r_L = 0 \quad (5.129)$$

对式(5.129)简单求解得:

$$s_{z3} = -\frac{r_L}{L_3} \quad (5.130)$$

$$\omega_{z3} = \frac{r_L}{L_3} \quad (5.131)$$

由式(5.125)、式(5.131)和式(5.130)可立即求得分母多项式为:

$$\begin{aligned} N(s) &= (1 + sr_c C_1)(1 + sR_2 C_2) \left(1 + s \frac{L_3}{r_L}\right) \\ &= \left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z3}}\right) \end{aligned} \quad (5.132)$$

将表达式(5.132)除以式(5.123)求得最终传递函数 H 。对所得传递函数 H 进行测试之前,首先需要建立原始传输函数。利用戴维南定理将电路图 5.29 转换为图 5.32 所示电路。

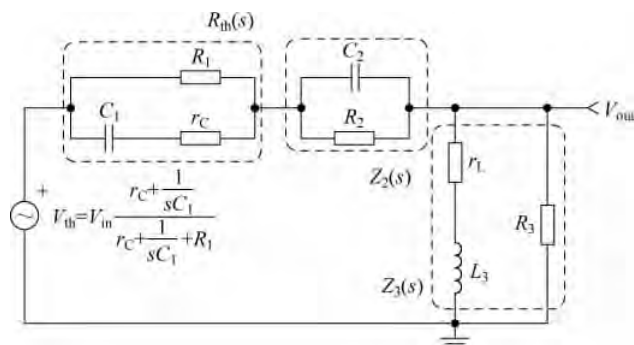


图 5.32 利用戴维南定理所得传递函数表达式精准但非常复杂

由图 5.32 可求得原始传递函数 H 表达式为:

$$\begin{aligned} H_{\text{ref}}(s) &= \frac{r_c + \frac{1}{sC_1}}{r_c + \frac{1}{sC_1} + R_1} \cdot \frac{Z_3(s)}{R_{\text{th}}(s) + Z_2(s) + Z_3(s)} = \frac{1 + sr_c C_1}{1 + sC_1(r_c + R_1)} \cdot \\ &\quad \frac{Z_3(s)}{R_{\text{th}}(s) + Z_2(s) + Z_3(s)} \end{aligned} \quad (5.133)$$

其中

$$R_{\text{th}}(s) = R_1 \parallel \left(r_c + \frac{1}{sC_1}\right) \quad (5.134)$$

$$Z_2(s) = \frac{1}{sC_2} \parallel R_2 \quad (5.135)$$

$$Z_3(s) = (r_L + sL_3) \parallel R_3 \quad (5.136)$$

利用上述计算结果建立 Mathcad 工作表,并将各种传递函数动态响应进行对比,计算结果如图 5.33 所示,通过输出曲线证明计算方法的正确性。除此之外,Mathcad 输出曲线与 SPICE 仿真波形完美匹配。应当注意,传递函数 H_1 与表达式(5.133)得到的原始响应之间存在明显分歧。经检查发现 H_0 和 τ_1 中存在错误,并立即对其进行纠正,之后所得输出响应完全一致。图 5.33 将时间常数计算分离,该格式有助于后期计算结果校正,因此必须鼓励读者广泛采用。上述计算过程中已经包含近似传递函数 H_2 ——分母表达式由极点与 2 阶多项式乘积构成。两种方法求得的传递函数频率特性曲线整体形状非常一致,仅在峰值附近存在微小偏差。

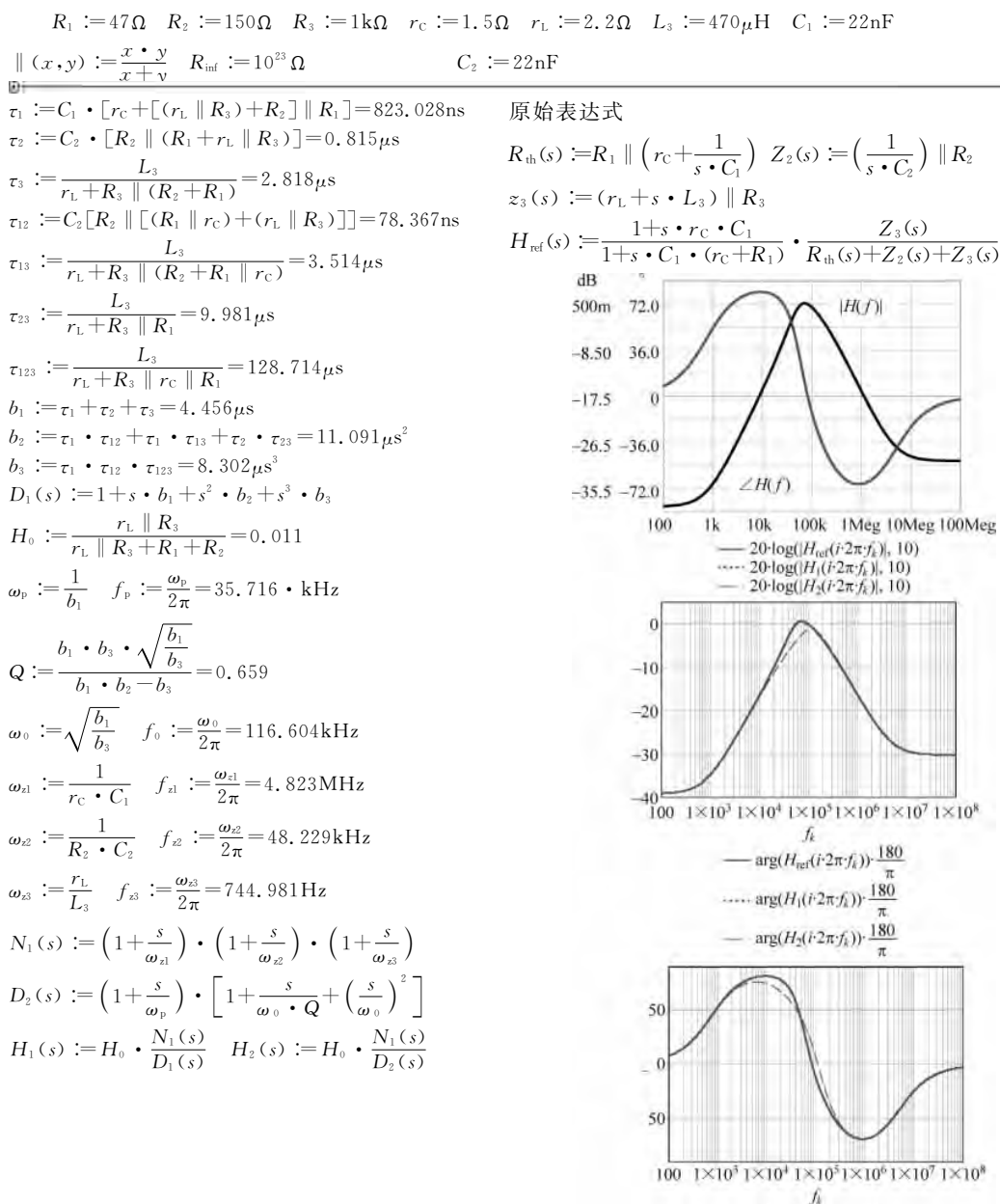


图 5.33 原始表达式与低阶表达式完美匹配。Mathcad 动态响应曲线与 SPICE 仿真波形一致。应当注意,在峰值处近似响应 H_2 与准确响应存在些许偏离

5.2.2 实例 2——3 阶有源陷波器

3 阶有源陷波器电路如图 5.34 所示,该电路不同于 C_3 — R_3 节点接地的经典无源陷波电路。此时输出电压 V_{out} 实际上已经对上述连接节点进行偏置,并协助构建出非常陡峭的陷波频带。根据所需陷波宽度在 0(接地,类似于经典无源陷波器)和小于 1 之间进行选择系数 k 。例如,当 k 值接近 1 时陷波器动态响应非常尖锐,完全抑制中心频率,而不影响谐振点前后频率。随着 k 值减小,漏斗带变宽并影响谐振点周围频率。首先由图 5.35 和图 5.36 计算电路固有时间常数。

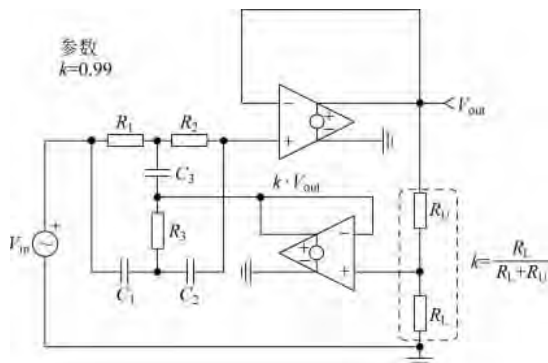


图 5.34 有源双 T 滤波器能够以理论无限大 Q 值对任何频率进行抑制

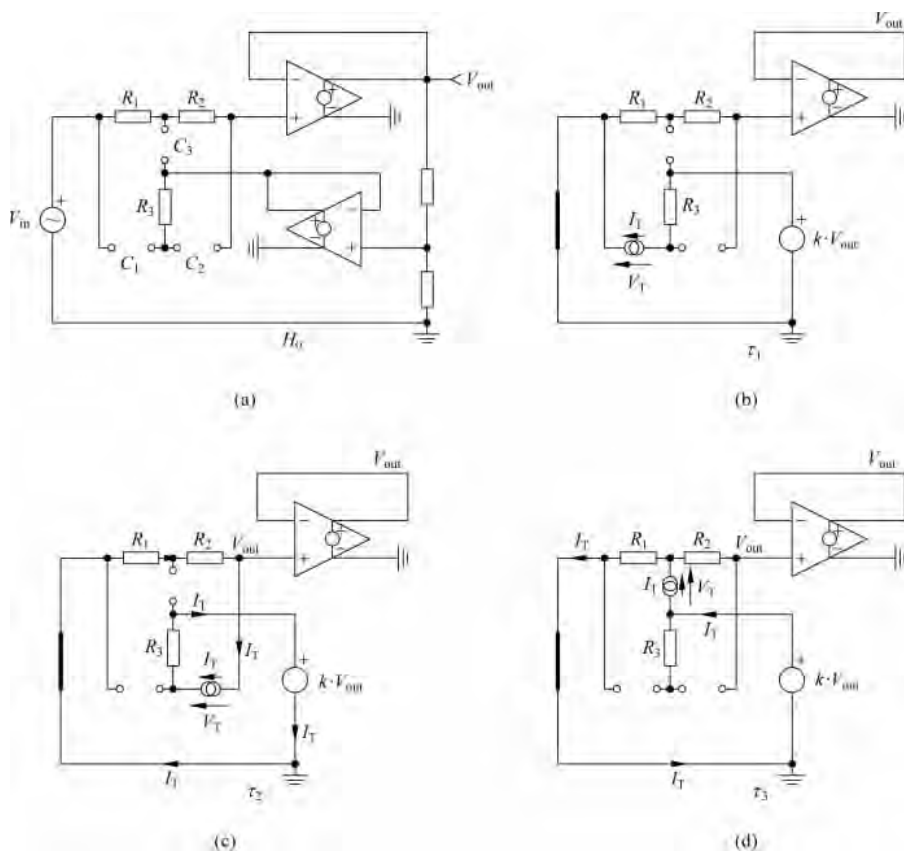


图 5.35 当激励源设置为 0 时计算第 1 时间常数

在图 5.35(a)中,因为输入信号只通过电阻 R_1 和 R_2 与运放连接,所以可立即求得准静态增益等于 1,即:

$$H_0 = 1 \quad (5.137)$$

在图 5.35(b)中,测试信号源左端接地,右端通过电阻 R_3 和电压源 kV_{out} 返回地。此时输出电压 V_{out} 为零,因此电容 C_1 两端电阻为 R_3 ,所以时间常数为:

$$\tau_1 = C_1 R_3 \quad (5.138)$$

利用 KCL 和 KVL 对图 5.35(c)进行分析计算,求得测试电流源两端电压 V_T 为:

$$V_T = I_T R_3 + kV_{\text{out}} - V_{\text{out}} = I_T R_3 + V_{\text{out}}(k - 1) \quad (5.139)$$

通过观察电路可得,输出电压 V_{out} 即为电阻 R_1 和 R_2 电压之和,但方向与电流源 I_T 相反,所以符号为负,即:

$$V_{\text{out}} = -I_T(R_1 + R_2) \quad (5.140)$$

将式(5.140)代入式(5.139)整理得:

$$V_T = I_T R_3 - I_T(R_1 + R_2)(k - 1) = I_T[R_3 + (1 - k)(R_1 + R_2)] \quad (5.141)$$

所以第 2 时间常数为:

$$\tau_2 = C_2[R_3 + (1 - k)(R_1 + R_2)] \quad (5.142)$$

利用图 5.35(d)可求得时间常数 τ_3 。此时电流源两端电压为:

$$V_T = I_T R_1 - kV_{\text{out}} \quad (5.143)$$

当电容 C_2 断开时无电流流过该支路,所以电阻 R_2 两端电压为零。因此电阻 R_2 右端点电压等于 V_{out} ,所以:

$$V_{\text{out}} = I_T R_1 \quad (5.144)$$

将式(5.144)代入式(5.143)可得:

$$V_T = I_T R_1 - kI_T R_1 = I_T[R_1(1 - k)] \quad (5.145)$$

于是求得第 3 时间常数为:

$$\tau_3 = C_3 R_1(1 - k) \quad (5.146)$$

利用上述时间常数整理得系数 b_1 为:

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ &= R_3 C_1 + C_2[R_3 + (1 - k)(R_1 + R_2)] + C_3 R_1(1 - k) \end{aligned} \quad (5.147)$$

实际设计陷波器时电阻 R_1 和 R_2 阻值相等且均为 R ,而 R_3 的阻值设定为 $\frac{R}{2}$,即:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R \\ R_3 &= \frac{R}{2} \end{aligned} \quad (5.148)$$

并且

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = C \\ C_3 &= 2C \end{aligned} \quad (5.149)$$

将上述参数值代入式(5.147)可得:

$$b_1 = RC(5 - 4k) \quad (5.150)$$

在图 5.36(a)中将 C_1 短路然后计算电容 C_2 端口的电阻值。因为电流源 I_T 通过电阻 R_1 和 R_2 返回,所以:

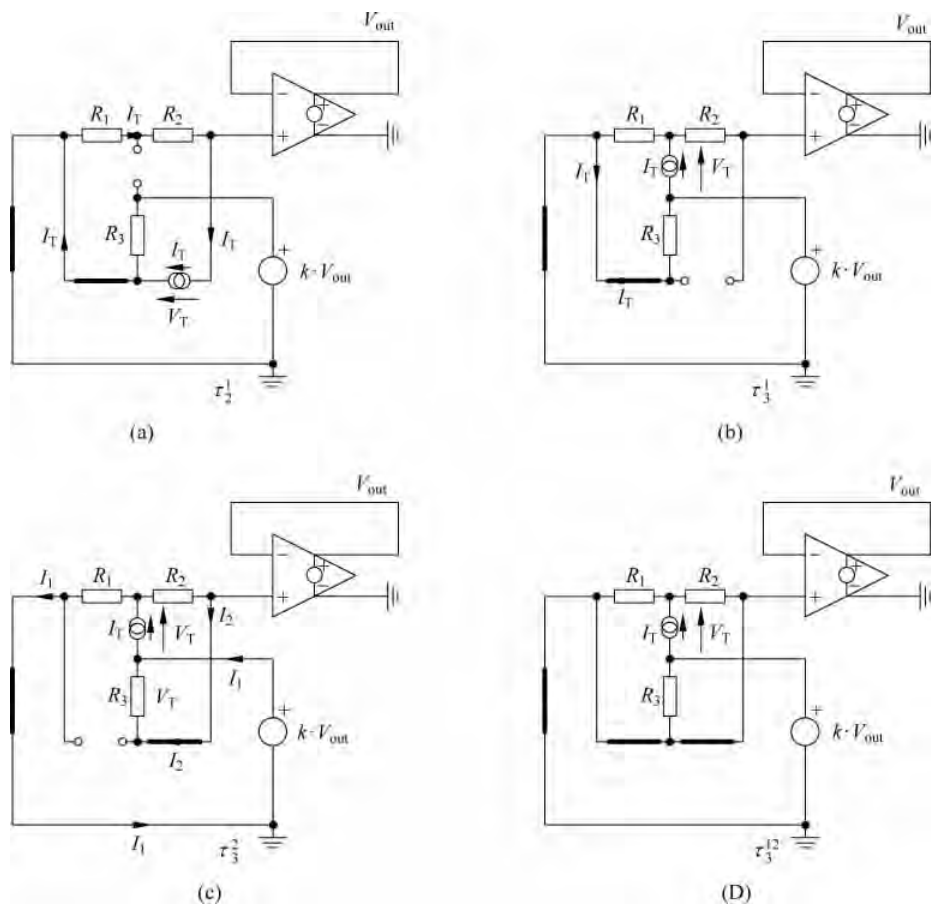


图 5.36 通过计算所选电抗的驱动电阻求解高阶时间常数

$$V_{\text{out}} = -I_T(R_1 + R_2) \quad (5.151)$$

由于电流源左端接地, 所以其两端电压为 $-V_{\text{out}}$, 因此:

$$V_T = I_T(R_1 + R_2) \quad (5.152)$$

所以时间常数为:

$$\tau_2^1 = C_2(R_1 + R_2) \quad (5.153)$$

在图 5.36(b) 中 C_1 仍然短路, 但此时计算电容 C_3 端口的电阻值。因为 C_2 开路, 无电流流经电阻 R_2 , 所以输出电压计算公式为:

$$V_{\text{out}} = I_T R_1 \quad (5.154)$$

于是电流源低端的偏置电压为:

$$kV_{\text{out}} = kI_T R_1 \quad (5.155)$$

整理得电流源两端电压为:

$$V_T = V_{\text{out}} - kV_{\text{out}} = I_T R_1 - kI_T R_1 = I_T R_1(1 - k) \quad (5.156)$$

于是第 2 时间常数 τ_3^1 为:

$$\tau_3^1 = C_3 R_1(1 - k) \quad (5.157)$$

如果按照图 5.36(c) 计算最后一个时间常数 τ_3^2 将会非常复杂。此时电流源 I_T 分解为

I_1 和 I_2 , 即:

$$I_T = I_1 + I_2 \quad (5.158)$$

因为电流 I_2 流经电阻 R_3 , 所以:

$$I_2 = \frac{V_{\text{out}} - kV_{\text{out}}}{R_3} = V_{\text{out}} \frac{1-k}{R_3} \quad (5.159)$$

电流源上端点电压为:

$$I_1 R_1 = V_{\text{out}} + R_2 I_2 \quad (5.160)$$

将式(5.159)代入式(5.160)解得 I_1 为:

$$I_1 = \frac{V_{\text{out}} \left(1 + R_2 \frac{1-k}{R_3} \right)}{R_1} \quad (5.161)$$

由式(5.158)可得:

$$\begin{aligned} I_T &= V_{\text{out}} \frac{1-k}{R_3} + \frac{V_{\text{out}} \left(1 + R_2 \frac{1-k}{R_3} \right)}{R_1} \\ &= \frac{V_{\text{out}} [R_1 + R_2 + R_3 - k(R_1 + R_2)]}{R_1 R_3} \end{aligned} \quad (5.162)$$

因此

$$V_{\text{out}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3 - k(R_1 + R_2)} I_T \quad (5.163)$$

于是电流源电压 V_T 定义如下:

$$V_T = I_1 R_1 - kV_{\text{out}} \quad (5.164)$$

首先将式(5.161)代入式(5.164), 然后由式(5.163)代替 V_{out} 整理得:

$$V_T = R_1 \frac{V_{\text{out}} \left(1 + R_2 \frac{1-k}{R_3} \right)}{R_1} - kV_{\text{out}} \quad (5.165)$$

$$V_T = I_T \frac{R_1 (1-k)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 - k(R_1 + R_2)} \quad (5.166)$$

因此时间常数 τ_3^2 的计算公式为:

$$\tau_3^2 = C_3 \left[\frac{R_1 (1-k)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 - k(R_1 + R_2)} \right] \quad (5.167)$$

将式(5.153)、式(5.157)和式(5.167)相加得到系数 b_2 的表达式为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 \\ &= C_1 R_3 C_2 (R_1 + R_2) + C_1 R_3 C_3 R_1 (1-k) + \\ &\quad C_2 [R_3 + (1-k)(R_1 + R_2)] C_3 \left[\frac{R_1 (1-k)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 - k(R_1 + R_2)} \right] \end{aligned} \quad (5.168)$$

当式(5.148)和式(5.149)同时满足时表达式简化为:

$$b_2 = (RC)^2 (5 - 4k) \quad (5.169)$$

由图 5.36(d)求解最后系数 b_3 。此时输出电压为 0V, 表明电流源低端同样接地。当电流源 I_T 分解后分别通过电阻 R_1 和 R_2 时求得时间常数为:

$$\tau_3^{12} = C_3 (R_1 \parallel R_2) \quad (5.170)$$

再次利用式(5.138)和式(5.153)可得:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} = C_1 R_3 C_2 (R_1 + R_2) C_3 (R_1 \parallel R_2) \quad (5.171)$$

当式(5.148)和式(5.149)同时满足时上述表达式简化为:

$$b_3 = (RC)^3 \quad (5.172)$$

此时分母 $D(s)$ 表达式为:

$$D(s) = 1 + sRC(5 - 4k) + s^2 R^2 C^2 (5 - 4k) + s^3 R^3 C^3 \quad (5.173)$$

可以使用 NDI 技术或 3 阶系统广义传递函数表达式计算分子表达式,整理得:

$$N(s) = H_0 + s(\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3) + s^2(\tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23}) + s^3(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} H^{123}) \quad (5.174)$$

直流增益 H_0 已经确定并且值为 1。所有其余传递函数均由图 5.37 中分解电路进行描述。在图 5.37(a)中电容 C_1 短路,其他元件均保持在直流状态(所有电容开路)。此时电压源 kV_{out} 对电路不起作用,所以增益为 1,即:

$$H^1 = 1 \quad (5.175)$$

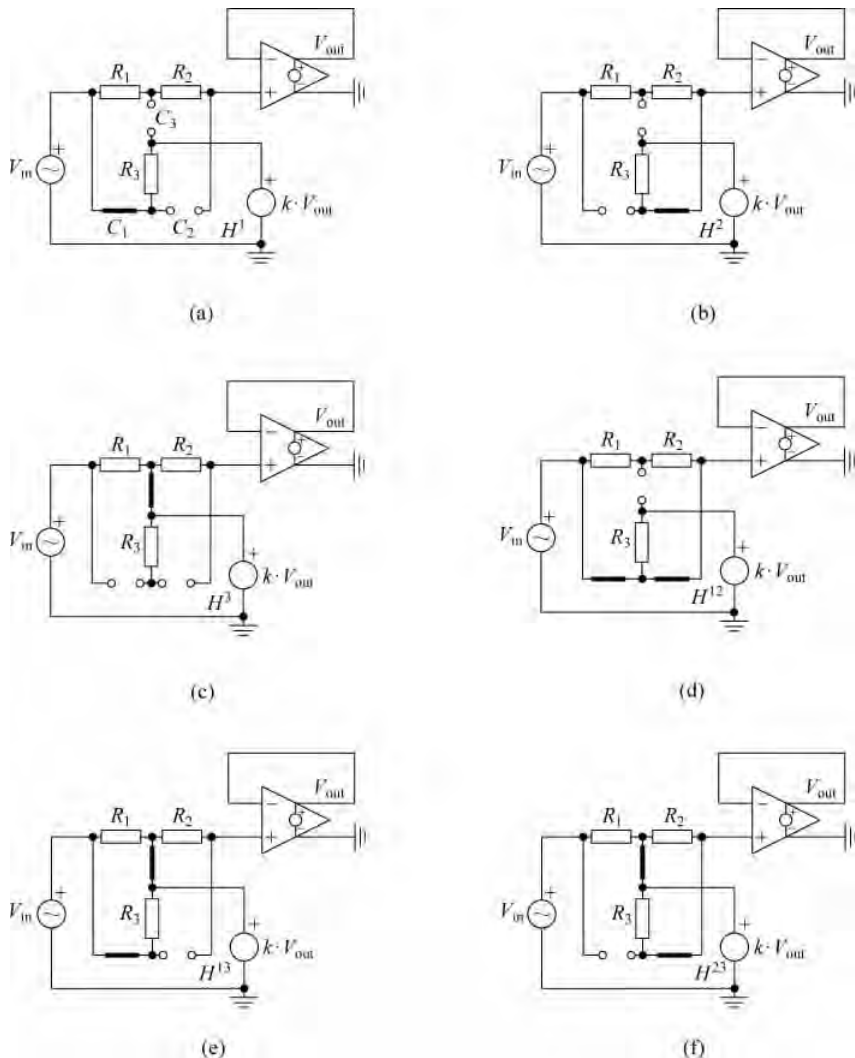


图 5.37 当储能元件设置为高频或直流状态时可快速求得增益值

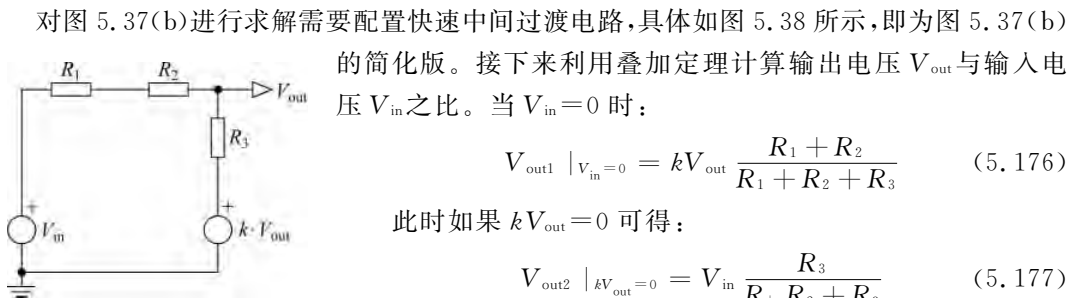


图 5.38 利用中间过渡电路可快速求得 C_2 短路时的电路增益值

对图 5.37(b) 进行求解需要配置快速中间过渡电路, 具体如图 5.38 所示, 即为图 5.37(b) 的简化版。接下来利用叠加定理计算输出电压 V_{out} 与输入电压 V_{in} 之比。当 $V_{in}=0$ 时:

$$V_{out1} |_{V_{in}=0} = kV_{out} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (5.176)$$

此时如果 $kV_{out}=0$ 可得:

$$V_{out2} |_{kV_{out}=0} = V_{in} \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (5.177)$$

输出电压即为式(5.176)和式(5.177)之和:

$$V_{out} = kV_{out} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + V_{in} \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (5.178)$$

将式(5.178)重新整理并分解因式得:

$$H^2 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{1}{1 - k \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3}} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3 - k(R_1 + R_2)} \quad (5.179)$$

由图 5.37(c) 计算 H^3 。通过对图 5.37(c) 分析可得: 电阻 R_2 中无电流流过, 但其右端电压为 V_{out} 、左端电压为 kV_{out} , 只有当 $V_{out}=0$ 时上述条件才能满足, 因此:

$$H^3 = 0 \quad (5.180)$$

现在将分母表达式的固有时间常数与上述增益相组合构成系数 a_1 。因为 $H^3=0$, 所以系数 a_1 仅由两项构成:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3 \\ &= C_1 R_3 + C_2 [R_3 + (1-k)(R_1 + R_2)] \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3 - k(R_1 + R_2)} + C_3 R_1 (1-k) \cdot 0 \\ &= R_3 (C_1 + C_2) \end{aligned} \quad (5.181)$$

如果将 R_1, R_2, R_3 和 C_1, C_2 由下列参数代替:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R \\ R_3 &= \frac{R}{2} \\ C_1 &= C_2 = C \\ C_3 &= 2C \end{aligned} \quad (5.182)$$

则式(5.181)简化为:

$$a_1 = RC \quad (5.183)$$

当由图 5.37(d) 计算 H^{12} 时电容 C_1 和 C_2 将电阻 R_1 和 R_2 短路, 求得增益为:

$$H^{12} = 1 \quad (5.184)$$

当由图 5.37(e) 计算 H^{13} 时电路工作状态与计算 H^3 相同, 此时电阻有偏置电压但无电流通过, 因此增益为:

$$H^{13} = 0 \quad (5.185)$$

在图 5.37(f) 中, 尽管电阻 R_2 左端偏置电压为 kV_{out} 、右端偏置电压为 V_{out} , 但无电流通过 R_2 和 R_3 , 所以增益 H^{23} 同样为 0, 即:

$$H^{23} = 0 \quad (5.186)$$

将分母表达式中的 2 阶时间常数组组合成第 2 项系数 a_2 , 因为 H^{13} 和 H^{23} 均为 0, 所以 a_2 表达式中仅包含一项, 即:

$$a_2 = \tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23} = C_1 R_3 C_2 (R_1 + R_2) \quad (5.187)$$

利用式(5.182)中的参数设置可将 a_2 表达式简化为:

$$a_2 = R^2 C^2 \quad (5.188)$$

最后, 当全部电容均短路时计算电路增益, 具体电路如图 5.39 所示。

当电阻 R_1 和 R_2 短路时该电路网络增益为 1, 即:

$$H^{123} = 1 \quad (5.189)$$

所以将最后一项 a_3 定义如下:

$$\begin{aligned} a_3 &= \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} H^{123} \\ &= C_1 R_3 C_2 (R_1 + R_3) C_3 (R_1 \parallel R_2) \end{aligned} \quad (5.190)$$

利用式(5.182)中的参数设置可将 a_3 表达式简化为:

$$a_3 = R^3 C^3 \quad (5.191)$$

通过上述计算可得分子 $N(s)$ 表达式为:

$$N(s) = 1 + sRC + s^2 R^2 C^2 + s^3 R^3 C^3 \quad (5.192)$$

结合分母 $D(s)$ 表达式(5.173)可得电路传递函数为:

$$H(s) = \frac{1 + sRC + s^2 R^2 C^2 + s^3 R^3 C^3}{1 + sRC(5 - 4k) + s^2 R^2 C^2(5 - 4k) + s^3 R^3 C^3} \quad (5.193)$$

那么, 能否将上述传递函数以更简单、更紧凑的形式重新排列呢? 首先对分子表达式进行因式分解:

$$N(s) = (1 + x_1 s)(1 + sy_1 + s^2 y_2) \quad (5.194)$$

将分子表达式展开得:

$$(1 + x_1 s)(1 + sy_1 + s^2 y_2) = 1 + s(x_1 + y_1) + s^2(x_1 y_1 + y_2) + s^3 x_1 y_2 \quad (5.195)$$

如果将式(5.195)与式(5.192)中各项进行匹配, 可得如下方程组:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = RC \\ x_1 y_1 + y_2 = R^2 C^2 \\ x_1 y_2 = R^3 C^3 \end{cases} \quad (5.196)$$

将分子表达式 $N(s)$ 分解因式如下:

$$N(s) = (1 + sRC)(1 + s^2 R^2 C^2) \quad (5.197)$$

如果:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (5.198)$$

则式(5.197)整理得:

$$N(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right) \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right) \quad (5.199)$$

因为表达式(5.199)中第 2 个多项式的 a_1 项为 0, 所以其 Q_N 值无穷大。

按照式(5.194)的相同方式对分母表达式进行因式分解。如果将式(5.195)与 $D(s)$ 分母表达式(5.173)中各项进行匹配, 可得如下方程组:

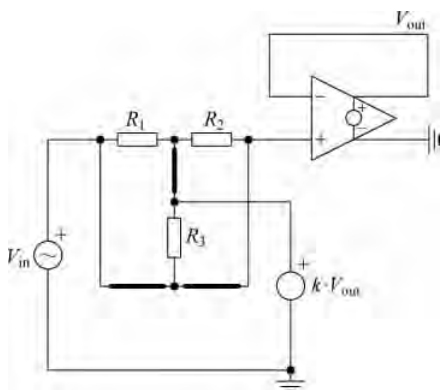


图 5.39 当所有电容全部设置于高频状态——短路时计算最后增益 H^{123}

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = RC(5 - 4k) \\ x_1 y_1 + y_2 = R^2 C^2 (5 - 4k) \\ x_1 y_2 = R^3 C^3 \end{cases} \quad (5.200)$$

求解上述 3 个未知数时,按照如下格式对分母表达式进行重新排列:

$$D(s) = (1 + sRC)(1 + 4sRC(1 - k) + s^2 R^2 C^2) \quad (5.201)$$

将式(5.198)代入式(5.201)整理得:

$$D(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right) \left[1 + 4 \frac{s}{\omega_0} (1 - k) + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right] \quad (5.202)$$

于是品质因数 Q 通过如下方程进行简单定义:

$$4 \frac{s}{\omega_0} (1 - k) = \frac{s}{\omega_0 Q} \quad (5.203)$$

解得:

$$Q = \frac{1}{4(1 - k)} \quad (5.204)$$

因为分子 $N(s)$ 和分母 $D(s)$ 表达式中的因式 $\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)$ 可以约分,所以传递函数表达式简化为:

$$H(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right) \left[1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right) \left[1 + 4 \frac{s}{\omega_0} (1 - k) + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right]} = \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}{1 + 4 \frac{s}{\omega_0} (1 - k) + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (5.205)$$

如果 $k=1$,则 Q 值接近无穷大,并且表达式(5.205)的值简化为 1:陷波功能消失。接下来利用计算机软件对传递函数的正确性进行检验。图 5.40 利用 Mathcad 数学软件对所有方程进行求解:左侧对应单独元件参数值、右侧采用式(5.182)规定参数值——计算结果完全相同。如果实际设计时需要对所有元件或者某些单独元件设置容差,则左侧方程式更加实用。设置时间常数使其陷波频率为 60Hz,当 k 值在 0.99 之间时,各种输出响应波形如图 5.41 所示。当 $k=0$ 时 C_3-R_3 连接点接地,此时陷波器变为无源电路。最后直接运行 SPICE 电路仿真而无须推导原始传递函数,将 $k=0.5$ 的仿真波形与 Mathcad 曲线进行对比——两者完全一致,具体如图 5.42 所示。

5.2.3 实例 3——4 阶 LC 无源滤波器

接下来推导图 5.43 所示电路的传递函数。该电路由两级 LC 网络级联构成, R_1 为负载电阻。因为电路网络中包含 4 个储能元件,所以为 4 阶系统。因为无论将 4 个储能元件任何一个设置为高频状态时输出响应均为零,所以电路网络中不包含零点:高频状态时电感 L_1 和 L_2 串联支路开路、 C_2 或 C_4 通过短路接地同样将输出置零。

尽管电路包含多个储能元件,但每个储能元件分析过程相同,所有步骤均收集整理在图 5.44 中。当电路直流工作时可直接求得直流增益为 1,即:

$$H_0 = 1 \quad (5.206)$$

当激励源关闭(V_m 由短路线代替)时由图 5.44(b)可求得时间常数为:

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad (5.207)$$

其他时间常数同样可以轻易求得。但是某些时间常数值为零,所以后续电路分析中可能产生不确定性:

$$\begin{aligned}
f_0 &:= 60\text{Hz} & m &:= 0.99 \\
R &:= 10\text{M}\Omega & C &:= \frac{1}{2\pi \cdot f_0 \cdot R} = 265.258238\text{pF} \\
C_2 &:= C & C_1 &:= C & C_3 &:= 2 \cdot C & R_1 &:= R & R_2 &:= R & R_3 &:= R \\
\tau_{1a} &:= \frac{C \cdot R}{2} = 1.326291\text{ms} \\
\tau_{2a} &:= C \cdot \left[\frac{R}{2} + 2R \cdot (1-m) \right] = 1.379343\text{ms} \\
\tau_{3a} &:= 2 \cdot C \cdot R \cdot (1-m) = 53.051648\mu\text{s} \\
\tau_{12a} &:= 2C \cdot R = 5.305165\text{ms} \\
\tau_{13a} &:= 2R \cdot C \cdot (1-m) = 53.051648\mu\text{s} \\
\tau_{23a} &:= 2 \cdot C \cdot \left[\frac{R \cdot (1-m) \cdot \left(R + \frac{R}{2} \right)}{2R + \frac{R}{2} - m \cdot 2R} \right] = 0.153034\text{ms} \\
\tau_{23aa} &:= \frac{6 \cdot C \cdot R \cdot (m-1)}{4 \cdot m - 5} = 0.153034\text{ms} \\
\tau_{123a} &:= C \cdot R = 2.652582\text{ms} \\
b_{1a} &:= \frac{C \cdot R}{2} + C \cdot \left[\frac{R}{2} + 2R \cdot (1-m) \right] + 2 \cdot C \cdot R \cdot (1-m) = 2.758686\text{ms} \\
b_{1aa} &:= R \cdot C \cdot (5-4m) = 2.758686 \cdot \text{ms} & b_{2aa} &:= (R \cdot C)^2 \cdot (5-4 \cdot m) = 7.317641 \times 10^{-6} \text{s}^2 \\
b_{3a} &:= \frac{C \cdot R}{2} \cdot (2C \cdot R) \cdot (C \cdot R) = 1.866408 \times 10^{-8} \text{s}^3 & b_{3aa} &:= (R \cdot C)^3 = 1.866408 \times 10^{-8} \text{s}^3 \\
H_s &:= \frac{1}{5-4 \cdot m} = 0.961538 \\
a_{1a} &:= \frac{C \cdot R}{2} + C \cdot \left[\frac{R}{2} + 2R \cdot (1-m) \right] \cdot \frac{1}{5-4 \cdot m} = 2.652582\text{ms} & a_{1aa} &:= R \cdot C = 2.652582\text{ms} \\
a_{2a} &:= \frac{C \cdot R}{2} \cdot (2C \cdot R) = 7.036193 \times 10^{-6} \text{s}^2 & a_{2aa} &:= (R \cdot C)^2 = 7.036193 \times 10^{-6} \text{s}^2 \\
a_{3a} &:= \frac{C \cdot R}{2} \cdot (2C \cdot R) \cdot (C \cdot R) = 1.866408 \times 10^{-8} \text{s}^3 & a_{3aa} &:= (R \cdot C)^3 = 1.866408 \times 10^{-8} \text{s}^3 \\
\omega_0 &:= \frac{1}{R \cdot C} & Q &:= \frac{1}{4(1-m)} = 25 \\
H_{20}(s) &:= \frac{1+s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot (R \cdot C)^2 + s^3 \cdot (R \cdot C)^3}{1+s \cdot R \cdot C \cdot (5-4m) + s^2 \cdot (R \cdot C)^2 \cdot (5-4m) + s^3 \cdot (R \cdot C)^3} & H_{30}(s) &:= \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2}{1 + \frac{s}{\omega_0} \cdot Q + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2} \\
\tau_{123} &:= C_3 \cdot (R_1 \parallel R_2) = 2.652582\text{ms} \\
b_1 &:= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2.758686\text{ms} \\
b_2 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 7.317641 \times 10^{-6} \text{s}^2 \\
b_3 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 1.866408 \times 10^{-8} \text{s}^3 \\
H_0 &:= 1 & H_1 &:= 1 & H_2 &:= \frac{R_1 + R_2 + R_3 - m \cdot (R_1 + R_2)}{R_3} = 0.961538 \\
H_3 &:= 0 & H_{12} &:= 1 & H_{13} &:= 0 & H_{23} &:= 0 & H_{123} &:= 1 \\
a_1 &:= \tau_1 \cdot H_1 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3 = 2.652582\text{ms} \\
a_2 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot H_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23} = 7.036193 \times 10^{-6} \text{s}^2 \\
a_3 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot H_{123} = 1.866408 \times 10^{-8} \text{s}^3 \\
D_1(s) &:= 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3 \\
N_1(s) &:= H_0 + a_1 \cdot s + s_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 & H_{10}(s) &:= \frac{N_1(s)}{D_1(s)}
\end{aligned}$$

图 5.40 Mathcad 程序中左侧对应电阻和电容单独元件参数值、右侧采用式(5.182)规定参数值

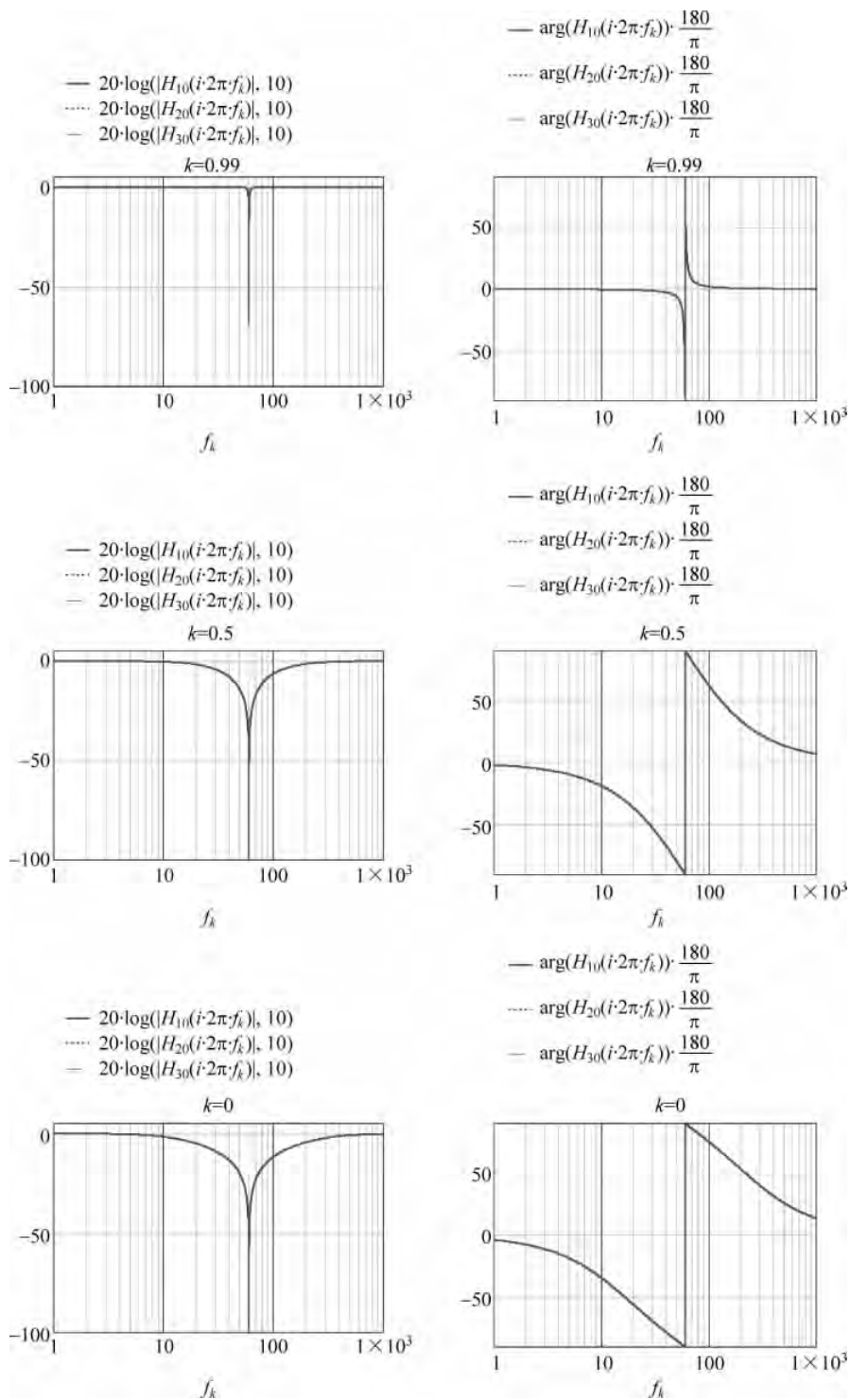


图 5.41 漏斗宽度随着 k 值在 $0 \sim 0.99$ 之间变化而变化

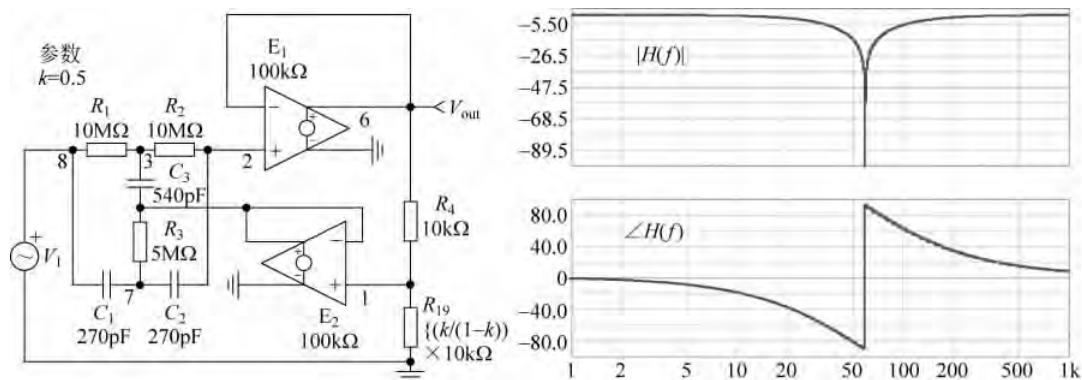


图 5.42 Mathcad 计算与 SPICE 仿真完美匹配

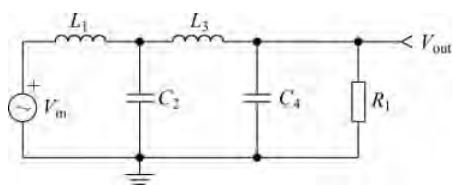


图 5.43 求解级联 LC 网络的传递函数

$$\tau_2 = C_2 \cdot 0 = 0 \quad (5.208)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.209)$$

于是

$$\tau_4 = C_4 \cdot 0 = 0 \quad (5.210)$$

分母系数 b_1 为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \frac{L_1 + L_3}{R_1} \quad (5.211)$$

由式(5.5)可得系数 b_2 中共包含 6 项,具体如下所示:

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_1 \tau_4^1 + \tau_2 \tau_3^2 + \tau_2 \tau_4^2 + \tau_3 \tau_4^3 \quad (5.212)$$

由图 5.44(f)求得第 1 项因数为:

$$\tau_2^1 = C_2 R_1 \quad (5.213)$$

然后由图 5.44(g)求得第 2 项因数为:

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{\infty} \quad (5.214)$$

由图 5.44(h)可得:

$$\tau_4^1 = C_4 R_1 \quad (5.215)$$

系数 b_2 中的第 4 项因数为:

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.216)$$

由图 5.44(j)可得:

$$\tau_4^2 = C_4 \cdot 0 = 0 \quad (5.217)$$

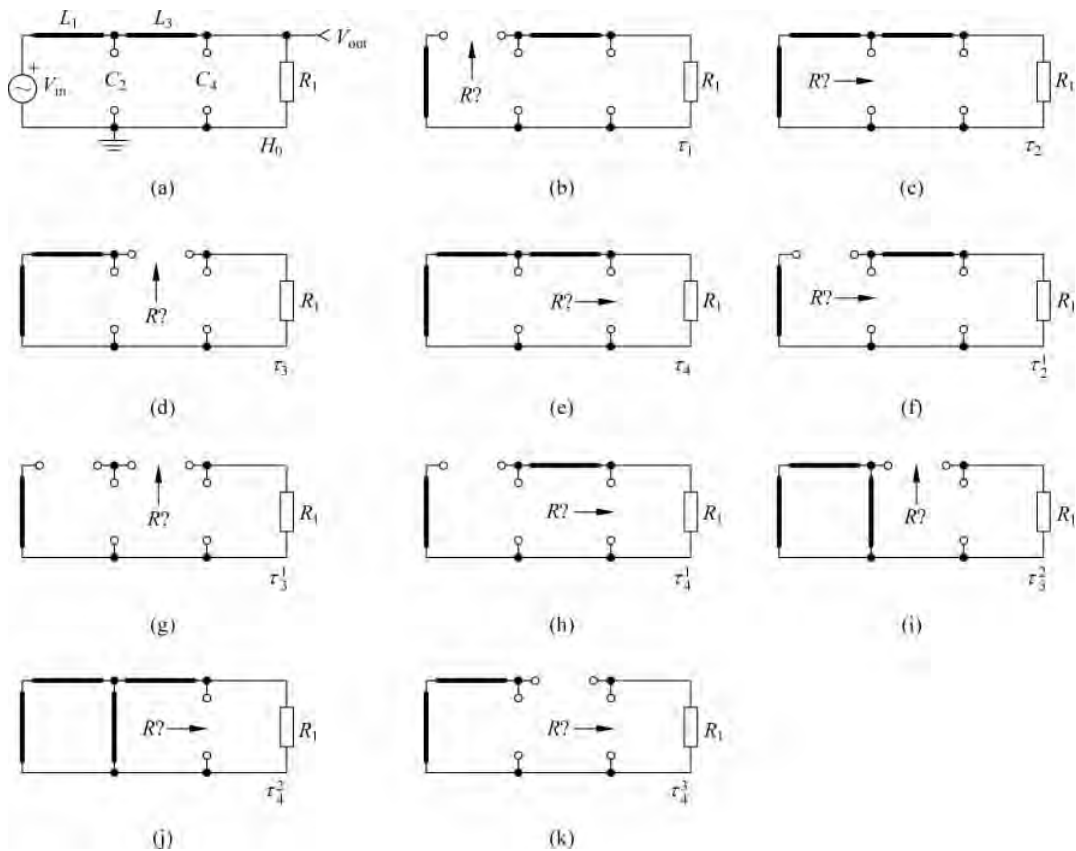


图 5.44 通过观察储能元件端口电阻值确定电路固有时间常数

最后一项时间常数为：

$$\tau_4^3 = C_4 R_1 \quad (5.218)$$

按照式(5.212)将上述时间常数整理得：

$$b_2 = \frac{L_1}{R_1} C_2 R_1 + \frac{L_1}{R_1} \frac{L_3}{\infty} + \frac{L_1}{R_1} C_4 R_1 + 0 \cdot \frac{L_3}{R_3} + 0 \cdot 0 + \frac{L_3}{R_1} C_4 R_1 \quad (5.219)$$

由于最终未出现不确定性,所以可将式(5.219)简化为：

$$b_2 = L_1 C_2 + L_1 C_4 + L_3 C_4 = L_1 (C_2 + C_4) + L_3 C_4 \quad (5.220)$$

第 3 项系数 b_3 定义如下：

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} + \tau_2^2 \tau_3^2 \tau_4^{23} \quad (5.221)$$

首先对图 5.45(a)进行分析,当 L_1 和 C_2 设置为高频状态时计算电感 L_3 两端的电阻值,从而求得时间常数为：

$$\tau_3^{12} = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.222)$$

如图 5.45(b)所示,由于 C_1 和 L_3 短路,所以第 2 项电阻值为 0Ω ,因此时间常数为：

$$\tau_4^{12} = C_4 \cdot 0 = 0 \quad (5.223)$$

由图 5.45(c)可得

$$\tau_4^{13} = C_4 R_1 \quad (5.224)$$

由图 5.45(d)可得：

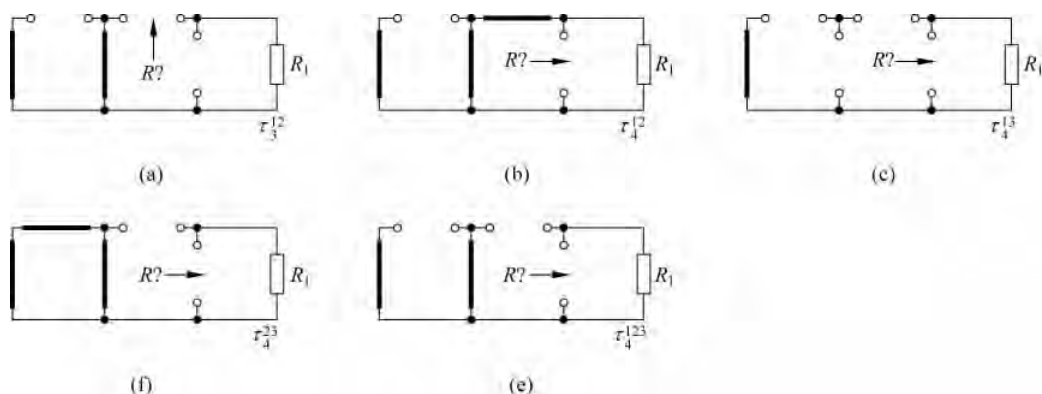


图 5.45 4 阶电路网络的分解电路

$$\tau_4^{23} = C_4 R_1 \quad (5.225)$$

将上述各项进行组合,求得系数 b_3 的表达式为:

$$b_3 = \frac{L_1}{R_1} C_2 R_1 \frac{L_3}{R_1} + \frac{L_1}{R_1} C_2 R_1 \cdot 0 + \frac{L_1}{R_1} \frac{L_3}{\infty} C_4 R_1 + 0 \cdot \frac{L_3}{R_1} C_4 R_1 \quad (5.226)$$

简化得:

$$b_3 = \frac{L_1}{R_1} C_2 R_1 \frac{L_3}{R_1} = \frac{L_1 L_3 C_2}{R_1} \quad (5.227)$$

最后一项系数 b_4 中只包含一项,即:

$$b_4 = \tau_1^1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \tau_4^{123} \quad (5.228)$$

如图 5.45(e)所示,当电感 L_1 、 L_2 和 L_3 设置于高频状态时计算 C_4 两端电阻值,从而求得时间常数为:

$$\tau_4^{123} = C_4 R_1 \quad (5.229)$$

将上述各项组合可得系数 b_4 为:

$$b_4 = \frac{L_1}{R_1} C_2 R_1 \frac{L_3}{R_1} C_4 R_1 = L_1 L_3 C_2 C_4 \quad (5.230)$$

通过上述分析计算,求得 4 阶电路网络的分子表达式为:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 \\ &= 1 + \left(\frac{L_1 + L_3}{R_1} \right) s + [L_1 (C_2 + C_4) + L_3 C_4] s^2 + \\ &\quad \frac{L_1 L_3 C_2}{R_1} s^3 + L_1 L_3 C_2 C_4 s^4 \end{aligned} \quad (5.231)$$

于是图 5.43 所示电路网络的传递函数表达式为:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{L_1 + L_3}{R_1} \right) s + [L_1 (C_2 + C_4) + L_3 C_4] s^2 + \frac{L_1 L_3 C_2}{R_1} s^3 + L_1 L_3 C_2 C_4 s^4} \quad (5.232)$$

接下来将上述表达式重新排列,使其传递函数符合 4 阶巴特沃斯(Butterworth)多项式形式,具体如下所示:

$$H(s) = \frac{1}{\left[1 + 0.7654 \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right] \left[1 + 1.8478 \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right]} \quad (5.233)$$

展开传递函数分母表达式,并且按照 s 升幂排列得:

$$D(s) = 1 + s \left(\frac{0.7654}{\omega_0} + \frac{1.8478}{\omega_0} \right) + s^2 \left(\frac{1.41430612}{\omega_0^2} + \frac{2}{\omega_0^2} \right) + s^3 \left(\frac{0.7654}{\omega_0^3} + \frac{1.8478}{\omega_0^3} \right) + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^4 \quad (5.234)$$

将式(5.232)与式(5.234)每项系数相匹配,所得方程组为:

$$\begin{aligned} \frac{L_1 + L_3}{R_1} &= \frac{0.7654}{\omega_0} + \frac{1.8478}{\omega_0} \\ L_1(C_2 + C_4) + L_3C_4 &= \frac{1.41430612}{\omega_0^2} + \frac{2}{\omega_0^2} \\ \frac{L_1L_3C_2}{R_1} &= \frac{0.7654}{\omega_0^3} + \frac{1.8478}{\omega_0^3} \\ L_1L_3C_2C_4 &= \frac{1}{\omega_0^4} \end{aligned} \quad (5.235)$$

利用数学软件 Mathcad 求得截止频率为 100kHz 时巴特沃斯滤波器的每个元件理论值(电容量纲为 pF)。当电阻 R_1 设置为 4.7k Ω 时求得其他元件参数为:

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_0} \times 1.53081 = 11.45\text{mH} \quad (5.236)$$

$$L_3 = \frac{R_1}{\omega_0} \times 1.08238 = 8.10\text{mH} \quad (5.237)$$

$$C_2 = \frac{1.57713}{\omega_0 R_1} = 534.06\text{pF} \quad (5.238)$$

$$C_4 = \frac{0.38267}{R_1 \omega_0} = 129.58\text{pF} \quad (5.239)$$

对上述计算结果进行实际测试之前,首先建立原始传递函数以检验传递函数表达式(5.233)的完整性。在图 5.43 中,利用 L_1 和 C_2 建立戴维南信号源,然后与阻抗分压器相连接,求得原始传递函数表达式为:

$$H_{\text{res}}(s) = \frac{1}{1 + s^2 L_1 C_2} \frac{R_1 \parallel \left(\frac{1}{sC_4} \right)}{R_1 \parallel \left(\frac{1}{sC_4} \right) + sL_3 + (sL_1) \parallel \left(\frac{1}{sC_2} \right)} \quad (5.240)$$

现在利用数学软件 Mathcad 将不同传递函数表达式(5.240)、式(5.232)和式(5.233)的频率特性进行对比,具体结果如图 5.46 所示——所有曲线均相似。低频段幅频和相频曲线十分平坦,无任何峰值出现;每十倍频幅度下降 80dB,与 4 阶低通滤波器幅频特性曲线响应特性一致。

5.2.4 实例 4——4 阶带通有源滤波器

查阅有源滤波器文档时发现文献[2]中的图 5.47 所示电路很有特色。该电路具有 4 个独立状态变量的储能元件,所以是 4 阶电路网络。运算放大器工作于同相模式,其增益 $k = (R_5/R_6 + 1)$ 。为简化分析,将图 5.47 重新绘制成图 5.48 所示形式。同相放大电路的增益由电阻 R_5 和 R_6 决定,节点 p 代表运放‘+’输入节点电压,输出电压为‘+’节点电压与增益 k 之积。首先计算分母 $D(s)$ 的固有时间常数。然后,根据图 5.21 所示电路利用广义 4 阶传递函数计算分子 $N(s)$ 表达式。

图 5.49(a)为所分析电路的第一个简化示意图。某些情况下,计算储能元件的端口电阻非

常简单,通过观察可直接得到。但有的时候需要利用测试电流源 I_T 和 KCL/KVL 计算该电阻值。首先计算电路的准静态增益,当 $s=0$ 时串联电容对输入信号阻塞,因此准静态增益为:

$$H_0 = 0 \quad (5.241)$$

在图 5.49(b)中,由于偏置点未连接(直流分析时将 C_3 移除),所以节点 p 处电位为 0V。因此 $k \cdot V_{(p)}$ 也为 0V,从而电阻 R_7 上端接地。此时储能元件 C_1 端口的唯一电阻为 R_1 和 R_3 并联。所以时间常数为:

$$f_c := 100\text{kHz} \quad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f_c \quad R_1 := 4.7\text{k}\Omega$$

$$\parallel(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$L_1 := \frac{1.53081 \cdot R_1}{\omega_c} = 11.450891\text{mH}$$

$$L_2 := \frac{1.08238 \cdot R_1}{\omega_c} = 8.096508\text{mH}$$

$$C_2 := \frac{1.57713}{R_1 \cdot \omega_c} = 534.05965\text{pF}$$

$$C_4 := \frac{0.38267}{R_1 \cdot \omega_c} = 129.5826\text{pF}$$

$$\tau_1 := \frac{L_1}{R_1} = 2.43636\mu\text{s} \quad \tau_2 := C_2 \cdot 0 = 0$$

$$\tau_3 := \frac{L_3}{R_1} = 1.722661\mu\text{s} \quad \tau_4 := C_4 \cdot 0 = 0$$

$$\tau_{12} := C_2 \cdot R_1 = 2.51008\mu\text{s} \quad \tau_{13} := \frac{L_3}{\infty \cdot \Omega} = 0\mu\text{s}$$

$$\tau_{14} := C_4 \cdot R_1 = 0.609038\mu\text{s}$$

$$\tau_{23} := \frac{L_3}{R_1} = 1.722661\mu\text{s} \quad \tau_{24} := C_4 \cdot 0 = 0$$

$$\tau_{34} := C_4 \cdot R_1 = 0.609038\mu\text{s}$$

$$\tau_{123} := \frac{L_3}{R_1} = 1.722661\mu\text{s} \quad \tau_{124} := C_4 \cdot 0 = 0$$

$$\tau_{134} := C_4 \cdot R_1 = 0.609038\mu\text{s}$$

$$\tau_{234} := C_4 \cdot R_1 = 0.609038\mu\text{s}$$

$$\tau_{1234} := C_4 \cdot R_1 = 0.609038\mu\text{s}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 4.159021\mu\text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_1 \cdot \tau_{14} + \tau_2 \cdot \tau_{23} + \tau_2 \cdot$$

$$\tau_{24} + \tau_3 \cdot \tau_{34} = 8.648462\mu\text{s}^2$$

$$b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} + \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{124} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot$$

$$\tau_{134} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{234} = 10.534864\mu\text{s}^3$$

$$b_4 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot \tau_{1234} = 6.416135\mu\text{s}^4$$

$$H_0 := 1$$

$$D_1(s) := 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3 + s^4 \cdot b_4$$

$$H_{10}(s) := \frac{1}{D_1(s)}$$

$$H_{\text{res}}(s) := \frac{1}{C_2 \cdot L_1 \cdot s^2 + 1} \cdot$$

$$\left[R_1 \parallel \left(\frac{1}{s \cdot C_4} \right) \right]$$

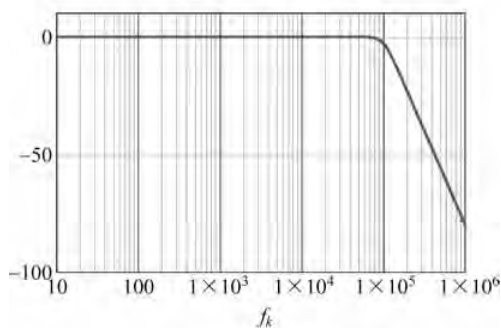
$$\left[R_1 \parallel \left(\frac{1}{s \cdot C_4} \right) \right] + s \cdot L_3 + \left[(s \cdot L_1) \parallel \left(\frac{1}{s \cdot C_2} \right) \right]$$

$$H_{20}(s) := \frac{1}{\left[1 + 0.7654 \frac{s}{\omega_c} + \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^2 \right]} \cdot \frac{1}{\left[1 + 1.8478 \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^2 \right]}$$

$$\text{--- } 20 \cdot \log(|H_{10}(i \cdot 2\pi f_k)|, 10)$$

$$\text{--- } 20 \cdot \log(|H_{20}(i \cdot 2\pi f_k)|, 10)$$

$$\text{--- } 20 \cdot \log(|H_{\text{res}}(i \cdot 2\pi f_k)|, 10)$$



$$\text{--- } \arg(H_{10}(i \cdot 2\pi f_k)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\text{--- } \arg(H_{20}(i \cdot 2\pi f_k)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\text{--- } \arg(H_{\text{res}}(i \cdot 2\pi f_k)) \cdot \frac{180}{\pi}$$

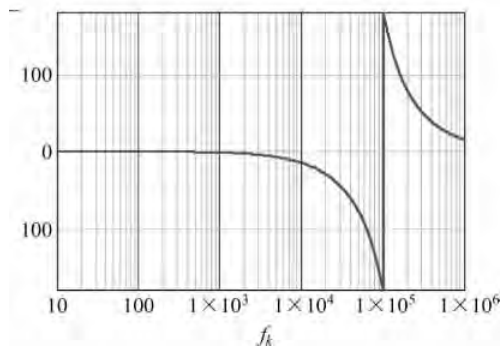


图 5.46 利用 Mathcad 证明计算方法的有效性,并将每种传递函数表达式的动态响应进行对比——特性曲线完全匹配

$$\tau_1 = C_1(R_1 \parallel R_3) \tag{5.242}$$

由图 5.48(c)计算与电容 C_2 相关的时间常数,即第 2 时间常数。此时电容端口的电阻为 R_7 、 R_2 和 $R_1 \parallel R_3$ 串联,所以第 2 时间常数为:

$$\tau_2 = C_2(R_7 + R_2 + R_1 \parallel R_3) \tag{5.243}$$

如图 5.49(d)所示,通过添加测试信号源计算第 3 时间常数,此时节点 p 处的电压为电流 I_T 与电阻 R_4 的乘积,即:

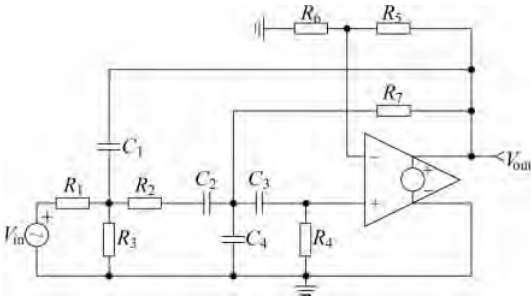


图 5.47 求解 4 阶有源滤波器电路的传递函数

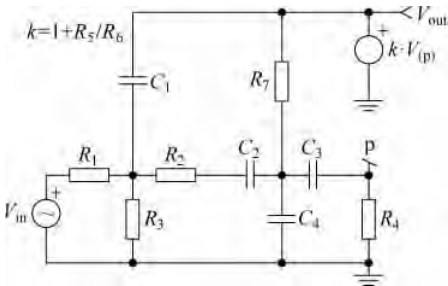


图 5.48 无运算放大器时电路更易于分析

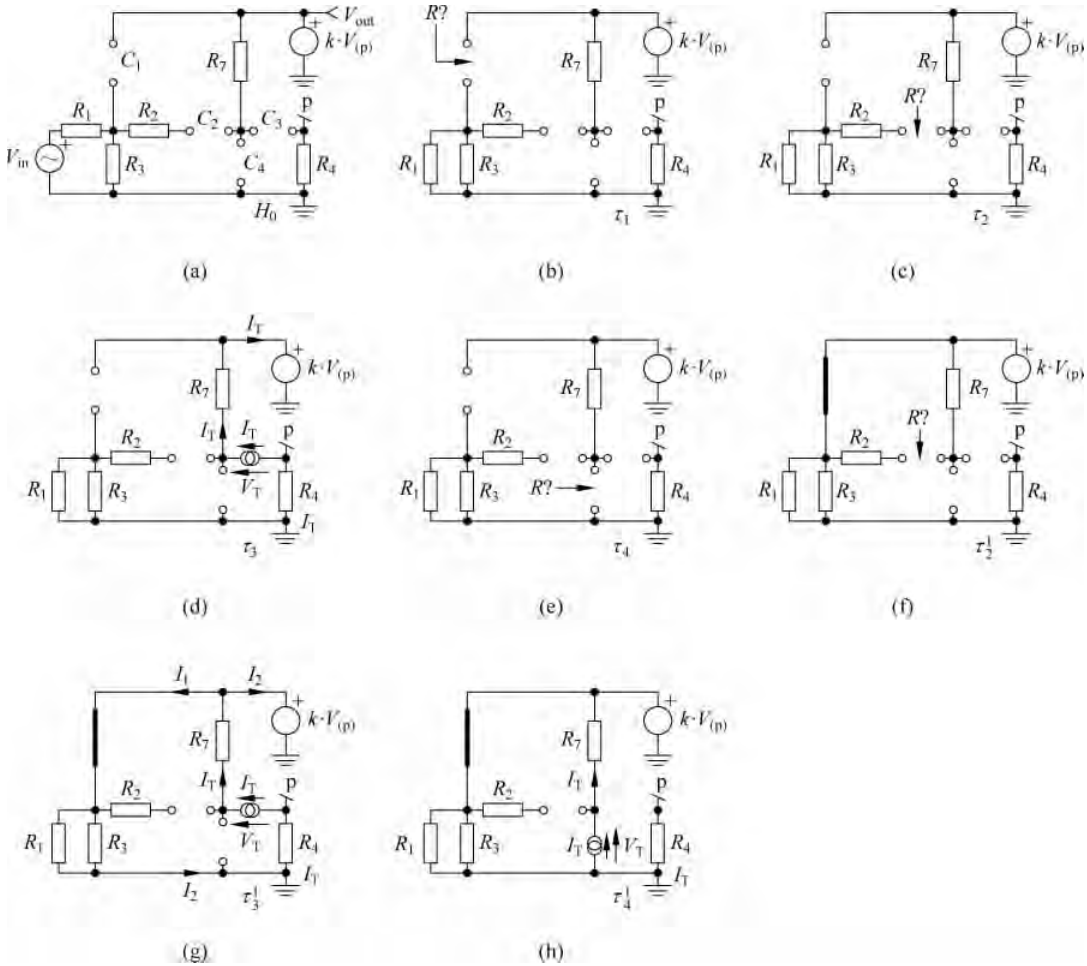


图 5.49 激励源设置为 0 时计算电路固有时间常数

$$V_{(p)} = -I_T R_4 \quad (5.244)$$

该电压按比例 k 进行放大后出现在电阻 R_7 的上端。于是整理得电压 V_T 的表达式为:

$$V_T = I_T R_7 + k \cdot V_{(p)} + R_4 I_T \quad (5.245)$$

将式(5.244)代入式(5.245)并分解因式 I_T 得:

$$V_T = I_T [R_7 + R_4(1 - k)] \quad (5.246)$$

于是求得电容 C_3 的时间常数为:

$$\tau_3 = C_3 [R_7 + R_4(1 - k)] \quad (5.247)$$

由图 5.49(e)可轻易求得第 4 时间常数: R_7 为 C_4 两端的唯一电阻, 所以第 4 时间常数为:

$$\tau_4 = C_4 R_7 \quad (5.248)$$

将上述时间常数相加整理得第一项 b_1 为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = C_1(R_1 \parallel R_3) + C_2(R_7 + R_2 + R_1 \parallel R_3) + C_3[R_7 + R_4(1 - k)] + C_4 R_7 \quad (5.249)$$

接下来将各种储能元件状态进行组合计算相应时间常数。首先由图 5.49(f)计算时间常数 τ_2^1 。因为 $V_{(p)} = 0$, 所以电阻 R_7 上端接地, 于是电阻简化为 R_7 和 R_2 串联, 即时间常数为:

$$\tau_2^1 = C_2(R_2 + R_7) \quad (5.250)$$

下个时间常数由图 5.49(g)进行计算, 初看该电路相当复杂。实际上, 由于 $k \cdot V_{(p)}$ 对 R_7 上端进行偏置, 由 R_1 和 R_3 构成的电阻网络对 C_3 端口电阻无影响, 所以与图 5.49(d)中的时间常数 τ_3 计算公式相似:

$$\tau_3^1 = C_3 [R_7 + R_4(1 - k)] \quad (5.251)$$

在图 5.49(h)中, 即使电容 C_1 短路, 时间常数与图 5.49(e)中已经求得的时间常数也相似, 即:

$$\tau_4^1 = C_4 R_7 \quad (5.252)$$

接下来由图 5.50 计算 b_2 。利用图 5.50(a)计算时间常数 τ_3^2 , 此时激励电流 I_T 分解为 I_1 和 I_2 。为简化计算, 将电路图重新绘制为更熟悉形式, 具体如图 5.51 所示。

流经电阻 R_7 的电流等于该电阻两端电压与其电阻值之商。应用 KVL 可得:

$$I_1 = \frac{R_{eq} I_2 - k \cdot V_{(p)}}{R_7} \quad (5.253)$$

节点 p 的电压值为 I_T 与 R_4 之积, 将其带入式(5.253)可得:

$$I_1 = \frac{R_{eq} I_2 + k \cdot I_T R_4}{R_7} \quad (5.254)$$

电流 I_2 为:

$$I_2 = \frac{V_T - I_T R_4}{R_{eq}} \quad (5.255)$$

将式(5.254)代入式(5.255)整理得:

$$I_1 = \frac{V_T - I_T R_4 + I_T R_4 \cdot k}{R_7} \quad (5.256)$$

因为测试电流 I_T 为 I_1 和 I_2 之和, 因此:

$$I_T = \frac{V_T - I_T R_4 + I_T R_4 \cdot k}{R_7} + \frac{V_T - I_T R_4}{R_{eq}} \quad (5.257)$$

对式(5.257)进行重新整理, 分解因式 I_T 和 V_T 并将其相除可得 C_3 两端电阻为:

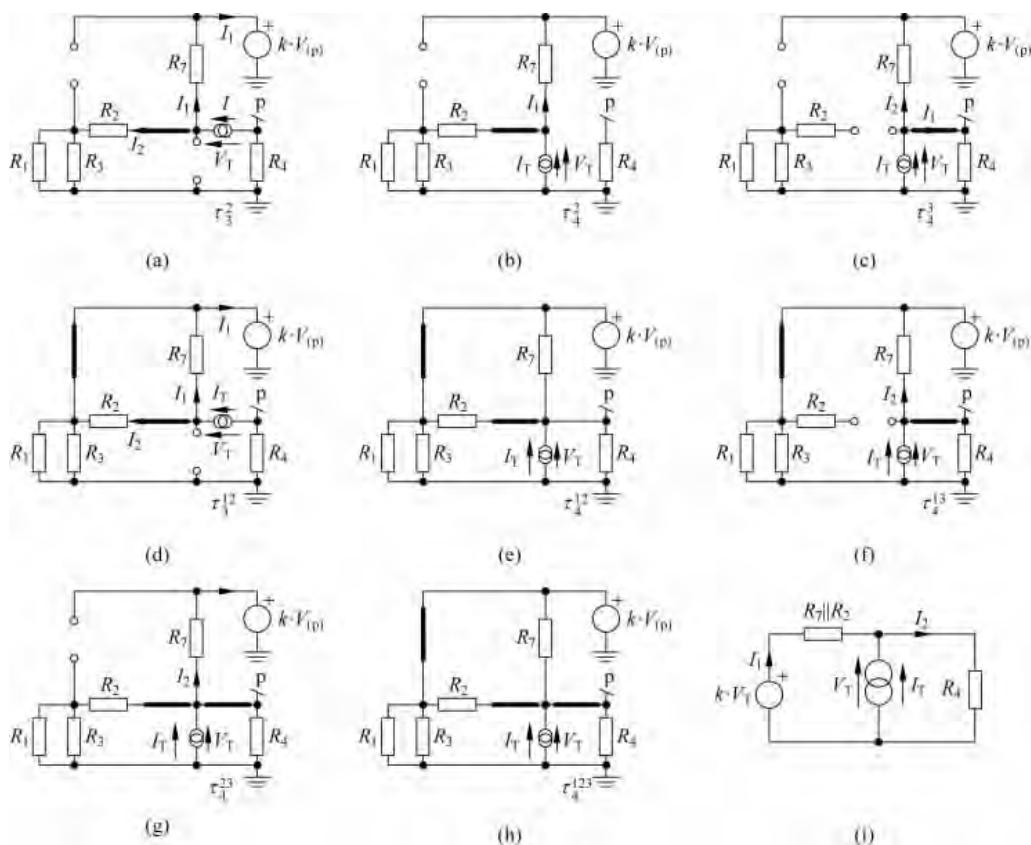


图 5.50 将激励源依旧设置为 0 以确定剩余时间常数

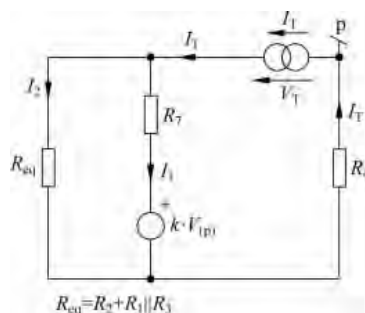


图 5.51 重整电路图以便更容易求得电阻值

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{R_4 R_7 + (R_2 + R_3 \parallel R_1)(R_4 + R_7 - k \cdot R_4)}{R_7 + R_2 + R_3 \parallel R_1} \\
 &= \frac{R_7 - k \cdot R_4}{R_7 + R_2 + R_3 \parallel R_1} (R_2 + R_3 \parallel R_1) + R_4
 \end{aligned} \quad (5.258)$$

所求时间常数为：

$$\tau_3^2 = C_3 \left[\frac{R_7 - k \cdot R_4}{R_7 + R_2 + R_3 \parallel R_1} (R_2 + R_3 \parallel R_1) + R_4 \right] \quad (5.259)$$

由图 5.50(b) 计算时间常数 τ_4^2 。尽管存在测试信号源，但是通过观察可直接求得电阻值。当 R_4 断开时，节点 p 和 R_7 上端均接地，因此 R_7 与 C_4 并联；又因为 R_2 与 $R_1 \parallel R_3$ 串

联,然后该串联电阻再与 R_7 并联,所以时间常数为:

$$\tau_4^2 = C_4 [R_7 \parallel (R_2 + R_3 \parallel R_1)] \quad (5.260)$$

图 5.50(c)中测试电流 I_T 分解为 I_1 和 I_2 ,两电流具体计算公式如下所示:

$$I_1 = \frac{V_T}{R_4} \quad (5.261)$$

$$I_2 = \frac{V_T - I_1 R_4 \cdot k}{R_7} \quad (5.262)$$

将式(5.262)代入式(5.261)可得:

$$I_2 = \frac{V_T(1-k)}{R_7} \quad (5.263)$$

最终整理得:

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{V_T}{R_4} + \frac{V_T(1-k)}{R_7} = V_T \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1-k}{R_7} \right) \quad (5.264)$$

对式(5.264)进行因式分解并且按照 V_T/I_T 格式进行重新整理,求得时间常数为:

$$\tau_4^3 = C_4 \left[\frac{R_4 R_7}{R_4(1-k) + R_7} \right] \quad (5.265)$$

根据上述计算结果将系数 b_2 定义如下:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_1 \tau_4^1 + \tau_2 \tau_3^2 + \tau_2 \tau_4^2 + \tau_3 \tau_4^3 \\ &= C_1(R_1 \parallel R_3)C_2(R_2 + R_7) + C_1(R_1 \parallel R_3)C_3[R_7 + R_4(1-k)] + C_1(R_1 \parallel R_3)C_4 R_7 + \\ &\quad C_2(R_7 + R_2 + R_1 \parallel R_3)C_3 \left[\frac{R_7 - k \cdot R_4}{R_7 + R_2 + R_3 \parallel R_1} (R_2 + R_3 \parallel R_1) + R_4 \right] + \\ &\quad C_2(R_7 + R_2 + R_1 \parallel R_3)C_4 [R_7 \parallel (R_2 + R_3 \parallel R_1)] + \\ &\quad C_3 [R_7 + R_4(1-k)]C_4 \left(\frac{R_4 R_7}{R_4(1-k) + R_7} \right) \end{aligned} \quad (5.266)$$

在图 5.50(d)中,因为 C_1 短路,所以电阻 R_2 与 R_7 并联。因为电阻 R_1 和 R_3 上端偏置电压固定为 $k \cdot V_{(p)}$,所以两电阻对时间常数不起作用。图 5.50(d)的简化电路如图 5.52 所示,由图可得:

$$-k \cdot R_4 I_T + I_T(R_2 \parallel R_7) + R_4 I_T = V_T \quad (5.267)$$

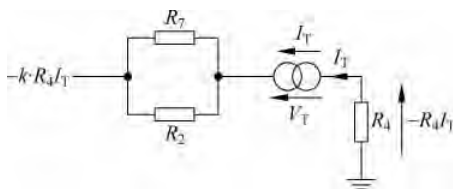


图 5.52 利用简化电路图可以更简单地求得电阻值

分解因式 I_T 和 V_T 并将其相除可得电容驱动电阻值,从而求得时间常数为:

$$\tau_3^{12} = C_3 [R_2 \parallel R_7 + R_4(1-k)] \quad (5.268)$$

由图 5.50(e)中电路可轻易求得时间常数 τ_4^{12} 。此时节点 p 的电压为 0V,即电阻 R_7 上端接地:电阻 R_1 和 R_3 短路,可直接从电路中去掉。所以电容 C_4 两端的阻抗仅由 R_7 与 R_2 并联构成,从而求得时间常数为:

$$\tau_4^{12} = C_4 (R_2 \parallel R_7) \quad (5.269)$$

在图 5.50(f)中,尽管 C_1 短路,但 C_2 工作于直流状态并且将电阻 R_1 、 R_2 和 R_3 与 C_4 断开。其余电路与图 5.50(c)相似,所以时间常数计算公式与式(5.265)一致,即:

$$\tau_4^{13} = C_4 \left[\frac{R_4 R_7}{R_4(1-k) + R_7} \right] \quad (5.270)$$

当 C_2 和 C_3 短路时电路如图 5.50(g) 所示, 此时该电路与图 5.50(c) 相同, R_1 与 R_3 并联再与 R_2 串联, 最后该串并联电阻与电容两端相连接。因此求得时间常数为:

$$\tau_4^{23} = C_4 \left[(R_2 + R_1 \parallel R_3) \parallel \left(\frac{R_4 R_7}{R_4(1-k) + R_7} \right) \right] \quad (5.271)$$

于是第 3 项系数 b_3 的计算公式为:

$$\begin{aligned} b_3 &= \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23} \\ &= C_1 (R_1 \parallel R_3) C_2 (R_2 + R_7) C_3 [R_2 \parallel R_7 + R_4(1-k)] + \\ &\quad C_1 (R_1 \parallel R_3) C_2 (R_2 + R_7) C_4 (R_2 \parallel R_7) + \\ &\quad C_1 (R_1 \parallel R_3) C_3 [R_7 + R_4(1-k)] C_4 \left(\frac{R_4 R_7}{R_4(1-k) + R_7} \right) + \\ &\quad C_2 (R_7 + R_2 + R_1 \parallel R_3) C_3 \left[\frac{R_7 - k \cdot R_4}{R_7 + R_2 + R_3 \parallel R_1} (R_2 + R_3 \parallel R_1) + R_4 \right] \cdot \\ &\quad C_4 \left[(R_2 + R_1 \parallel R_3) \parallel \left(\frac{R_4 R_7}{R_4(1-k) + R_7} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.272)$$

由图 5.50(h) 计算最后时间常数 τ_4^{123} 。为简化计算过程, 特将图 5.50(h) 简化为图 5.50(i)。因为电阻 R_1 和 R_3 两端电压为 $k \cdot V_{(p)}$, 所以再次将其从电路中移除。由图 5.50(i) 可得:

$$I_2 = \frac{V_T}{R_4} \quad (5.273)$$

$$I_1 = \frac{k \cdot V_T - V_T}{R_7 \parallel R_2} = \frac{V_T(k-1)}{R_7 \parallel R_2} \quad (5.274)$$

因为 $I_T = I_2 - I_1$, 所以:

$$I_T = \frac{V_T}{R_4} - \frac{V_T(k-1)}{R_7 \parallel R_2} = V_T \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1-k}{R_7 \parallel R_2} \right) \quad (5.275)$$

因此时间常数为:

$$\tau_4^{123} = C_4 \left[\frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1-k}{R_7 \parallel R_2}} \right] = C_4 \left[\frac{R_4(R_2 \parallel R_7)}{R_4(1-k) + R_2 \parallel R_7} \right] \quad (5.276)$$

于是求得系数 b_4 的表达式为:

$$\begin{aligned} b_4 &= \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \tau_4^{123} = C_1 (R_1 \parallel R_3) C_2 (R_2 + R_7) C_3 [R_2 \parallel R_7 + R_4(1-k)] \cdot \\ &\quad C_4 \left[\frac{R_4(R_2 \parallel R_7)}{R_4(1-k) + R_2 \parallel R_7} \right] \end{aligned} \quad (5.277)$$

将上述所得系数进行组合, 求得分母表达式为:

$$D(s) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 \quad (5.278)$$

之前已经利用 KCL/KVL 原理计算电路的驱动点阻抗。为确保万无一失, 通常利用简单 SPICE 直流点分析对计算结果进行验证。首先绘制原始电路图, 并根据所求时间常数将相应元件设置为短路或开路。当由 1A 电流源激励电路时, 电流源两端电压即为所求电阻值。图 5.53 为第一时间常数计算实例。

既然已经求得分母表达式, 接下来专注于计算分子表达式。此时激励信号源复位, 并且将储能元件设置为高频或直流状态时测试输出信号。接下来对图 5.54 中电路进行分析。由式(5.241)可得增益 H_0 为零, 与图 5.54(a) 所示电路计算一致。

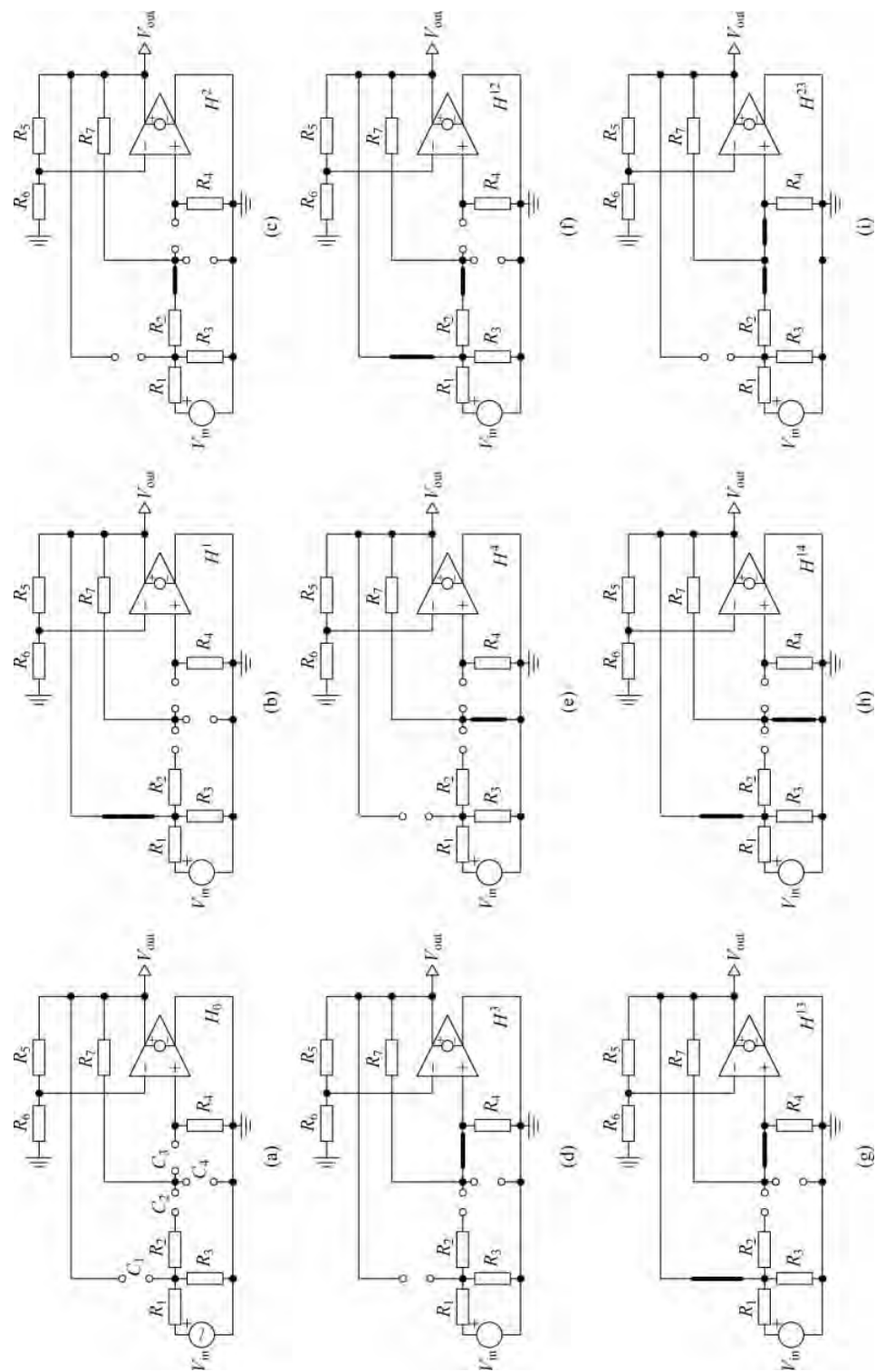


图 5.54 通过将储能元件交替设置为开路或短路计算直流增益

在图 5.54(b)中,运放同相引脚通过电阻 R_4 接地,所以其输出电压为 0V。在图 5.54(c)中,同相引脚仍然无偏置电压,所以输出依然为 0V。同样在图 5.54(d)、(e)和(h)中电阻 R_4 将运放‘+’端接地,所以运放输出均为 0V。根据上述计算分析可得:

$$H_0 = H^1 = H^2 = H^3 = H^4 = H^{12} = H^{13} = H^{14} = 0 \quad (5.279)$$

在图 5.54(i)中运算放大器的输出不为零,利用戴维南变换电路将其电阻减少为 3 支,此时电路简化为图 5.55(a)电路,利用该简化电路能够求得其直流传递函数。

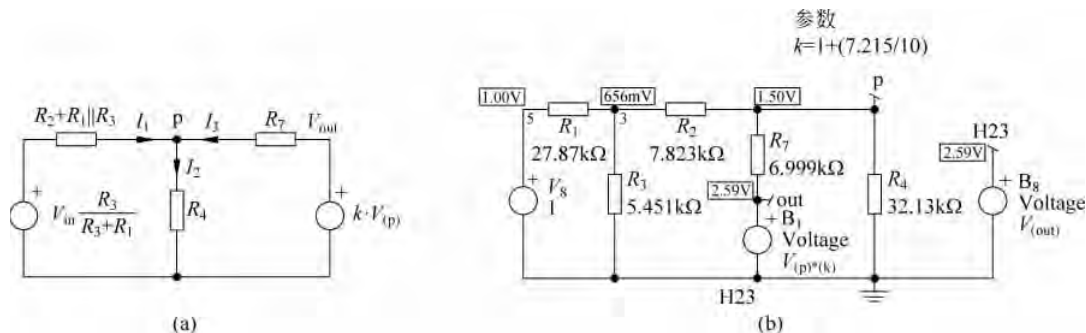


图 5.55 利用图 5.54(i)所示简化电路有助于计算该配置下的电路增益

在节点 p 应用 KCL 可得:

$$I_2 = I_1 + I_3 \quad (5.280)$$

每个电流定义式为:

$$I_1 = \frac{V_{in} \frac{R_3}{R_3 + R_1} - V_{(p)}}{R_2 + R_3 \parallel R_1} \quad (5.281)$$

$$I_2 = \frac{V_{(p)}}{R_4} \quad (5.282)$$

$$I_3 = \frac{k \cdot V_{(p)} - V_{(p)}}{R_7} \quad (5.283)$$

将式(5.281)~(5.283)代入输出电压 V_{out} 表达式,然后提取因式 $V_{(p)}$ 和 $k \cdot V_{(p)}$ 得:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = H^{23} = \frac{k \cdot R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_1 \parallel R_3) \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_1 \parallel R_3} - \frac{k-1}{R_7} \right)} \quad (5.284)$$

直流传递函数第二部分电路如图 5.56 所示。

当运放同相引脚电压由电阻 R_4 单独连接至地时输出电压为 0V,图 5.56(a)、(b)和(d)所示。通过分析可将电路图 5.56(c)整理为图 5.56(h)所示的更简单形式。电路中节点 p 处的电位等于节点 1 处的电位除以系数 k 。如果 R_4 和 R_2 的分压比不等于 $1/k$,那么只有当 $V_{out}=0V$ 时电路中各节点电压才能正常。此时电路中各节点电压均为 0,所以增益为:

$$H^{24} = H^{34} = H^{123} = H^{124} = H^{134} = H^{234} = H^{1234} = 0 \quad (5.285)$$

上述增益值可由图 5.57 中的偏置点电压进行计算。

除系数 a_2 之外分子表达式中其余系数均为 0,因此:

$$a_1 = \tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3 + \tau_4 H^4 = 0 \quad (5.286)$$

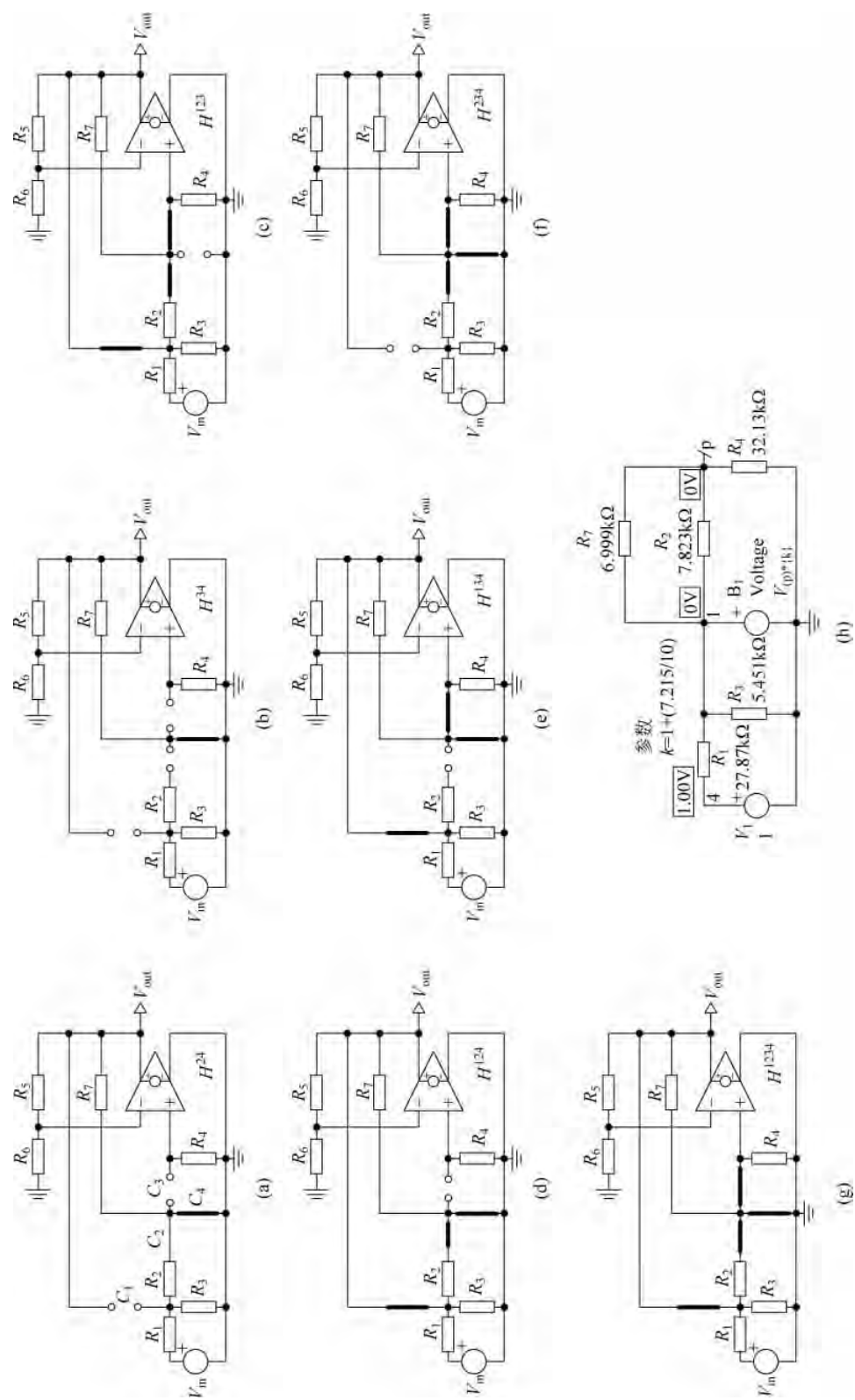


图 5.56 由直流传递函数最后一项可得所有输出均为零

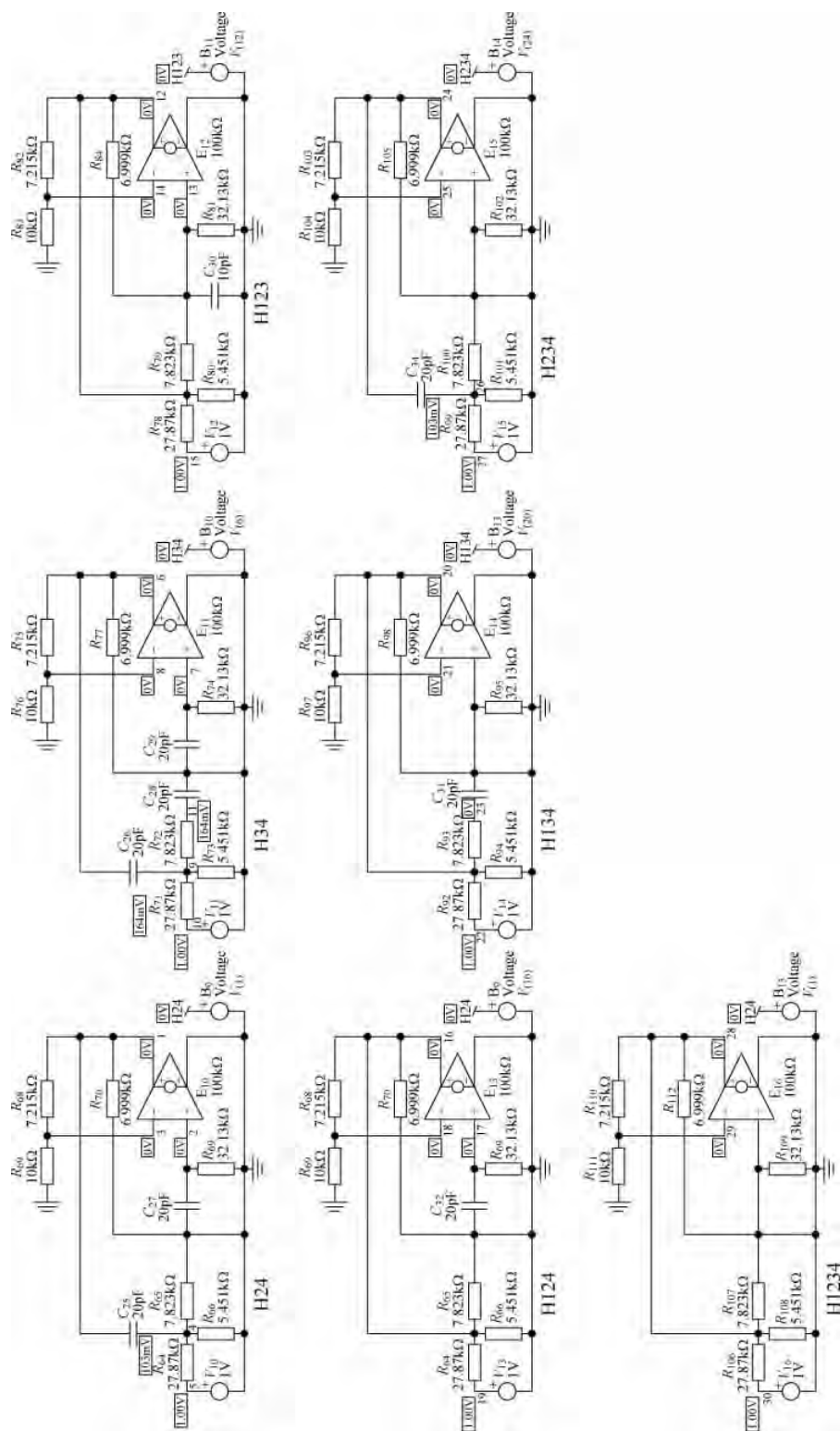


图 5.57 通过简单直流工作点计算确定图 5.56 中所有输出电压均为 0V

$$\begin{aligned}
a_2 &= \tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_1 \tau_4^1 H^{14} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23} + \tau_2 \tau_4^2 H^{24} + \tau_3 \tau_4^3 H^{34} = \tau_2 \tau_3^2 H^{23} \\
&= C_2 (R_7 + R_2 + R_1 \parallel R_3) C_3 \left[\frac{R_7 - k \cdot R_4}{R_7 + R_2 + R_3 \parallel R_1} (R_2 + R_3 \parallel R_1) + R_4 \right] \times \\
&\quad \frac{k \cdot R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_1 \parallel R_3) \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_1 \parallel R_3} - \frac{k-1}{R_7} \right)} \quad (5.287)
\end{aligned}$$

$$a_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} H^{123} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} H^{124} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} H^{134} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23} H^{234} = 0 \quad (5.288)$$

$$a_4 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \tau_4^{123} H^{1234} = 0 \quad (5.289)$$

利用 Mathcad 对式(5.287)进行简化可得最终分子表达式为:

$$N(s) = a_2 s^2 = k \frac{C_2 C_3 R_3 R_4 R_7}{R_1 + R_3} s^2 \quad (5.290)$$

其中 $k = \frac{R_5}{R_6} + 1$ 。于是传递函数 H 表达式为:

$$H(s) = \frac{a_2 s^2}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4} \quad (5.291)$$

在分母表达式中提取因式 $a_2 s^2$ 并且将传递函数主导项设置为 $\frac{a_2}{b_2}$, 于是 H 可以重新整理为:

$$H(s) = \frac{a_2}{b_2} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_2} s + s \frac{b_3}{b_2} + s^2 \frac{b_4}{b_2} + \frac{1}{b_2 s^2}} \quad (5.292)$$

然而, 式(5.292)中无量纲主导项与谐振频率下的滤波器增益不相符。参考文献[3]对滤波器传递函数进行详细探讨, 其中 16~32 页为 4 阶带通滤波器实例。参考文献[3]中的等式(16-12)提出一种可行解决方案。

图 5.58 为所有 Mathcad 计算方程及其相应动态响应曲线, 其中所有元件值均来自参考文献[2], 并且 0dB 增益时的谐振频率为 1MHz。理论分析和仿真波形对比如图 5.59 所示完美匹配。

5.2.5 实例 5——3 阶低通有源 GIC 滤波器

图 5.60 为双运算放大器构成的广义阻抗转换器 (Generalized Impedance Converter, GIC) 电路, 实质为滤波电路, 其传递函数受有限开环增益 A_{OL} 控制。鉴于两运算放大器的特殊配置, 该电路工作原理令人费解。如前所述, 首先将整体电路按照工作原理进行分解, 计算每个电路的时间常数。该实例系统地应用 SPICE 仿真对每步计算结果进行验证, 以保证最终传递函数表达式正确。首先由图 5.61 计算时间常数 τ_1 。

该电路的第一时间常数 τ_1 已经利用图 5.61(a) 所示简化电路计算求得。原始电路工作点和等效原理图工作点的具体数值的小数点后几位完全匹配非常重要, 小的偏差即表明存在错误。本例故意将运算放大器开环增益 A_{OL} 设置为较低值 (100 或 403), 以仿真该电路的低增益效应。之后将 A_{OL} 数值提高到更大值 (例如 100k Ω), 此时 SPICE 仿真和 Mathcad 计算结果之间不应存在差异。接下来利用电流和电压方程计算 V_T/I_T , 以确定电容 C_1 的驱动电阻。第一方程式为:

$$\begin{aligned}
 R_1 &:= 27.87\text{k}\Omega & R_2 &:= 7.823\text{k}\Omega & R_3 &:= 5.451\text{k}\Omega & R_4 &:= 32.13\text{k}\Omega \\
 R_5 &:= 7.215\text{k}\Omega & R_6 &:= 10\text{k}\Omega & R_7 &:= 6.999\text{k}\Omega & C_1 &:= 20\text{pF} \\
 C_2 &:= 20\text{pF} & C_3 &:= 20\text{pF} & C_4 &:= 20\text{pF} & m &:= \frac{R_5}{R_6} + 1 = 1.7215
 \end{aligned}$$

$$\parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &:= C_1 \cdot (R_3 \parallel R_1) = 0.091185\mu\text{s} \\
 \tau_2 &:= C_2 \cdot (R_1 \parallel R_3 + R_2 + R_7) = 0.387625\mu\text{s} \\
 \tau_3 &:= C_3 \cdot [R_7 \parallel R_4 \cdot (1-m)] = -323.6559\text{ns} \\
 \tau_4 &:= C_4 R_7 \cdot R_7 = 69.99\text{ns} \\
 \tau_{12} &:= C_2 \cdot (R_2 + R_7) = 296.44\text{ns} \\
 \tau_{13} &:= C_3 \cdot [R_7 + R_4 \cdot (1-m)] = -323.6559\text{ns} \\
 \tau_{14} &:= C_4 \cdot R_7 = 69.99\text{ns} \\
 \tau_{23} &:= C_3 \cdot \left[\frac{R_7 - R_4 \cdot m}{R_7 + (R_2 + R_3 \parallel R_1)} \cdot (R_2 + R_3 \parallel R_1) + R_4 \right] = 25.28025\text{ns} \\
 \tau_{24} &:= C_4 \cdot [(R_2 + R_3 \parallel R_1) \parallel R_7] = 44.715079\text{ns} \\
 \tau_{34} &:= C_4 \cdot \frac{R_4 \cdot R_7}{R_4 + R_7 - R_4 \cdot m} = -0.138961\mu\text{s} \\
 \tau_{123} &:= C_3 \cdot [R_2 \parallel R_7 + R_4 \cdot (1-m)] = -389.754943\text{ns} \\
 \tau_{124} &:= C_4 \cdot (R_2 \parallel R_7) = 36.940478\text{ns} \\
 \tau_{134} &:= C_4 \cdot \frac{R_4 \cdot R_7}{R_1 + R_7 - R_4 \cdot m} = -0.138961\mu\text{s} \\
 \tau_{234} &:= C_4 \cdot \left[(R_2 + R_3 \parallel R_1) \parallel \left(\frac{R_4 \cdot R_7}{R_4 + R_7 - R_4 \cdot m} \right) \right] = 1.136615\mu\text{s} \\
 \tau_{1234} &:= C_4 \cdot \left(\frac{1}{\frac{1-m}{R_2 \parallel R_7} + \frac{1}{R_4}} \right) = -60.904812\text{ns}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &:= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 0.225145\mu\text{s} \\
 b_2 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_1 \cdot \tau_{14} + \tau_2 \cdot \tau_{23} + \tau_2 \cdot \tau_{24} + \tau_3 \cdot \tau_{34} \\
 &\quad \tau_{34} = 0.076008\mu\text{s}^2 \\
 b_3 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} + \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{124} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{134} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{234} \\
 &\quad = 5.702183 \times 10^{-3} \mu\text{s}^3 \\
 b_4 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot \tau_{1234} = 6.416603 \times 10^{-4} \mu\text{s}^4 \\
 H_0 &:= 0 & H_1 &:= 0 & H_2 &:= 0 & H_3 &:= 0 & H_4 &:= 0 \\
 H_{12} &:= 0 & H_{13} &:= 0 & H_{14} &:= 0
 \end{aligned}$$

$$H_{23} := \frac{R_3 \cdot m}{(R_1 + R_3) \cdot (R_2 + R_3 \parallel R_1) \cdot \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_3 \parallel R_1} - \frac{m-1}{R_7} \right)}$$

$$= 2.585106 \quad H_{24} := 0 \quad H_{34} := 0 \quad H_{124} := 0$$

$$H_{134} := 0 \quad H_{234} := 0 \quad H_{1234} := 0 \quad H_{123} := 0$$

$$a_1 := \tau_1 \cdot H_1 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3 + \tau_4 \cdot H_4 = 0\mu\text{s}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot H_{13} + \tau_1 \cdot \tau_{14} \cdot H_{14} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23} + \tau_2 \cdot \tau_{24} \cdot H_{24} + \tau_3 \cdot \tau_{34} \cdot H_{34} \\
 &\quad = 0.025332\mu\text{s}^2
 \end{aligned}$$

$$C_2 \cdot C_3 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_7 \cdot m = 0.025332\mu\text{s}^2$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot H_{123} + \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{124} \cdot H_{124} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{134} \cdot H_{134} \\
 &\quad + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{234} \cdot H_{234} = 0\mu\text{s}^3
 \end{aligned}$$

$$a_4 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot \tau_{1234} H_{1234} = 0\mu\text{s}^4$$

$$D_1(s) := 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3 + s^4 \cdot b_4$$

$$N_1(s) := H_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + s^3 \cdot a_3 + s^4 \cdot a_4$$

$$H_{10}(s) := \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$H_{30}(s) := \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_2 \cdot s} + \frac{s \cdot b_3}{b_2} + \frac{s^2 \cdot b_4}{b_2} + \frac{1}{b_2 \cdot s^2}}$$

$$f_0 := \sqrt{\frac{(R_1 + R_3)}{(C_2 \cdot C_3 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_7 \cdot m)}} \cdot \frac{1}{2\pi} = 999.963586\text{kHz}$$

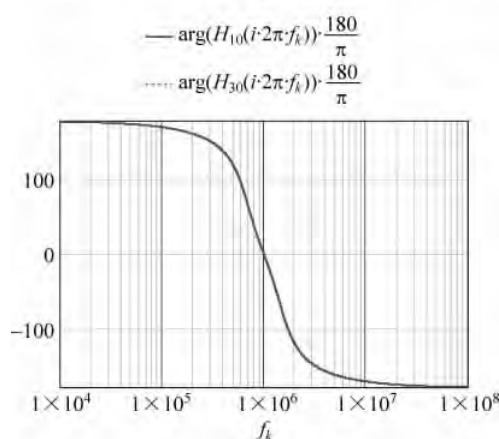
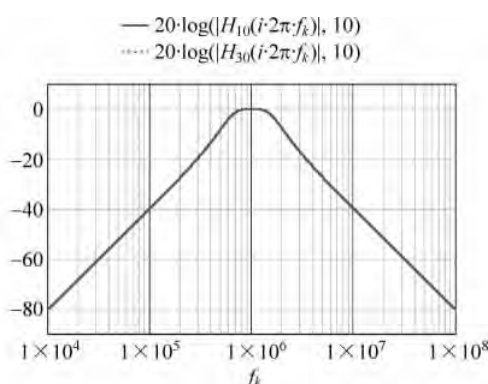


图 5.58 利用 Mathcad 计算各种时间常数

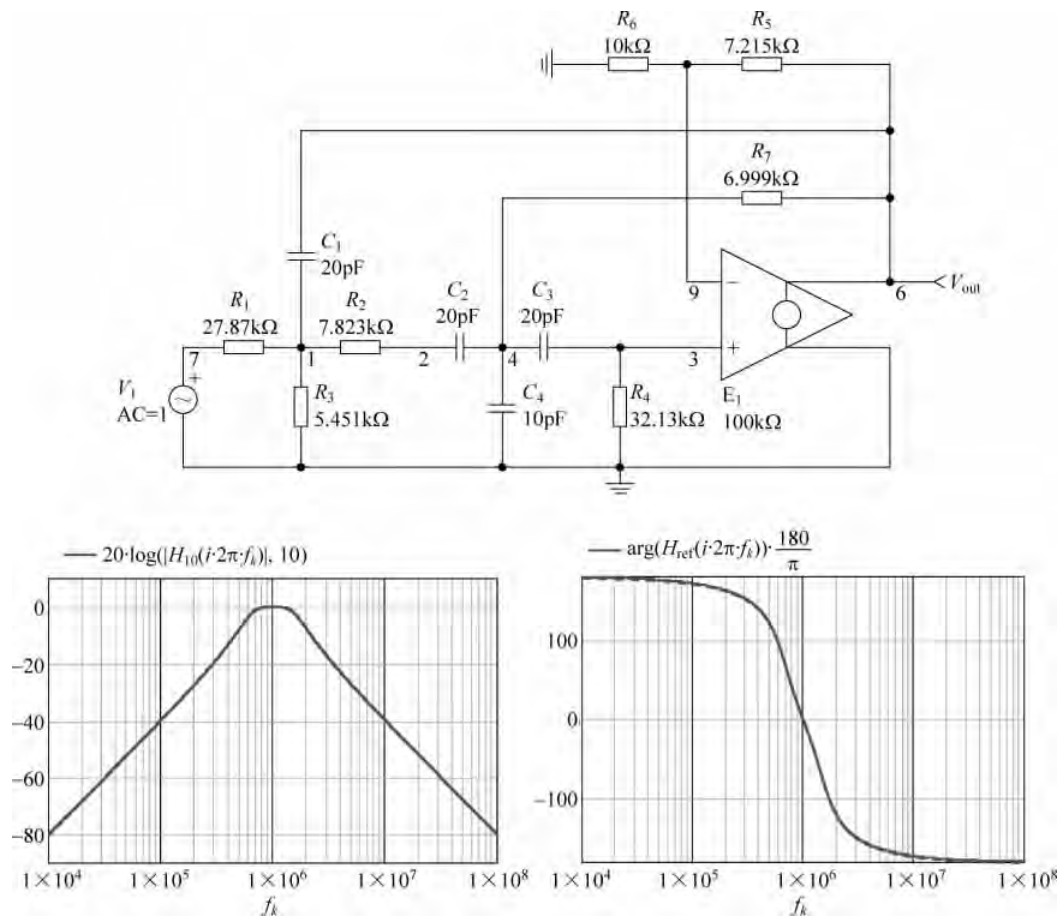


图 5.59 利用 SPICE 电路仿真证明理论分析所得动态响应与仿真结果完美匹配。所用元件值均取自 1MHz 带通滤波器电路

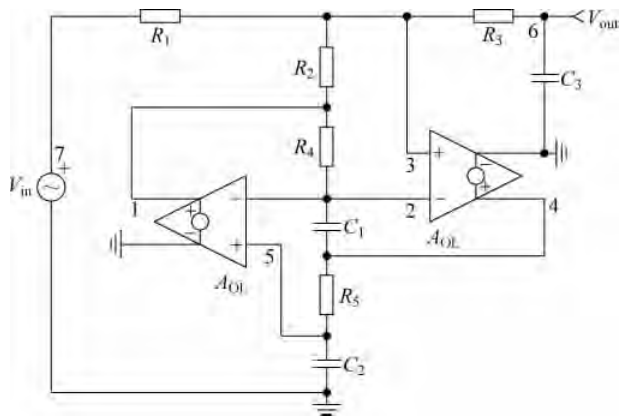


图 5.60 通用阻抗转换滤波器利用双运算放大器和三支电容构成 3 阶电路网络

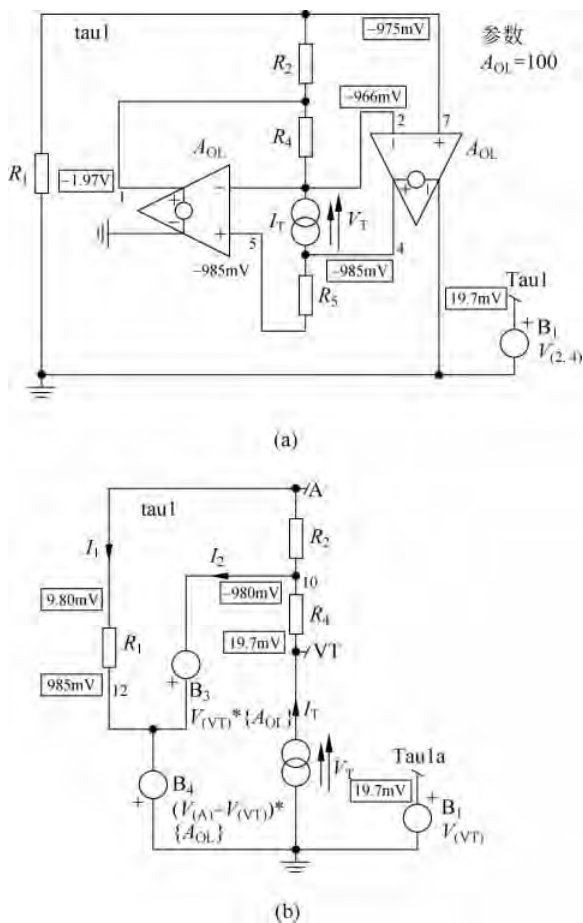


图 5.61 利用简化电路求解类似 GIC 滤波器等复杂电路的时间常数, 此处利用右侧简化电路计算时间常数

$$V_T = I_T R_4 + I_1 (R_1 + R_2) - (V_{(A)} - V_T) A_{OL} \quad (5.293)$$

电流 I_1 的定义式为:

$$I_1 = \frac{V_T A_{OL}}{R_1 + R_2} \quad (5.294)$$

所以节点 A 的电压计算公式为:

$$V_{(A)} = I_1 R_1 - V_{(A)} A_{OL} + V_T A_{OL} \quad (5.295)$$

从上式中提取 $V_{(A)}$ 得:

$$V_{(A)} = \frac{R_1 I_1 + V_T A_{OL}}{1 + A_{OL}} \quad (5.296)$$

将式(5.294)和式(5.296)一同带入式(5.293), 重新整理求得 V_T/I_T 表达式为:

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{R_4 (R_1 + R_2) + A_{OL} R_4 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL} (R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \quad (5.297)$$

当 A_{OL} 接近无穷大时, 式(5.297)的计算结果为 0。因此与 A_{OL} 相关的第一时间常数定义式为:

$$\tau_1 = C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2R_2} \quad (5.298)$$

由图 5.62 所示电路计算第二时间常数 τ_2 。从图中右侧简化电路可得：

$$V_T = I_T R_5 + V_{(A)} A_{OL} - V_{(op)} A_{OL} \quad (5.299)$$

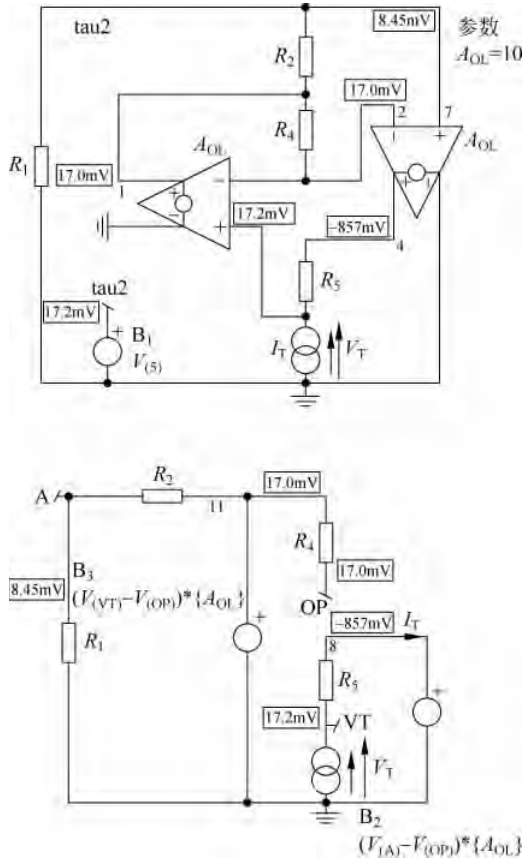


图 5.62 利用简化电路计算时间常数 τ_2

节点 A 处电压表示如下：

$$V_{(A)} = (V_T A_{OL} - V_{op} A_{OL}) \frac{R}{R_1 + R_2} \quad (5.300)$$

求得节点 op 处的电压为：

$$V_{(op)} = V_T A_{OL} - V_{(op)} A_{OL} \quad (5.301)$$

对式(5.301)提取因式 $V_{(op)}$ 整理得：

$$V_{(op)} = \frac{V_T A_{OL}}{1 + A_{OL}} \quad (5.302)$$

现在将式(5.302)代入式(5.300)和式(5.299)重新整理得：

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{R_5(R_1 + R_2) + A_{OL}R_5(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2R_2} \quad (5.303)$$

当 A_{OL} 较大时, 式(5.303)的计算结果为 0。所以第 2 时间常数定义式为：

$$\tau_2 = C_2 \frac{R_5(R_1 + R_2) + A_{OL}R_5(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \quad (5.304)$$

由图 5.63 计算第 3 时间常数。通过对该电路原理进行分析可得如下等式：

$$V_{(B)} = (V_{(A)} - V_{(op)})A_{OL} \quad (5.305)$$

$$V_{(C)} = (V_{(B)} - V_{(op)})A_{OL} \quad (5.306)$$

由于电阻 R_4 中无电流流过,所以:

$$V_{(C)} = V_{(op)} \quad (5.307)$$

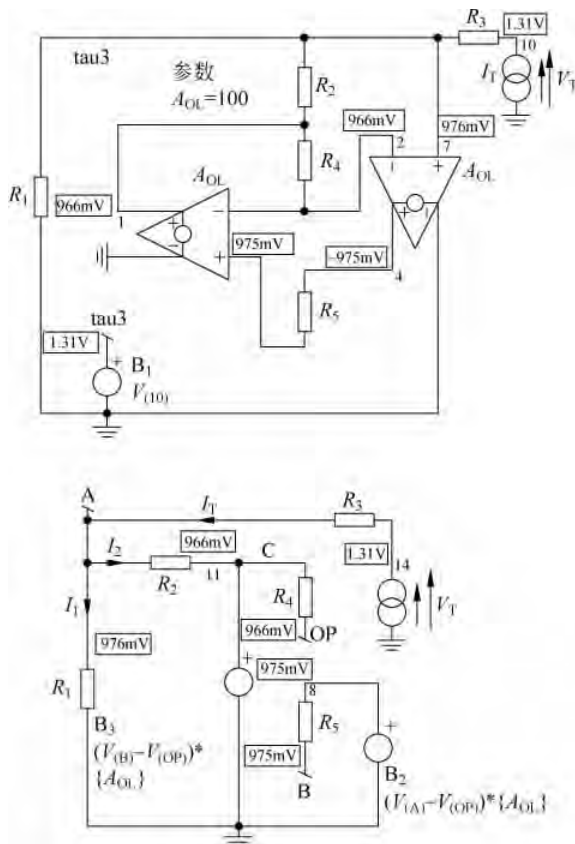


图 5.63 同样利用简化电路计算第 3 时间常数

利用上述等式求得节点电压 $V_{(C)}$ 为:

$$V_{(C)} = \frac{A_{OL}^2 V_{(A)}}{A_{OL}^2 + A_{OL} + 1} \quad (5.308)$$

根据电阻 R_2 两端电压计算电流 I_2 :

$$I_2 = \frac{V_{(A)} - V_{(C)}}{R_2} = \frac{V_{(A)} - \frac{A_{OL}^2 V_{(A)}}{1 + A_{OL} + A_{OL}^2}}{R_2} = \frac{(1 + A_{OL})(V_T - I_T R_3)}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)} \quad (5.309)$$

当电流 I_1 流经电阻 R_1 时节点 A 处电压为:

$$V_{(A)} = R_1 I_1 \quad (5.310)$$

同时

$$V_T = V_{(A)} + I_T R_3 \quad (5.311)$$

整理得:

$$V_{(A)} = V_T - I_T R_3 \quad (5.312)$$

当式(5.310)和式(5.312)相等时可得:

$$I_1 = \frac{V_T - I_T R_3}{R_1} \quad (5.313)$$

因为电流 I_T 为 I_1 和 I_2 之和,所以:

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{V_T - I_T R_3}{R_1} + \frac{(1 + A_{OL})(V_T - I_T R_3)}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)} \quad (5.314)$$

对式(5.314)重新整理,然后提取因式 $\frac{V_T}{I_T}$ 得:

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3(1 + A_{OL})}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1 + A_{OL}}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}} \quad (5.315)$$

于是求得第 3 时间常数为:

$$\tau_3 = C_3 \frac{1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3(1 + A_{OL})}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1 + A_{OL}}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}} \quad (5.316)$$

当 A_{OL} 接近无穷大时,式(5.316)可得到大大简化:

$$\tau_3 = C_3(R_1 + R_3) \quad (5.317)$$

于是求得第一系数 b_1 的表达式为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} + C_2 \frac{R_5(R_1 + R_2) + A_{OL}R_5(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} + C_3 \frac{1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3(1 + A_{OL})}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1 + A_{OL}}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}} \quad (5.318)$$

当 A_{OL} 接近无穷大时,式(5.318)简化为:

$$b_1 = C_3(R_1 + R_3) \quad (5.319)$$

图 5.64 中的电容 C_1 短路,通过计算电容 C_2 的端口电阻求得时间常数 τ_2^1 (直流状态时将电容 C_3 从电路中移除)。

对第一网络分析可得如下等式:

$$V_T = R_5 I_T + (V_{(A)} - V_{(op)})A_{OL} \quad (5.320)$$

节点 A 处电压由电阻 R_1 和 R_2 构成的简单分压器决定,即:

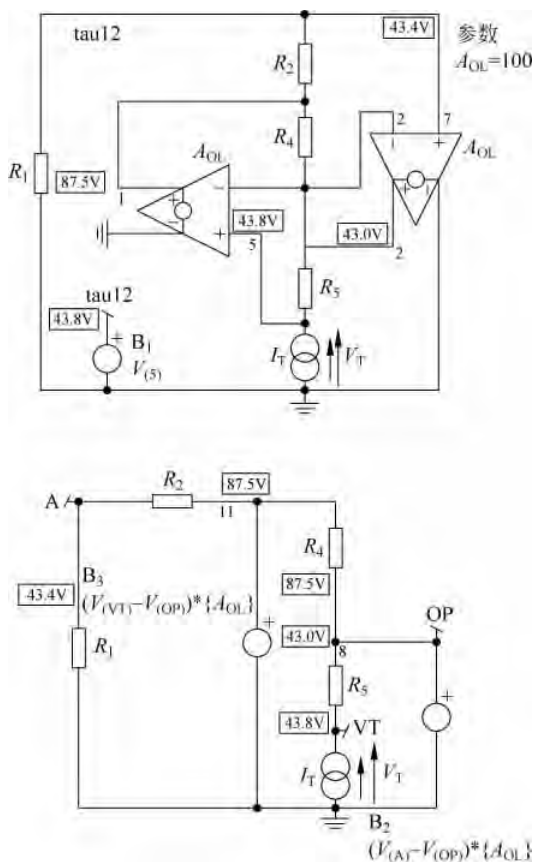
$$V_{(A)} = (V_T A_{OL} - V_{(op)} A_{OL}) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (5.321)$$

节点 op 处电压由如下等式确定:

$$V_{op} = V_T - R_5 I_T \quad (5.322)$$

等价于:

$$V_{op} = V_{(A)} A_{OL} - V_{(op)} A_{OL} \quad (5.323)$$


 图 5.64 当电容 C_1 短路、 C_3 从电路移除时 C_2 两端由电流源 I_T 进行偏置

整理得：

$$V_{(op)} = \frac{V_{(A)} A_{OL}}{1 + A_{OL}} \quad (5.324)$$

由式(5.322)和式(5.324)联立求解 $V_{(A)}$ 得：

$$V_{(A)} = \frac{(V_T - I_T R_5)(1 + A_{OL})}{A_{OL}} \quad (5.325)$$

令式(5.325)与式(5.321)相等,求得 $V_{(op)}$ 表达式为：

$$V_{(op)} = \frac{\left(\frac{(A_{OL} + 1)(V_T - I_T R_5)}{A_{OL}} - \frac{A_{OL} R_1 V_T}{R_1 + R_2} \right) (R_1 + R_2)}{A_{OL} R_1} \quad (5.326)$$

因为式(5.322)与式(5.326)相同,所以将其重新整理得：

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{R_5(R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_1)}{(1 + A_{OL})(R_1 + R_2)} = \frac{R_5 \left(1 + A_{OL} + A_{OL}^2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)}{1 + A_{OL}} \quad (5.327)$$

求得时间常数如下所示：

$$\tau_2^1 = C_2 R_5 \left(1 + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (5.328)$$

随着 A_{OL} 增加时间常数 τ_2^1 逐渐接近无穷大, 当其与 τ_1 相乘时可能产生不确定性。如图 5.65 所示, 短路 C_1 , 通过电容 C_3 端口确定时间常数 τ_3^1 。因为 $V_{(OP)}$ 和 $V_{(B)}$ 处于相同电位, 所以 B_3 输出为 0V 并且电阻 R_2 右端接地, 从而将电路大大简化。求得时间常数为:

$$\tau_3^1 = C_3(R_3 + R_1 \parallel R_2) \quad (5.329)$$

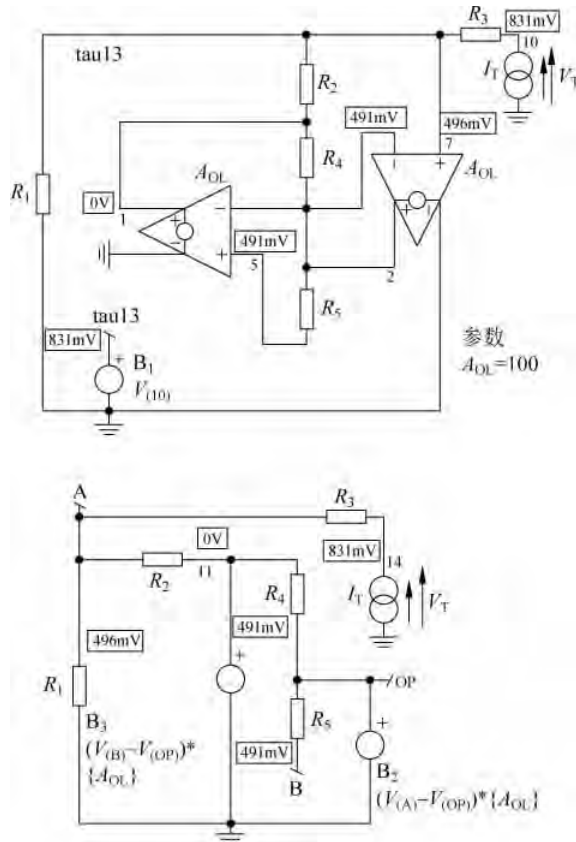


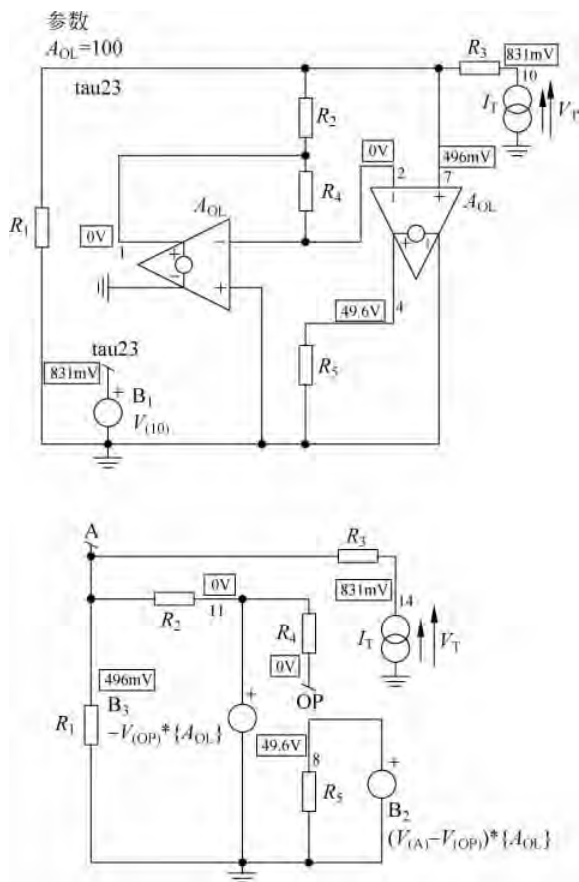
图 5.65 通过观察法可直接求得 C_3 端口电阻值

时间常数 τ_3^2 计算电路图 5.66 与图 5.65 没有差别, 所以两电路的时间常数相似, 同为:

$$\tau_3^2 = C_3(R_3 + R_1 \parallel R_2) \quad (5.330)$$

通过上述计算求得 b_2 表达式为:

$$\begin{aligned} b_2 = \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 = & C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2R_2} \cdot \\ & C_2R_5 \left(1 + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) + \\ & C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2R_2} \cdot \\ & C_3(R_3 + R_1 \parallel R_2) + C_2 \frac{R_5(R_1 + R_2) + A_{OL}R_5(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2R_2} \cdot \\ & C_3(R_3 + R_1 \parallel R_2) \end{aligned} \quad (5.331)$$


 图 5.66 该电路与图 5.65 没有差别,所以 C_3 端口的电阻值相似

那么,当 A_{OL} 接近无穷大时 b_2 表达式的特性如何呢? 此时 $\tau_1\tau_3^1$ 和 $\tau_2\tau_3^2$ 均变为零,然而 $\tau_1\tau_2^1$ 必须进行重新计算才能确定,将其表达式展开得:

$$\tau_1\tau_2^1 = \frac{R_4R_5(R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2R_1)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2R_2}C_1C_2 \quad (5.332)$$

将式(5.332)分解因式 A_{OL}^2 得:

$$\tau_1\tau_2^1 = \frac{R_4R_5\left(\frac{R_1 + R_2}{A_{OL}^2} + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}} + R_1\right)A_{OL}^2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{A_{OL}^2} + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}} + R_2\right)A_{OL}^2}C_1C_2 \quad (5.333)$$

鉴于 A_{OL} 的数值非常大,所以表达式(5.333)简化为:

$$\tau_1\tau_2^1 \approx \frac{R_4R_5R_1}{R_2}C_1C_2 \quad (5.334)$$

当 A_{OL} 接近无穷大时,系数 b_2 的表达式重新整理为:

$$b_2 \approx \frac{R_4R_5R_1}{R_2}C_1C_2 \quad (5.335)$$

将时间常数 τ_3^{12} 与 τ_1 和 τ_2^1 相结合确定系数 b_3 。但是,当 A_{OL} 接近无穷大时时间常数 τ_1

变为 0, 所以电路可能存在不确定性。那么为什么不对时间常数进行重新排列呢? 如图 5.67 所示, 如果计算时间常数选择 τ_2^{13} 而非 τ_3^{12} , 此时电路与图 5.64 相似, 其中 R_3 与 R_1 并联。将式(5.328)更新为如下表达式时, 计算过程将节省大量时间:

$$\tau_2^{13} = C_2 R_5 \left(1 + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \frac{R_1 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_3 + R_2 + R_2} \right) \quad (5.336)$$

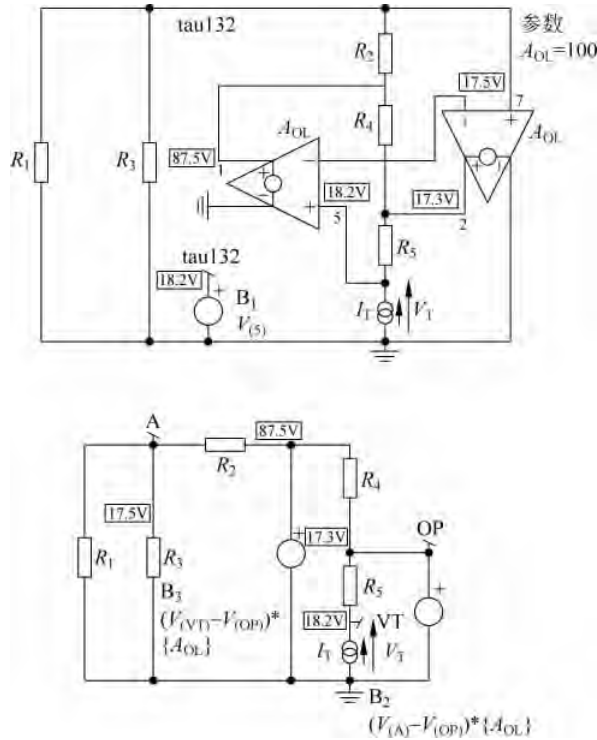


图 5.67 以图 5.64 为参考, 通过将 R_3 与 R_1 并联实现电路简化

为了测试 A_{OL} 接近无穷大时, 系数 b_3 如何变化, 特构建时间常数 $\tau_1 \tau_3^{13} \tau_2^{13}$ 并对其进行简化:

$$\tau_1 \tau_3^{13} \tau_2^{13} = \frac{C_1 C_2 C_3 R_4 R_5 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + A_{OL}^2 R_1 R_3 + A_{OL} R_1 R_2 + A_{OL} R_1 R_3 + A_{OL} R_2 R_3)}{R_1 + R_2 + A_{OL} (R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \quad (5.337)$$

分解因式 A_{OL}^2 可得:

$$\tau_1 \tau_3^{13} \tau_2^{13} = \frac{C_1 C_2 C_3 R_4 R_5 \left(\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{A_{OL}^2} + R_1 R_3 + \frac{A_{OL} R_1 R_2}{A_{OL}^2} + \frac{A_{OL} R_1 R_3}{A_{OL}^2} + \frac{A_{OL} R_2 R_3}{A_{OL}^2} \right) A_{OL}^2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{A_{OL}^2} + \frac{A_{OL} (R_1 + R_2)}{A_{OL}^2} + R_2 \right) A_{OL}^2} \quad (5.338)$$

当 A_{OL} 接近无穷大时上述表达式简化为:

$$\tau_1 \tau_3^{13} \tau_2^{13} \approx \frac{C_1 C_2 C_3 R_4 R_5 R_1 R_3}{R_2} \quad (5.339)$$

现在将上述时间常数计算结果进行组合, 形成包含运算放大器开环增益效应的系数 b_3 的表达式为:

$$b_3 = \tau_1 \tau_3^1 \tau_2^{13} = C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \\ C_3(R_3 + R_1 \parallel R_2)C_2R_5 \left(1 + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \frac{R_1 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_3 + R_2} \right) \quad (5.340)$$

当 A_{OL} 接近无穷大时, 系数 b_3 简化为:

$$b_3 \approx \frac{C_1 C_2 C_3 R_4 R_5 R_1 R_3}{R_2} \quad (5.341)$$

将所有系数 b 组合整理得完整分母 $D(s)$ 表达式为:

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + s^2(\tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2) + s^3 \tau_1 \tau_3^1 \tau_2^{13} \\ = 1 + s \left[C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} + \right. \\ \left. C_2 \frac{R_5(R_1 + R_2) + A_{OL}R_5(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} + C_3 \frac{1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3(1 + A_{OL})}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1 + A_{OL}}{R_2(1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}} \right] + \\ s^2 \left[C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \cdot \right. \\ \left. C_2 R_5 \left(1 + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) + C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \cdot \right. \\ \left. C_3(R_3 + R_1 \parallel R_2) + C_2 \frac{R_5(R_1 + R_2) + A_{OL}R_5(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \cdot \right. \\ \left. C_3(R_3 + R_1 \parallel R_2) \right] + \\ s^3 \left[C_1 \frac{R_4(R_1 + R_2) + A_{OL}R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL}(R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \cdot \right. \\ \left. C_3(R_3 + R_1 \parallel R_2)C_2R_5 \left(1 + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \frac{R_1 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_3 + R_2} \right) \right] \quad (5.342)$$

当开环增益 A_{OL} 非常大时, 分母表达式简化为:

$$D(s) \approx 1 + C_3(R_1 + R_3)s + \frac{R_4 R_5 R_1}{R_2} C_1 C_2 s^2 + \frac{C_1 C_3^2 R_4 R_5 R_1 R_3}{R_2} s^3 \quad (5.343)$$

接下来求解分子表达式, 首先由图 5.68 计算准静态增益 H_0 。

由图 5.68 求得电流 I_1 为:

$$I_1 = \frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} \quad (5.344)$$

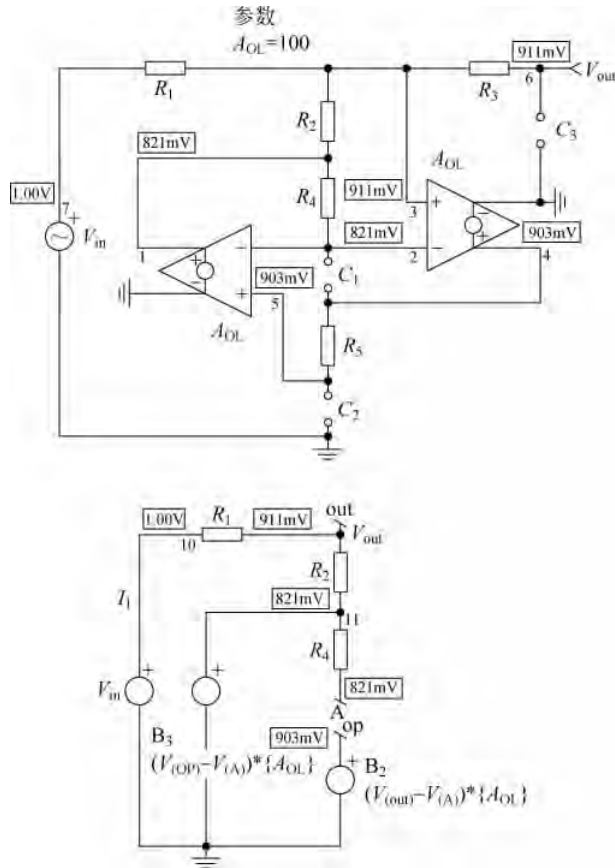
因为电阻 R_4 中无电流流过, 所以式(5.344)等价于:

$$I_1 = \frac{V_{out} - A_{OL}(V_{(op)} - V_{(A)})}{R_2} \quad (5.345)$$

节点 op 处的电压定义式为:

$$V_{(op)} = V_{out} A_{OL} - V_{(A)} A_{OL} \quad (5.346)$$

节点 A 处电压为输出电压 V_{out} 与电阻 R_2 两端电压之差。利用式(5.344)计算 I_1 , 整理得节点 A 处电压为:

图 5.68 所有电容全部开路时计算增益 H_0

$$V_{(A)} = V_{out} - R_2 I_1 = V_{out} - R_2 \frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} \quad (5.347)$$

将式(5.347)代入式(5.346)求得节点 op 电压定义式为:

$$V_{(op)} = \frac{A_{OL} R_2 (V_{in} - V_{out})}{R_1} \quad (5.348)$$

当节点 op 处电压由式(5.348)替代,并且令式(5.344)和式(5.345)相等时可得:

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} = \frac{R_1 V_{out} - A_{OL}^2 R_2 V_{in} + A_{OL}^2 R_2 V_{out} + A_{OL} R_1 V_{(A)}}{R_1 R_2} \quad (5.349)$$

由式(5.347)替代式(5.349)中的 $V_{(A)}$,并且分解因式得:

$$H_0 = \frac{R_2 (1 + A_{OL} + A_{OL}^2)}{R_1 + R_2 + A_{OL} (R_1 + R_2) + A_{OL}^2 R_2} \quad (5.350)$$

分解因式 A_{OL}^2 可得:

$$H_0 = \frac{A_{OL}^2 R_2 \left(\frac{1}{A_{OL}^2} + \frac{1}{A_{OL}} + 1 \right)}{A_{OL}^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{A_{OL}^2} + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}} + R_2 \right)} \quad (5.351)$$

当 A_{OL} 非常大时,简化为:

$$H_0 \approx 1 \quad (5.352)$$

如图 5.69 所示,通过短路 C_1 求得第一增益 H^1 。由于左侧运算放大器的两输入端均处于相同电位,因此输出电压为 0V,并将电阻 R_2 低端接地。 R_2 和 R_1 构成简单电阻分压器,从而增益为:

$$H^1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.353)$$

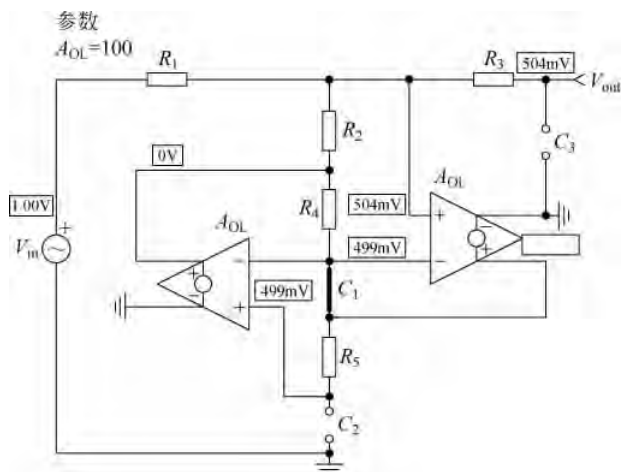


图 5.69 电容 C_1 短路时左侧运算放大器的两输入端处于相同电位,此时计算增益 H^1

如图 5.70 所示,由于 C_2 短路,所以左侧运放同相输入端接地,使得 R_2 低端电位为 0V,从而增益 H^2 表达式与 H^1 相同,即:

$$H^2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.354)$$

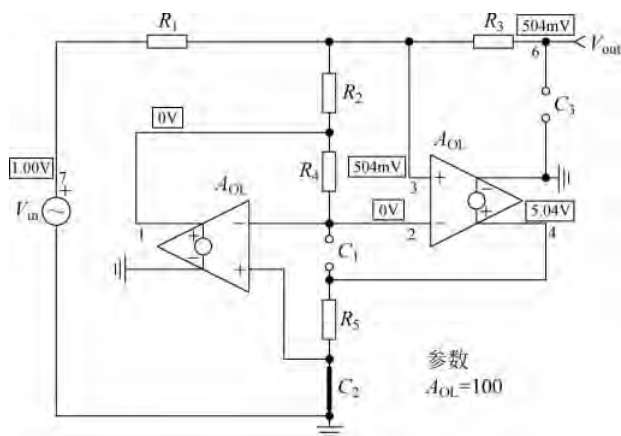


图 5.70 电容 C_2 短路时计算增益 H^2

当 C_3 短路时增益 H^3 以及与其相关的增益全部为零,因此:

$$H^3 = H^{13} = H^{23} = H^{123} = 0 \quad (5.355)$$

利用图 5.71 所示电路计算时间常数 H^{12} 。根据电路方程求解通过电阻 R_1 和 R_2 的电

流 I_1 为:

$$I_1 = \frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} = \frac{V_{out} - V_{(A)}}{R_2} \quad (5.356)$$

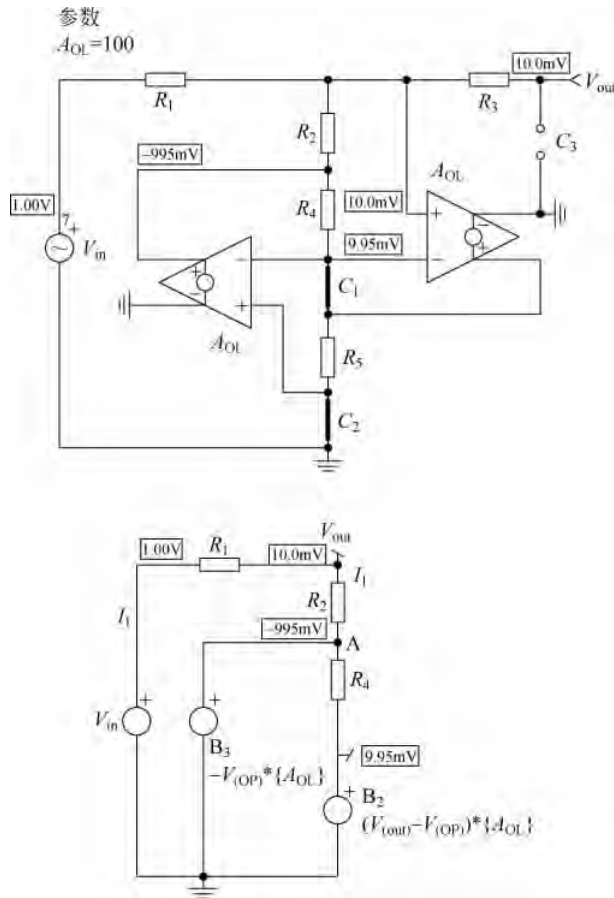


图 5.71 利用特定简化电路图计算增益 H^{12}

根据式(5.356)求得节点 A 处电压为:

$$V_{(A)} = \frac{R_1 V_{out} - R_2 V_{in} + R_2 V_{out}}{R_1} \quad (5.357)$$

同时节点 A 处电压也可定义为:

$$V_{(A)} = -V_{(op)} A_{OL} \quad (5.358)$$

其中节点 op 处电位为:

$$V_{(op)} = A_{OL}(V_{out} - V_{(op)}) \quad (5.359)$$

由式(5.359)可得:

$$V_{(op)} = \frac{A_{OL} V_{out}}{1 + A_{OL}} \quad (5.360)$$

将式(5.360)代入式(5.358)整理得:

$$V_{(A)} = -\frac{A_{OL}^2 V_{out}}{1 + A_{OL}} \quad (5.361)$$

令式(5.361)与式(5.357)相等,重新整理求得增益 H^{12} 表达式为:

$$H^{12} = \frac{R_2}{R_1 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \right)} \quad (5.362)$$

当运算放大器开环增益增加时, H^{12} 将变为 0。计算增益 H^{123} 时令电容 C_3 短路,求得增益为:

$$H^{123} = 0 \quad (5.363)$$

将上述计算进行组合,整理得分子 $N(s)$ 表达式为:

$$N(s) = H_0 + s(\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3) + s^2(\tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23}) + s^3(\tau_1 \tau_3^1 \tau_2^1 H^{123}) \quad (5.364)$$

式(5.364)中包含各种时间常数的所有原始定义。通过表达式可以得到运放增益 A_{OL} 对动态响应的影响。鉴于多项增益为零,所以式(5.364)最终简化为:

$$N(s) = H_0 + s(\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2) + s^2 \tau_1 \tau_2^1 H^{12} \quad (5.365)$$

如果增益 A_{OL} 非常大,则分子表达式 $N(s)$ 简化为 1。现在拥有两个传递函数,一个是包括运算放大器开环增益效应的综合函数,另一个为 A_{OL} 无限大时的简化函数:

$$H(s) = H_0 \frac{Hs \left(\frac{\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2}{H_0} \right) + s^2 \frac{\tau_1 \tau_2^1 H^{12}}{H_0}}{1 + s(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + s^2(\tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2) + s^3 \tau_1 \tau_3^1 \tau_2^1} \quad (5.366)$$

当 A_{OL} 无限大时,简化为:

$$H(s) \approx \frac{1}{1 + C_3(R_1 + R_3)s + \frac{R_4 R_5 R_1}{R_2} C_1 C_2 s^2 + \frac{C_1 C_2 C_3 R_4 R_5 R_1 R_3}{R_2} s^3} \quad (5.367)$$

如第 2 章所述,当 3 阶分母表达式为主导低频极点与两重合极点相乘的形式时可以进行重新组合。利用最终曲线能够检验简化表达式与原始表达式(5.366)的具体差别。根据第 2 章定义可得:

$$\omega_p = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{C_3(R_1 + R_3)} \quad (5.368)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} = \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_3)}{C_1 C_3 R_1 R_3 R_4 R_5}} \quad (5.369)$$

$$Q = \frac{b_1 b_3 \sqrt{\frac{b_1}{b_3}}}{b_1 b_2 - b_3} = \frac{C_2 C_3 R_1 R_3 R_4 R_5 (R_1 + R_3) \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_3)}{C_1 C_3 R_1 R_3 R_4 R_5}}}{C_2 R_1^2 R_4 R_5 + R_1 R_3 R_4 R_5 (C_2 - C_3)} \quad (5.370)$$

因此简化传递函数为:

$$H(s) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)} \quad (5.371)$$

图 5.72 为电路的全部 Mathcad 计算程序,图 5.73 为其频率特性曲线——开环增益为 100k 或 100dB。完整表达式 H_{10} 及其简化表达式 H_{20} 均预测出该电路为未峰化的低通滤波器,并且含有高频陷波电路。当 $N(s)$ 假定为 1 并且无陷波器时 H_{30} 的频率响应曲线与实际测试非常一致。最后,如果按照 H_{40} 绘制表达式(5.371)的特性曲线,则截止频率处存在微小增益偏差和不匹配。

最后利用 SPICE 仿真对 GIC 滤波器电路进行验证,具体电路如图 5.74 所示,该图包括仿真和理论分析结果,两者完美匹配——验证计算正确。

$$R_1 := 0.9852\Omega \quad R_2 := 1\Omega \quad R_3 := 0.335\Omega \quad R_4 := 1\Omega \quad R_5 := 0.8476\Omega \quad A_{OL} := 10^5$$

$$C_1 := 3.98\mu\text{F} \quad C_2 := 3.98\mu\text{F} \quad C_3 := 3.98\mu\text{F} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

□

$$\tau_1 := C_1 \cdot \frac{R_1 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_4 + A_{OL} \cdot R_4 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL} \cdot (R_1 + R_2) + A_{OL}^2 \cdot R_2} = 7.90102 \times 10^{-5} \mu\text{s}$$

$$\tau_2 := \frac{R_5 \cdot (R_1 + R_2) + A_{OL} \cdot R_5 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_{OL} \cdot (R_1 + R_2) + A_{OL}^2 \cdot R_2} \cdot C_2 = 6.91023 \times 10^{-5} \mu\text{s}$$

$$\tau_3 := C_3 \cdot \left[\frac{1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3 \cdot (A_{OL} + 1)}{R_2 \cdot (A_{OL}^2 + A_{OL} + 1)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{A_{OL} + 1}{R_2 \cdot (A_{OL}^2 + A_{OL} + 1)}} \right] = 5.25436 \mu\text{s}$$

$$\tau_{12} := C_2 \left[R_5 \cdot \left(1 + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \right] = 1.7275 \times 10^5 \mu\text{s}$$

$$\tau_{13} := [R_3 + (R_1 \parallel R_2)] \cdot C_3 = 3.30846 \mu\text{s}$$

$$\tau_{23} := [R_3 + (R_1 \parallel R_2)] \cdot C_3 = 3.30846 \mu\text{s}$$

$$\tau_{132} := \left[R_5 \cdot \left(1 + \frac{A_{OL}^2}{1 + A_{OL}} \cdot \frac{R_1 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_3 + R_2} \right) \right] \cdot C_2 = 6.96196 \times 10^4 \mu\text{s}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 5.25451 \cdot \mu\text{s} \quad b_{11} := C_3 \cdot (R_1 \parallel R_3) = 5.2544 \mu\text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 13.64947 \cdot \mu\text{s}^2 \quad b_{22} := \frac{R_1 \cdot R_5 \cdot R_1}{R_2} \cdot C_1 \cdot C_2 = 13.64897 \mu\text{s}^2$$

$$b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{132} = 18.19873 \cdot \mu\text{s}^3 \quad b_{33} := \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_5 \cdot R_1 \cdot R_3}{R_2} = 18.19818 \mu\text{s}^3$$

$$D_1(s) := 1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3 \quad D_2(s) := 1 + b_{11} \cdot s + b_{22} \cdot s^2 + b_{33} \cdot s^3$$

$$H_0 := \frac{R_2 \cdot (A_{OL}^2 + A_{OL} + 1)}{R_1 + R_2 + A_{OL} \cdot R_1 + A_{OL} \cdot R_2 + A_{OL}^2 \cdot R_2} = 0.99999$$

$$H_1 := \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.50373 \quad H_2 := \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.50373 \quad H_3 := 0$$

$$H_{12} := \frac{R_2}{R_1 \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} + \frac{A_{OL}^2}{A_{OL} + 1} \right)} = 1.01501 \times 10^{-5} \quad H_{13} := 0 \quad H_{23} := 0 \quad H_{123} := 0$$

$$a_1 := \tau_1 \cdot H_1 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3 = 0.07461 \text{ns}$$

$$a_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot H_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23} = 1.38539 \times 10^{-4} \mu\text{s}^2$$

$$a_3 := \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{132} \cdot H_{123} = 0$$

$$N_1(s) := H_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 \quad N_2(s) := H_0 + s(\tau_1 \cdot H_1 + \tau_2 \cdot H_2) + s^2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} + s^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{132} \cdot H_{123}$$

$$H_{10}(s) := \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad H_{20}(s) := \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad H_{30}(s) := \frac{1}{D_2(s)}$$

$$\omega_p := \frac{1}{b_{11}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 30.28986 \text{kHz} \quad Q := \frac{b_{11} \cdot b_{33} \cdot \sqrt{\frac{b_{11}}{b_{33}}}}{b_{11} \cdot b_{22} - b_{33}} = 0.96004 \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{b_{11}}{b_{33}}}$$

$$f_0 := \frac{\omega_0}{2\pi} = 85.51998 \text{kHz}$$

$$\frac{C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot (R_1 + R_3) \cdot \sqrt{\frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{C_1 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5}}}{C_2 \cdot R_1^2 \cdot R_4 \cdot R_5 + (R_1 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5) \cdot (C_2 - C_3)} = 0.96004$$

$$\sqrt{\frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{C_1 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5}} \cdot \frac{1}{2\pi} = 85.51998 \text{kHz}$$

$$D_3(s) := \left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right) \cdot \left[1 + \frac{s}{\omega_0 \cdot Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

$$H_{40}(s) := \frac{1}{D_3(s)}$$

图 5.72 利用 Mathcad 计算全部时间常数并对简化表达式进行检验

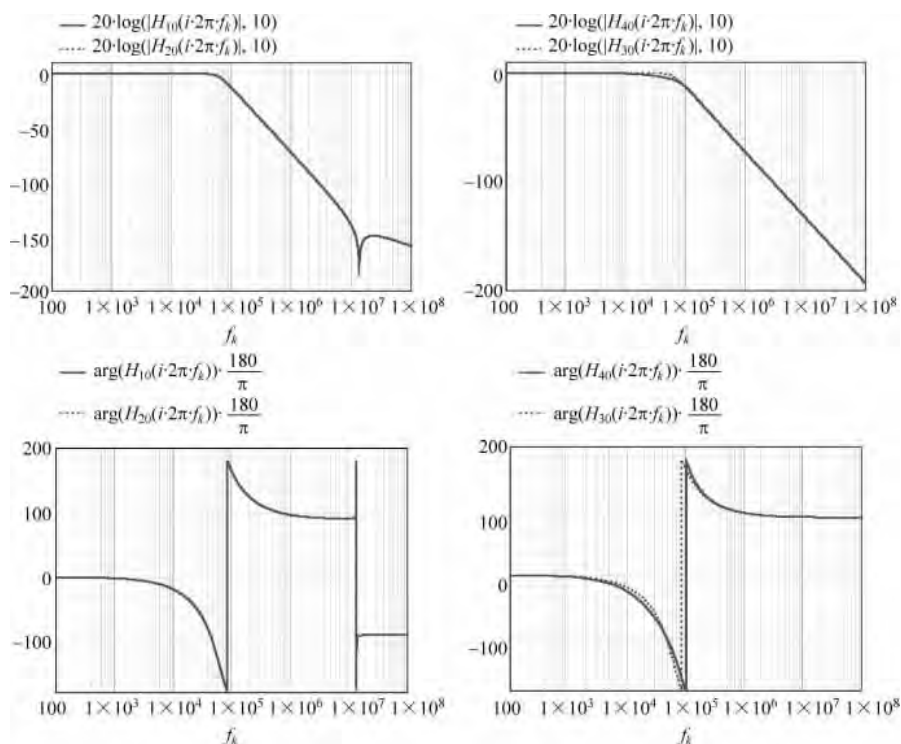


图 5.73 完整表达式频率特性曲线：受高频开关影响的低通滤波器

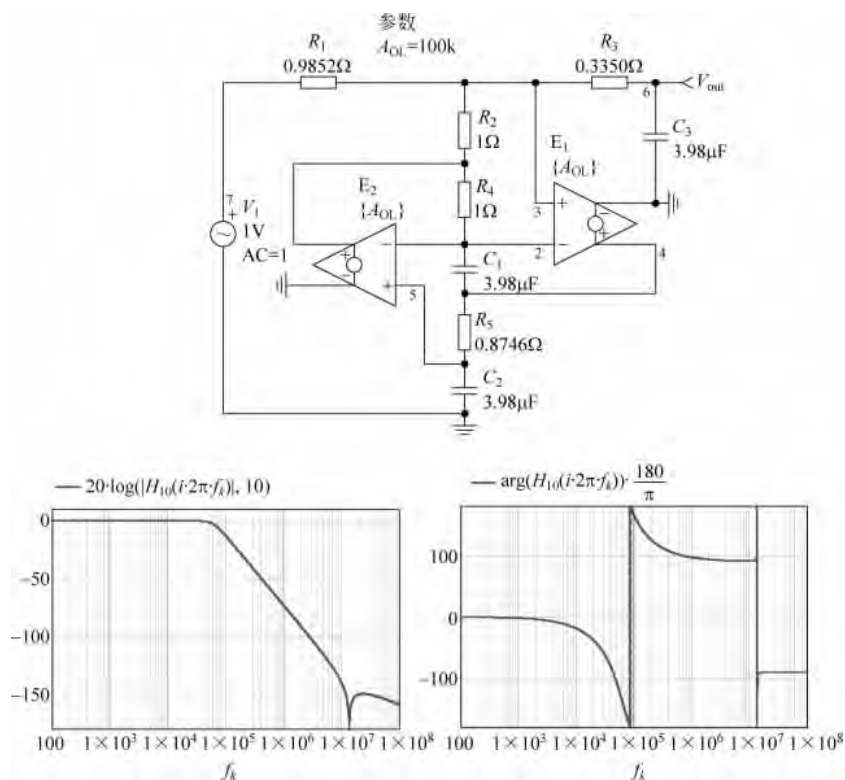


图 5.74 SPICE 仿真与理论分析完全一致

5.3 本章重点

第 5 章更加深入地对 n 阶电路进行探讨。以下为本章所学内容总结：

(1) 与前几章所学相比,处理高阶电路网络并不复杂。分子和分母中所含项数更多,但计算过程仍然一致。求解成功与否主要取决于电路网络分割——每个电路对应分母和分子的相应时间常数计算。

(2) 当求解高阶传递函数时需设定参考电路,将其所有储能元件全部设定为直流状态:首先在 $s=0$ 时观察电路,此时电容开路并且电感短路。SPICE 软件进行任何类型仿真之前首先进行偏差点计算。应当注意,也可将 s 接近无穷大时设定为参考状态,然后将储能元件交替设置为其直流状态。上述方式同样为一种可能选择,但是设定 $s=0$ 对于工程师更加直观。

(3) 系数 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 的数量由电路阶数 n 决定。利用二项表达式有助于确定系数的具体数量。利用通用公式能够确定系数中存在的时间常数组组合。因为存在时间常数冗余,所以必须对其进行重新组合:①寻求更简单方法求解中间电路;②消除不确定性。

(4) n 阶分子和分母表达式有时可以按质量因数 Q 和谐振频率 ω_0 的规范形式进行重新排列。当忽略某些元件时可以采用近似表达式,但是最终动态响应精度往往受到影响。

(5) 通过复杂实例证明利用电路分析技术能够更加快速地求得最终结果。强烈建议利用 Mathcad 和 SPICE 等现有工具求解特定电路网络的传递函数。首先计算每个时间常数,然后将其进行组合构成分子和分母系数。如果发现某个系数计算错误时,首先要确定问题时间常数。最后,当分析包含受控源的复杂电路结构时,利用 SPICE 软件中的简单直流工作点分析可立即检验所得表达式是否正确。

5.4 附录 5A——习题

5.4.1 习题内容

1. 习题 1

求解图 5.75 所示的 RC 电路网络的传递函数。

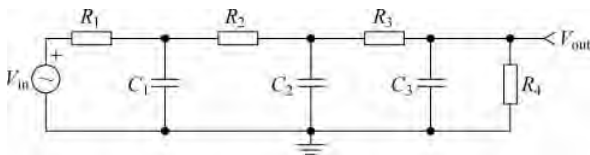


图 5.75 习题 1 图

2. 习题 2

求解图 5.76 所示的 RL 电路网络的传递函数。

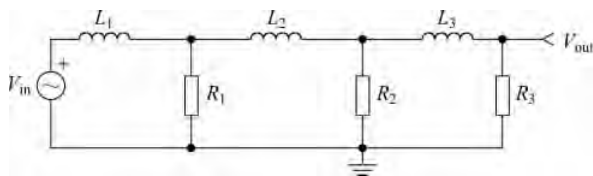


图 5.76 习题 2 图

3. 习题 3

求解图 5.77 所示的扬声器滤波电路的传递函数。

4. 习题 4

求解图 5.78 所示的滤波器的输出阻抗。

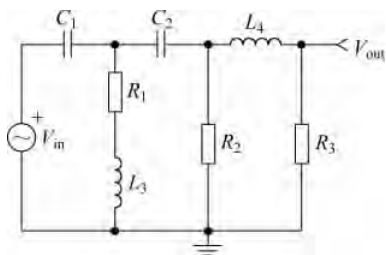


图 5.77 习题 3 图

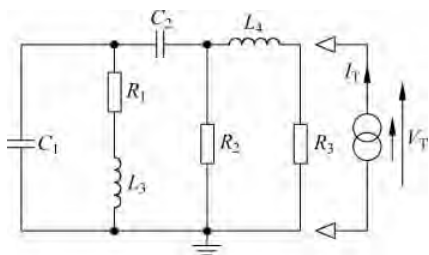


图 5.78 习题 4 图

5. 习题 5

求解图 5.79 所示电路网络的传递函数。

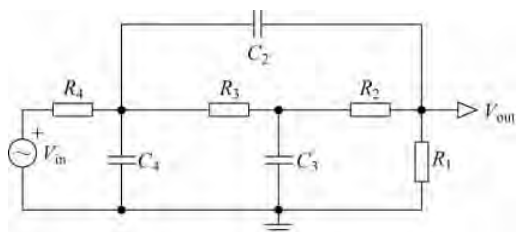


图 5.79 习题 5 图

6. 习题 6

求解图 5.80 所示电路的输出电压与输入电流关系式。

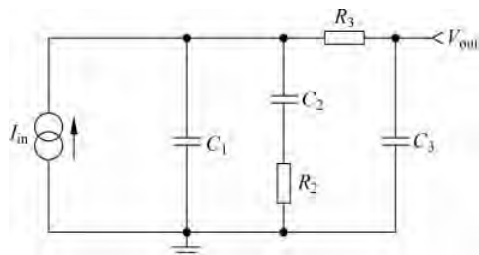


图 5.80 习题 6 图

7. 习题 7

利用快速分析技术求解图 5.81 所示电路网络阻抗。

8. 习题 8

求解图 5.82 所示电路网络传递函数。

9. 习题 9

求解图 5.83 所示扬声器模型阻抗。

10. 习题 10

求解图 5.84 所示电路传递函数。

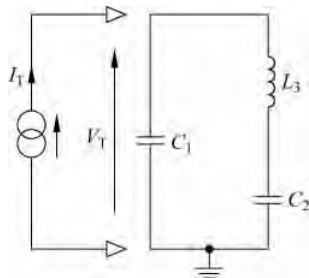


图 5.81 习题 7 图

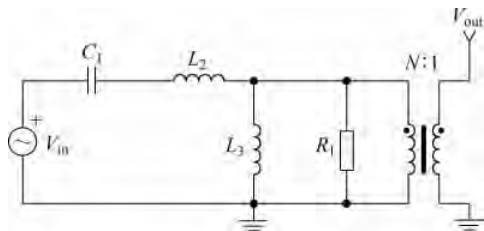


图 5.82 习题 8 图

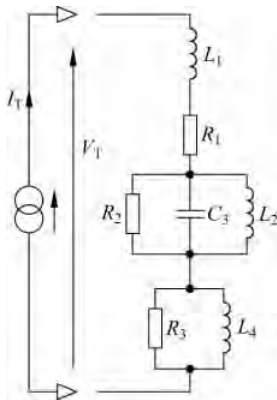


图 5.83 习题 9 图

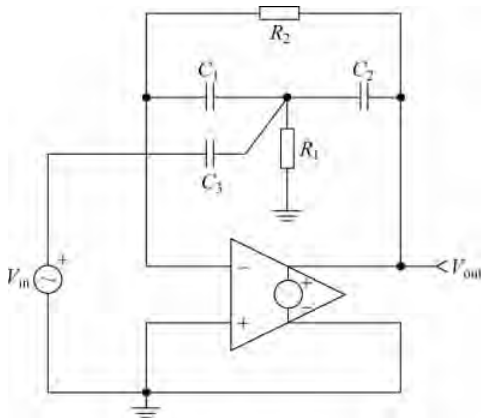


图 5.84 习题 10 图

5.4.2 习题答案

1. 习题 1

图 5.85 详细列出求解 3 阶滤波网络分母表达式的分解电路。准静态增益 H_0 由电阻 R_4 与其他串联电阻构成的电阻分压器确定, 具体计算公式为:

$$H_0 = \frac{R}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (5.372)$$

第一时间常数由图 5.85(b) 获得, 通过被选电容端口确定其驱动电阻。由图 5.85 可求得如下时间常数:

$$\tau_1 = [R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1 \quad (5.373)$$

$$\tau_2 = [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]C_2 \quad (5.374)$$

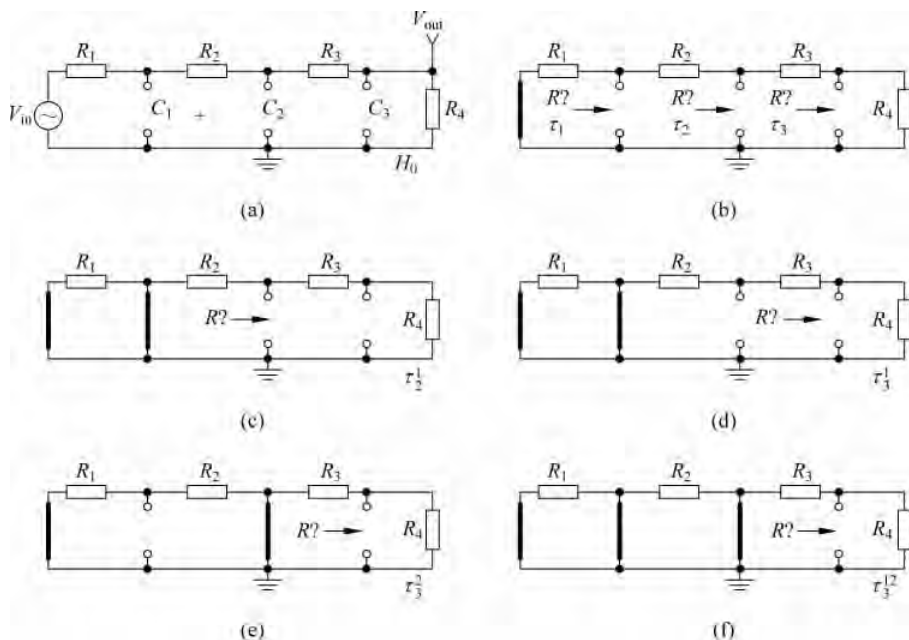


图 5.85 将电路网络分解为独立电路,以求解各种时间常数

$$\tau_3 = [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_3 \quad (5.375)$$

于是 b_1 为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = [R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1 + [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]C_2 + [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_3 \quad (5.376)$$

由图 5.85(c)~图 5.85(e)求得高阶时间常数为:

$$\tau_2^1 = [R_2 \parallel (R_3 + R_4)]C_2 \quad (5.377)$$

$$\tau_3^1 = [R_4 \parallel (R_2 + R_3)]C_3 \quad (5.378)$$

$$\tau_3^2 = (R_4 \parallel R_3)C_3 \quad (5.379)$$

则系数 b_2 为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 \\ &= [R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1 [R_2 \parallel (R_3 + R_4)]C_2 + \\ &\quad [R_1 \parallel (R_1 + R_3 + R_4)]C_1 [R_4 \parallel (R_2 + R_3)]C_3 + \\ &\quad [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]C_2 (R_4 \parallel R_3)C_3 \end{aligned} \quad (5.380)$$

最后由图 5.85(f)求得最后一个时间常数为:

$$\tau_3^{12} = (R_3 \parallel R_4)C_3 \quad (5.381)$$

分母中最后项 b_3 为:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} = [R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1 [R_2 \parallel (R_3 + R_4)]C_2 (R_3 \parallel R_4)C_3 \quad (5.382)$$

根据上述计算求得分母 $D(s)$ 表达式为:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 \\ &= 1 + s [R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1 + [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]C_2 + \\ &\quad [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_3 + \\ &\quad s^2 \left[[R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1 [R_2 \parallel (R_3 + R_4)]C_2 + \right. \\ &\quad \left. [R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1 [R_4 \parallel (R_2 + R_3)]C_3 + \right. \\ &\quad \left. [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]C_2 (R_4 \parallel R_3)C_3 + \right] \\ &\quad s^3 [R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1 [R_2 \parallel (R_3 + R_4)]C_2 (R_3 \parallel R_4)C_3 \end{aligned}$$

$$s^3([R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)]C_1[R_2 \parallel (R_3 + R_4)]C_2(R_3 \parallel R_4)C_3) \quad (5.383)$$

当任何一个电容设置为高频状态时,输出响应均为零,所以电路网络中不存在零点,即该电路网络的传递函数为:

$$H(s) = \frac{1}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3} \quad (5.384)$$

如果将极点分离,则上述传递函数可表达如下:

$$H(s) \approx \frac{1}{(1 + b_1 s) \left(1 + s \frac{b_2}{b_1}\right) \left(1 + s \frac{b_3}{b_2}\right)} \quad (5.385)$$

接下来利用“原始”传递函数作为参考,对所得传递函数表达式进行测试。将图 5.75 电路网络分解为两个戴维南电路。第一个戴维南电路受其输出阻抗影响,阻抗计算公式为:

$$R_{th1}(s) = \left(\frac{1}{sC_1}\right) \parallel R_1 \quad (5.386)$$

而第二个电路的阻抗为:

$$R_{th2}(s) = (R_{th1}(s) + R_2) \parallel \left(\frac{1}{sC_2}\right) \quad (5.387)$$

所得完整传递函数表达式为:

$$H_{ref}(s) = \frac{\frac{1}{sC_1}}{\frac{1}{sC_1} + R_1} \cdot \frac{\frac{1}{sC_2}}{R_{th1}(s) + R_2 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{sC_3}\right) \parallel R_4}{\left(\frac{1}{sC_3}\right) \parallel R_4 + R_{th2}(s) + R_3} \quad (5.388)$$

Mathcad 计算结果如图 5.86 所示,通过频率特性曲线证明式(5.384)和式(5.388)非常一致。

为了将两传递函数的幅频和相频曲线进行更精确对比,可将其差值分别绘制输出。如果两曲线完全相同则其误差将会非常小,具体如图 5.87 所示。

2. 习题 2

利用图 5.88 中各分离电路计算 3 阶滤波器网络的分子表达式。因为电路进行直流分析时所有电感均短路,所以可直接求得电路的准静态增益值。由图 5.88(a)得:

$$H_0 = 1 \quad (5.389)$$

由图 5.88(b)~(d)分别计算电路的 3 个第一时间常数,具体计算公式为:

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} \quad (5.390)$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_2 \parallel R_3} \quad (5.391)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{R_3} \quad (5.392)$$

系数 b_1 由式(5.390)、式(5.391)和式(5.392)相加组成,即:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} + \frac{L_2}{R_2 \parallel R_3} + \frac{L_3}{R_3} \quad (5.393)$$

利用时间常数 τ_2^1 、 τ_3^1 和 τ_3^2 计算系数 b_2 ,上述时间常数分别通过电路图 5.88(e)、(f)、(g) 进行计算:

$$R_1 := 1\text{k}\Omega \quad R_2 := 2.2\text{k}\Omega \quad R_3 := 3.3\text{k}\Omega \quad R_4 := 1\text{k}\Omega$$

$$\parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y} \quad C_1 := 2.2\text{nF} \quad C_2 := 1\text{nF} \quad C_3 := 10\text{nF}$$

④

$$H_0 := \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 0.133 \quad R_{\text{th1}}(s) := \left(\frac{1}{s \cdot C_1} \right) \parallel R_1 \quad R_{\text{th2}}(s) = (R_{\text{th1}}(s) + R_2) \parallel \left(\frac{1}{s \cdot C_2} \right)$$

$$\tau_1 := [R_1 \parallel (R_2 + R_3 + R_4)] \cdot C_1 = 1.907\mu\text{s}$$

$$H_{\text{ref}}(s) := \frac{\frac{1}{s \cdot C_1}}{\frac{1}{s \cdot C_1} + R_1} \cdot \frac{\frac{1}{s \cdot C_2}}{R_{\text{th1}}(s) + R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{s \cdot C_3} \right) \parallel R_4}{\left(\frac{1}{s \cdot C_3} \right) \parallel R_4 + R_{\text{th2}}(s) + R_3}$$

$$\tau_2 := [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)] \cdot C_2 = 1.835\mu\text{s}$$

$$\tau_3 := [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)] \cdot C_3 = 8.667\mu\text{s}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 12.408\mu\text{s}$$

$$\tau_{12} := [R_2 \parallel (R_3 + R_4)] \cdot C_2 = 1.455\mu\text{s}$$

$$\tau_{13} := [R_4 \parallel (R_2 + R_1)] \cdot C_3 = 8.462\mu\text{s}$$

$$\tau_{23} := (R_4 \parallel R_3) \cdot C_3 = 7.674\mu\text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 32.988\mu\text{s}^2$$

$$\tau_{123} := (R_3 \parallel R_4) \cdot C_3 = 7.674\mu\text{s}$$

$$b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 21.296\mu\text{s}^3$$

$$H_1(s) := H_0 \cdot \frac{1}{1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3} \quad H_2(s) := H_0 \cdot \frac{1}{(1 + b_1 \cdot s) \cdot \left(1 + s \cdot \frac{b_2}{b_1} \right) \cdot \left(1 + s \cdot \frac{b_3}{b_2} \right)}$$

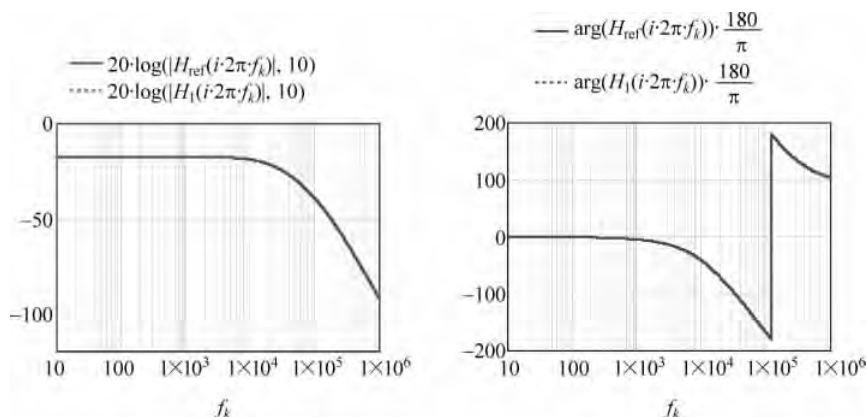


图 5.86 利用 Mathcad 验证原始传递函数与表达式(5.384)的频率特性非常一致

$$\tau_2^1 = \frac{L_2}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \quad (5.394)$$

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{R_3 + R_2 \parallel R_1} \quad (5.395)$$

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{R_3 + R_2} \quad (5.396)$$

系数 b_2 的计算公式为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 \\ &= \frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} \frac{L_2}{R_1 + R_2 \parallel R_3} + \frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} \frac{L_3}{R_3 + R_2 \parallel R_1} + \\ &\quad \frac{L_2}{R_2 \parallel R_3} \frac{L_3}{R_3 + R_2} \end{aligned} \quad (5.397)$$

通过电感 L_3 两端点计算最后一个时间常数,此时电感 L_1 和 L_2 设置为高频状态(开

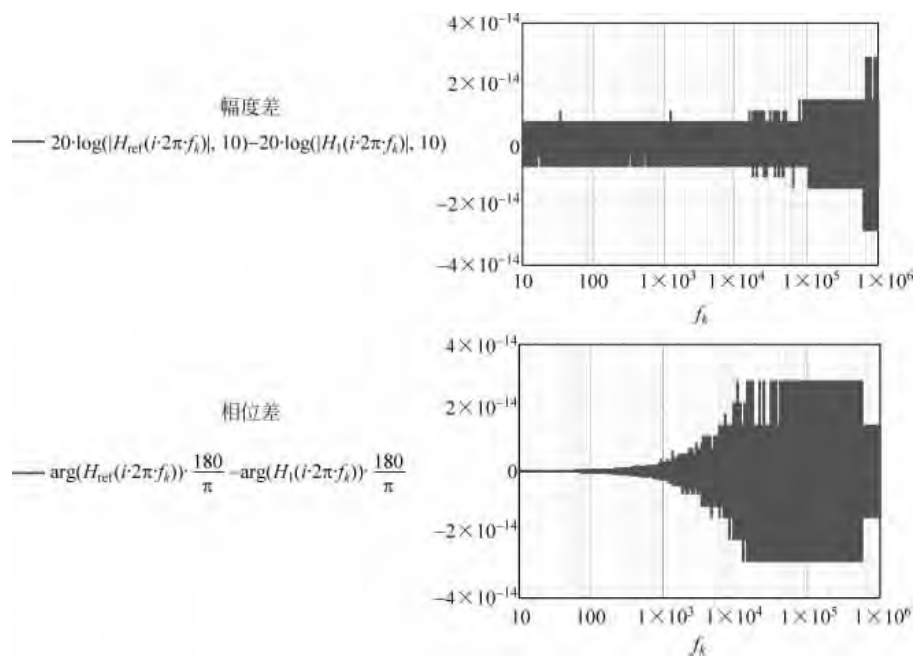


图 5.87 利用幅频和相频曲线差值对两传递函数进行更精确对比。由图可得两传递函数之间的误差在噪声范围内,所以两者非常一致

路),具体电路如图 5.88(h)所示,求得时间常数为:

$$\tau_3^{12} = \frac{L_3}{R_3 + R_2} \tag{5.398}$$

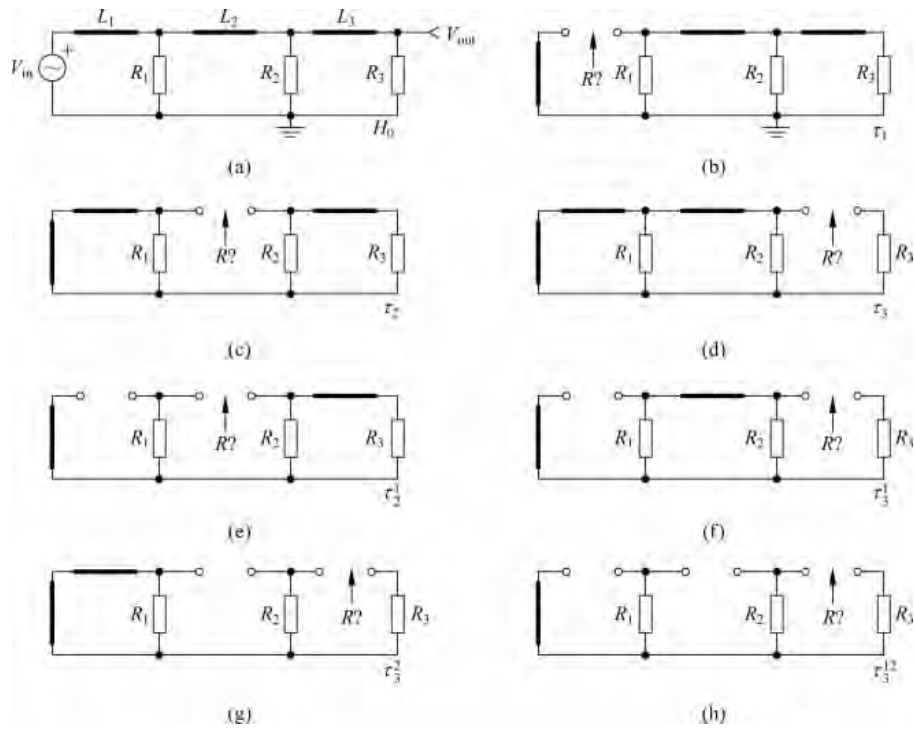


图 5.88 将电路网络分解成独立电路图,以便于计算各种时间常数

根据上述计算求得系数 b_3 的表达式为:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2 \tau_3^{12} = \frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} \frac{L_2}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \frac{L_3}{R_3 + R_2} \quad (5.399)$$

从而求得最终分母表达式为:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 \\ &= 1 + s \left(\frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} + \frac{L_2}{R_2 \parallel R_3} + \frac{L_3}{R_3} \right) + \\ &\quad s^2 \left(\frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} \frac{L_2}{R_1 + R_2 \parallel R_3} + \frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} \frac{L_3}{R_3 + R_2 \parallel R_1} + \frac{L_2}{R_2 \parallel R_3} \frac{L_3}{R_3 + R_2} \right) + \\ &\quad s^3 \left(\frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} \frac{L_2}{R_1 + R_2 \parallel R_3} + \frac{L_3}{R_3 + R_2} \right) \end{aligned} \quad (5.400)$$

由于电路中无零点存在,所以立即求得传递函数表达式为:

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} \quad (5.401)$$

与式(5.400)相类似的表达式看上去非常复杂,但是如果将并联电阻简化能够使得电路分析更加简单。例如,假设电阻 R_3 变成无穷大,即电路网络空载,则电感 L_3 对电路无作用,并且与 R_3 并联的所有项均得到简化。如果对表达式(5.400)直接分析,则很难得出上述结论。

现在已经求得电路传递函数,接下来通过原始表达式对动态响应进行测试。所用求解方法与习题1相同:定义戴维南信号源,然后应用阻抗分压器公式。计算结果如下:

$$R_{th1}(s) = sL_1 \parallel R_1 \quad (5.402)$$

$$R_{th2}(s) = (R_{th1}(s) + sL_2) \parallel R_2 \quad (5.403)$$

整理得全部“原始”传递函数表达式为:

$$H_{ref}(s) = \frac{R_1}{sL_1 + R_1} \cdot \frac{R_2}{R_{th1}(s) + R_2 + sL_2} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_{th2}(s) + sL_3} \quad (5.404)$$

图 5.89 为 Mathcad 计算结果,通过频率特性曲线确认两传递函数动态响应非常一致。

3. 习题 3

高音扬声器滤波电路能够截断较低频率。该滤波器具有 4 个独立状态变量的储能元件,所以为 4 阶系统。与前面章节分析方式一致,首先将原始电路分解为图 5.90 和图 5.91 中的系列草图。由图 5.90 可得两电容与输入信号串联,因此:

$$H_0 = 0 \quad (5.405)$$

由图 5.90(b)~(e)分别求得 4 个时间常数,具体计算公式如下:

$$\tau_1 = R_1 C_1 \quad (5.406)$$

$$\tau_2 = (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \quad (5.407)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{\infty} = 0 \quad (5.408)$$

$$\tau_4 = \frac{L_4}{R_2 + R_3} \quad (5.409)$$

根据上述时间常数整理得分母系数 b_1 为:

$$R_1 := 1\text{k}\Omega \quad R_2 := 2.2\text{k}\Omega \quad R_3 := 4.7\text{k}\Omega \quad \parallel (x, y) = \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$L_1 := 10\mu\text{H} \quad L_2 := 20\mu\text{H} \quad L_3 := 30\mu\text{H}$$

$$H_0 := 1 \quad R_{\text{th1}}(s) := (s \cdot L_1) \parallel R_1 \quad R_{\text{th2}}(s) := (R_{\text{th1}}(s) + s \cdot L_2) \parallel (R_2)$$

$$\tau_1 := \frac{L_1}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3} = 0.017\mu\text{s} \quad H_{\text{ref}}(s) := \frac{R_1}{s \cdot L_1 + R_1} \cdot \frac{R_2}{R_{\text{th1}}(s) + R_2 + s \cdot L_2} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_{\text{th2}}(s) + s \cdot L_3}$$

$$\tau_2 := \frac{L_2}{R_2 \parallel R_3} = 0.013\mu\text{s}$$

$$\tau_3 := \frac{L_3}{R_3} = 6.383 \times 10^{-3}\mu\text{s}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.036\mu\text{s}$$

$$\tau_{12} := \frac{L_2}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = 8.005 \times 10^{-3}\mu\text{s}$$

$$\tau_{13} := \frac{L_3}{R_3 + R_2 \parallel R_1} = 5.568 \times 10^{-3}\mu\text{s}$$

$$\tau_{23} := \frac{L_3}{R_3 + R_2} = 4.348 \times 10^{-3}\mu\text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 2.843 \times 10^{-4}\mu\text{s}$$

$$\tau_{123} := \frac{L_3}{R_3 + R_2} = 4.348 \times 10^{-3}\mu\text{s}$$

$$b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 5.803 \times 10^{-7}\mu\text{s}^3$$

$$H_1(s) := H_0 \cdot \frac{1}{1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3} \quad H_2(s) := H_0 \cdot \frac{1}{(1 + b_1 \cdot s) \left(1 + s \cdot \frac{b_2}{b_1}\right) \left(1 + s \cdot \frac{b_3}{b_2}\right)}$$

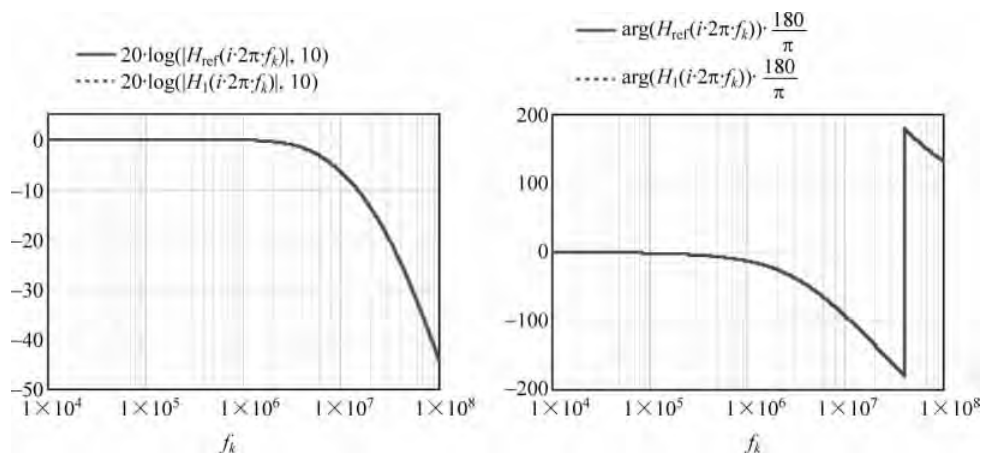


图 5.89 Mathcad 输出曲线完全匹配——证明两传递函数动态响应一致

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \\ &= R_1 C_1 + (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 + \frac{L_4}{R_2 + R_3} \end{aligned} \quad (5.410)$$

接下来将储能元件分别设置于不同状态,求得此时电路中各元件端口的时间常数为:

$$\tau_2^1 = (R_2 \parallel R_3) C_2 \quad (5.411)$$

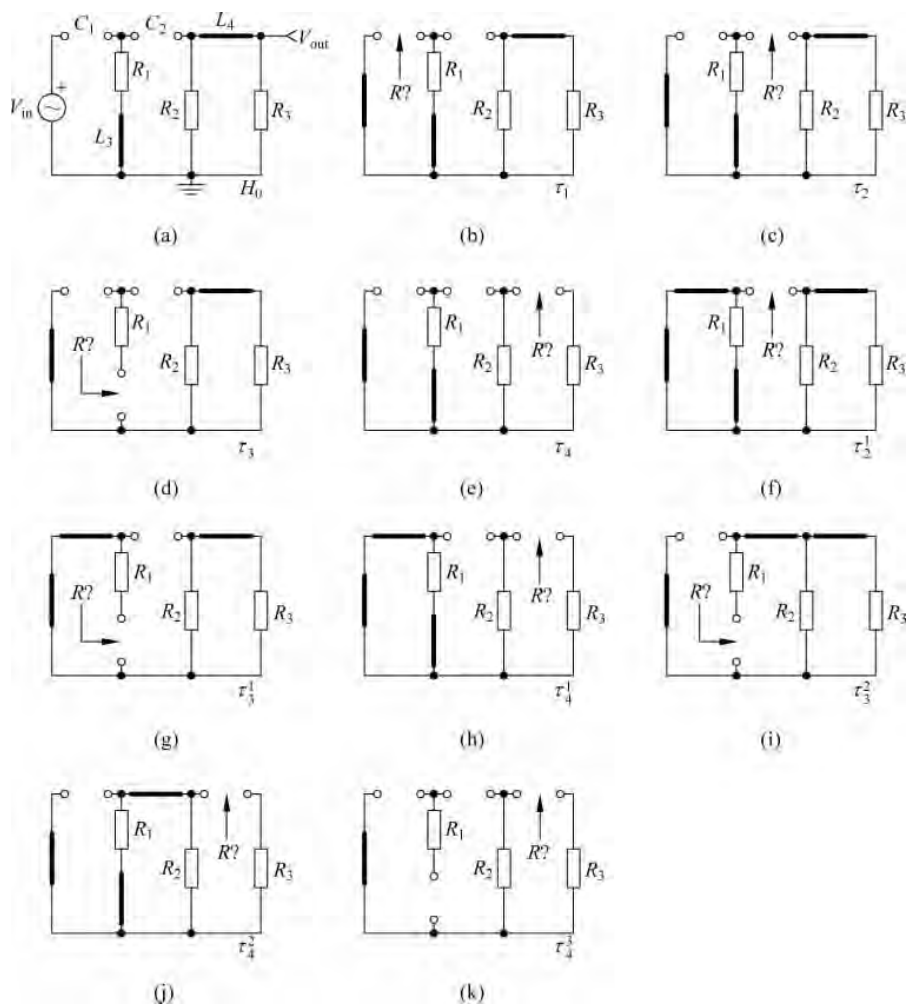


图 5.90 将 4 阶电路网络分解为系列草图——细心是成功的关键

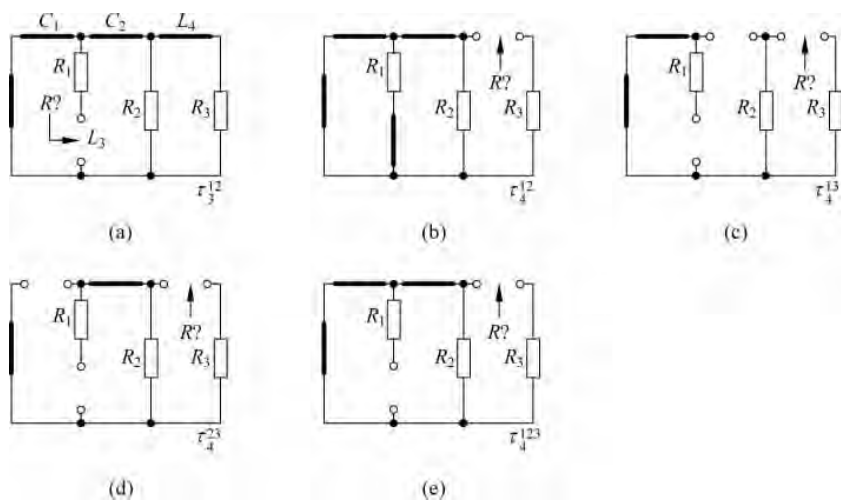


图 5.91 高阶系数分解草图

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.412)$$

$$\tau_4^1 = \frac{L_4}{R_2 + R_3} \quad (5.413)$$

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \quad (5.414)$$

$$\tau_4^2 = \frac{L_4}{R_3 + R_1 \parallel R_2} \quad (5.415)$$

$$\tau_4^3 = \frac{L_4}{R_2 + R_3} \quad (5.416)$$

将上述时间常数组组合求得系数 b_2 为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_1 \tau_4^1 + \tau_2 \tau_3^2 + \tau_2 \tau_4^2 + \tau_3 \tau_4^3 \\ &= R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} + R_1 C_1 \frac{L_4}{R_2 + R_3} + \\ &\quad (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} + (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3 + R_1 \parallel R_2} \\ &= R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} + R_1 C_1 \frac{L_4}{R_2 + R_3} + C_3 L_3 + \\ &\quad (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3 + R_1 \parallel R_2} \end{aligned} \quad (5.417)$$

由图 5.91 求得如下时间常数:

$$\tau_3^{12} = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.418)$$

$$\tau_4^{12} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.419)$$

$$\tau_4^{13} = \frac{L_4}{R_2 + R_3} \quad (5.420)$$

$$\tau_4^{23} = \frac{L_4}{R_2 + R_3} \quad (5.421)$$

将上述所有时间常数组组合求得系数 b_3 为:

$$\begin{aligned} b_3 &= \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23} \\ &= R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1} + R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3} + \\ &\quad R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} \frac{L_4}{R_2 + R_3} + (R_1 + R_1 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \frac{L_4}{R_2 + R_3} \end{aligned} \quad (5.422)$$

由图 5.91(e) 求得最后一个时间常数为:

$$\tau_4^{123} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.423)$$

所以系数 b_4 为:

$$b_4 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \tau_4^{123} = R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1} \frac{L_4}{R_3} = C_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} C_2 L_3 L_4 \quad (5.424)$$

将式(5.410)、式(5.417)、式(5.422)和式(5.424)进行组合,所得分母 $D(s)$ 表达式为:

$$\begin{aligned}
 D(s) &= 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 \\
 &= 1 + \left[R_1 C_1 + (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 + \frac{L_4}{R_2 + R_3} \right] s + \\
 &\quad \left[R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} + R_1 C_1 \frac{L_4}{R_2 + R_3} + \right. \\
 &\quad \left. C_2 L_3 + (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3 + R_1 \parallel R_2} \right] s^2 + \\
 &\quad \left[R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1} + R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3} + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} \frac{L_4}{R_2 + R_3} + \right. \\
 &\quad \left. (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \frac{L_4}{R_2 + R_3} \right] s^3 + \\
 &\quad C_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} C_2 L_3 L_4 s^4
 \end{aligned} \quad (5.425)$$

因为电路包含 4 个储能元件,所以分子表达式采用如下通用格式进行定义:

$$\begin{aligned}
 N(s) &= H_0 + s(\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3 + \tau_4 H^4) + \\
 &\quad s^2(\tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_1 \tau_4^1 H^{14} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23} + \tau_2 \tau_4^2 H^{24} + \tau_3 \tau_4^3 H^{34}) + \\
 &\quad s^3(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} H^{123} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} H^{124} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} H^{134} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23} H^{234}) + \\
 &\quad s^4(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \tau_4^{123} H^{1234})
 \end{aligned} \quad (5.426)$$

因为电路含有两个串联电容,使得许多直流传递函数 $H=0$,所以式(5.426)得到大大简化。当储能元件分别设置于高频状态时计算非零传递函数,而无须计算全部储能元件的所有状态。当电路工作于直流状态时电容 C_1 和 C_2 必须设置为高频状态(短路),而电感 L_3 和 L_4 保持直流状态(短路)。此时传递函数为:

$$H^{12} = 1 \quad (5.427)$$

第二种可能工作状态如下: 电容 C_1 、 C_2 和电感 L_3 处于高频状态。此时电感 L_4 依旧保持在直流状态,求得传递函数为:

$$H^{123} = 1 \quad (5.428)$$

因为其他所有传递函数均为零 0,所以表达式(5.426)可大大简化,求得最终分子表达式为:

$$N(s) = \tau_1 \tau_2^1 H^{12} s^2 + \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} H^{123} s^3 = a_2 s^2 + a_3 s^3 \quad (5.429)$$

对式(5.429)提取因式 $a_2 s^2$ 得:

$$N(s) = a_2 s^2 \left(1 + \frac{a_3}{a_2} s \right) = a_2 s^2 \left(1 + \frac{C_1 L_3 (R_2 \parallel R_3) C_2}{R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2} \right) = a_2 s^2 \left(1 + \frac{L_3}{R_1} s \right) \quad (5.430)$$

将分母同样提取因式 $a_2 s^2$,并将 a_2/b_2 作为传递函数主导项,整理得:

$$H(s) = \frac{a^2}{b_2} \frac{1 + \frac{L_3}{R_1} s}{1 + \frac{b_1}{b_2 s} + \frac{b_3 s}{b_2} + \frac{1}{b_2 s^2} + \frac{b_4 s^2}{b_2}} \quad (5.431)$$

对所得传递函数进行继续分析之前,首先利用原始传递函数对其进行检验。两次应用戴维南定理对图 5.77 进行计算,并将所得输出阻抗按照如下形式进行描述:

$$R_{th1}(s) = (sL_3 + R_1) \parallel \left(\frac{1}{sC_1} \right) \quad (5.432)$$

$$R_{th2}(s) = \left(R_{th1}(s) + \frac{1}{sC_2} \right) \parallel R_2 \quad (5.433)$$

整理得参考传递函数为:

$$H_{\text{ref}}(s) = \frac{R_1 + sL_3}{sL_3 + R_1 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{R_2}{R_{\text{th1}}(s) + R_2 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_{\text{th2}}(s) + sL_4} \quad (5.434)$$

将上述所得传递函数输入 Mathcad 工作表中, 绘制其动态特性曲线并进行对比, 结果如图 5.92 所示, 证明所得传递函数正确。

$$\begin{aligned} R_1 &:= 0.5\Omega \quad R_2 := 20\Omega \quad R_3 := 8\Omega \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y} \\ C_1 &:= 24\mu\text{F} \quad C_2 := 10\mu\text{F} \quad L_3 := 50\mu\text{H} \quad L_4 := 50\mu\text{H} \\ \tau_1 &:= R_1 \cdot C_1 = 12\mu\text{s} \quad \tau_2 := (R_1 + R_2 \parallel R_3) \cdot C_2 = 62.143\mu\text{s} \quad \tau_3 := \frac{L_3}{\infty \cdot \Omega} = 0\mu\text{s} \quad \tau_4 := \frac{L_4}{R_2 + R_3} = 1.786\mu\text{s} \\ b_1 &:= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 75.929\mu\text{s} \\ \tau_{12} &:= (R_2 \parallel R_3) \cdot C_2 = 57.143\mu\text{s} \quad \tau_{13} := \frac{L_3}{R_1} = 100\mu\text{s} \quad \tau_{14} := \frac{L_4}{R_2 + R_3} = 1.786\mu\text{s} \quad \tau_{23} := \frac{L_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = 8.046\mu\text{s} \\ \tau_{24} &:= \frac{L_4}{R_3 + R_1 \parallel R_2} = 5.891\mu\text{s} \quad \tau_{34} := \frac{L_4}{R_2 + R_3} = 1.786\mu\text{s} \\ b_2 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_1 \cdot \tau_{14} + \tau_2 \cdot \tau_{23} + \tau_2 \cdot \tau_{24} + \tau_3 \cdot \tau_{34} = 2.773 \times 10^3 \mu\text{s}^2 \\ \tau_{123} &:= \frac{L_3}{R_1} = 100\mu\text{s} \quad \tau_{124} := \frac{L_4}{R_3} = 6.25\mu\text{s} \quad \tau_{134} := \frac{L_4}{R_2 + R_3} = 1.786\mu\text{s} \quad \tau_{234} := \frac{L_4}{R_2 + R_3} = 1.786\mu\text{s} \\ b_3 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} + \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{124} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{134} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{234} = 7.589 \times 10^4 \mu\text{s}^3 \quad \tau_{1234} := \frac{L_4}{R_3} = 6.25\mu\text{s} \\ b_4 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot \tau_{1234} = 4.286 \times 10^5 \mu\text{s}^4 \\ H_0 &:= 0 \quad H_1 := 0 \quad H_2 := 0 \quad H_3 := 0 \quad H_4 := 0 \quad H_{12} := 1 \quad H_{13} := 0 \quad H_{14} := 0 \quad H_{23} := 0 \quad H_{24} := 0 \quad H_{34} := 0 \\ H_{123} &:= 1 \quad H_{124} := 0 \quad H_{134} := 0 \quad H_{234} := 0 \quad H_{1234} := 0 \\ a_1 &:= \tau_1 \cdot H_1 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3 + \tau_4 \cdot H_4 = 0\mu\text{s} \\ a_2 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot H_{13} + \tau_1 \cdot \tau_{14} \cdot H_{14} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23} + \tau_2 \cdot \tau_{24} \cdot H_{24} + \tau_3 \cdot \tau_{34} \cdot H_{34} = 685.714\mu\text{s}^2 \\ \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} &= 685.714 \cdot \mu\text{s}^2 \quad R_1 \cdot C_1 \cdot [(R_2 \parallel R_3) \cdot C_2] = 685.714\mu\text{s}^2 \\ a_3 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot H_{123} + \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{124} \cdot H_{124} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{134} \cdot H_{134} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{234} \cdot H_{234} = 6.857 \times 10^4 \mu\text{s}^3 \\ \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot H_{123} &= 6.857 \times 10^{-14} \text{s}^3 \quad C_1 \cdot L_3 \cdot [(R_2 \parallel R_3) \cdot C_2] = 6.857 \times 10^{-4} \text{s}^3 \\ a_4 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot \tau_{1234} \cdot H_{1234} = 0\mu\text{s}^4 \\ D_1(s) &:= 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3 + s^4 \cdot b_4 \\ N_1(s) &:= H_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + s^3 \cdot a_3 + s^4 \cdot a_4 \\ N_2(s) &:= R_1 \cdot C_1 \cdot [(R_2 \parallel R_3) \cdot C_2] \cdot s^2 + C_1 \cdot L_3 \cdot [(R_2 \parallel R_3) \cdot C_2] \cdot s^3 \\ H_{10}(s) &:= \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad H_{22}(s) := \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{1 + \frac{L_3}{R_1} \cdot s}{1 + \frac{b_1}{b_2} \cdot s + \frac{b_3 \cdot s}{b_2} + \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{b_2} + \frac{b_4 \cdot s^2}{b_2}} \\ R_{\text{th1}}(s) &:= (s \cdot L_3 + R_1) \parallel \left(\frac{1}{s \cdot C_1} \right) \quad R_{\text{th2}}(s) := \left(R_{\text{th1}}(s) + \frac{1}{s \cdot C_2} \right) \parallel (R_2) \\ H_{\text{ref}}(s) &:= \frac{s \cdot L_3 + R_1}{s \cdot L_3 + R_1 + \frac{1}{s \cdot C_1}} \cdot \frac{R_2}{R_{\text{th1}}(s) + R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_{\text{th2}}(s) + s \cdot L_4} \end{aligned}$$

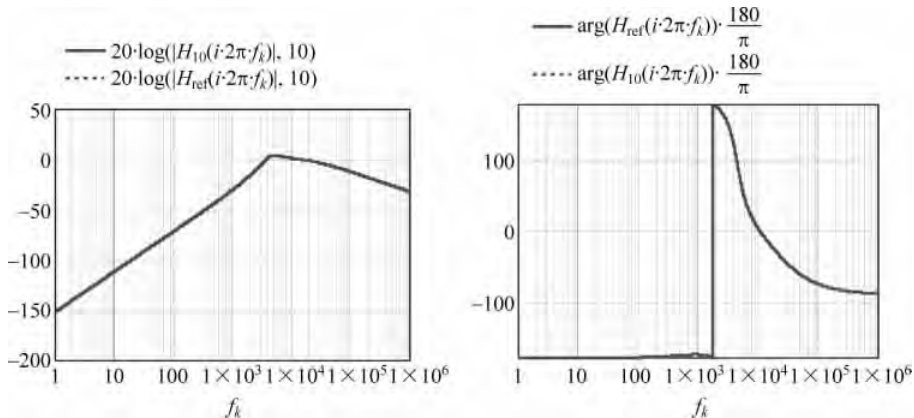


图 5.92 由 Mathcad 输出波形表明分析步骤不同但结果相似

4. 习题 4

除了求解图 5.77 所示电路的输入输出传递函数之外,接下来计算滤波器的输出阻抗。第 1 章主要对网络分析法进行详细讲解,其中构成分母 $D(s)$ 的固有时间常数主要由电路结构决定:无论输出电压取自电阻 R_3 还是 R_2 ,输入由 R_3 两端电流源或者与 L_3 或 C_1 串联的电压源提供,所得时间常数不变,所以分母 $D(s)$ 表达式保持恒定。因为前面章节已经对图 5.77 所示电路的输出阻抗进行计算,此处不再赘述: $H(s)$ 与 $Z_{\text{out}}(s)$ 的传递函数具有相同的分母表达式 $D(s)$ 。另外,由于激励信号的注入位置以及测试点的不同也会使得电路零点发生变化。根据电路阶数,利用传统方法计算阻抗 Z 的分子表达式如下,

$$\begin{aligned} N(s) = & R_0 + s(\tau_1 Z^1 + \tau_2 Z^2 + \tau_3 Z^3 + \tau_4 Z^4) + \\ & s^2(\tau_1 \tau_2^1 Z^{12} + \tau_1 \tau_3^1 Z^{13} + \tau_1 \tau_4^1 Z^{14} + \tau_2 \tau_3^2 Z^{23} + \tau_2 \tau_4^2 Z^{24} + \tau_3 \tau_4^3 Z^{34}) + \\ & s^3(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} z^{123} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} z^{124} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} z^{134} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23} z^{234}) + \\ & s^4(\tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \tau_4^{123} Z^{1234}) \end{aligned} \quad (5.435)$$

图 5.93 所示独立电路与电容和电感工作于直流或者高频状态分别一一对应。首先由图 5.93(a)可得:

$$R_0 = R_3 \parallel R_2 \quad (5.436)$$

$$Z^1 = R_3 \parallel R_2 \quad (5.437)$$

$$Z^2 = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 \quad (5.438)$$

$$Z^3 = R_3 \parallel R_2 \quad (5.439)$$

$$Z^4 = R_3 \quad (5.440)$$

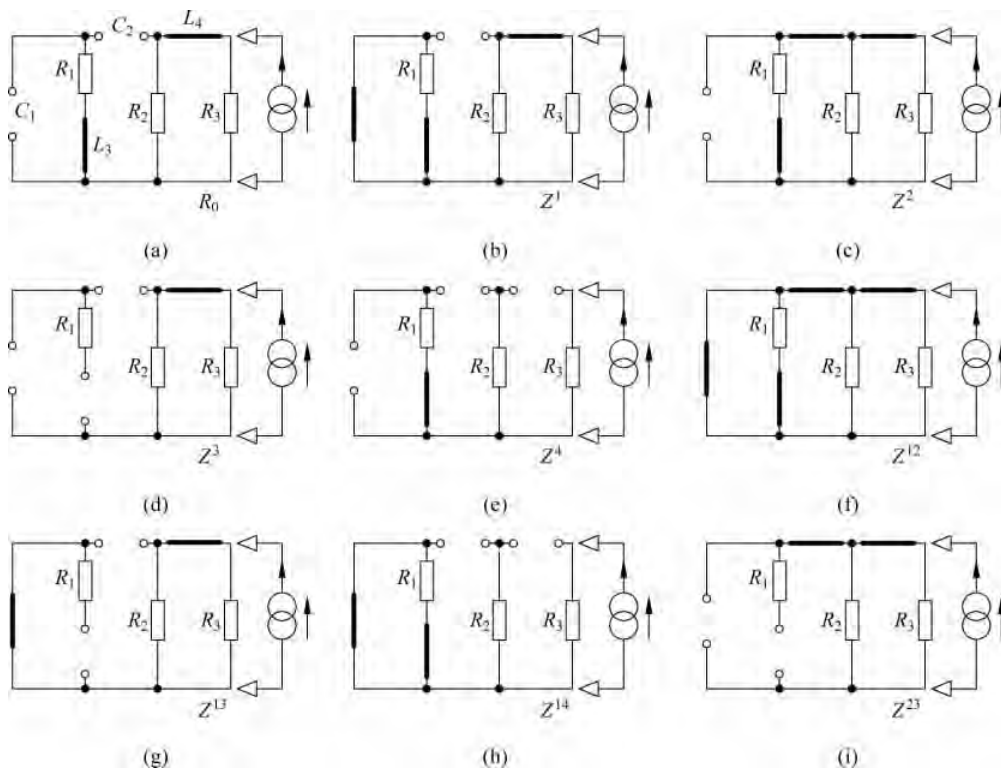


图 5.93 当电容/电感开路或短路时计算电路输出阻抗

由式(5.437)~式(5.440)求得固有时间常数的系数 a_1 的表达式为:

$$\begin{aligned} a_1 &= R_1 C_1 (R_3 \parallel R_2) + (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 (R_1 \parallel R_2 \parallel R_3) + 0 \cdot (R_3 \parallel R_2) + \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 \\ &= R_1 C_1 (R_3 \parallel R_2) + (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 (R_1 \parallel R_2 \parallel R_3) + \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 \end{aligned} \quad (5.441)$$

由图 5.93(f)~图 5.93(i)可得:

$$Z^{12} = 0 \quad (5.442)$$

$$Z^{13} = R_3 \parallel R_2 \quad (5.443)$$

$$Z^{14} = R_3 \quad (5.444)$$

$$Z^{23} = R_2 \parallel R_3 \quad (5.445)$$

由图 5.94(a)和图 5.94(b)可得

$$Z^{24} = R_3 \quad (5.446)$$

$$Z^{34} = R_3 \quad (5.447)$$

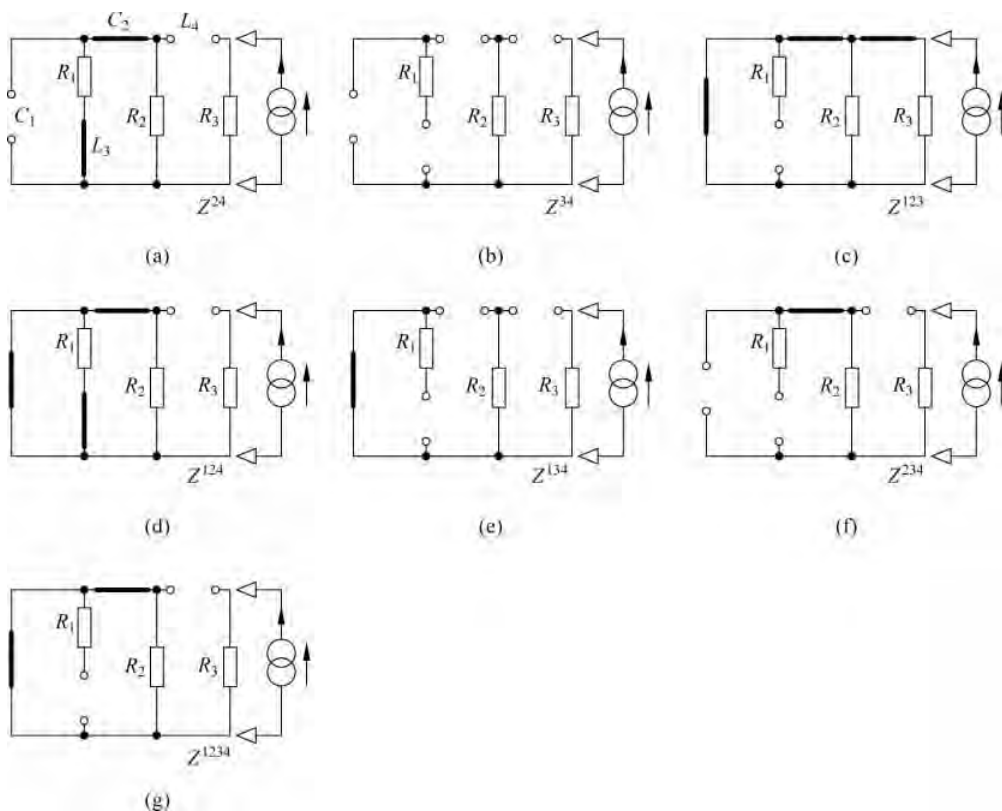


图 5.94 直流增益分解电路图

根据上述计算求得传递函数的系数 a_2 表达式为:

$$\begin{aligned} a_2 &= \tau_1 \tau_2^1 Z^{12} + \tau_1 \tau_3^1 Z^{13} + \tau_1 \tau_4^1 Z^{14} + \tau_2 \tau_3^2 Z^{23} + \tau_2 \tau_4^2 Z^{24} + \tau_3 \tau_4^3 Z^{34} \\ &= R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 \cdot 0 + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} (R_3 \parallel R_2) + R_1 C_1 \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 + \\ &\quad (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} (R_3 \parallel R_2) + (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3 + R_1 \parallel R_2} R_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L_3}{\infty} \cdot \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 \\
&= R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} (R_3 \parallel R_2) + R_1 C_1 \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 + C_2 L_3 (R_3 \parallel R_2) + \\
& (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3 + R_1 \parallel R_2} R_3
\end{aligned} \quad (5.448)$$

由图 5.94 计算系数 a_3 。通过分析计算图 5.94(c)~(f) 的分解电路图可求得如下阻抗关系式：

$$Z^{123} = 0 \quad (5.449)$$

$$Z^{124} = R_3 \quad (5.450)$$

$$Z^{134} = R_3 \quad (5.451)$$

$$Z^{234} = R_3 \quad (5.452)$$

通过上述计算可得系数 a_3 表达式为：

$$\begin{aligned}
a_3 &= \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} Z^{123} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} Z^{124} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} Z^{134} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23} Z^{234} \\
&= R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1} \cdot 0 + R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3} R_3 + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 + \\
& (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 \\
&= R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 L_4 + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 + C_2 L_3 \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3
\end{aligned} \quad (5.453)$$

最后,当所有储能元件均工作于高频状态时计算最后一项 H^{1234} 。由图 5.94(g) 可得,当 L_4 处于高频状态(开路)时,将电阻 R_3 与其余电路隔离,因此：

$$Z^{1234} = R_3 \quad (5.454)$$

整理得：

$$a_4 = C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 L_3 \frac{L_4}{R_3} \quad (5.455)$$

将 R_0 约分,所得分子表达式为：

$$\begin{aligned}
N(s) &= 1 + \left[\frac{R_1 C_1 (R_3 \parallel R_2) + (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 (R_1 \parallel R_2 \parallel R_3) + \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3}{R_3 \parallel R_2} \right] s + \\
& \left(R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} (R_3 \parallel R_2) + R_1 C_1 \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 + C_2 L_3 (R_3 \parallel R_2) + \right. \\
& \left. (R_1 + R_2 \parallel R_3) C_2 \frac{L_4}{R_3 + R_1 \parallel R_2} R_3 \right) \frac{1}{R_3 \parallel R_2} s^2 + \\
& \left(R_1 C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 L_4 + R_1 C_1 \frac{L_3}{R_1} \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 + C_2 L_3 \frac{L_4}{R_2 + R_3} R_3 \right) \frac{1}{R_3 \parallel R_2} s^3 + \\
& \left(C_1 (R_2 \parallel R_3) C_2 L_3 \frac{L_4}{R_3} \right) \frac{1}{R_3 \parallel R_2} s^4
\end{aligned} \quad (5.456)$$

接下来将式(5.436)、式(5.425)和式(5.456)组合求得传递函数。首先求得输出阻抗表达式如下所示,其单位为欧姆：

$$Z_{\text{out}}(s) = (R_3 \parallel R_2) \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5.457)$$

为对计算结果进行检验,必须求得电路的原始传递函数表达式。如图 5.78 所示,首先求得阻抗表达式:

$$Z_a(s) = \left(\frac{1}{sC_1} \right) \parallel (R_1 + sL_3) + \frac{1}{sC_2} \quad (5.458)$$

$$Z_b(s) = sL_4 + R_2 \parallel Z_a(s) \quad (5.459)$$

整理得:

$$Z_{\text{ref}}(s) = R_3 \parallel Z_b(s) \quad (5.460)$$

在图 5.95 中,利用 Mathcad 程序对全部时间常数和增益进行计算输出。如图 5.95 所示,相位和幅度频率特性曲线都有很大扭曲,但两表达式均能完美匹配。

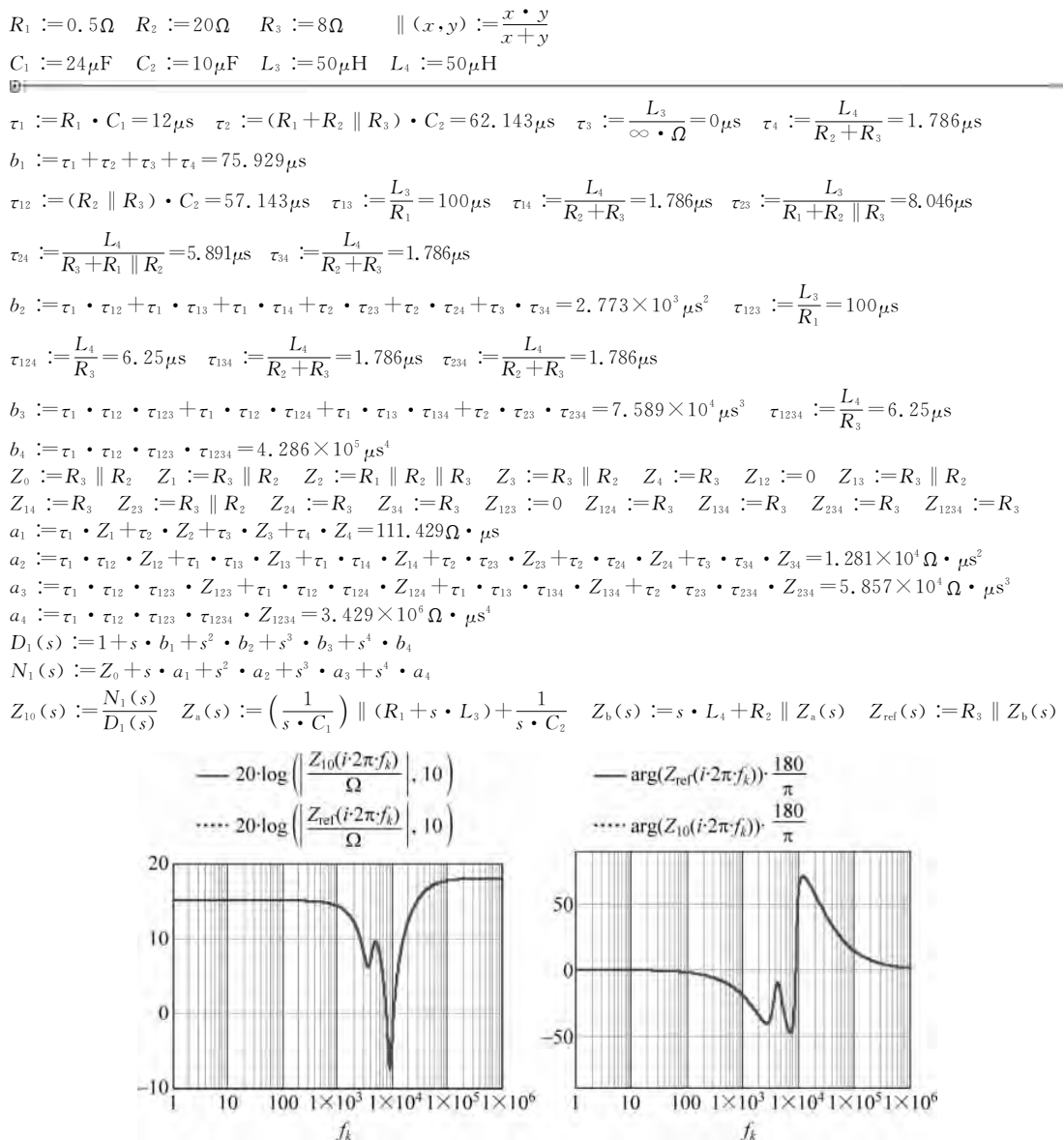


图 5.95 所有 Mathcad 动态响应全部互相吻合——计算方法正确

5. 习题 5

该电路主要描述功率变换器研发过程中印刷电路板产生的寄生元件效应。电路输入为高压信号,然后通过电阻进行降压。附加电容为电路板寄生元件,影响输入信号与电阻 R_1 之间的信号传播。由于寄生电容的存在,使得该电路成为 3 阶电路网络。接下来利用传统分解电路方式确定传递函数的分母系数,具体电路如图 5.96 所示。首先从图 5.96 左上角电路——图 5.96(a)开始分析,当输入信号源频率为 0Hz 时可直接求得电路增益为:

$$H_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (5.461)$$

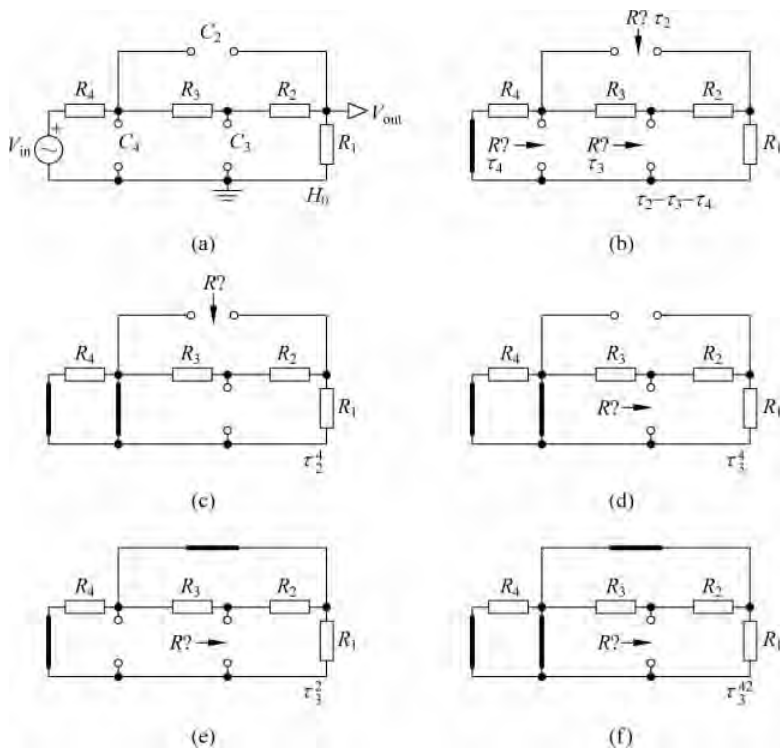


图 5.96 为确定分母系数,将原始电路分解为多个简单电路

由图 5.96(b)确定与电容 C_2 、 C_3 和 C_4 相关的 3 个时间常数。通过观察各电容端口可得:

$$\tau_4 = [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 \quad (5.462)$$

$$\tau_2 = [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)]C_2 \quad (5.463)$$

$$\tau_3 = [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]C_3 \quad (5.464)$$

将上述时间常数组合成分母表达式的系数 b_1 为:

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_4 + \tau_2 + \tau_3 \\ &= [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 + [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)]C_2 + \\ &\quad [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]C_3 \end{aligned} \quad (5.465)$$

图 5.96(c)、图 5.96(d)和图 5.96(e)分别将储能元件进行组合以构成其他时间常数:

$$\tau_2^4 = [R_1 \parallel (R_2 + R_3)]C_2 \quad (5.466)$$

$$\tau_3^4 = [R_3 \parallel (R_1 + R_2)]C_3 \quad (5.467)$$

$$\tau_3^2 = [R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_2]C_3 \quad (5.468)$$

由上述时间常数表达式求得第 2 个分母系数 b_2 为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_4 \tau_2^4 + \tau_4 \tau_3^4 + \tau_2 \tau_3^2 \\ &= [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)]C_2 + \\ &\quad [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 [R_3 \parallel (R_1 + R_2)]C_3 + \\ &\quad [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)]C_2 [R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_2]C_3 \end{aligned} \quad (5.469)$$

最后通过电路图 5.96(f) 计算组成 b_3 的另一系数, 即:

$$\tau_3^{42} = (R_2 \parallel R_3)C_3 \quad (5.470)$$

整理得:

$$b_3 = [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)]C_2 (R_2 \parallel R_3)C_3 \quad (5.471)$$

通过上述计算, 求得最终分母 $D(s)$ 表达式为:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 \\ &= 1 + \{ [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 + [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)]C_2 + \\ &\quad [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]C_3 \} s + \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} &[R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)]C_2 + \\ &[R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 [R_3 \parallel (R_1 + R_2)]C_3 + \\ &[(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)]C_2 [R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_2]C_3 \end{aligned} \right\} s^2 + \\ &\quad \{ [R_4 \parallel (R_1 + R_2 + R_3)]C_4 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)]C_2 (R_2 \parallel R_3)C_3 \} s^3 \end{aligned} \quad (5.472)$$

求解分子表达式时, 通过电路图 5.97 计算各种增益值。当单个电容独立短路时由图 5.97(a)、(b) 和 (c) 求得增益为:

$$H^4 = 0 \quad (5.473)$$

$$H^3 = \frac{R_1}{R_1 + R_4} \quad (5.474)$$

$$H^3 = 0 \quad (5.475)$$

所以系数 a_1 为:

$$a_1 = \tau_4 H^4 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3 = [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)]C_2 \frac{R_1}{R_1 + R_4} \quad (5.476)$$

通过图 5.97(d)、(e)、(f) 求解系数 a_2 。由电路分析可得:

$$H^{42} = 0 \quad (5.477)$$

$$H^{43} = 0 \quad (5.478)$$

$$H^{23} = \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 + R_4} \quad (5.479)$$

当前两项增益为 0 时可快速求得系数 a_2 为:

$$\begin{aligned} a_2 &= \tau_4 \tau_3^4 H^{43} + \tau_4 \tau_2^4 H^{42} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23} \\ &= [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)]C_2 [R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_2] \cdot \\ &\quad C_3 \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 + R_4} \end{aligned} \quad (5.480)$$

如图 5.97(g) 所示, 当所有电容均由短路线代替时求得最后增益为:

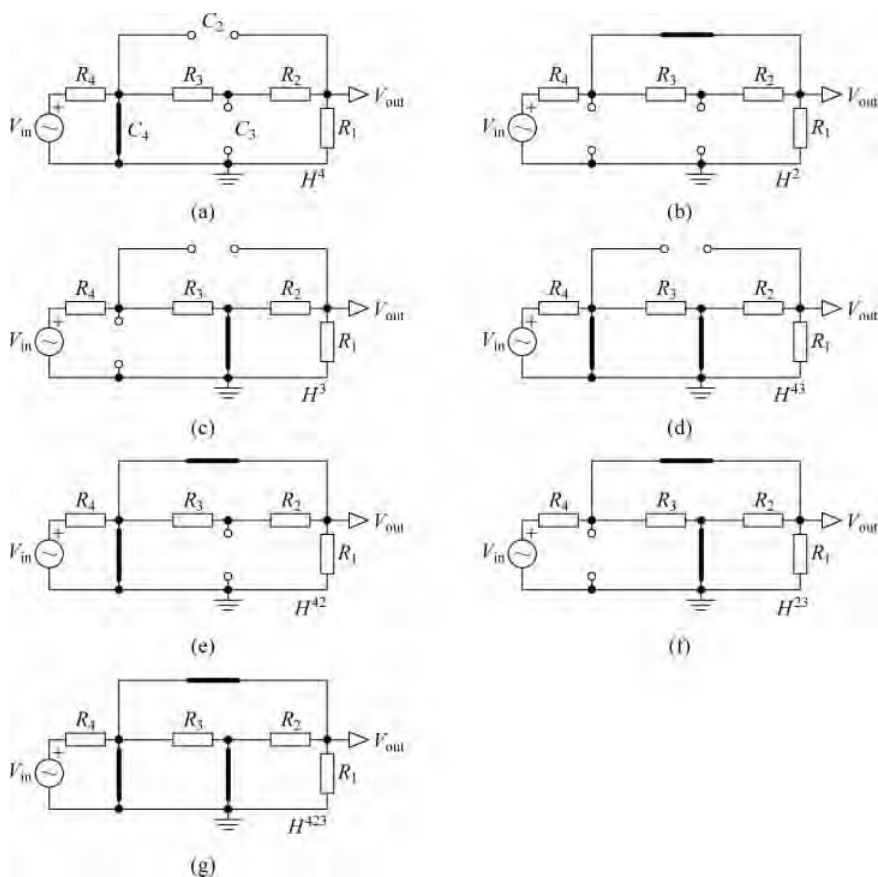


图 5.97 分析方法相同,但输入源复原以计算各种增益值

$$H^{423} = 0 \quad (5.481)$$

因此最后一项系数 $a_3 = 0$ 。根据上述计算可得分子 $N(s)$ 表达式为:

$$\begin{aligned} N(s) &= H_0 + s\tau_2 H^2 + s^2\tau_2\tau_3^2 H^{23} \\ &= \frac{R_1}{R_4 + R_2 + R_3 + R_1} + s \left([(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)] C_2 \frac{R_1}{R_1 + R_4} \right) + \\ &\quad s^2 \left([(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)] C_2 [R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_2] \cdot \right. \\ &\quad \left. C_3 \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 + R_4} \right) \end{aligned} \quad (5.482)$$

将式(5.482)分解因式 H_0 可得:

$$\begin{aligned} N(s) &= H_0 \left(1 + s\tau_2 \frac{H^2}{H_0} + s^2\tau_2\tau_3^2 \frac{H^{23}}{H_0} \right) \\ &= H_0 \left\{ 1 + s \left\{ [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)] C_2 \frac{R_1}{R_1 + R_4} \frac{R_4 + R_2 + R_3 + R_1}{R_1} \right\} + \right. \\ &\quad \left. s^2 \left\{ [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)] C_2 [R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_2] \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. C_3 \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 + R_4} \frac{R_4 + R_2 + R_3 + R_1}{R_1} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.483)$$

将式(5.483)和式(5.472)进行组合,求得传递函数为:

$$H(s) = H_0 \frac{D(s)}{N(s)} \quad (5.484)$$

利用第2章因式分解技术对传递函数分子和分母表达式整理得:

$$H(s) \approx H_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p3}}\right)} \quad (5.485)$$

图 5.98 为 Mathcad 计算程序,通过输出波形能够清晰观测传递函数的动态响应曲线。

与前面章节中的实例分析方法一致,利用叠加定理定义原始传递函数以对计算结果进行检验。因为 R_4 和 C_4 影响 C_2 和 R_3 的驱动阻抗,所以不能将 C_4 两端电压交替设置为零。利用 SPICE 软件对电路进行仿真分析,输出交流特性曲线与图 5.98 完美重叠——数学推导计算正确。作者的同事卡皮拉博士利用另外一种不同方法——信号流程图计算电路网络传递函数。将两传递函数的幅频和相频特性曲线进行对比,输出曲线与计算结果如图 5.99 所示,函数之间的计算误差取决于求解器的分辨率噪声。假设在流程图 5.98 中检测到错误,通过调整一个或多个时间常数对其进行修正并非复杂过程。

6. 习题 6

图 5.80 所示电路为典型的锁相环(PLL)鉴相器滤波电路,测试信号为输入电流。 V_{out} 与 I_m 之间的传递函数为互阻,单位为 V/A 或者欧姆。因为电路含有 3 个独立电容,所以为 3 阶电路。当激励源关闭、除 C_1 保留之外其余电容均开路时电路无直流通路。当其他电容与上述设置相同时电路工作状态一致。为避免电路不收敛或者其他极端情况发生,增加额外电阻 R_1 ,以等效电流源输出电阻。实际测试时该电阻确实存在,并且限制了电路的最大直流增益。通过分析最终确定该电阻相当大,对传递函数增益产生很大抑制。首先对图 5.100 中分解电路进行分析。直流互阻 R_0 定义为:

$$R_0 = R_1 \quad (5.486)$$

由图 5.100(b)求得 3 个时间常数分别为:

$$\tau_1 = C_1 R_1 \quad (5.487)$$

$$\tau_2 = C_2 (R_1 + R_2) \quad (5.488)$$

$$\tau_3 = C_3 (R_1 + R_3) \quad (5.489)$$

所以系数 b_1 为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = C_1 R_1 + C_2 (R_1 + R_2) + C_3 (R_1 + R_3) \quad (5.490)$$

由图 5.100(c)、图 5.100(d)和图 5.100(e)求得系数 b_2 所需时间常数为:

$$\tau_2^1 = C_2 R_2 \quad (5.491)$$

$$\tau_3^1 = C_3 R_3 \quad (5.492)$$

$$\tau_3^2 = C_3 (R_2 \parallel R_1 + R_3) \quad (5.493)$$

整理得 b_2 最终表达式为:

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 = C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 R_1 C_3 R_3 + C_2 (R_1 + R_2) C_3 (R_2 \parallel R_1 + R_3) \quad (5.494)$$

由图 5.100(f)计算最后一个时间常数为:

$$\tau_3^{12} = C_3 R_3 \quad (5.495)$$

$$C_4 := 2\text{pF} \quad C_3 := 1.5\text{pF} \quad C_2 := 10\text{pF}$$

$$R_1 := 39\text{k}\Omega \quad R_2 := 240\text{k}\Omega \quad R_3 := 240\text{k}\Omega \quad R_4 := 5\text{M}\Omega \quad \parallel(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

□

$$\tau_4 := [(R_4) \parallel (R_1 + R_2 + R_3)] \cdot C_4 = 0.94\mu\text{s} \quad \tau_2 := [(R_1 + R_4) \parallel (R_3 + R_2)] \cdot C_2 = 4.383\mu\text{s}$$

$$\tau_3 := [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)] \cdot C_3 = 0.397\mu\text{s} \quad \tau_{42} := [(R_2 + R_3) \parallel (R_1)] \cdot C_2 = 0.361\mu\text{s}$$

$$\tau_{13} := [(R_3) \parallel (R_1 + R_2)] \cdot C_3 = 0.194\mu\text{s} \quad \tau_{23} := [(R_1) \parallel (R_4) + (R_3) \parallel (R_2)] \cdot C_3 = 0.238\mu\text{s}$$

$$\tau_{423} := [(R_2) \parallel (R_3)] \cdot C_3 = 0.18\mu\text{s}$$

$$b_1 := \tau_4 + \tau_2 + \tau_3 = 5.72\mu\text{s} \quad b_2 := \tau_4 \cdot \tau_{42} + \tau_4 \cdot \tau_{43} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 1.564\mu\text{s}^2 \quad b_3 := \tau_4 \cdot \tau_{42} \cdot \tau_{423} = 0.061\mu\text{s}^3$$

$$D_1(s) := 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3$$

$$Q_D := \frac{b_1 \cdot \sqrt{\frac{b_3}{b_1}}}{b_2} = 0.378 \quad \omega_{p1} := \frac{1}{b_1} \quad \omega_{p2} := \frac{b_1}{b_2} \quad \omega_{p3} := \frac{b_2}{b_3}$$

$$f_{p1} := \frac{\omega_{p1}}{2\pi} = 27.823\text{kHz} \quad f_{p2} := \frac{\omega_{p2}}{2\pi} = 0.582\text{MHz} \quad f_{p3} := \frac{\omega_{p3}}{2\pi} = 4.078\text{MHz}$$

$$H_0 := \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 7.066 \times 10^{-3} \quad H_4 := 0$$

$$H_2 := \frac{R_1}{R_1 + R_4} \quad H_3 := 0 \quad H_{43} := 0 \quad H_{42} := 0$$

$$H_{23} := \frac{R_1 \parallel (R_2 \parallel R_3)}{[R_1 \parallel (R_2 \parallel R_3)] + R_4} = 5.852 \times 10^{-3}$$

$$H_{423} := 0$$

$$a_1 := \tau_4 \cdot H_4 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3 = 0.034\mu\text{s}$$

$$a_2 := (\tau_4 \cdot \tau_{42} \cdot H_{42} + \tau_4 \cdot \tau_{43} \cdot H_{43} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23})$$

$$= 6.105 \times 10^{-3} \mu\text{s}^2$$

$$a_3 := \tau_4 \cdot \tau_{42} \cdot \tau_{423} \cdot H_{423} = 0$$

$$N_1(s) := 1 + s \cdot \frac{(\tau_4 \cdot H_4 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3)}{H_0} + s^2 \cdot \frac{(\tau_4 \cdot \tau_{42} \cdot H_{42} + \tau_4 \cdot \tau_{43} \cdot H_{43} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23})}{H_0}$$

$$Q_N := \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = 0.219 \quad \omega_N := \frac{1}{\sqrt{b_2}} \quad H_{10}(s) := H_0 \cdot \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$\omega_{z1} := \frac{H_0}{a_1} \quad f_{z1} := \frac{\omega_{z1}}{2\pi} = 33.157\text{kHz} \quad \frac{1}{2 \cdot \pi [C_2 \cdot (R_2 + R_3)]} = 33.157\text{kHz}$$

$$\omega_{z2} := \frac{a_1}{a_2} \quad f_{z2} := \frac{\omega_{z2}}{2\pi} = 884.194\text{kHz} \quad \frac{1}{2\pi \cdot C_3 (R_2 \parallel R_3)} = 884.194\text{kHz}$$

$$H_{20}(s) := H_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right)}{1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3}$$

$$H_{30}(s) := H_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{p3}}\right)}$$

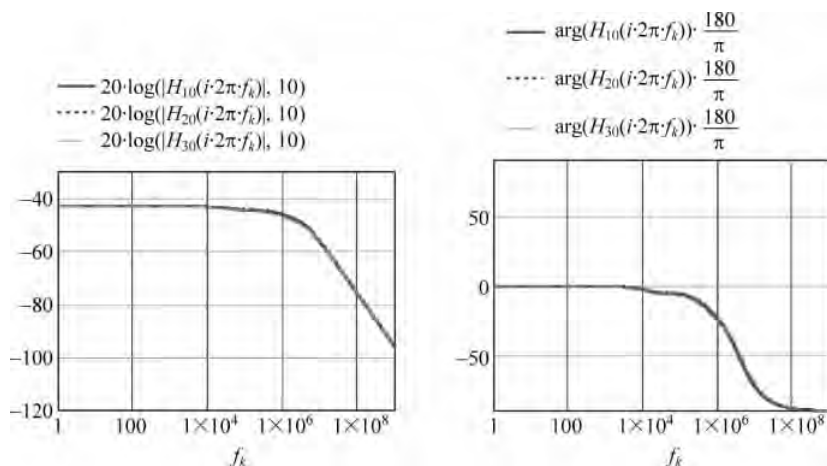


图 5.98 传递函数各异但特性曲线完美匹配

$$R_1 := R_1 \quad R_2 := R_2 \quad R_3 := R_3 \quad R_4 := R_4 \quad C_4 := C_4 \quad C_3 := C_3 \quad C_2 := C_2$$

$$H_{00} := \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

$$\omega_{11} := \frac{\frac{C_2 \cdot R_2}{2} + \frac{C_2 \cdot R_3}{2} + \frac{\sqrt{C_2 \cdot (C_2 \cdot R_2^2 + C_2 \cdot R_3^2 + 2 \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot R_3 - 4 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3)}}{2}}{C_2 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3}$$

$$\omega_{22} := \frac{\left[\frac{C_2 \cdot R_2}{2} + \frac{C_2 \cdot R_3}{2} - \frac{\sqrt{C_2 \cdot (C_2 \cdot R_2^2 + C_2 \cdot R_3^2 + 2 \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot R_3 - 4 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3)}}{2} \right]}{(C_2 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3)}$$

$$b_{11} := \frac{(C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 + C_3 \cdot R_1 \cdot R_3 + C_2 \cdot R_2 \cdot R_4 + C_3 \cdot R_1 \cdot R_4 + C_3 \cdot R_2 \cdot R_3 + C_2 \cdot R_3 \cdot R_4 + C_3 \cdot R_2 \cdot R_4 + C_4 \cdot R_1 \cdot R_4 + C_4 \cdot R_2 \cdot R_4 + C_4 \cdot R_3 \cdot R_4)}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} = 5.72 \mu s$$

$$b_{22} := \frac{(C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 + C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_4 + C_2 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot R_4 + C_2 \cdot C_4 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_4 + C_2 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 + C_2 \cdot C_4 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot R_4 + C_3 \cdot C_4 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot R_4 + C_3 \cdot C_4 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4)}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} = 1.564 \mu s^2$$

$$b_{33} := \left(\frac{C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \right) = 0.061 \mu s^3$$

$$T_{\text{josef}(s)} := \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{11}} \right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{22}} \right)$$

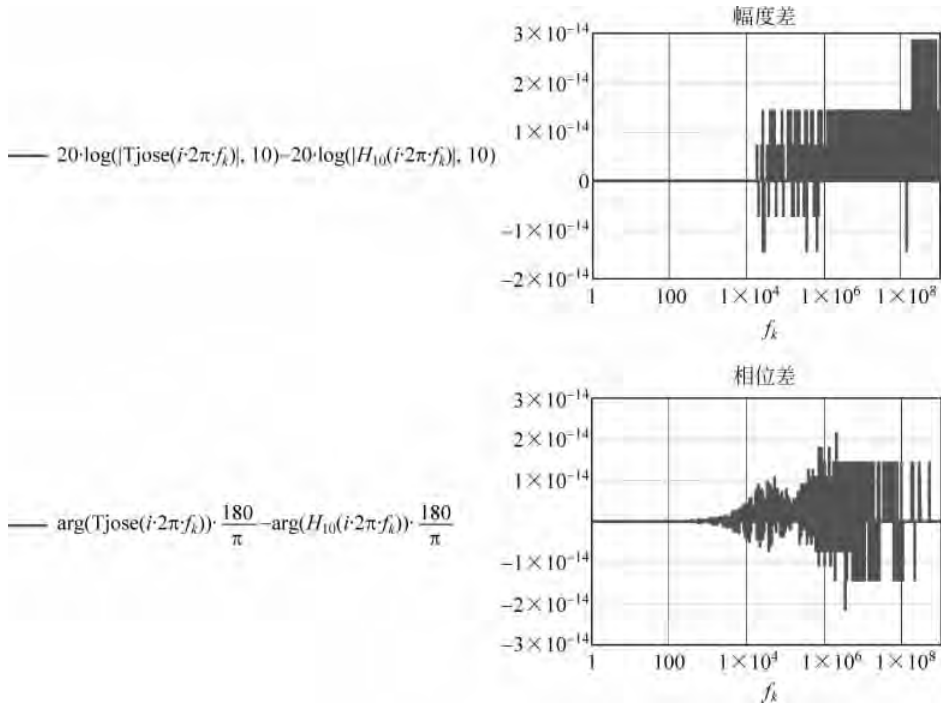


图 5.99 利用 FACT 和信号流程图技术获得的传递函数相同

所以系数 b_3 为:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^{\frac{1}{2}} \tau_3^{\frac{1}{2}} = C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 R_3 \quad (5.496)$$

将式(5.490)、式(5.494)和式(5.496)进行组合,求得分母 $D(s)$ 表达式为:

$$D(s) = 1 + s[C_1 R_1 + C_2(R_1 + R_2) + C_3(R_1 + R_3)] + s^2[C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 R_1 C_3 R_3 + C_2(R_1 + R_2)C_3(R_2 \parallel R_1 + R_3)] + s^3 C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 R_3 \quad (5.497)$$

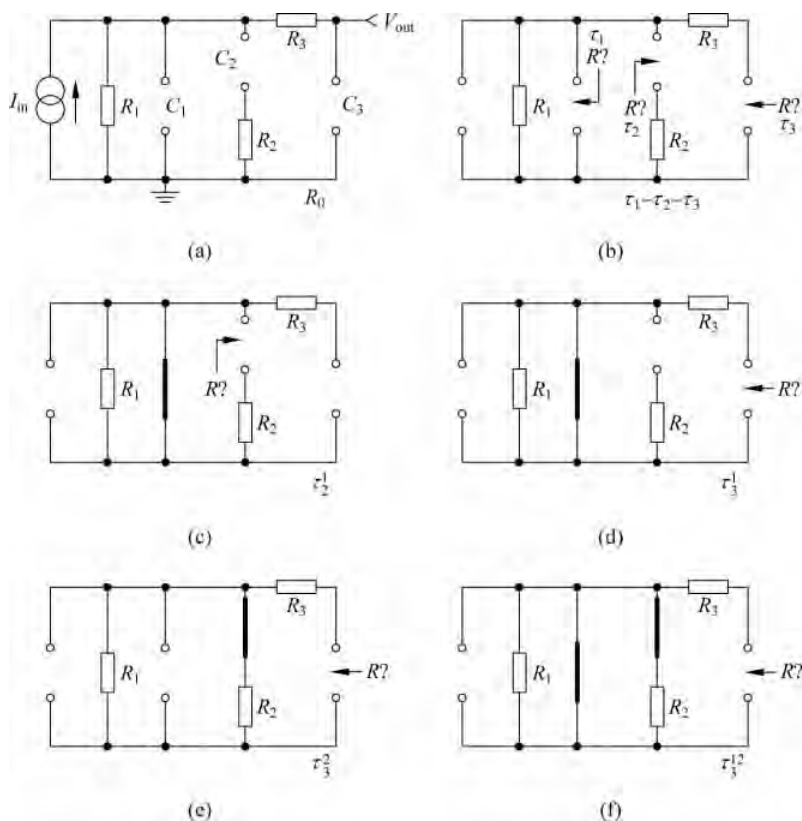


图 5.100 利用分解电路图求解固有时间常数

将式(5.497)提取因数 R_1 可得:

$$D(s) = R_1 \left\{ \frac{1}{R_1} + s \left(C_1 + C_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} + C_3 \frac{R_1 + R_3}{R_1} \right) + s^2 \left[C_1 C_2 R_2 + C_1 C_3 R_3 + C_2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) C_3 (R_2 \parallel R_1 + R_3) \right] + s^3 C_1 C_2 C_3 R_2 R_3 \right\} \quad (5.498)$$

如果 R_1 的值非常大,则分母 $D(s)$ 简化为:

$$D(s) \approx R_1 \{ s[C_1 + C_2 + C_3] + s^2[C_1(C_2 R_2 + C_3 R_3) + C_2 C_3 (R_2 + R_3)] + s^3 C_1 C_2 C_3 R_2 R_3 \} \quad (5.499)$$

现在对图 5.101 进行分析,每次当 C_1 或 C_3 设置为高频状态(短路)时输出响应和阻抗 Z 均为零。实际上图 5.101(b)的增益不为零,其阻抗计算式为:

$$Z^2 = R_1 \parallel R_2 \quad (5.500)$$

通过分析可知分母 $N(s)$ 表达式非常简单:

$$N(s) = R_0 + s\tau_2 Z^2 = R_0 \left(1 + s\tau_2 \frac{Z^2}{R_0} \right) = R_1 (1 + sR_2 C_2) \quad (5.501)$$

阻抗传递函数为式(5.501)与式(5.499)之商,即:

$$Z(s) = \frac{R_1 (1 + sR_2 C_2)}{R_1 \{ s(C_1 + C_2 + C_3) + s^2[C_1(C_2 R_2 + C_3 R_3) + C_2 C_3 (R_2 + R_3)] + s^3 C_1 C_2 C_3 R_2 R_3 \}} \quad (5.502)$$

通过因式 R_1 对传递函数表达式进行简化,并且利用 $sR_2 C_2$ 形成倒相零点。此时传递

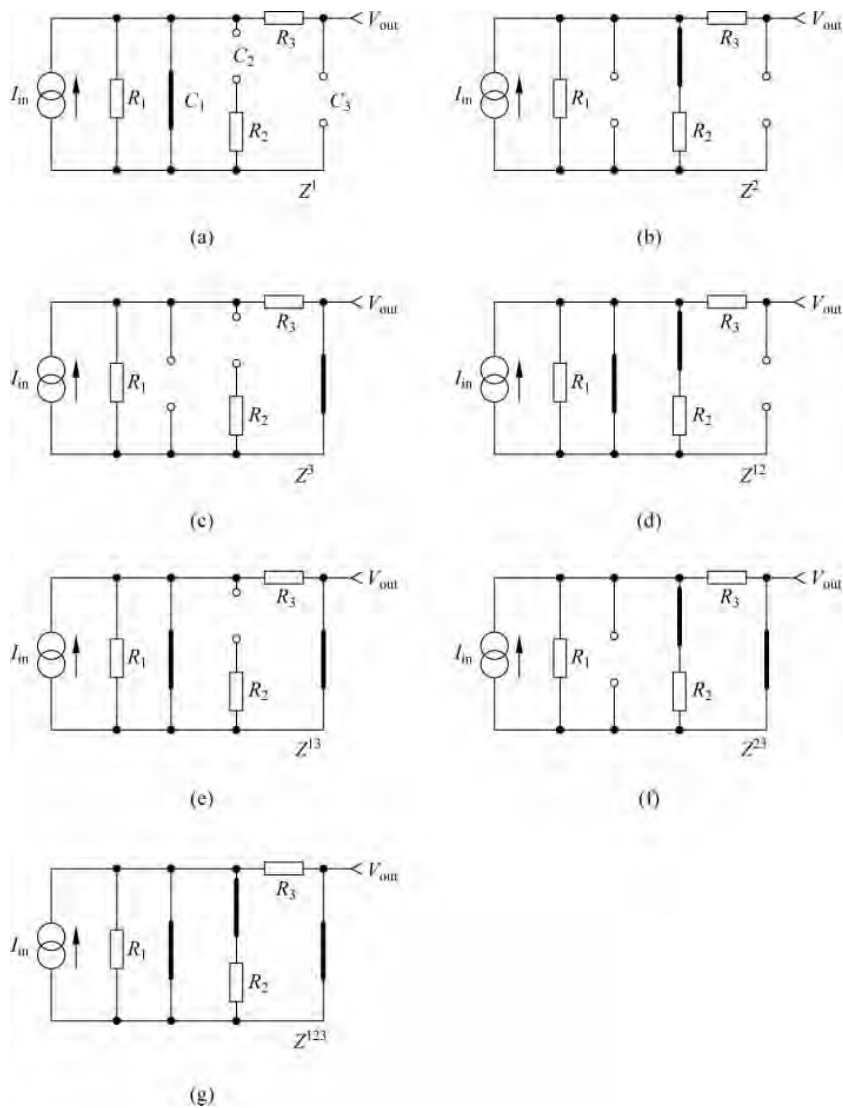


图 5.101 增益定义分解电路图

函数变为：

$$Z(s) = \frac{R_2 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \frac{1 + \frac{1}{s R_2 C_2}}{1 + s \frac{C_1 (C_2 R_2 + R_3 C_3) + C_2 C_3 (R_2 + R_3)}{C_1 + C_2 + C_3} + s^2 \frac{C_1 C_2 C_3 R_2 R_3}{C_1 + C_2 + C_3}} \quad (5.503)$$

如果品质因数非常低, 可将 2 阶形式转换为极点级联形式, 此时表达式等效为:

$$Z(s) \approx \frac{R_2 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \left[1 + s \frac{C_1 (C_2 R_2 + R_3 C_3) + C_2 C_3 (R_2 + R_3)}{C_1 + C_2 + C_3} \right] \left(1 + s \frac{C_1 C_2 C_3 R_2 R_3}{C_1 C_2 R_2 + C_1 C_3 R_3 + C_2 C_3 R_2 + C_2 C_3 R_3} \right) \quad (5.504)$$

首先 R_2-C_2 和 R_3-C_3 构成并联阻抗,之后再由 C_3 和 R_3 构成的分压器进行分压,所得参考传递函数为:

$$Z_{\text{ref}}(s) = \left[R_1 \parallel Z_1(s) \parallel \left(\frac{1}{sC_1} \right) \parallel Z_2(s) \right] \frac{1}{1 + sR_3C_3} \quad (5.505)$$

其中

$$Z_1(s) = R_2 + \frac{1}{sC_2} \quad (5.506)$$

$$Z_2(s) = R_3 + \frac{1}{sC_3} \quad (5.507)$$

图 5.102 证明上述计算正确: 式(5.504)中的重新排列传递函数与参考传递函数非常吻合。

7. 习题 7

图 5.81 所示电路代表石英晶体的某种可能模型。在该电路配置中,由于缺少损耗电阻,所以很难轻易形成时间常数。采用之前方法,在晶体两端并联额外电阻 R_{inf} 以得到固有时间常数。由图 5.103(a)求得第 1 个传递函数为准静态增益 R_0 :

$$R_0 = R_{\text{inf}} \quad (5.508)$$

然后由图 5.103(b)和图 5.103(c)求得时间常数为:

$$\tau_1 = R_{\text{inf}}C_1 \quad (5.509)$$

$$\tau_2 = R_{\text{inf}}C_2 \quad (5.510)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{\infty} = 0 \quad (5.511)$$

将所有时间常数相加求得系数 b_1 为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = R_{\text{inf}}(C_1 + C_2) \quad (5.512)$$

由图 5.103(d)、图 5.103(e)和图 5.103(f)确定如下时间常数:

$$\tau_2^1 = C_2 \cdot 0 \quad (5.513)$$

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{\infty} \quad (5.514)$$

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{R_{\text{inf}}} \quad (5.515)$$

将上述时间常数与式(5.509)、式(5.510)和式(5.511)相结合,求得系数 b_2 为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1\tau_2^1 + \tau_1\tau_3^1 + \tau_2\tau_3^2 \\ &= R_{\text{inf}}C_1 \cdot 0 \cdot C_2 + R_{\text{inf}}C_1 \frac{L_3}{\infty} + R_{\text{inf}}C_2 \frac{L_3}{R_{\text{inf}}} = C_2L_3 \end{aligned} \quad (5.516)$$

常见错误如下: 将式(5.511)、式(5.513)和式(5.514)假定为 0,然后当计算系数 b_2 时将其忽略。实际计算时必须将其与时间常数相乘,以确保消除因数中不确定性。当电路中去掉电阻 R_{inf} ,并由无穷大电阻替换时将产生许多不确定性。由于式(5.516)计算过程无任何问题,因此可将其进行简化。

由图 5.103(g)计算最后一项,其中电容 C_1 和 C_2 均设置为高频状态。此时电感 L_3 两端短路,求得时间常数为:

$$\tau_3^{12} = \frac{L_3}{0} \quad (5.517)$$

式(5.517)使得电路产生难以预测的不确定性。那么该如何将其消除呢? 通常利用时间常数重新组合的方式解决上述问题。此处具有两种选择: τ_1^{23} 或 τ_1^{32} 。当对电容 C_1 端口进行测试时, C_2 和 L_3 均设置为高频状态,所以两时间常数表达式相似。然而,第一种情况下

$$C_1 := 2.2\text{nF} \quad C_2 := 15\text{nF} \quad C_3 := 22\text{nF} \quad R_1 := 10^{10}\Omega \quad R_2 := 150\Omega \quad R_3 := 10\text{k}\Omega \quad \parallel(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

④

$$\tau_1 := C_1 \cdot R_1 = 2.2 \times 10^4 \text{ ms} \quad \tau_2 := C_2 \cdot (R_1 + R_2) = 1.5 \times 10^5 \text{ ms} \quad \tau_3 := C_3 \cdot (R_3 + R_1) = 2.200002 \times 10^8 \mu\text{s}$$

$$\tau_{12} := C_2 \cdot R_2 = 2.25 \mu\text{s} \quad \tau_{13} := C_3 \cdot R_3 = 220 \mu\text{s} \quad \tau_{23} := C_3 \cdot (R_2 \parallel R_1 + R_3) = 0.2233 \text{ ms}$$

$$\tau_{123} := C_3 \cdot R_3 = 0.22 \text{ ms}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 3.920002 \times 10^5 \text{ ms} \quad b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 0.038385 \text{ s}^2 \quad b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 1.089 \times 10^{-8} \text{ s}^3$$

$$R_0 := R_1 \quad Z_1 := 0 \quad Z_2 := R_1 \parallel R_2 \quad Z_3 := 0 \quad Z_{12} := 0 \quad Z_{13} := 0 \quad Z_{23} := 0 \quad Z_{123} := 0$$

$$D_1(s) := 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3$$

$$D_2(s) := 1 + s[C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_3 \cdot (R_3 + R_1)] + s^2 \cdot [C_1 \cdot R_1 \cdot (C_2 \cdot R_2) + C_1 \cdot R_1 \cdot (C_3 \cdot R_3) + C_2 \cdot (R_1 + R_2) \cdot [C_3 \cdot (R_2 \parallel R_1 + R_3)]] + s^3 \cdot [C_1 \cdot R_1 \cdot (C_2 \cdot R_2) \cdot (C_3 \cdot R_3)]$$

$$D_3(s) := R_1 \cdot \left\{ \frac{1}{R_1} + s \cdot \left[C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) + C_3 \cdot \left(\frac{R_3 + R_1}{R_1} \right) \right] + \right.$$

$$\left. s^2 \cdot \left[C_1 \cdot (C_2 \cdot R_2) + C_1 \cdot (C_3 \cdot R_3) + C_2 \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \cdot [C_3 \cdot (R_2 \parallel R_1 + R_3)] \right] + s^3 \cdot [C_1 \cdot (C_2 \cdot R_2) \cdot (C_3 \cdot R_3)] \right\}$$

$$D_4(s) := R_1 \cdot \left\{ s \cdot (C_1 + C_2 + C_3) + s^2 \cdot [C_1 \cdot (C_2 \cdot R_2 + R_3 \cdot C_3) + C_2 \cdot C_3 \cdot (R_2 + R_3)] + s^3 \cdot (C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3) \right\}$$

$$a_1 := \tau_1 \cdot Z_1 + \tau_2 \cdot Z_2 + \tau_3 \cdot Z_3 = 2.25 \times 10^7 \Omega \cdot \text{ms} \quad Z_2 \cdot \tau_2 = 2.25 \times 10^7 \Omega \cdot \text{ms}$$

$$a_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot Z_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot Z_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot Z_{23} = 0 \quad a_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot Z_{123} = 0$$

$$N_1(s) := R_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 \quad N_2(s) := R_1 \cdot (1 + R_2 \cdot C_2 \cdot s) \quad Z_{10}(s) := \frac{N_1(s)}{D_4(s)}$$

$$Z_{20}(s) := \frac{1 + s \cdot R_2 \cdot C_2}{\left\{ s \cdot (C_1 + C_2 + C_3) + s^2 \cdot [C_1 \cdot (C_2 \cdot R_2 + R_3 \cdot C_3) + C_2 \cdot C_3 \cdot (R_2 + R_3)] + s^3 \cdot (C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3) \right\}}$$

$$Z_{30}(s) := \frac{B_2 \cdot C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{s \cdot R_2 \cdot C_2} \right)}{\left\{ 1 + \left[s \cdot \frac{C_1 \cdot (C_2 \cdot R_2 + R_3 \cdot C_3) + C_2 \cdot C_3 \cdot (R_2 + R_3)}{C_1 + C_2 + C_3} + s^2 \cdot \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3}{C_1 + C_2 + C_3} \right] \right\}}$$

$$Z_{40}(s) := \frac{R_2 \cdot C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \cdot$$

$$\left(1 + \frac{1}{s \cdot R_2 \cdot C_2} \right)$$

$$\left\{ \left[1 + s \cdot \frac{C_1 \cdot (C_2 \cdot R_2 + R_3 \cdot C_3) + C_2 \cdot C_3 \cdot (R_2 + R_3)}{C_1 + C_2 + C_3} \right] \cdot \left(1 + s \cdot \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_3}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_2 + C_1 \cdot C_3 \cdot R_3 + C_2 \cdot C_3 \cdot R_2 + C_2 \cdot C_3 \cdot R_3} \right) \right\}$$

$$Z_1(s) := R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2} \quad Z_2(s) := R_3 + \frac{1}{s \cdot C_3} \quad Z_{\text{ref}}(s) := \left\{ R_1 \parallel Z_1(s) \parallel \left[\left(\frac{1}{s \cdot C_1} \right) \parallel Z_2(s) \right] \right\} \cdot \frac{1}{C_3 \cdot R_3 \cdot s + 1}$$

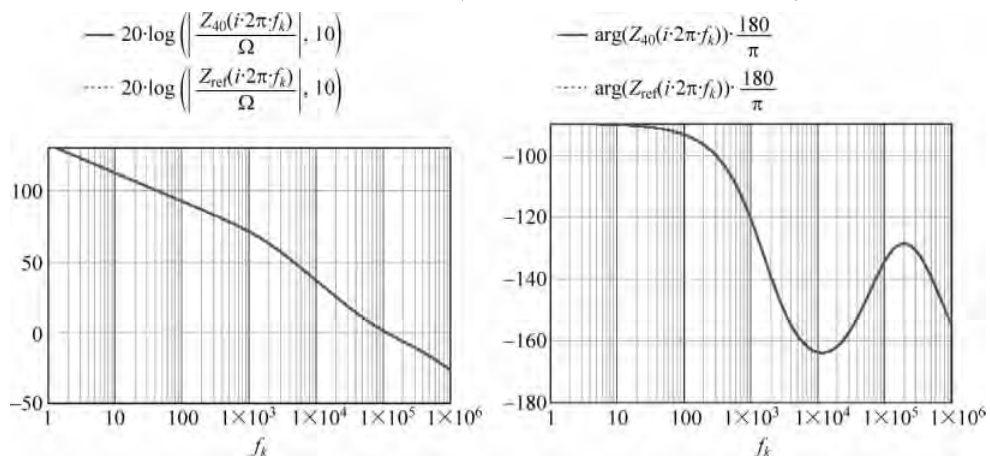


图 5.102 Mathcad 程序证明计算结果正确——包括参考互阻在内的动态响应一致

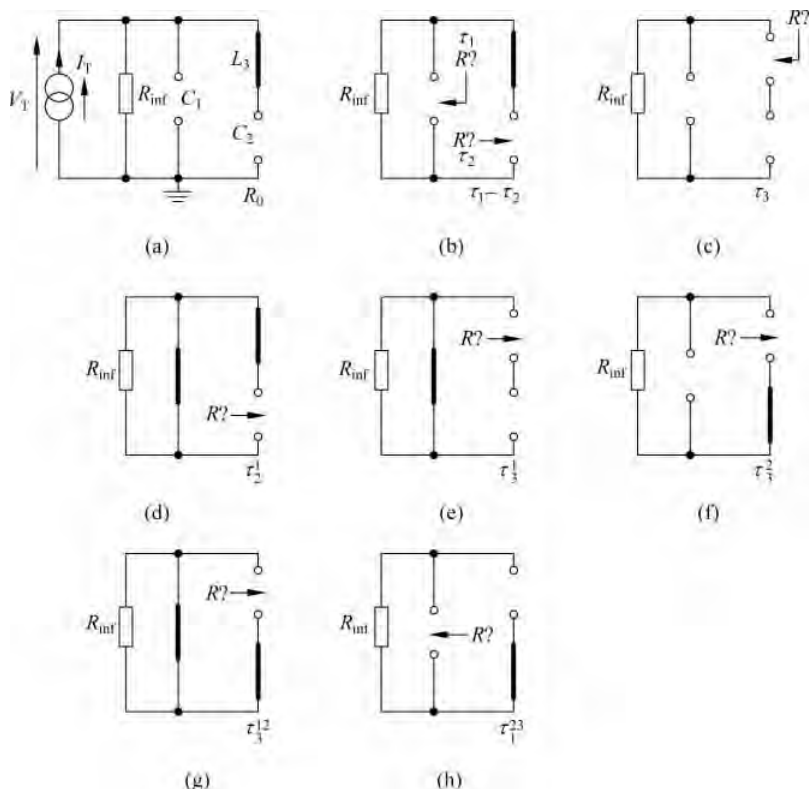


图 5.103 利用分解电路图有助于计算时间常数,但可能产生不确定性

引导因子为 $\tau_2 \tau_3^2$; 第二种情况下引导因子却为 $\tau_3 \tau_2^2$ 。当电感移除时电容 C_2 两端阻抗无穷大,此时电路将会产生另外一种不确定性。另外,由式(5.515)已经求得时间常数 τ_3^2 ,根据图 5.103 可求得如下时间常数:

$$\tau_1^{23} = C_1 R_{inf} \quad (5.518)$$

联合式(5.518)、式(5.515)和式(5.510)可得:

$$b_3 = \tau_2 \tau_3^2 \tau_1^{23} = R_{inf} C_2 \frac{L_3}{R_{inf}} C_1 R_{inf} = R_{inf} C_1 C_2 L_3 \quad (5.519)$$

如果重新整理之后不确定性仍然存在该如何解决呢? 此时增加电阻与电感 L_3 并联,为式(5.517)提供一条直流通路。但是通过增加额外电阻已经将电路结构改变(即使将其参数值设置为无限大),并且由于额外元件的引入,先前的时间常数必须重新计算。

利用所得时间常数求得分母表达式为:

$$D(s) = 1 + R_{inf}(C_1 + C_2)s + C_2 L_3 s^2 + R_{inf} C_2 C_1 L_3 s^3 \quad (5.520)$$

分解因式 R_{inf} 可得:

$$D(s) = R_{inf} \left[\frac{1}{R_{inf}} + s(C_1 + C_2) + s^2 \frac{C_2 L_3}{R_{inf}} + s^3 C_1 C_2 L_3 \right] \quad (5.521)$$

因为 R_{inf} 为高阻值电阻,所以上述表达式简化为:

$$D(s) \approx R_{inf} [s(C_1 + C_2) + s^3 C_2 C_1 L_3] \quad (5.522)$$

通过上述计算已经得到分母表达式,接下来利用不同增益值计算电路零点,具体如图 5.104 所示。当电容 C_1 短路时输出响应为 0。该状态与电容 C_2 工作于高频并且其串联电感 L_3 设置于直流状态一致,此时配置电阻为 R_{inf} 。计算结果如下:

$$Z^1 = 0 \quad (5.523)$$

$$Z^2 = 0 \quad (5.524)$$

$$Z^3 = R_{\text{inf}} \quad (5.525)$$

则系数 a_1 为:

$$a_1 = \tau_1 Z^1 + \tau_2 Z^2 + \tau_3 Z^3 = R_{\text{inf}} C_1 \cdot 0 + R_{\text{inf}} C_2 \cdot 0 + \frac{L_3}{\infty} \cdot R_{\text{inf}} = 0 \quad (5.526)$$

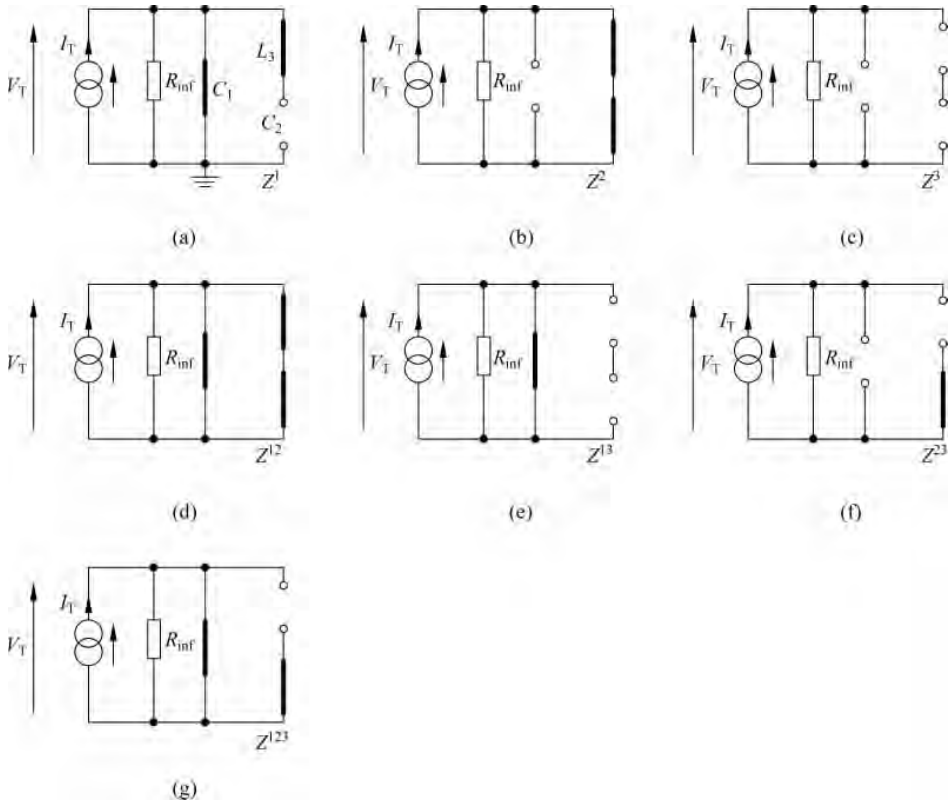


图 5.104 通过不同工作状态的增益值计算电路零点

由图 5.104(d)、图 5.104(e)和图 5.104(f)可得:

$$Z^{12} = 0 \quad (5.527)$$

$$Z^{13} = 0 \quad (5.528)$$

$$Z^{23} = R_{\text{inf}} \quad (5.529)$$

于是求得系数 a_2 的定义式为:

$$\begin{aligned} a_2 &= \tau_1 \tau_2^1 Z^{12} + \tau_1 \tau_3^1 Z^{13} + \tau_2 \tau_3^2 Z^{23} \\ &= R_{\text{inf}} C_1 \cdot 0 \cdot C_2 \cdot 0 + R_{\text{inf}} C_1 \frac{L_3}{\infty} \cdot 0 + R_{\text{inf}} C_2 \frac{L_3}{R_{\text{inf}}} R_{\text{inf}} \\ &= R_{\text{inf}} C_2 L_3 \end{aligned} \quad (5.530)$$

在图 5.104(g)中输出响应同样为 0, 所以:

$$Z^{123} = 0 \quad (5.531)$$

同理可得:

$$a_3 = \tau_2 \tau_3^2 \tau_1^3 Z^{123} = R_{\text{inf}} C_2 \frac{L_3}{R_{\text{inf}}} C_1 R_{\text{inf}} \cdot 0 = 0 \quad (5.532)$$

将式(5.526)、式(5.530)和式(5.532)进行组合,求得分子表达式为:

$$N(s) = R_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 = R_{\text{inf}}(1 + L_3 C_2 s^2) \quad (5.533)$$

由式(5.522)和式(5.533)整理得最终传递函数表达式为:

$$Z(s) = \frac{R_{\text{inf}}(1 + s^2 L_3 C_2)}{R_{\text{inf}}[s(C_1 + C_2) + s^3 C_2 C_1 L_3]} = \frac{1 + s^2 L_3 C_2}{s(C_1 + C_2) + s^3 C_2 C_1 L_3} \quad (5.534)$$

原始传递函数表达式非常简单,具体如下所示:

$$Z_{\text{ref}}(s) = \left(\frac{1}{sC_1} \right) \parallel \left(sL_3 + \frac{1}{sC_2} \right) \quad (5.535)$$

图 5.105 中的所有曲线全部一致,证明上述计算过程正确无误。现在利用人工计算或者 Mathcad 软件对式(5.535)进行简化,整理得:

$$Z = \frac{\frac{1}{s \cdot C_{1.1}} \cdot \left(s \cdot L_{.3} + \frac{1}{s \cdot C_{.2}} \right)}{\frac{1}{s \cdot C_{1.1}} \cdot \left(s \cdot L_{.3} + \frac{1}{s \cdot C_{.2}} \right)}$$

$$R_{\text{inf}} := 10^{10} \Omega \quad C_1 := 10 \text{ nF} \quad C_2 := 2.2 \text{ nF} \quad L_3 := 22 \mu \text{H} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$\tau_1 := R_{\text{inf}} \cdot C_1 = 100 \text{ s} \quad \tau_2 := R_{\text{inf}} \cdot C_2 = 22 \text{ s} \quad \tau_3 := \frac{L_3}{\infty \cdot \Omega} = 0 \mu \text{s} \quad Z_{\text{ref}}(s) := \left(\frac{1}{s \cdot C_1} \right) \parallel \left(s \cdot L_3 + \frac{1}{s \cdot C_2} \right)$$

$$\tau_{12} := 0 \cdot C_2 = 0 \mu \text{s} \quad \tau_{13} := \frac{L_3}{\infty \cdot \Omega} = 0 \mu \text{s} \quad \tau_{23} := \frac{L_3}{R_{\text{inf}}} = 2.2 \times 10^{-9} \mu \text{s}$$

$$\tau_{123} := \frac{L_3}{0} = 1 \mu \text{s} \quad \tau_{321} := C_1 \cdot R_{\text{inf}}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1.22 \times 10^8 \mu \text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 0.048 \mu \text{s}^2$$

$$b_3 := \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{321} = 4.84 \times 10^5 \mu \text{s}^3$$

$$Z_0 := R_{\text{inf}} \quad Z_1 := 0 \quad Z_2 := 0 \quad Z_3 := R_{\text{inf}}$$

$$Z_{12} := 0 \quad Z_{13} := 0 \quad Z_{23} := R_{\text{inf}}$$

$$Z_{123} := 0$$

$$a_1 := \tau_1 \cdot Z_1 + \tau_2 \cdot Z_2 + \tau_3 \cdot Z_3 = 0 \Omega \cdot \mu \text{s}$$

$$a_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot Z_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot Z_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot Z_{23} = 4.84 \times 10^8 \Omega \cdot \mu \text{s}^2$$

$$a_3 := \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{321} \cdot Z_{123} = 0 \mu \text{s}^3$$

$$D_1(s) := 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3$$

$$N_1(s) := Z_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + s^3 \cdot a_3$$

$$Z_{10}(s) := \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad Z_{20}(s) := \frac{1 + C_2 \cdot L_3 \cdot s^2}{(C_1 + C_2) \cdot s + s^3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot L_3}$$

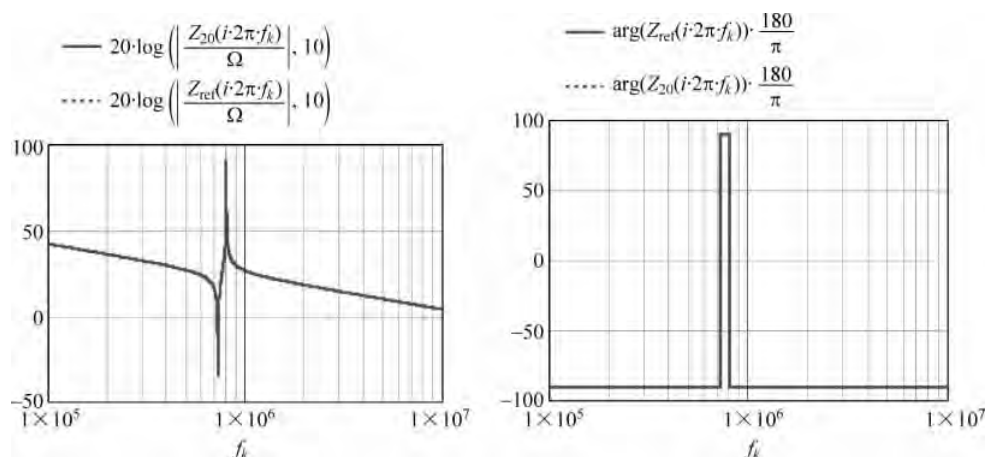


图 5.105 Mathcad 计算结果证明所有方程全部正确

进行约分整理立即求得：

$$Z = \frac{C_{.2} \cdot L_{.3} \cdot s^2 + 1}{C_{.1} \cdot s + C_{.2} \cdot s + C_{.1} \cdot C_{.2} \cdot L_{.3} \cdot s^2}$$

上述分析方法比快速分析法还要快得多。因此,对于复杂电路网络,正确选择与其相关的求解工具非常重要:不要选择铁锤拍死苍蝇。尽管如此,希望读者通过求解石英电路阻抗懂得如何通过重新调整时间常数有效地消除电路不确定性。

8. 习题 8

LLC 谐振开关变换器的电路结构由文献[1]和[2]进行简单描述。其中电阻 R_1 通常标记为 R_{ac} ,代表通过二极管整流桥反射到变比为 $N=N_P/N_S$ 的变压器原边的负载电阻值。 L_3 为变压器磁化电感, L_2 等效其漏感。两者通常由固定变比(例如 $L_3=2L_2$)确定其特定性能。首先可以忽略变压器变比 N ,最后再将其带入。该电路为 3 阶网络,根据储能元件的各种状态组合分别绘制其对应电路,具体如图 5.106 所示。由图 5.106(a)可直接求得直流增益 H_0 为:

$$H_0 = 0 \quad (5.536)$$

由图 5.106(b)和图 5.106(c)求得 3 个时间常数分别为:

$$\tau_1 = 0 \cdot C_1 \quad (5.537)$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{\infty} \quad (5.538)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.539)$$

将式(5.537)、式(5.538)和式(5.539)相加求得系数 b_1 为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.540)$$

继续对图 5.106(d)、图 5.106(e)和图 5.106(f)进行分析可得如下时间常数:

$$\tau_2^1 = \frac{L_2}{0} \quad (5.541)$$

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{0} \quad (5.542)$$

和

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.543)$$

观察式(5.541)和式(5.542),两者时间常数值均为无穷大,所以将两者与之前时间常数相结合时可能产生不确定性,主要原因在于 C_1 和 L_2 缺少电阻路径。通过在 C_1 和 L_2 之间串联一个小阻值 R_d 可暂时解决上述问题,此时先前时间常数方程更新如下:

$$\tau_1 = R_d C_1 \quad (5.544)$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{\infty} \quad (5.545)$$

$$\tau_3 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.546)$$

b_1 更新为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = R_d C_1 + \frac{L_3}{R_1} \quad (5.547)$$

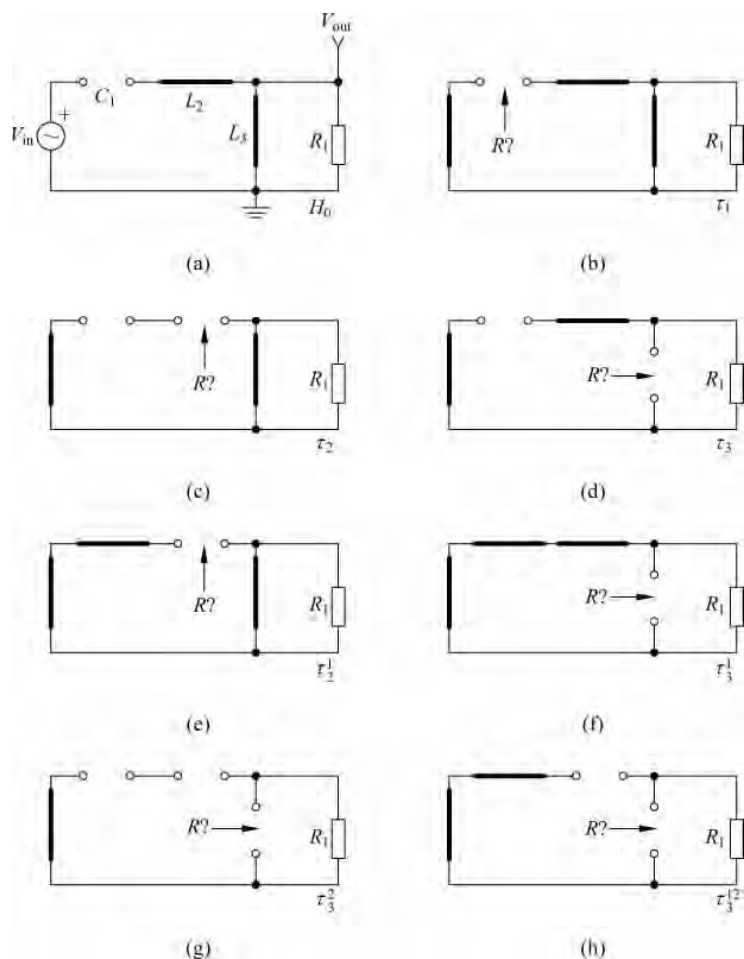


图 5.106 LLC 电路具有 3 个储能元件,其固有时间常数分别由分解电路进行确定

当 $R_d \rightarrow 0$ 时式(5.547)简化为:

$$b_1 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.548)$$

以及

$$\tau_2^1 = \frac{L_2}{R_d} \quad (5.549)$$

$$\tau_3^1 = \frac{L_3}{R_d \parallel R_1} \quad (5.550)$$

$$\tau_3^2 = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.551)$$

现在系数 b_2 为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 \\ &= R_d C_1 \frac{L_2}{R_d} + R_d C_1 \frac{L_3}{R_d \parallel R_1} + \frac{L_2}{\infty} \frac{L_3}{R_1} \\ &= C_1 L_2 + C_1 L_3 \left(\frac{R_1 + R_d}{R_1} \right) \end{aligned} \quad (5.552)$$

当 $R_d \rightarrow 0$ 时式(5.552)简化为:

$$b_2 = C_1(L_2 + L_3) \quad (5.553)$$

由图 5.106(h)求得最后一项为:

$$\tau_3^{12} = \frac{L_3}{R_1} \quad (5.554)$$

此时系数 b_3 定义为:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} = R_d C_1 \frac{L_2}{R_d} \frac{L_3}{R_1} = \frac{C_1 L_2 L_3}{R_1} \quad (5.555)$$

通过上述计算可得完整分母定义式为:

$$D(s) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 = 1 + s \frac{L_3}{R_1} + s^2 [C_1(L_2 + L_3)] + s^3 \frac{C_1 L_2 L_3}{R_1} \quad (5.556)$$

由图 5.107 中的所有增益电路计算分子表达式。通过电路分析,可快速求得除 $H^{13}=1$ 之外其他传递函数值均为 0。因此可得:

$$a_1 = \tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3 = 0 \quad (5.557)$$

$$a_2 = \tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23} = R_d C_1 \frac{L_3}{R_d \parallel R_1} \quad (5.558)$$

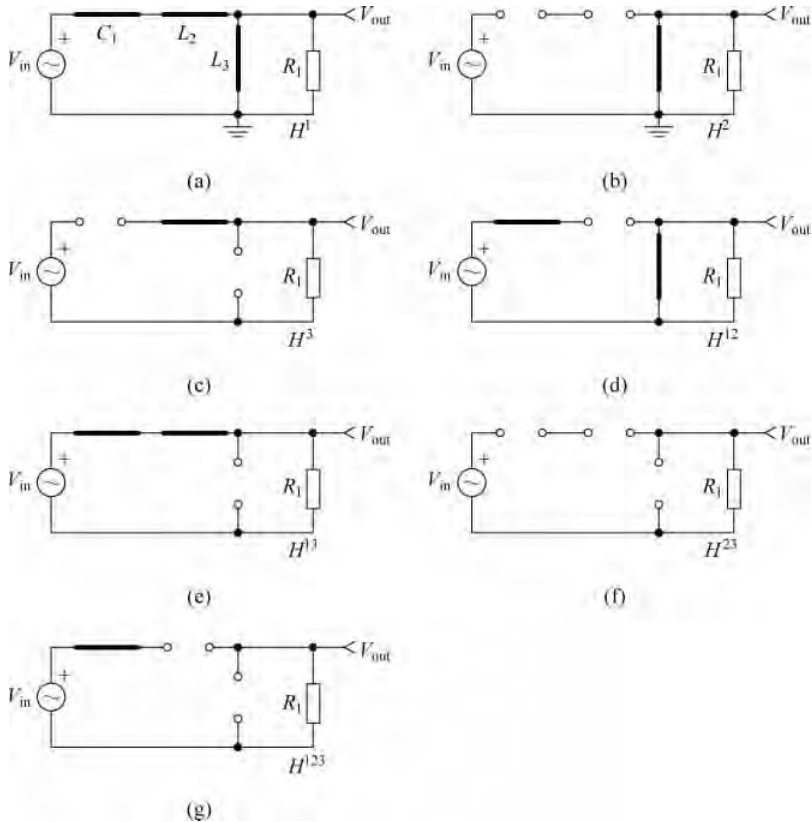


图 5.107 除 H^{13} 外其余所有传递函数值均为 0,所以在零定义时自然地将 C_1 和 L_3 相关联

当 $R_d \rightarrow 0$ 时式(5.558)简化为:

$$a_2 = C_1 L_3 \quad (5.559)$$

最后一项同样为 0,即:

$$a_3 = \tau_1 \tau_2^2 \tau_3^{12} H^{123} = 0 \quad (5.560)$$

分子 $N(s)$ 表达式中只含有一个单项,即:

$$N(s) = H_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 = s^2 C_1 L_3 \quad (5.561)$$

将式(5.561)除以(5.556),并且将图 5.82 中的 V_{out} 与 N 相除,此时求得最终传递函数为:

$$H(s) = \frac{1}{n} \frac{s^2 C_1 L_3}{1 + s \frac{L_3}{R_1} + s^2 [C_1 (L_2 + L_3)] + s^3 \frac{C_1 L_2 L_3}{R_1}} \quad (5.562)$$

重新观察图 5.82 可得 R_1 与 L_3 并联。当输出电流非常大时,电阻 R_1 阻值非常小,将电感 L_3 短路。与 L_2 和 C_1 相关联的谐振频率定义式为:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}} \quad (5.563)$$

当输出电流减小或变换器轻载时, L_3 又重新与 L_2 相串联以形成第 2 个谐振频率,计算公式为:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{C_1 (L_2 + L_3)}} \quad (5.564)$$

如果品质因数 Q 值为:

$$Q = R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_2}} \quad (5.565)$$

则经过几次运算之后式(5.562)可重新改写为:

$$H(s) = \frac{1}{N} \frac{\frac{L_3}{L_2} \left(\frac{s}{\omega_s} \right)^2}{1 + s \frac{L_3}{R_1} + \left(\frac{s}{\omega_m} \right)^2 + s^3 \frac{L_3}{L_2} \frac{1}{Q \omega_s^3}} \quad (5.566)$$

分析与本习题无关的 LLC 变换器时,可直接应用式(5.566)的直流变换器传递函数表达式。但不要与其小信号响应相混淆,因为很难通过分析直接求得小信号响应,并且此时 R_1 (文献[1]中同样标记为 R_{ac}) 必须替换为:

$$R_1 = \frac{8}{\pi^2} N^2 R_L \quad (5.567)$$

如需理解式(5.567)的计算过程请参阅文献[1]。

此时 Q 值计算公式更新为:

$$Q = N^2 R_L \sqrt{\frac{C_1}{L_2}} \quad (5.568)$$

其中, R_L 为 LLC 变换电路的负载电阻。更新之后的传递函数表达式变为:

$$H(s) = \frac{1}{N} \frac{\frac{L_3}{L_2} \left(\frac{s}{\omega_s} \right)^2}{1 + s \frac{\pi^2 L_3}{8 \cdot N^2 R_L} + \left(\frac{s}{\omega_m} \right)^2 + s^3 \frac{L_3}{L_2} \frac{\pi^2}{8 \cdot Q \omega_s^3}} \quad (5.569)$$

于是可直接求得参考传递函数表达式为:

$$H_{\text{ref}}(s) = \frac{1}{N} \frac{s L_3 \parallel R_1}{s L_3 \parallel R_1 + s L_2 + \frac{1}{s C_1}} \quad (5.570)$$

图 5.108 中的所有曲线证明上述方法正确。式(5.566)由公式 H_{m1} 进行绘图; 而 H_{m1} 为相同绘图公式,但取决于 LLC 负载 R_L ——与式(5.567)和式(5.568)相关。

$$R_L := 100\Omega \quad C_1 := 38\text{nF} \quad L_2 := 110\mu\text{H} \quad N_{ps} := 2 \quad \|(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$R_d := 10^{-6}\Omega \quad m := 2 \quad L_3 := m \cdot L_2 \quad R_1 := \frac{S}{\pi^2} \cdot N_{ps}^2 \cdot R_L = 324.227788\Omega$$

□

$$\tau_1 := R_d \cdot C_1 = 3.8 \times 10^{-8} \mu\text{s} \quad H_{\text{ref}}(s) := \frac{1}{N_{ps}} \cdot \frac{(s \cdot L_3) \|(R_1)}{(s \cdot L_3) \|(R_1) + s \cdot L_2 + \frac{1}{s \cdot C_1}}$$

$$\tau_2 := \frac{L_2}{\infty \cdot \Omega} = 0\text{ms} \quad \tau_3 := \frac{L_3}{R_1} = 0.678535\mu\text{s} \quad \tau_{12} := \frac{L_2}{R_d} = 1.1 \times 10^8 \mu\text{s} \quad \tau_{13} := \frac{L_3}{R_d \|(R_1)} = 2.2 \times 10^8 \mu\text{s}$$

$$\tau_{23} := \frac{L_3}{R_1} = 0.678535\mu\text{s} \quad \tau_{123} := \frac{L_3}{R_1} = 0.678535\mu\text{s}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.0678535\mu\text{s} \quad b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 + \tau_{23} = 12.54\mu\text{s}^2$$

$$b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 2.836278\mu\text{s}^3$$

$$H_0 := 0 \quad H_1 := 0 \quad H_2 := 0 \quad H_3 := 0 \quad H_{12} := 0 \quad H_{13} := 1 \quad H_{23} := 0 \quad H_{123} := 0$$

$$D_1(s) := 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3 \quad D_2(s) := 1 + s \cdot \frac{L_3}{R_1} + s^2 \cdot [C_1 \cdot (L_2 + L_3)] + s^3 \cdot \frac{C_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{R_1}$$

$$a_1 := \tau_1 \cdot H_1 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3 = 0\text{ms}$$

$$a_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot H_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23} = 8.36\mu\text{s}^2$$

$$a_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot H_{123} = 0$$

$$N_1(s) := H_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 \quad N_2(s) := s^2 \cdot C_1 \cdot L_3$$

$$H_{10}(s) := \frac{N_2(s)}{D_1(s)} \quad H_{40}(s) := \frac{1}{N_{ps}} \cdot \frac{s^2 \cdot C_1 \cdot L_3}{1 + s \cdot \frac{L_3}{R_1} + s^2 \cdot [C_1 \cdot (L_2 + L_3)] + s^3 \cdot \frac{C_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{R_1}}$$

$$\omega_s := \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C_1}} \quad \omega_m := \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot (L_2 + L_3)}} \quad Q_1 := R_1 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_2}} \quad Q_2 := \frac{N_{ps}^2 \cdot R_L}{Z_0} \quad Z_0 := \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$$

$$H_{m1}(s) := \frac{1}{N_{ps}} \cdot \frac{\frac{L_3}{L_2} \cdot \left(\frac{s}{\omega_s}\right)^2}{1 + s \cdot \frac{L_3}{R_1} + \left(\frac{s}{\omega_m}\right)^2 + s^3 \cdot \frac{L_3}{L_2 \cdot Q_1 \cdot \omega_s^3}}$$

$$H_{m2}(s) := \frac{1}{N_{ps}} \cdot \frac{\frac{L_3}{L_2} \cdot \left(\frac{s}{\omega_s}\right)^2}{1 + s \cdot \frac{\pi^2 \cdot L_3}{8 \cdot N_{ps}^2 \cdot R_L} + \left(\frac{s}{\omega_m}\right)^2 + s^3 \cdot \frac{\pi^2 \cdot L_3}{8 \cdot L_2 \cdot Q_2 \cdot \omega_s^3}}$$

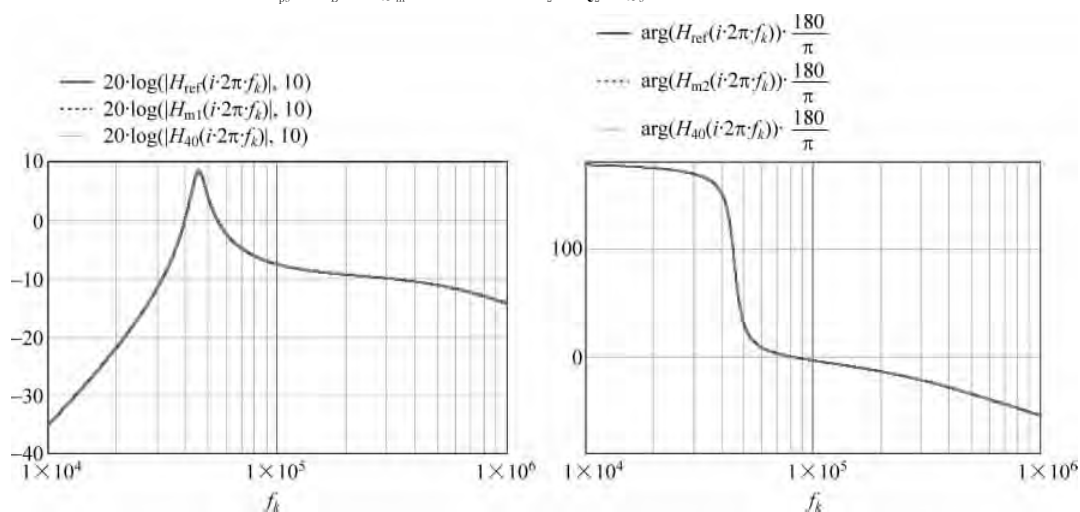


图 5.108 Mathcad 输出曲线表明所有传递函数的交流动态响应相同

9. 习题 9

图 5.83 所示电路为扬声器模型,文献[3]对其进行了详细描述。当驱动变量为电流源、输出响应为电路网络两端电压时计算端口阻抗。当激励源设置为 0A 时,电路中电感 L_1 上端悬空,从而产生 0 值时间常数,使得分母无穷大。此时电路可能产生不确定性,通过在电路网络中增加电阻或者将某些时间常数重新组合以消除不确定性。首先从图 5.109(a) 开始分析,求得电路网络的直流电阻 R_0 为:

$$R_0 = R_1 \quad (5.571)$$

由图 5.109(b)~(e)求得其他 4 个时间常数分别为:

$$\tau_1 = \frac{L_1}{\infty} \quad (5.572)$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_2} \quad (5.573)$$

$$\tau_3 = C_3 \cdot 0 \quad (5.574)$$

$$\tau_4 = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.575)$$

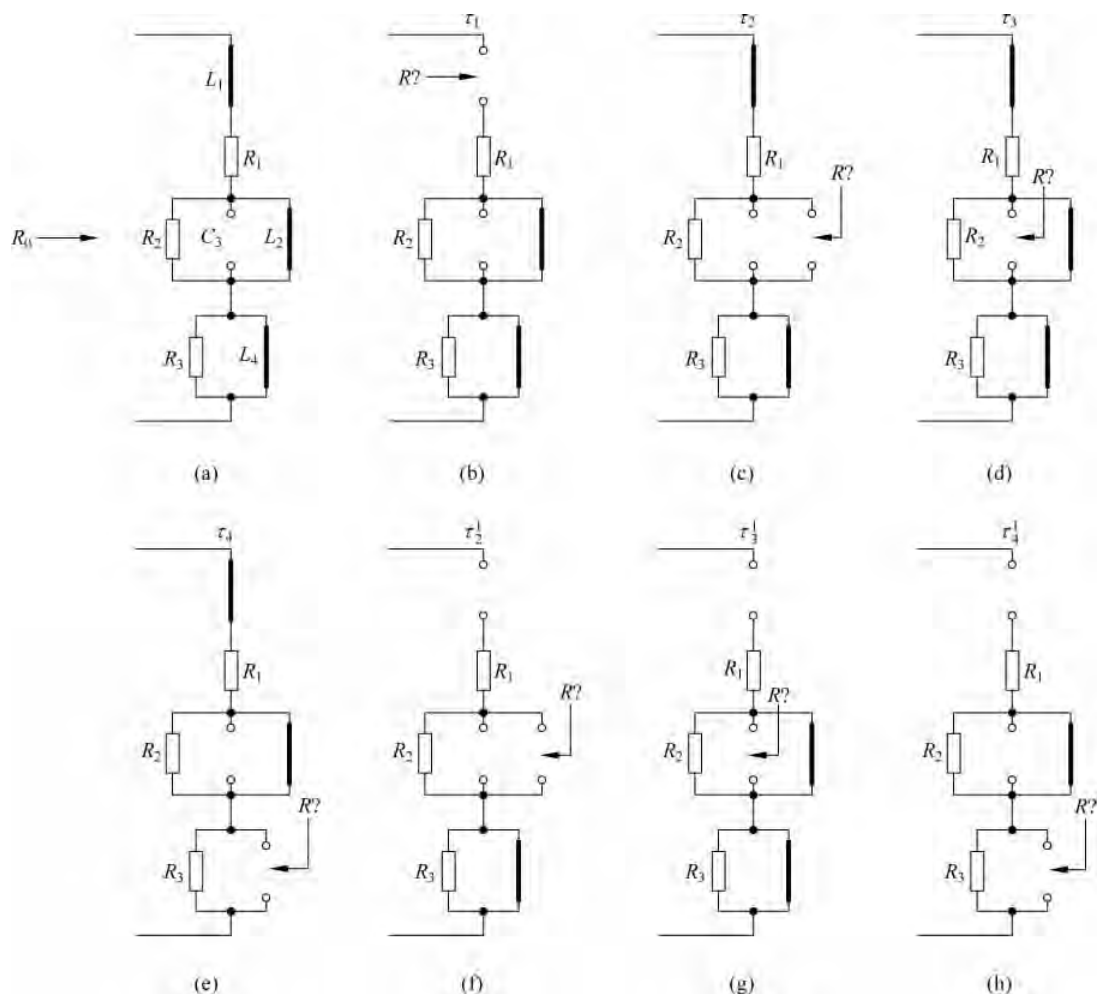


图 5.109 利用分解电路图有助于计算各种时间常数

整理得系数 b_1 为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \frac{L_2}{R_2} + \frac{L_4}{R_3} \quad (5.576)$$

由图 5.109(f)~(h) 和图 5.110(a)~(c) 分别计算如下时间常数:

$$\tau_2^1 = \frac{L_2}{R_2} \quad (5.577)$$

$$\tau_3^1 = C_3 \cdot 0 \quad (5.578)$$

$$\tau_4^1 = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.579)$$

$$\tau_3^2 = C_3 R_2 \quad (5.580)$$

$$\tau_4^2 = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.581)$$

$$\tau_4^3 = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.582)$$

整理得系数 b_2 为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_1 \tau_4^1 + \tau_2 \tau_3^2 + \tau_2 \tau_4^2 + \tau_3 \tau_4^3 \\ &= \frac{L_1}{\infty} \frac{L_2}{R_2} + \frac{L_1}{\infty} \cdot 0 \cdot C_3 + \frac{L_1}{\infty} \frac{L_4}{R_3} + \frac{L_2}{R_2} C_3 R_2 + \frac{L_2}{R_2} \frac{L_4}{R_3} + C_3 \cdot 0 \cdot \frac{L_4}{R_3} \\ &= \frac{L_2}{R_2} C_3 R_2 + \frac{L_2}{R_2} \frac{L_4}{R_3} = L_2 C_3 + \frac{L_2}{R_2} \frac{L_4}{R_3} \end{aligned} \quad (5.583)$$

现在利用图 5.110(d)~(g) 分别计算如下时间常数:

$$\tau_3^{12} = C_3 R_2 \quad (5.584)$$

$$\tau_4^{12} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.585)$$

$$\tau_4^{13} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.586)$$

$$\tau_4^{23} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.587)$$

根据上述所得时间常数求得系数 b_3 为:

$$\begin{aligned} b_3 &= \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} + \tau_1 \tau_2^1 \tau_4^{12} + \tau_1 \tau_3^1 \tau_4^{13} + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^{23} \\ &= \frac{L_1}{\infty} \frac{L_2}{R_2} C_3 R_2 + \frac{L_1}{\infty} \frac{L_2}{R_2} \frac{L_4}{R_3} + \frac{L_1}{\infty} \cdot 0 \cdot C_3 \frac{L_4}{R_3} + \frac{L_2}{R_2} C_3 R_2 \frac{L_4}{R_3} \\ &= \frac{L_2 C_3 L_4}{R_3} \end{aligned} \quad (5.588)$$

最后由图 5.110(h) 求得如下时间常数:

$$\tau_4^{123} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.589)$$

所以系数 b_4 为:

$$b_4 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} \tau_4^{123} = \frac{L_1}{\infty} \frac{L_2}{R_2} C_3 R_2 \frac{L_4}{R_3} = 0 \quad (5.590)$$

根据上述计算所得每项系数值, 整理得分母 $D(s)$ 表达式为:

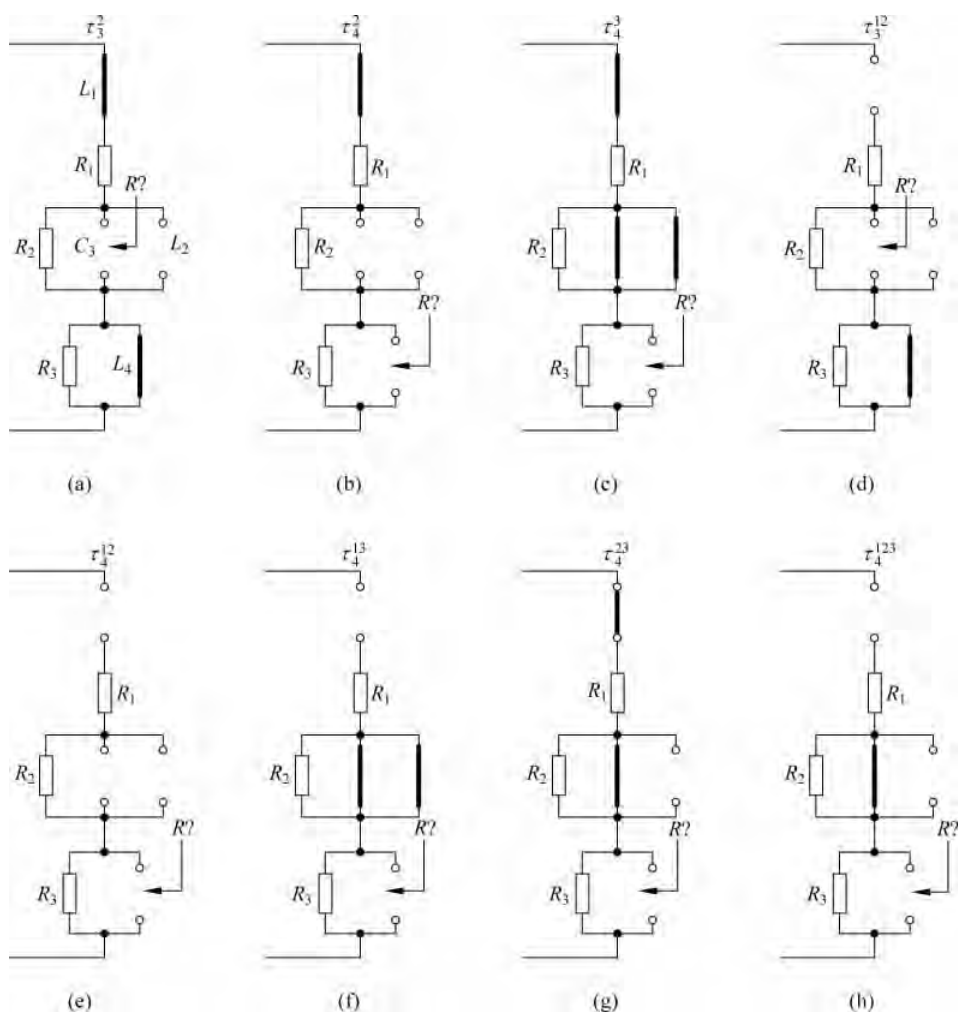


图 5.110 利用该系列电路图计算第二部分固有时间常数

$$\begin{aligned}
 D(s) &= 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 \\
 &= 1 + s \left(\frac{L_2}{R_2} + \frac{L_4}{R_3} \right) + s^2 \left(L_2 C_3 + \frac{L_2}{R_2} \frac{L_4}{R_3} \right) + s^3 \frac{L_2 C_3 L_4}{R_3} \quad (5.591)
 \end{aligned}$$

根据上述计算已经求得分子表达式,接下来计算分子表达式。通常情况下利用 NDI 比通用公式更复杂,但计算电路网络阻抗除外。因为将图 5.83 中的输出响应置零时激励电流源由短路线代替,所以电路得到简化。将 NDI 技术应用于该电路网络使得分析非常简单,具体如图 5.111 和图 5.112 所示。首先从图 5.111(a)~(d) 开始分析,求得如下时间常数:

$$\tau_{1N} = \frac{L_1}{R_1} \quad (5.592)$$

$$\tau_{2N} = \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} \quad (5.593)$$

$$\tau_{3N} = C_3 \cdot 0 \quad (5.594)$$

$$\tau_{4N} = \frac{L_4}{R_1 \parallel R_3} \quad (5.595)$$

第一项分子系数 a_1 为:

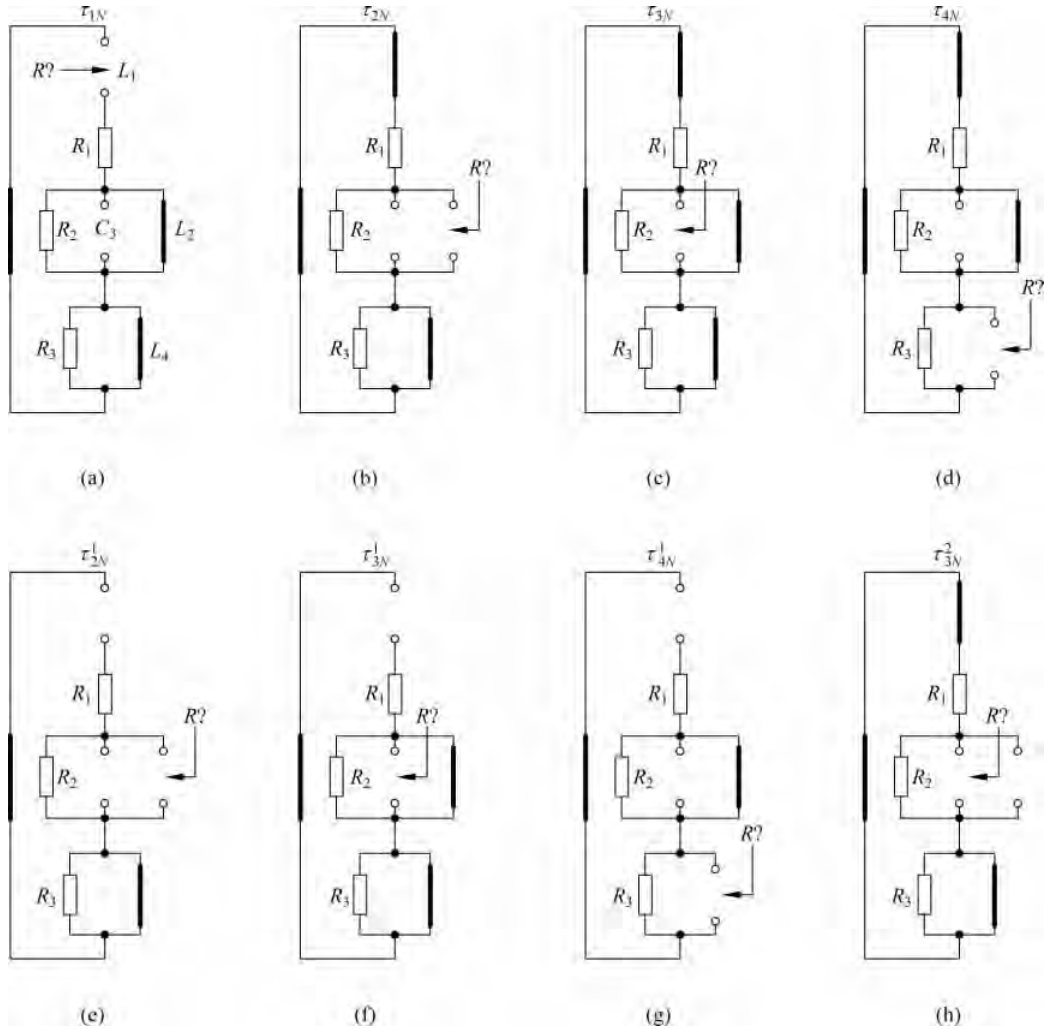


图 5.111 因为电流源由短路线代替,所以利用 NDI 可快速求得零点值

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \tau_{1N} + \tau_{2N} + \tau_{3N} + \tau_{4N} = \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} + C_3 \cdot 0 + \frac{L_4}{R_1 \parallel R_3} \\
 &= \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} + \frac{L_4}{R_1 \parallel R_3}
 \end{aligned} \quad (5.596)$$

由图 5.111(e)~(b)求得如下时间常数:

$$\tau_{2N}^1 = \frac{L_2}{R_2} \quad (5.597)$$

$$\tau_{3N}^1 = C_3 \cdot 0 \quad (5.598)$$

$$\tau_{4N}^1 = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.599)$$

$$\tau_{3N}^2 = C_3 (R_2 \parallel R_1) \quad (5.600)$$

$$\tau_{4N}^2 = \frac{L_4}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} \quad (5.601)$$

$$\tau_{4N}^3 = \frac{L_4}{R_3 \parallel R_1} \quad (5.602)$$

整理得 a_2 表达式为:

$$\begin{aligned} a_2 &= \tau_{1N}\tau_{2N}^1 + \tau_{1N}\tau_{3N}^1 + \tau_{1N}\tau_{4N}^1 + \tau_{2N}\tau_{3N}^2 + \tau_{2N}\tau_{4N}^2 + \tau_{3N}\tau_{4N}^3 \\ &= \frac{L_1}{R_1} \frac{L_2}{R_2} + \frac{L_1}{R_1} C_3 \cdot 0 + \frac{L_1}{R_1} \frac{L_4}{R_3} + \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} C_3 (R_2 \parallel R_1) + \\ &\quad \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} \frac{L_4}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} + C_3 \cdot 0 \frac{L_4}{R_3 \parallel R_1} \\ &= \frac{L_1}{R_1} \frac{L_2}{R_2} + \frac{L_1}{R_1} \frac{L_4}{R_3} + L_2 C_3 + \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} \frac{L_4}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} \end{aligned} \quad (5.603)$$

由图 5.112(c)~(f) 计算与 a_3 相关的时间常数为:

$$\tau_{3N}^{12} = C_3 R_2 \quad (5.604)$$

$$\tau_{4N}^{12} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.605)$$

$$\tau_{4N}^{13} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.606)$$

$$\tau_{4N}^{23} = \frac{L_4}{R_3 \parallel R_1} \quad (5.607)$$

于是 a_3 表达式为:

$$\begin{aligned} a_3 &= \tau_{1N}\tau_{2N}^1\tau_{3N}^{12} + \tau_{1N}\tau_{2N}^1\tau_{4N}^{12} + \tau_{1N}\tau_{3N}^1\tau_{4N}^{13} + \tau_{2N}\tau_{3N}^2\tau_{4N}^{23} \\ &= \frac{L_1}{R_1} \frac{L_2}{R_2} C_3 R_2 + \frac{L_1}{R_1} \frac{L_2}{R_2} \frac{L_4}{R_3} + \frac{L_1}{R_1} C_3 \cdot 0 \frac{L_4}{R_3} + \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} C_3 (R_2 \parallel R_1) \frac{L_4}{R_3 \parallel R_1} \\ &= \frac{L_1 L_2}{R_1} C_3 + \frac{L_1}{R_1} \frac{L_2}{R_2} \frac{R_3}{L_4} + L_2 C_3 \frac{L_4}{R_3 \parallel R_1} \end{aligned} \quad (5.608)$$

由图 5.112(g) 计算最后一项时间常数:

$$\tau_{4N}^{123} = \frac{L_4}{R_3} \quad (5.609)$$

求得 a_4 表达式为:

$$a_4 = \tau_{1N}\tau_{2N}^1\tau_{3N}^{12}\tau_{4N}^{123} = \frac{L_1}{R_1} \frac{L_2}{R_2} C_3 R_2 \frac{L_4}{R_3} = \frac{L_1 L_2 L_4 C_3}{R_1 R_3} \quad (5.610)$$

根据上述计算,整理得分子 $N(s)$ 的完整表达式为:

$$\begin{aligned} N(s) &= 1 + s a_1 + s^2 a_2 + s^3 a_3 + s^4 a_4 \\ &= 1 + s \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} + \frac{L_4}{R_1 \parallel R_3} \right) + s^2 \left[\frac{L_1}{R_1} \frac{L_2}{R_2} + \frac{L_1}{R_1} \frac{L_4}{R_3} + L_2 C_3 + \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} \frac{L_4}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} \right] + \\ &\quad s^3 \left(\frac{L_1 L_2}{R_1} C_3 + \frac{L_1}{R_1} \frac{L_2}{R_2} \frac{L_4}{R_3} + L_2 C_3 \frac{L_4}{R_3 \parallel R_1} \right) + s^4 \frac{L_1 L_2 L_4 C_3}{R_1 R_3} \end{aligned} \quad (5.611)$$

于是传递函数表达式为:

$$Z(s) = R_0 \frac{N(s)}{D(s)} = R_1 \cdot \frac{N(s)}{1 + s \left(\frac{L_2}{R_2} + \frac{L_4}{R_3} \right) + s^2 \left(L_2 C_3 + \frac{L_2}{R_2} \frac{L_4}{R_3} \right) + s^3 \frac{L_2 C_3 L_4}{R_3}} \quad (5.612)$$

原始传递函数为一系列阻抗的串联连接:

$$Z_{\text{ref}}(s) = s L_1 + R_1 + Z_1(s) + Z_2(s) \quad (5.613)$$

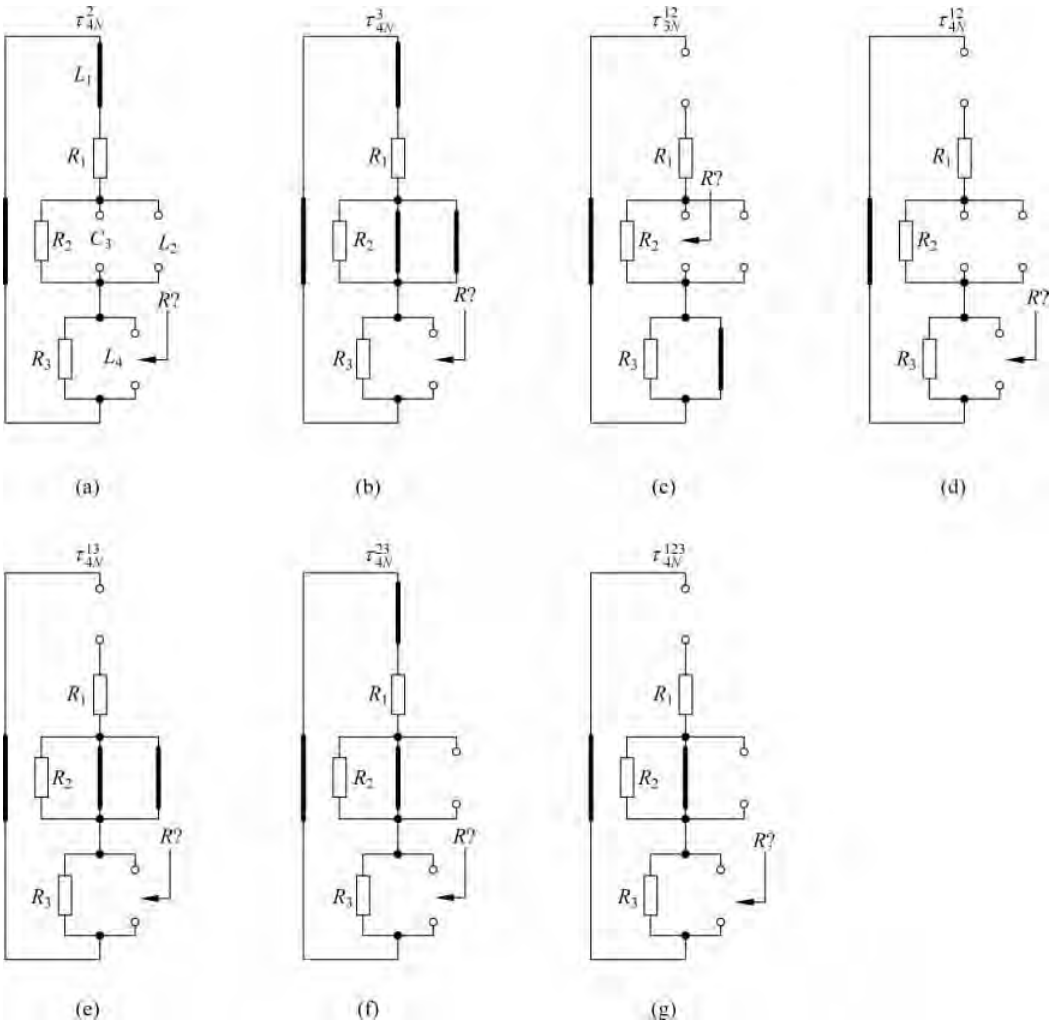


图 5.112 再次利用 NDI 对电路进行分析以计算分子表达式

其中

$$Z_1(S) = R_2 \parallel \left(\frac{1}{sC_3} \right) \parallel sL_2 \tag{5.614}$$

$$Z_2(s) = R_3 \parallel sL_4 \tag{5.615}$$

如图 5.113 所示,将所有计算公式全部输入 Mathcad 软件,所有动态响应均完全一致。

10. 习题 10

图 5.84 所示电路为反相 2 阶滤波器,文献[4]对其工作原理进行详细介绍。接下来利用经典电路图分析方法求解电路传递函数,包括电路固有时间常数以及传递函数增益。由图 5.114(a)可得直流增益值,即:

$$H_0 = 0 \tag{5.616}$$

$$R_1 := 7.67\Omega \quad R_2 := 15.5\Omega \quad R_3 := 31.9\Omega \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$C_3 := 394\mu\text{F} \quad L_1 := 34.6\mu\text{H} \quad L_2 := 2.9\text{mH} \quad L_4 := 112\mu\text{H}$$

□

$$\tau_1 := \frac{L_1}{\infty \cdot \Omega} = 0\mu\text{s} \quad \tau_2 := \frac{L_2}{R_2} = 187.097\mu\text{s}$$

$$\tau_3 := C_3 \cdot 0 = 0\mu\text{s} \quad \tau_4 := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 190.608\mu\text{s}$$

$$\tau_{12} := \frac{L_2}{R_2} = 187.097\mu\text{s} \quad \tau_{13} := C_3 \cdot 0 = 0\mu\text{s}$$

$$\tau_{14} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s} \quad \tau_{23} := C_3 \cdot R_2 = 6.107\text{ms}$$

$$\tau_{24} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s} \quad \tau_{34} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s}$$

$$b_2 := \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_1 \cdot \tau_{14} + \tau_2 \cdot \tau_{23} + \tau_2 \cdot \tau_{24} + \tau_3 \cdot \tau_{34} = 1.143 \times 10^{-6} \text{s}^2$$

$$\tau_{123} := C_3 \cdot R_2 = 6.107\text{ms} \quad \tau_{124} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s}$$

$$\tau_{134} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s} \quad \tau_{234} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s}$$

$$b_3 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} + \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{124} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot \tau_{134} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{234} = 4.012 \times 10^6 \mu\text{s}^3$$

$$\tau_{1234} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s} \quad b_4 := \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot \tau_{1234} = 0\mu\text{s}^4$$

$$R_0 := R_1 \quad \tau_{1N} := \frac{L_1}{R_1} = 4.511\mu\text{s} \quad \tau_{2N} := \frac{L_2}{R_1 \parallel R_2} = 565.193\mu\text{s}$$

$$\tau_{3N} := C_3 \cdot 0 = 0\mu\text{s} \quad \tau_{4N} := \frac{L_4}{R_1 \parallel R_3} = 18.113\mu\text{s}$$

$$a_1 := \tau_{1N} + \tau_{2N} + \tau_{3N} + \tau_{4N} = 587.818\mu\text{s}$$

$$\tau_{12N} := \frac{L_2}{R_2} = 187.097\mu\text{s} \quad \tau_{13N} := C_3 \cdot 0 = 0\mu\text{s}$$

$$\tau_{14N} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s} \quad \tau_{23N} := C_3 \cdot (R_2 \parallel R_1) = 2.022\text{ms}$$

$$\tau_{24N} := \frac{L_4}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} = 8.345\mu\text{s} \quad \tau_{34N} := \frac{L_4}{R_3 \parallel R_1} = 18.113\mu\text{s}$$

$$a_2 := \tau_{1N} \cdot \tau_{12N} + \tau_{1N} \cdot \tau_{13N} + \tau_{1N} \cdot \tau_{14N} + \tau_{2N} \cdot \tau_{23N} + \tau_{2N} \cdot \tau_{24N} + \tau_{3N} \cdot \tau_{34N} = 1.148 \times 10^{-6} \text{s}^2$$

$$\tau_{123N} := C_3 \cdot R_2 = 6.107\text{ms} \quad \tau_{124N} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s}$$

$$\tau_{134N} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s} \quad \tau_{234N} := \frac{L_4}{R_3 \parallel R_1} = 18.113\mu\text{s}$$

$$a_3 := \tau_{1N} \cdot \tau_{12N} \cdot \tau_{123N} + \tau_{1N} \cdot \tau_{12N} \cdot \tau_{124N} + \tau_{1N} \cdot \tau_{13N} \cdot \tau_{134N} + \tau_{2N} \cdot \tau_{23N} \cdot \tau_{234N} = 2.585 \times 10^7 \mu\text{s}^3$$

$$\tau_{1234N} := \frac{L_4}{R_3} = 3.511\mu\text{s} \quad a_4 := \tau_{1N} \cdot \tau_{12N} \cdot \tau_{123N} \cdot \tau_{1234N} = 1.81 \times 10^7 \mu\text{s}^4$$

$$D_1(s) := 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3 + s^4 \cdot b_4$$

$$D_2(s) := 1 + s \cdot \left(\frac{L_2}{R_2} + \frac{L_4}{R_3} \right) + s^2 \cdot \left(L_2 \cdot C_3 + \frac{L_2 \cdot L_4}{R_2 \cdot R_3} \right) + s^3 \cdot \frac{L_2 \cdot L_4 \cdot C_3}{R_3}$$

$$N_1(s) := 1 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + s^3 \cdot a_3 + s^4 \cdot a_4 \quad Z_{10}(s) := R_0 \cdot \frac{N_1(s)}{D_2(s)}$$

$$Z_1(s) := \left(\frac{1}{s \cdot C_3} \right) \parallel R_2 \parallel (s \cdot L_2)$$

$$Z_2(s) := R_3 \parallel (s \cdot L_4)$$

$$Z_{\text{ref}}(s) := s \cdot L_1 + R_1 + Z_1(s) + Z_2(s)$$

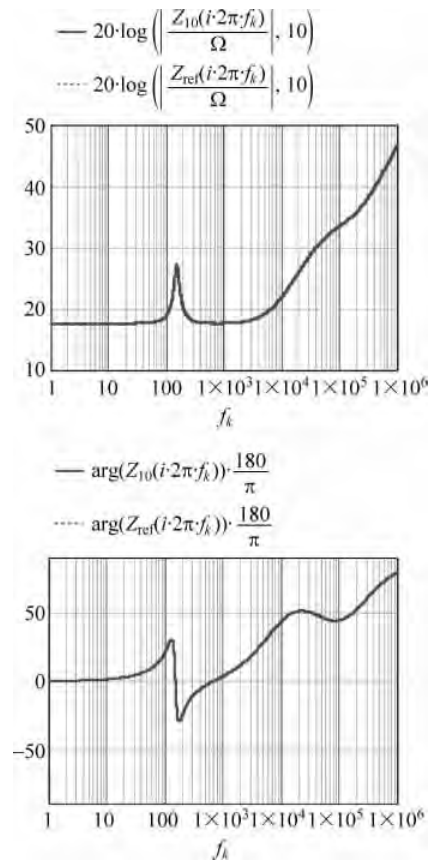


图 5.113 利用 Mathcad 程序验证计算方法正确

然后由图 5.114(b)确定如下 3 个时间常数:

$$\tau_1 = C_1 R_1 \quad (5.617)$$

$$\tau_2 = C_2 R_1 \quad (5.618)$$

$$\tau_3 = C_3 R_1 \quad (5.619)$$

于是可将分母系数 b_1 简化为:

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = R_1(C_1 + C_2 + C_3) \quad (5.620)$$

接下来继续分析图 5.114(c)~(e)。在图 5.114(c)中输出电压为 0V、无驱动信号,运放输出负端接 0 并且电阻 R_1 接地。因此时间常数为:

$$\tau_2^1 = C_2 R_2 \quad (5.621)$$

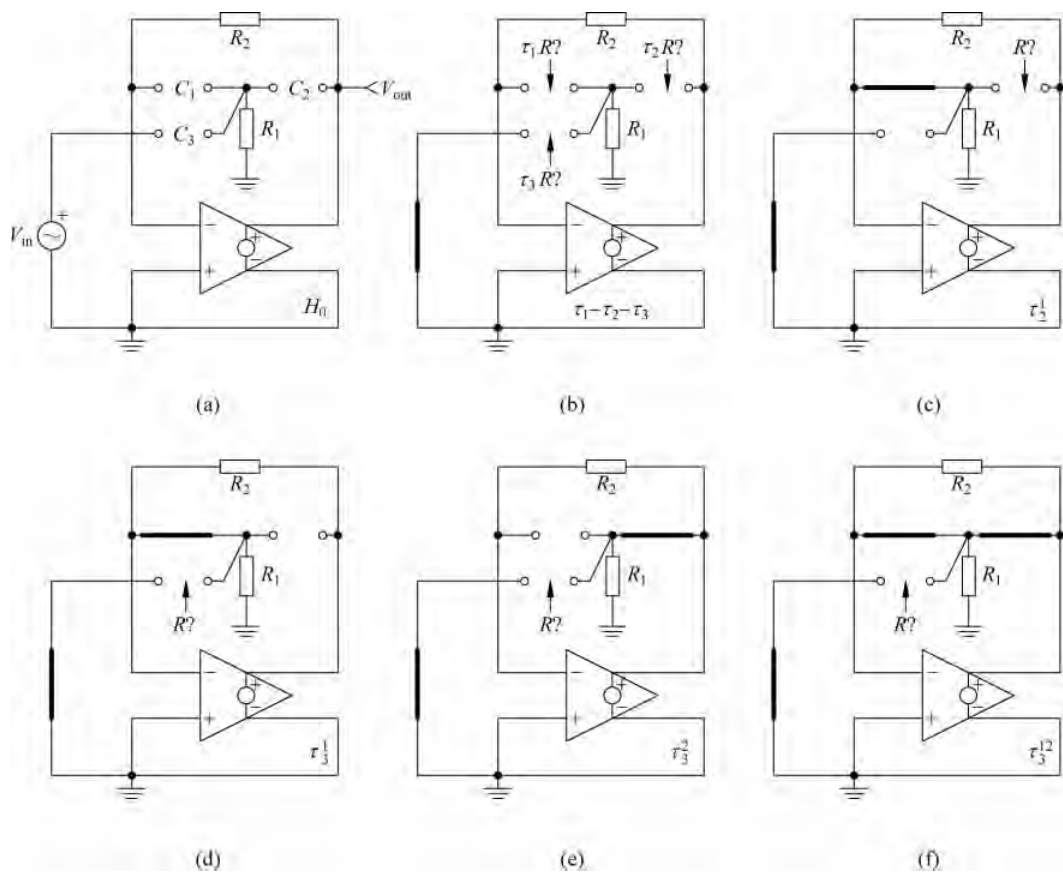


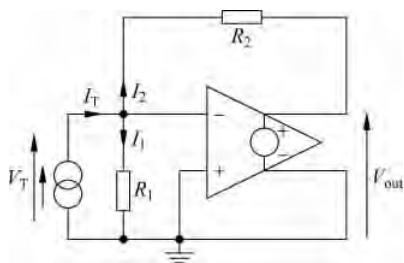
图 5.114 根据分解电路图确定分母表达式 D

在图 5.114(d)中,利用图 5.115 中间电路进行计算非常必要。测试电流 I_T 为 I_1 和 I_2 之和,即:

$$I_T = I_1 + I_2 \quad (5.622)$$

第一电流 I_1 由电阻 R_1 与输入负端决定。输入负端为 V_{out} 与运算放大器开环增益 A_{OL} 之商。所以电流 I_1 为:

$$I_1 = -\frac{V_{out}}{A_{OL} R_1} \quad (5.623)$$

图 5.115 τ_3^1 计算电路图

第二电流 I_2 等于反相引脚电压和输出电压之差再与电阻 R_2 之商, 计算公式如下:

$$I_2 = \frac{V_{(-)} - V_{out}}{R_2} = \frac{-\frac{V_{out}}{A_{OL}} - V_{out}}{R_2} = -\frac{\left(\frac{1}{A_{OL}} + 1\right)}{R_2} V_{out} \quad (5.624)$$

V_T 为输入负引脚电压, 即:

$$V_T = -\frac{V_{out}}{A_{OL}} \quad (5.625)$$

所以电容 C_3 两端阻抗为:

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{-\frac{V_{out}}{A_{OL}}}{-\frac{\left(\frac{1}{A_{OL}} + 1\right)}{R_2} V_{out} - \frac{V_{out}}{A_{OL} R_1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + A_{OL} R_1} \quad (5.626)$$

此时与 C_3 相关联的时间常数为:

$$\tau_3^1 = C_3 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + A_{OL} R_1} \quad (5.627)$$

由图 5.114(e)求的时间常数为:

$$\tau_3^2 = C_3 \cdot 0 \quad (5.628)$$

所以系数 b_2 为:

$$\begin{aligned} b_2 &= \tau_1 \tau_2^1 + \tau_1 \tau_3^1 + \tau_2 \tau_3^2 \\ &= C_1 R_1 C_2 R_2 + C_1 R_1 C_3 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + A_{OL} R_1} + C_2 R_1 \cdot 0 \cdot C_3 \\ &= C_1 R_1 C_2 R_2 + C_1 R_1 C_3 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + A_{OL} R_1} \end{aligned} \quad (5.629)$$

当开环增益 A_{OL} 接近无穷大时式(5.629)简化为:

$$b_2 = C_1 C_2 R_1 R_2 \quad (5.630)$$

由图 5.114(f)求得时间常数 τ_3^{12} 为:

$$\tau_3^{12} = C_3 \cdot 0 \quad (5.631)$$

所以 3 阶系数 b_3 的定义式为:

$$b_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^{12} = C_1 R_1 C_2 R_2 \cdot 0 \cdot C_3 = 0 \quad (5.632)$$

根据上述计算整理得分母 $D(s)$ 表达式为:

$$D(s) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 = 1 + s R_1 (C_1 + C_2 + C_3) + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 \quad (5.633)$$

如图 5.116 所示, 通过计算电路增益求得分子表达式。

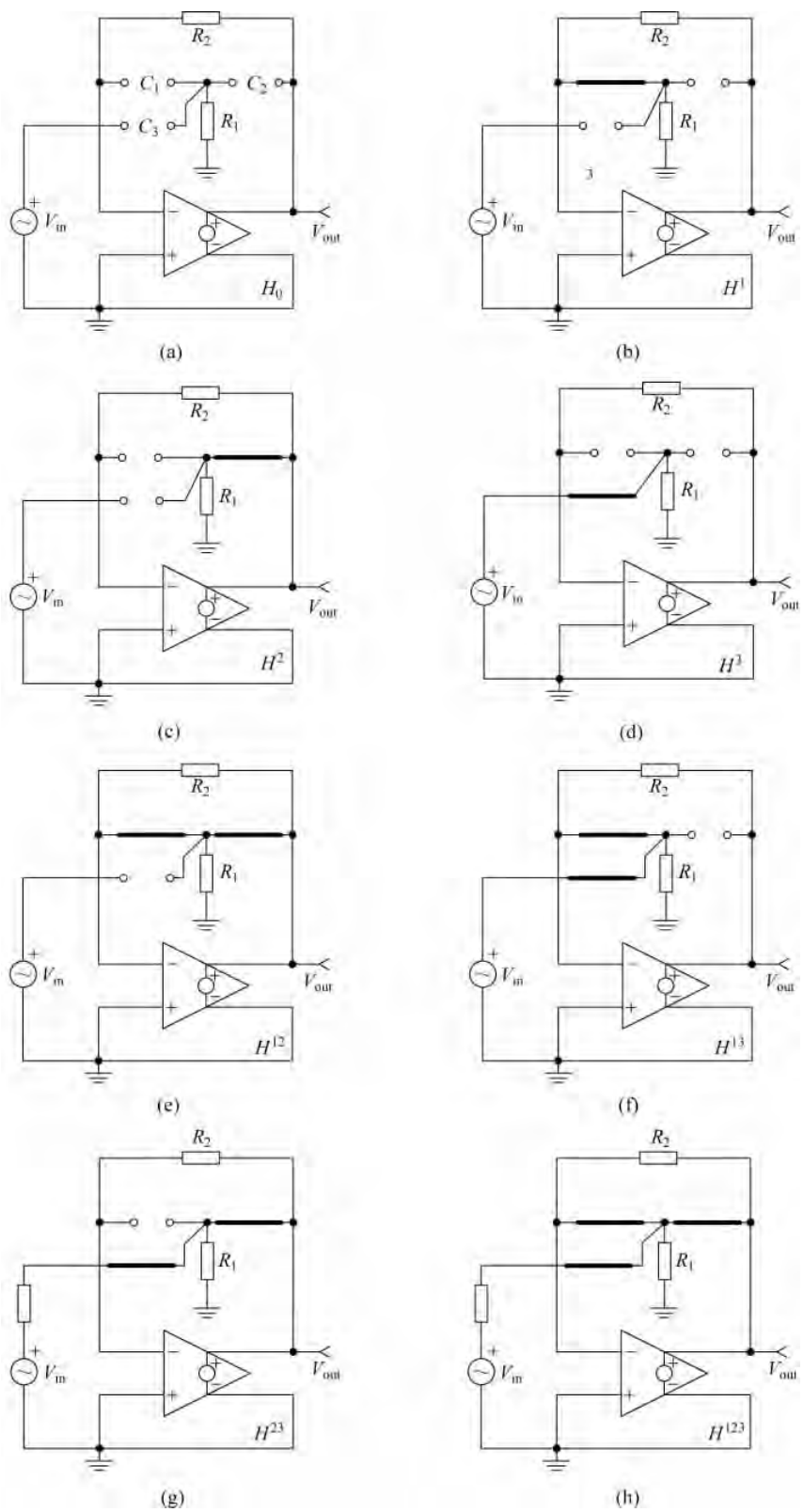


图 5.116 根据分解电路可轻易确定增益值

通过对每个电路图分析可得,除图 5.116(f)中的 $H^{13} = -A_{OL}$ 之外,其余所有增益均为 0,即:

$$H_0 = H^1 = H^2 = H^3 = H^{12} = H^{23} = H^{123} = 0 \quad (5.634)$$

$$H^{13} = -A_{OL} \quad (5.635)$$

根据上述所得增益值,只有 $\tau_1 \tau_3^1 H^{13}$ 非零,所以分子系数为:

$$a_1 = \tau_1 H^1 + \tau_2 H^2 + \tau_3 H^3 = C_1 R_1 \cdot 0 + C_2 R_1 \cdot 0 + C_3 R_1 \cdot 0 = 0 \quad (5.636)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \tau_1 \tau_2^1 H^{12} + \tau_1 \tau_3^1 H^{13} + \tau_2 \tau_3^2 H^{23} \\ &= C_1 R_1 C_2 R_2 \cdot 0 - C_1 R_1 C_3 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + A_{OL} R_1} \right) A_{OL} + C_2 R_1 C_3 \cdot 0 \cdot 0 \\ &= -C_1 R_1 C_3 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + A_{OL} R_1} \right) A_{OL} \end{aligned} \quad (5.637)$$

$$a_3 = \tau_1 \tau_2^1 \tau_3^1 H^{123} = R_1 C_1 R_2 C_2 \cdot 0 \cdot C_3 \cdot 0 = 0 \quad (5.638)$$

当 A_{OL} 接近无穷大时 a_2 表达式简化为:

$$a_2 = \lim_{A_{OL} \rightarrow \infty} -C_1 R_1 C_3 \left(\frac{R_1 R_2}{\frac{R_1}{A_{OL}} + \frac{R_2}{A_{OL}} + R_1} \right) = -C_1 C_3 R_1 R_2 \quad (5.639)$$

所以分子表达式 $N(s)$ 可由如下一项进行定义:

$$N(s) = -s^2 C_1 C_3 R_1 R_2 = -\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (5.640)$$

其中

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_3 R_1 R_2}} \quad (5.641)$$

如果所有电容均为 C ,则式(5.641)简化为:

$$\omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}} \quad (5.642)$$

现在通过式(5.640)与式(5.633)之商得到最终传递函数为:

$$H(s) = -\frac{s^2 C_1 C_3 R_1 R_2}{1 + s R_1 (C_1 + C_2 + C_3) + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2} \quad (5.643)$$

根据第 2 章定义,利用品质因数和谐振频率对传递函数进行重新整理。其中品质因数计算公式为:

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{(C_1 + C_2 + C_3) R_1} = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3} \sqrt{\frac{C_1 C_2 R_2}{R_1}} \quad (5.644)$$

如果所有电容均为 C ,则式(5.644)简化为:

$$Q = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad (5.645)$$

谐振角频率通过如下公式计算:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_3 R_1 R_2}} \quad (5.646)$$

如果所有电容均为 C , 则式(5.646)简化为:

$$\omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}} \quad (5.647)$$

利用上述计算结果将传递函数表达式(5.643)重新整理为:

$$H(s) = - \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (5.648)$$

可以按照第2章指导原则以更紧凑的形式重新整理式(5.648):

$$H(s) = -H_\infty \frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{sQ} + \left(\frac{\omega_0}{s}\right)^2} \quad (5.649)$$

其中 H_∞ 为 s 接近无穷大时的增益值——1 或 0dB。

图 5.117 中的所有曲线证明上述方法正确。

$$C_1 := 337.6 \mu\text{F} \quad C_2 := 337.6 \mu\text{F} \quad C_3 := 337.6 \mu\text{F} \quad R_1 := 2.222 \text{k}\Omega \quad R_2 := 10 \text{k}\Omega \quad A_{OL} := 10^5 \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= C_1 \cdot R_1 = 0.750147 \mu\text{s} \\ \tau_2 &:= C_2 \cdot R_1 = 0.750147 \mu\text{s} \\ \tau_3 &:= C_3 \cdot R_1 = 0.750147 \mu\text{s} \\ \tau_{12} &:= C_2 \cdot R_2 = 3.376 \mu\text{s} \\ \tau_{13} &:= C_3 \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + A_{OL} \cdot R_1} \right) = 0.033758 \text{ns} \\ \tau_{23} &:= C_3 \cdot 0 = 0 \text{ms} \\ \tau_{123} &:= C_3 \cdot 0 = 0 \text{ms} \\ b_1 &:= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2.250442 \times 10^{-3} \text{ms} \\ b_2 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} = 2.532522 \mu\text{s}^2 \\ b_3 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} = 0 \\ D_3(s) &:= 1 + s \cdot R_1 \cdot (C_1 + C_2 + C_3) + s^2 \cdot (C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2) \\ H_0 &:= 0 \quad H_1 := 0 \quad H_2 := 0 \quad H_3 := 0 \\ H_{12} &:= 0 \quad H_{13} := -A_{OL} \quad H_{23} := 0 \quad H_{123} := 0 \\ D_1(s) &:= 1 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3 \\ a_1 &:= \tau_1 \cdot H_1 + \tau_2 \cdot H_2 + \tau_3 \cdot H_3 = 0 \text{ms} \\ a_2 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot H_{12} + \tau_1 \cdot \tau_{13} \cdot H_{13} + \tau_2 \cdot \tau_{23} \cdot H_{23} = -2.532358 \mu\text{s}^2 \\ a_3 &:= \tau_1 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{123} \cdot H_{123} = 0 \\ N_1(s) &:= H_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 \\ Q &:= \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = 0.707146 \quad \omega_0 := \frac{1}{\sqrt{b_2}} \\ f_0 &:= \frac{\omega_0}{2\pi} = 100.010016 \text{kHz} \\ H_{10}(s) &:= \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad H_{20}(s) := -\frac{C_1 \cdot C_3 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot s^2}{D_3(s)} \\ H_{30}(s) &:= -\frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{s \cdot Q} + \left(\frac{\omega_0}{s}\right)^2} \end{aligned}$$

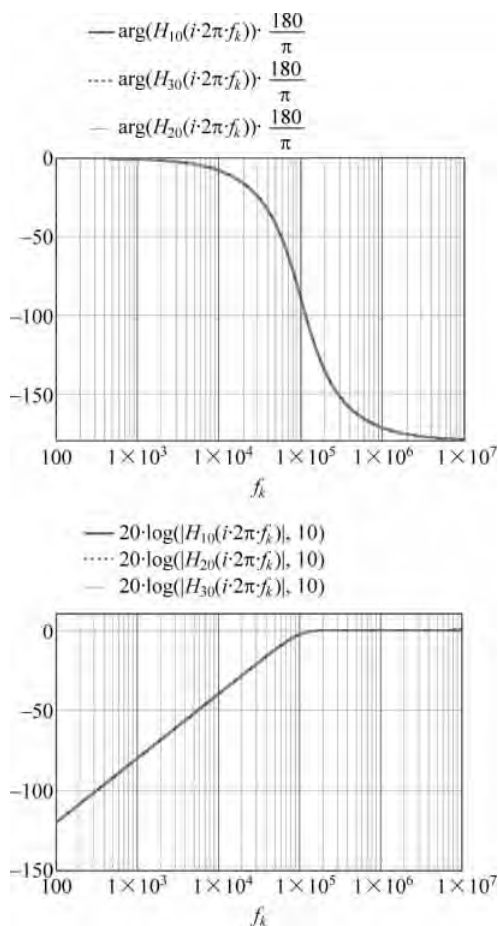


图 5.117 所有传递函数动态响应一致

参考文献

1. Basso C. Understanding the LLC Structure in Resonant Application. ON Semiconductor application note AND8311, http://www.onsemi.com/pub_link/Collateral/AND8311-D.PDF (last accessed 12/12/2015).
2. Basso C. A Simple Dc SPICE Model for the LLC Converter. ON Semiconductor application note AND8255, http://www.onsemi.com/pub_link/Collateral/AND8255-D.PDF (last accessed 12/12/2015).
3. <https://gasstationwithoutpumps.wordpress.com/2013/02/15/seventeenth-day-of-circuits-class-inductors-and-gnuplottutorial/> (last accessed 12/12/2015).
4. <http://www.filter-solutions.com/active.html> (last accessed 12/12/2015).