

计算机只能计算有限长离散序列,因此有限长序列在数字信号处理中就显得很重要,虽然可以用 Z 变换和序列傅里叶变换研究它,但是这两种变换无法直接利用计算机进行数值计算。针对序列“有限长”这一特点,可以导出一种更有效的变换——离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform,DFT)。作为有限长序列的一种表示方法,离散傅里叶变换除了在理论上相当重要之外,由于存在有效的快速算法——快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform,FFT),因而在各种数字信号处理的算法中起着核心作用。本章主要讨论离散傅里叶级数和离散傅里叶变换定义性质,圆周卷积,利用DFT计算线性卷积和以及频域采样理论等内容。



视频讲解

3.1 引言

傅里叶变换是以时间(t, n)为自变量的“信号”与以频率(Ω, f 或 ω)为自变量的“频谱”函数之间的一种变换关系。当自变量“时间”与“频率”为连续形式和离散形式的不同组合时,就形成了各种不同形式的傅里叶变换对,即“信号”与“频谱”的对应关系。

1. 连续时间、非周期信号的傅里叶变换

连续时间、非周期信号通过连续傅里叶变换(FT)得到非周期连续频谱密度函数。

正变换

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3-1)$$

逆变换

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3-2)$$

从图 3-1 的矩形脉冲及其频谱可以看出:

- (1) 时域连续函数造成频域是非周期的谱;
- (2) 时域的非周期造成频域是连续的谱。

2. 连续时间周期信号的傅里叶级数

周期为 T 的周期性连续时间函数 $x_a(t)$ 可展开成傅里叶级数 F_n , 是离散非周期性频谱。

正变换

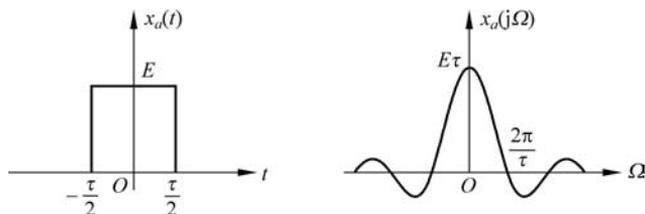


图 3-1 矩形脉冲及其频谱

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_a(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (3-3)$$

逆变换

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (3-4)$$

由图 3-2 的周期矩形脉冲及其频谱可以看出：

- (1) 时域的连续函数造成频域是非周期的频谱函数；
- (2) 频域的离散频谱与时域的周期时间函数对应(频域采样,时域周期延拓)。

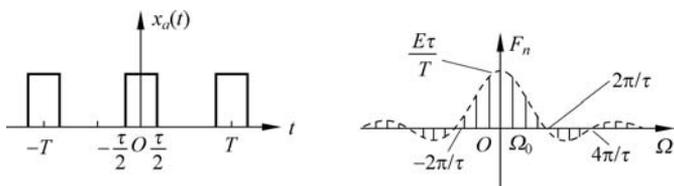


图 3-2 周期矩形脉冲及其频谱

3. 非周期离散信号的傅里叶变换

非周期离散的时间信号得到周期性连续的频率函数。

正变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3-5)$$

逆变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-6)$$

由图 3-3 的非周期离散时间信号及其频谱可以看出

- (1) 时域的离散造成频域的周期延拓；
- (2) 时域的非周期对应于频域连续。

4. 傅里叶变换的 4 种形式

通过上面分析,可以得出一般性规律:一个域的离散对应另一个域的周期延拓,一个域的连续必定对应另一个域的非周期。上面的 3 种傅里叶变换对,都不适用在计算机上运算,因为至少在一个域(时域或频域)中函数是连续的。因为从数字计算角度,感兴趣的是时域及频域都是离散的情况,就是这里要谈到的离散傅里叶变换。

傅里叶变换的 4 种形式如下:

- (1) 连续时间、连续频率——傅里叶变换(FT),是非周期连续信号傅里叶变换,如

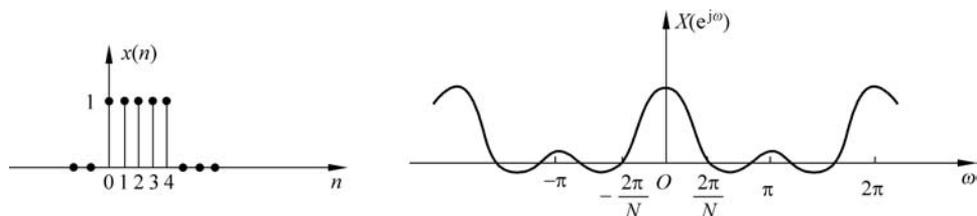


图 3-3 非周期离散时间信号及其频谱

图 3-4(a) 所示;

(2) 连续时间、离散频率——傅里叶级数(FS); 是周期连续信号傅里叶级数, 如图 3-4(b) 所示;

(3) 离散时间、连续频率——序列傅里叶变换(DTFT); 是序列傅里叶变换, 如图 3-4(c) 所示;

(4) 离散时间、离散频率——离散傅里叶变换(DFT), 是离散周期序列频谱, 如图 3-4(d) 所示。

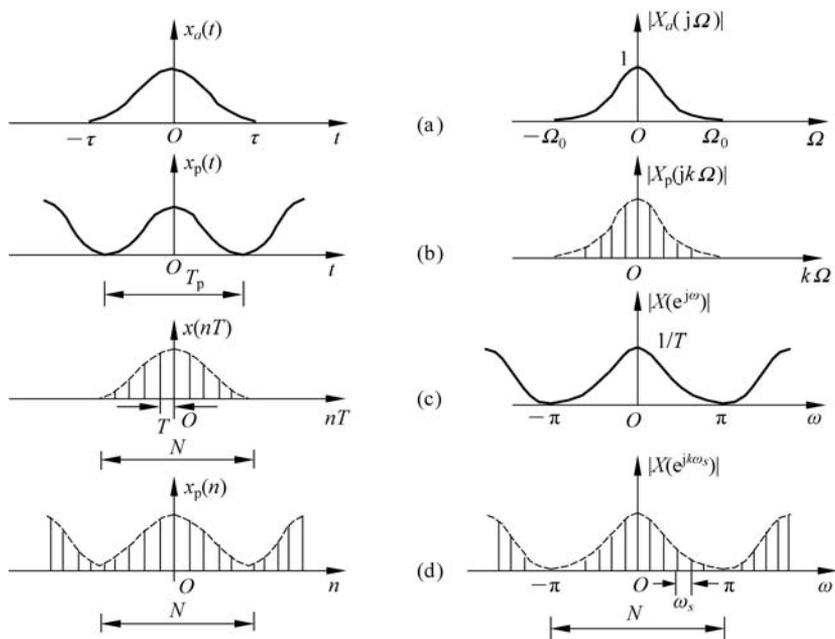


图 3-4 各种形式的傅里叶变换



视频讲解

3.2 周期序列的离散傅里叶级数

3.2.1 离散傅里叶级数定义

若离散时间序列 $x(n)$ 为周期序列, 则一定满足

$$x(n) = x(n + rN)$$

其中, N (正整数) 为信号的周期, r 为任意整数。为了与非周期序列区分, 周期序列记作:

$\tilde{x}(n)$ 。因为周期序列不是绝对可和,因此周期序列不能用傅里叶变换表示,但是周期序列可以用傅里叶级数(Discrete Fourier Series, DFS)表示,离散傅里叶级数定义为

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] \quad (3-7)$$

其中, $\tilde{X}(k)$ 为周期序列傅里叶级数的系数,表示为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] \quad (3-8)$$

为了书写方便,常令符号 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$,这样周期序列傅里叶变换对可以再次写为
正变换

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

反变换

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

MATLAB 程序实现 DFS 过程如下:

```
function [Xk] = dfs(xn, N)      % 计算(DFS)系数
% [Xk] = dfs(xn, N)
% Xk = 在 0 ≤ n ≤ N-1 之间的一个单周期信号
% N = xn 的基本周期
n = [0:1:N-1];                % n 的行向量
k = [0:1:N-1];                % k 的行向量
WN = exp(-j * 2 * pi/N);      % Wn 因子
nk = n' * k;                  % 产生一个含 nk 值的 N × N 维矩阵
Xk = xn * WN.^nk;            % DFS 系数行向量
```

MATLAB 程序实现 IDFS 过程如下:

```
function [xn] = idfs(Xk, N)    % 计算逆(DFS)系数
% [xn] = idfs(Xk, N)
% xn = 周期信号在 0 ≤ n ≤ N-1 之间的一个单周期信号
% Xk = 在 0 ≤ k ≤ N-1 间的 DFS 系数数组
% N = Xk 的基本周期
n = [0:1:N-1];                % n 的行向量
k = [0:1:N-1];                % k 的行向量
WN = exp(-j * 2 * pi/N);      % Wn 因子
nk = n' * k;                  % 产生一个含 nk 值的 N × N 维矩阵
xn = Xk * (WN.^(-nk))/N;      % DFS 系数行向量
```

【例 3-1】 设 $\tilde{x}(n)$ 为周期脉冲串,求 $\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n+rN)$ 。

【解】 因为对于 $0 \leq n \leq N-1$, $\tilde{x}(n) = \delta(n)$, $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 系数为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{nk} = 1$$

在这种情况下,对于所有 k 值, $\tilde{X}(k)$ 均相同,于是有

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n+rN) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

当 n 为 N 整数倍时结果为 1,这正好是周期性脉冲串。

说明:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}kN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \begin{cases} 1, & k = mN, m \text{ 为整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-9)$$

式(3-9)一般称为复正弦序列正交特性。

【例 3-2】 已知周期序列 $\tilde{x}(n)$ 如图 3-5 所示,其周期 $N=10$,求解其傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$ 。

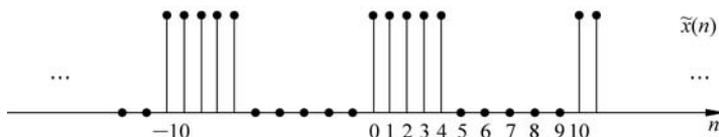


图 3-5 周期脉冲序列 ($N=10$)

【解】

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{10-1} \tilde{x}(n) W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{10}nk}$$

这一有限求和有闭合形式

$$\tilde{X}(k) = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^k} = e^{-j\frac{4\pi k}{10}} \frac{\sin(5\pi k/10)}{\sin(\pi k/10)}$$

周期脉冲序列 DFS 如图 3-6 所示, MATLAB 程序实现 DFS 过程如下:

```
>> xn = [1,1,1,1,1,0,0,0,0,0]; N = 10;
>> Xk = dfs(xn, N)
Xk = Columns 1 through 5
    5.0000 + 0.0000i    1.0000 - 3.0777i    -0.0000 + 0.0000i    1.0000 - 0.7265i
   -0.0000 + 0.0000i
Columns 6 through 10
    1.0000 - 0.0000i   -0.0000 - 0.0000i    1.0000 + 0.7265i   -0.0000 - 0.0000i
    1.0000 + 3.0777i
```

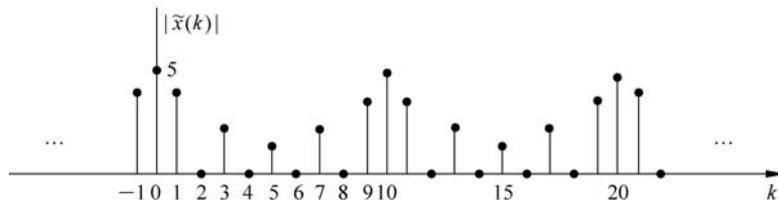


图 3-6 周期脉冲序列 DFS

下面给出 $L=5, N=20$ 周期方波的离散傅里叶级数的 MATLAB 程序:

```
L = 5; N = 20; k = [-N/2:N/2]; % 方波参数
```

```

xn = [ones(1,L), zeros(1,N-L)];           % 方波 x(n)
Xk = dfs(xn,N);                          % DFS
magXk = abs([Xk(N/2+1:N) Xk(1:N/2+1)]); % DFS 幅度
subplot(2,2,1); stem(k,magXk);
axis([-N/2,N/2,-0.5,5.5]);
xlabel('k'); ylabel('Xtilde(k)');
title('方波的 DFS:L=5,N=20')
    
```

上述程序产生的图及其他情形如图 3-7 所示,注意到 $\tilde{X}(k)$ 是周期信号,图中只画出了从 $-N/2$ 到 $N/2$ 的部分。从图 3-7 可以看出,方波的 DFS 系数包络看起来像 sinc 函数, $k=0$ 时的幅度为 L ,同时函数的零点位于 N/L (占空比的倒数)的整数倍处。

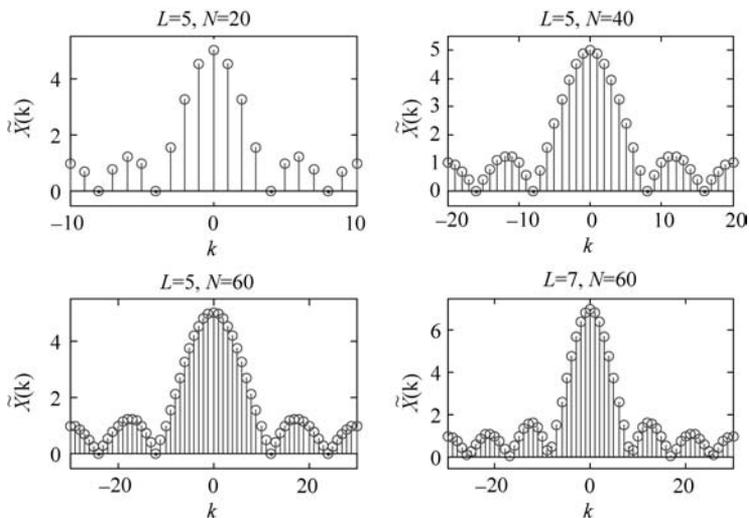


图 3-7 不同 L 和 N 周期方波的离散傅里叶级数幅度

正变换定义公式(3-8)中的周期序列 $\tilde{X}(k)$ 可看成是对 $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期 $x(n)$ 作 Z 变换,然后将 Z 变换在 Z 平面单位圆上按等间隔角 $2\pi/N$ 采样而得到,如图 3-8 所示。令

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_N(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-10)$$

通常称 $x(n)$ 为 $\tilde{x}(n)$ 的主值区序列,则 $x(n)$ 的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)z^{-n} \quad (3-11)$$

$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad (3-12)$$

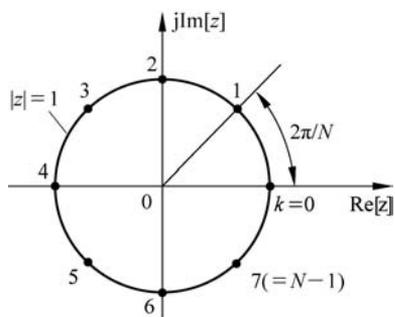


图 3-8 Z 平面单位圆上等间隔采样

由于单位圆上的 Z 变换为序列傅里叶变换,周期序列 $\tilde{X}(k)$ 也可以解释为 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 的傅里叶变换的等间隔采样。因为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\omega n} \quad (3-13)$$

比较式(3-8)和式(3-13),可以看出

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (3-14)$$

这相当于以 $2\pi/N$ 的频率间隔对傅里叶变换进行采样。也就是说,非周期离散时间信号经序列傅里叶变换(DTFT),得周期连续谱函数,再经采样得周期离散频谱函数(DFS),过程如图 3-9 所示。

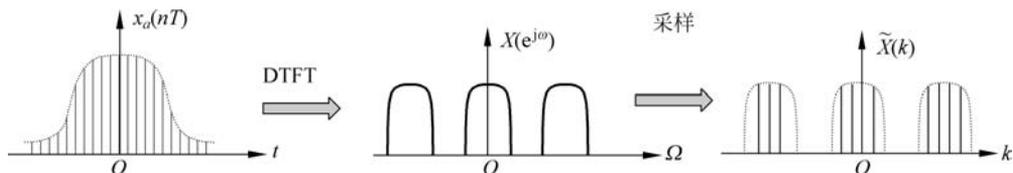


图 3-9 序列傅里叶变换与离散傅里叶级数关系

由于频域 N 点取样使得频域离散从而形成时域序列的周期化。采样频点间隔为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (3-15)$$

数字频率为

$$\omega = k\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k, \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (3-16)$$

【例 3-3】 傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$ 和周期信号 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期的傅里叶变换之间的关系。

【解】 图 3-10 为周期序列 $\tilde{x}(n)$, 它的一个周期为

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\tilde{x}(n)$ 的一个周期的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

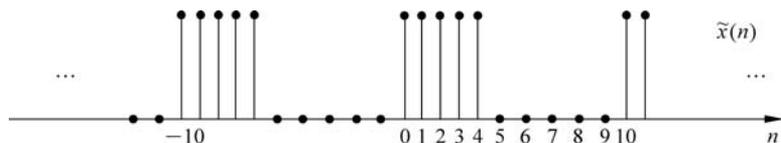


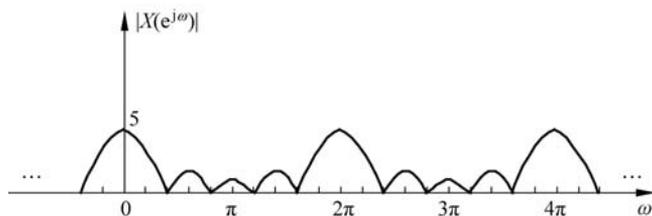
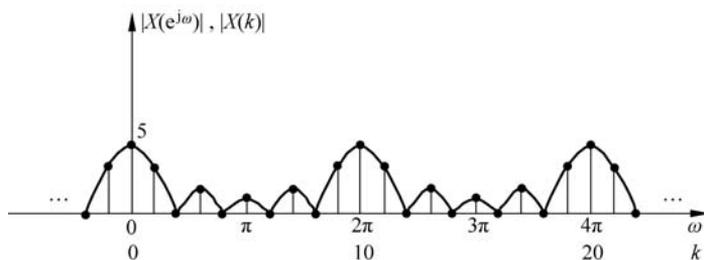
图 3-10 周期序列

根据 $|x(e^{j\omega})|$ 绘制一个周期的 DTFT 幅度谱如图 3-11 所示。

根据上面分析,傅里叶级数为

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/10} = e^{-j\frac{4\pi k}{10}} \frac{\sin(5\pi k/10)}{\sin(\pi k/10)}$$

根据 $\tilde{X}(k)$ 绘制周期序列傅里叶级数 DFS 如图 3-12 所示,可以看出 $\tilde{X}(k)$ 为 $|X(e^{j\omega})|$ 在 $[0, 2\pi]$ 的 N 点等间隔采样。


 图 3-11 $\tilde{x}(n)$ 一个周期的 DTFT 幅度谱

 图 3-12 $\tilde{x}(n)$ 一个周期的 DTFT 幅度谱和 DFS

3.2.2 离散傅里叶级数的性质

由于可以用采样 Z 变换解释 DFS, 因此它的许多性质与 Z 变换性质非常相似。但是, 由于 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 两者都具有周期性, 这就使它与 Z 变换性质还有一些重要的差别。此外, DFS 在时域和频域之间具有严格的对偶关系, 这是序列的 Z 变换表示所不具有的。设 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 皆是周期为 N 的周期序列, 各自的 DFS 分别为 $\tilde{X}_1(k)$ 、 $\tilde{X}_2(k)$ 。

1. 线性

$$\text{DFS}[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k) \quad (3-17)$$

2. 序列的移位

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \tilde{X}(k) \quad (3-18)$$

$$\text{DFS}[W_N^{nl} \tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+l) \quad (3-19)$$

或

$$\text{IDFS}[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{nl} \tilde{x}(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} \tilde{x}(n) \quad (3-20)$$

3. 周期卷积

如果

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) \quad (3-21)$$

则

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \quad (3-22)$$

或

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m) \quad (3-23)$$

两个周期都为 N 的周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$, 其卷积的结果也是周期为 N 的周期序列, 求和只在一个周期上进行, 即 m 为 0 到 $N-1$, 所以称为周期卷积。注意: n 的取值不在 N 的范围内, 得到结果后进行周期延拓, 如图 3-13 所示。

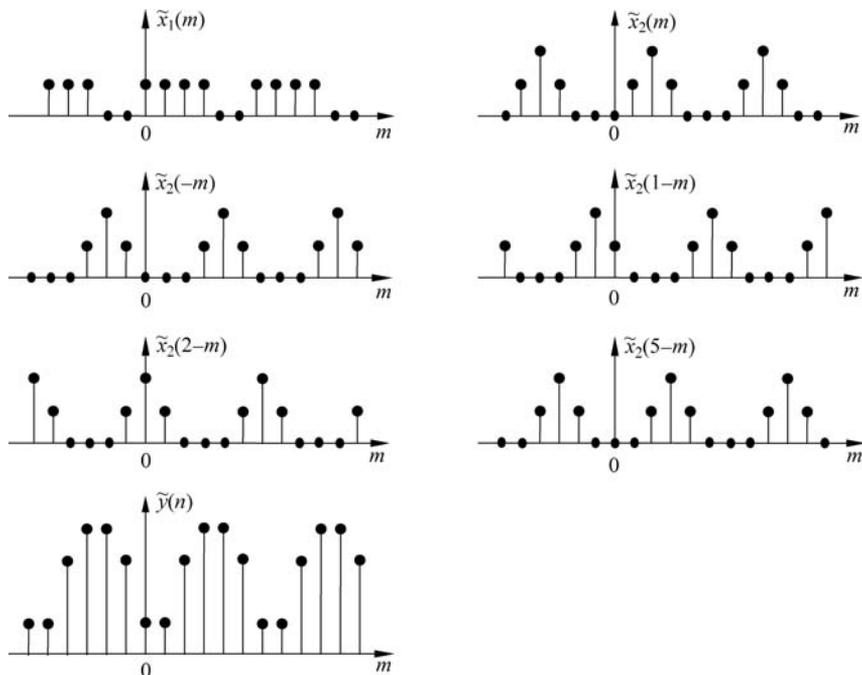


图 3-13 两个周期序列($N=6$)的周期卷积过程



视频讲解

3.3 有限长序列离散傅里叶变换

3.3.1 离散傅里叶变换定义

由于长度为 N 的有限长序列可以看作周期为 N 的周期序列的一个周期, 利用 DFS 计算周期序列的一个周期, 就可以得到有限长序列的离散傅里叶变换。设 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, 可以把它看作是周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个主周期, 而将 $\tilde{x}(n)$ 看作 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓得到, 即

$$\begin{aligned} x(n) &= \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \tilde{x}(n)R_N(n) \end{aligned} \quad (3-24)$$

同理

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \quad (3-25)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-26)$$

通常, 把 $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期 $n=0$ 到 $n=N-1$ 定义为主值区间, 故 $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列。而称 $\tilde{x}(n)$ 为 $x(n)$ 的周期延拓(图 3-14)。

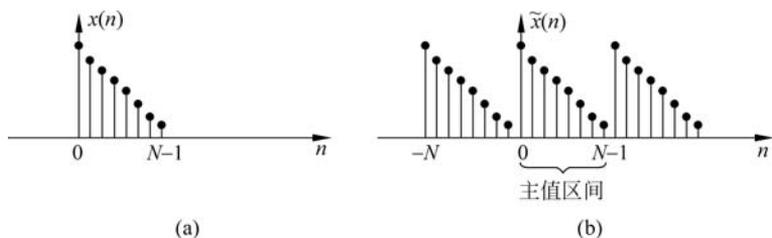


图 3-14 周期序列、主值区间、主值序列之间关系

DFT 与 IDFT 变换前后都是周期的、无限长的,但这里一个周期信息与其他周期信息相同,因而可以得到有限长序列的离散傅里叶变换的定义:

$$\begin{cases} X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, & 0 \leq k \leq N-1 & (3-27) \\ x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, & 0 \leq n \leq N-1 & (3-28) \end{cases}$$

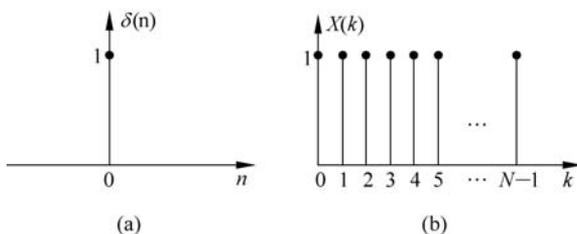
注意,所处理的有限长序列都是作为周期序列的一个周期表示的。换句话说,离散傅里叶变换隐含周期性。

【例 3-4】 已知序列 $x(n) = \delta(n)$, 求它的 N 点 DFT。

【解】 单位脉冲序列的 DFT 很容易由 DFT 的定义式(3-27)得到

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)W_N^{nk} = W_N^0 = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$\delta(n)$ 的 $X(k)$ 如图 3-15 所示。这是一个很特殊的例子,它表明对序列 $\delta(n)$ 来说,不论对它进行多少点的 DFT, 所得结果都是一个离散矩形序列。


 图 3-15 $\delta(n)$ 及其 DFT

【例 3-5】 已知 $x(n) = \cos(n\pi/6)$ 是一个长度 $N=12$ 的有限长序列,求它的 N 点 DFT。

【解】 由 DFT 的定义式(3-27)可得

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{11} \cos \frac{n\pi}{6} W_{12}^{nk} = \sum_{n=0}^{11} \frac{1}{2} (e^{j\frac{n\pi}{6}} + e^{-j\frac{n\pi}{6}}) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{11} e^{-j\frac{2\pi}{12}n(k-1)} + \sum_{n=0}^{11} e^{-j\frac{2\pi}{12}n(k+1)} \right) \end{aligned}$$

利用复正弦序列正交特性式(3-9), 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

再考虑 k 的取值区间, 可得

$$X(k) = \begin{cases} 6, & k = 1, 11 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

有限长余弦序列及其 DFT 如图 3-16 所示。

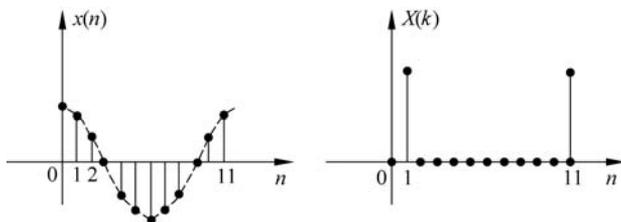


图 3-16 有限长余弦序列及其 DFT

【例 3-6】 已知 $X(k) = \begin{cases} 3, & k = 0 \\ 1, & 1 \leq k \leq 9 \end{cases}$, 求 $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ 点 IDFT。

【解】 $X(k)$ 可以表示为 $X(k) = 1 + 2\delta(k)$, $0 \leq k \leq 9$ 。

由于一个单位脉冲序列的 DFT 为常数

$$x_1(n) = \delta(n) \quad X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] = 1$$

同样, 一个常数的 DFT 是一个单位脉冲序列

$$x_2(n) = 1 \quad X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)] = N\delta(k)$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{10-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{10}nk} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \begin{cases} 10, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, 9 \end{cases} \\ &= 10\delta(k) \end{aligned}$$

由于

$$\begin{cases} 10\delta(k) \rightarrow 1 \\ 2\delta(k) \rightarrow \frac{1}{5} \end{cases}$$

所以

$$x(n) = \frac{1}{5} + \delta(n)$$

3.3.2 DFT 与序列傅里叶变换、Z 变换的关系

若 $x(n)$ 是一个有限长序列, 长度为 N , Z 变换 $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$, 则

$$X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \text{DFT}[x(n)] = X(k) \quad (3-29)$$

$z = W_N^{-k} = e^{j(\frac{2\pi}{N})k}$ 表明 W_N^{-k} 是 Z 平面单位圆上幅角为 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 的点, 即将 Z 平面单位

圆 N 等分后的第 k 点, 如图 3-17 所示。所以 $X(k)$ 是对 $X(z)$ 在 Z 平面单位圆上 N 点等间隔采样值。此外, 由于序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 即是单位圆上的 Z 变换, 根据式 (3-29), DFT 与序列傅里叶变换的关系为

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X(e^{jk\omega_N}) \quad (3-30)$$

其中, $\omega_N = \frac{2\pi}{N}$ 。

DFT 的物理意义: 说明 $X(k)$ 可看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 其采样间隔为 $\omega_N = 2\pi/N$ 。显而易见, DFT 的变换区间长度 N 不同, 表示对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的采样间隔和采样点数不同, 所以 DFT 的变换结果也不同。

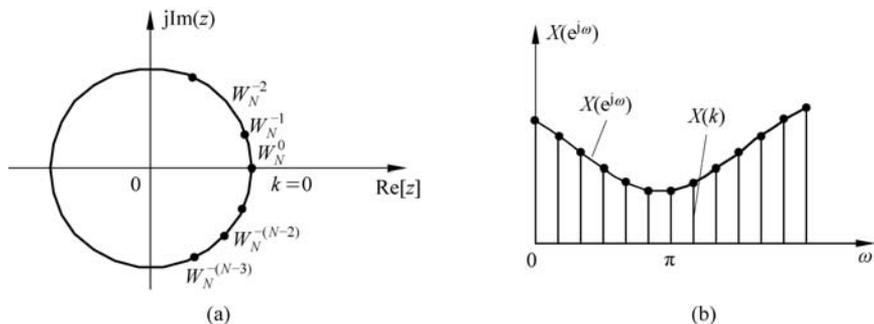


图 3-17 DFT 物理意义说明图示

【例 3-7】 有限长序列 $x(n)$ 为

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求其 $N=5$ 点离散傅里叶变换 $X(k)$ 。

【解】 将有限长序列 $x(n)$, 如图 3-18(a) 所示, 以 $N=5$ 为周期将 $x(n)$ 延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$, 如图 3-18(b), $\tilde{x}(n)$ 的 DFS $\tilde{X}(k)$ 与 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 相对应如图 3-18(c) 和图 3-18(d) 所示。因为图 3-18(b) 中的序列在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 上为常数值, 所以可以得出

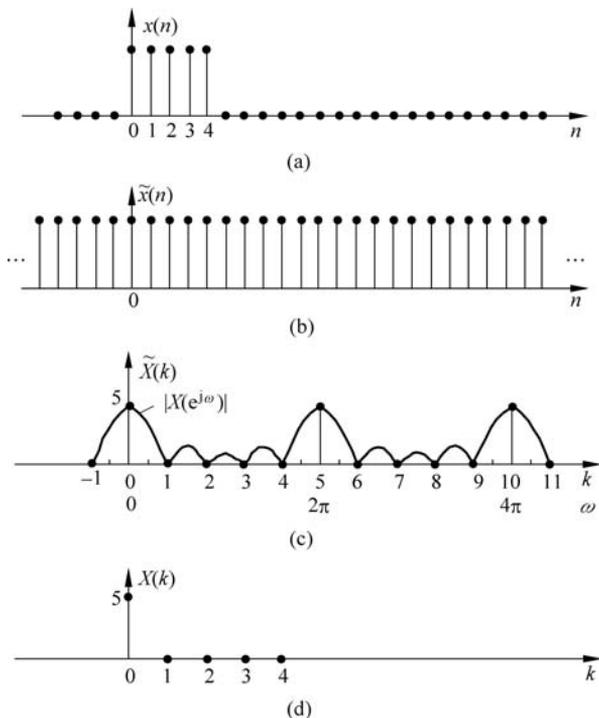


图 3-18 例 3-7 图

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi k/N)n} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j(2\pi k/N)}} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在 $k=0$ 和 $k=N$ 的整数倍处才有非零的 DFS 系数 $\tilde{X}(k)$ 值。就是 $X(e^{j\omega})$ 在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处的样本序列。 $x(n)$ 的 DFT 对应于取 $\tilde{X}(k)$ 的一个周期而得到的有限长序列 $X(k)$ 。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{5-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{5}nk} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{5}k}} = \begin{cases} 5, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$



视频讲解

3.4 离散傅里叶变换的性质

本节讨论 DFT 的一些性质,它们本质上与周期序列的 DFS 概念有关,而且是由有限长序列及其 DFT 表示式隐含的周期性得出的。以下讨论的序列都是 N 点有限长序列,用 $\text{DFT}[\cdot]$ 表示 N 点 DFT,且设 $\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$ 、 $\text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$ 。

1. 线性

若两个有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性组合 $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, 则有

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (3-31)$$

其中, a, b 为任意常数。

说明: (1) 若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度均为 N , 则 $x_3(n)$ 的长度为 N ;

(2) 若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度不等, $x_1(n)$ 的长度为 N_1 , $x_2(n)$ 的长度为 N_2 , 则 $x_3(n)$ 的长度为 $N = \max[N_1, N_2]$, 离散傅里叶变换的长度必须按 N 计算。

2. 圆周移位

一个长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位定义为 $y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$, 将图 3-19(a) 所示 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓, 得到周期序列 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$, 如图 3-19(b) 所示; 再将 $\tilde{x}(n)$ 加以移位 $x((n+m))_N = \tilde{x}(n+m)$ 如图 3-19(c) 所示, 然后, 再对移位的周期序列 $\tilde{x}(n+m)$ 取主值区间 (n 为 0 到 $N-1$) 上的序列值, 即 $x((n+m))_N R_N(n)$ 。所以, 一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位序列 $y(n)$ 仍然是一个长度为 N 的有限长序列。

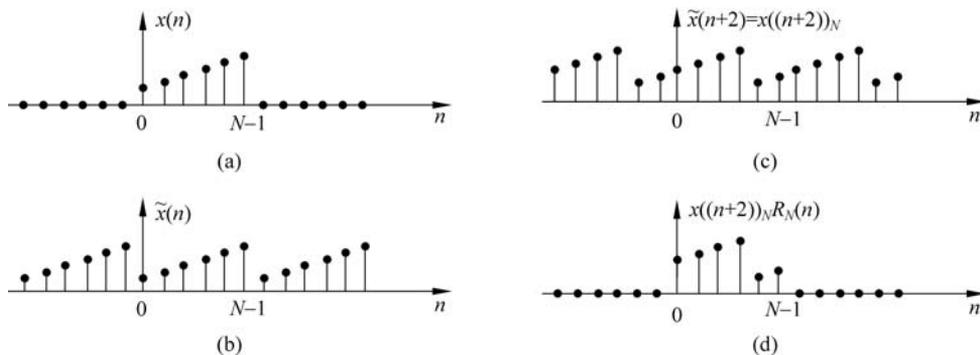


图 3-19 圆周移位过程

3. 时域圆周移位定理

设 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $y(n)$ 为 $x(n)$ 圆周移位, 即

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (3-32)$$

则圆周移位后的 DFT 为

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k) \quad (3-33)$$

4. 频域圆周移位定理

若 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 则

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n) \quad (3-34)$$

上式称为**频率移位定理**, 也称为**调制定理**, 此定理说明时域序列的调制等效于频域的圆周移位。

5. 圆周卷积

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是点数为 N 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N-1$), 且有

$$Y(k) = X_1(k) X_2(k)$$

则

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n) \end{aligned} \quad (3-35)$$

卷积过程: 圆周卷积流程如图 3-20 所示, 过程如图 3-21 所示。先将 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 补零, 使得长度均为 N 点, 并将变量 n 变成 m , $x_2(m)$ 周期化 $x_2((m))_N$, 再反转 $x_2((-m))_N$, 取主值序列 $x_2((-m))_N R_N(m)$, 对 $x_2(m)$ 圆周右移 n , 形成 $x_2((n-m))_N R_N(m)$, 当 $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 时, 分别将 $x_1(m)$ 与 $x_2((n-m))_N R_N(m)$ 相乘, 并在 m 为 0 到 $N-1$ 区间内求和, 便得到圆周卷积 $y(n)$ 。

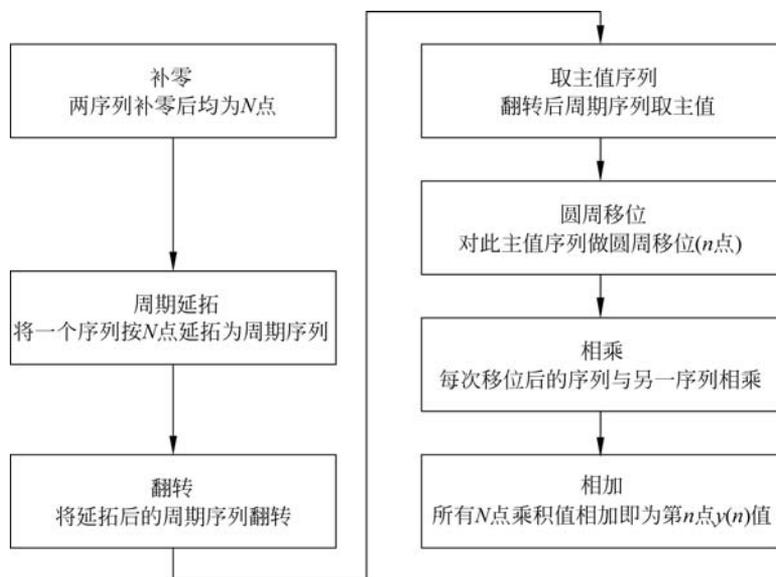


图 3-20 圆周卷积流程

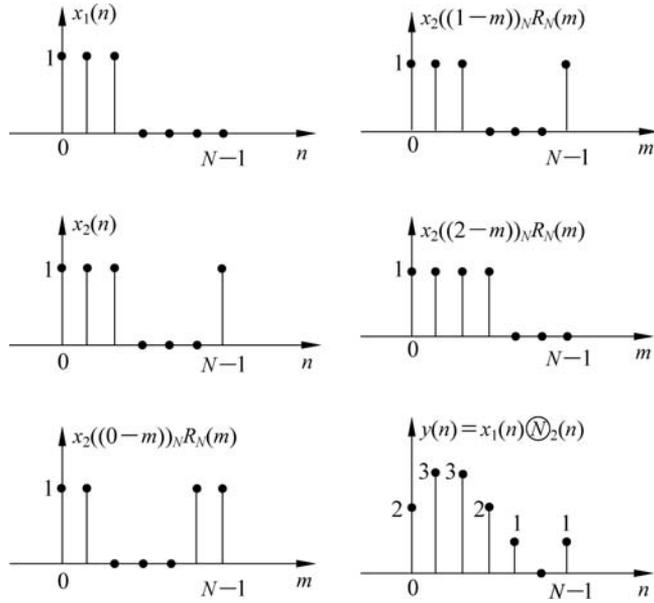


图 3-21 圆周卷积过程示意图

特别要注意：两个长度小于或等于 N 的序列的 N 点圆周卷积长度仍为 N ，这与一般的线性卷积不同。为了区别线性卷积，用 $*$ 表示线性卷积，用 \otimes_N 表示 N 点圆周卷积。

$$y(n) = x_1(n) \otimes_N x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \quad (3-36)$$

利用时域与频域的对称性，可以证明频域圆周卷积定理。

若 $y(n) = x_1(n) x_2(n)$ ， $x_1(n)$ ， $x_2(n)$ 皆为 N 点有限长序列，则

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N R_N(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l))_N R_N(k) = \frac{1}{N} X_1(k) \otimes_N X_2(k) \end{aligned} \quad (3-37)$$

即时域序列相乘，乘积的 DFT 等于各个 DFT 的圆周卷积再乘以 $\frac{1}{N}$ 。

6. 线性卷积与圆周卷积关系

时域圆周卷积在频域上相当于两序列的 DFT 的乘积，而计算 DFT 可采用它的快速算法——快速傅里叶变换(FFT)，因此圆周卷积与线性卷积相比，计算速度可以大大加快。若序列 $x_i(n)$ 的长度为 N_i ($i=1,2$)，当 N_1 与 N_2 大小相当时，它们的线性卷积可以用 L 点 DFT 快速实现，其中 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ ，如图 3-22 所示。

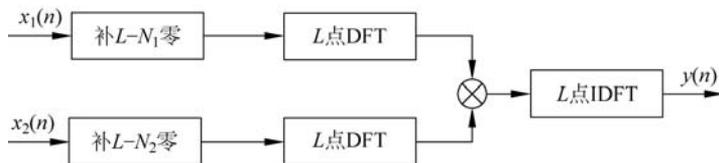


图 3-22 用圆周卷积和计算出线性卷积和的过程

实际问题大多总是要求解线性卷积。例如,信号通过线性时不变系统,其输出就是输入信号与系统的单位脉冲响应的线性卷积,如果信号以及系统的单位脉冲响应都是有限长序列,那么是否能用圆周卷积运算来代替线性卷积运算而不失真呢?下面就来讨论这个问题。

设 $x_1(n)$ 是 N_1 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$), $x_2(n)$ 是 N_2 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$)。

1) 线性卷积

$$y_1(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) \quad (3-38)$$

$y_1(n)$ 是 $N_1 + N_2 - 1$ 点有限长序列,即线性卷积的长度等于参与卷积的两序列的长度之和减 1。

2) 圆周卷积

先假设进行 L 点的圆周卷积,再讨论 L 取何值时,圆周卷积才能代表线性卷积。设 $y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n)$ 是两序列的 L 点圆周卷积, $L \geq \max[N_1, N_2]$, 这就要将 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 都看成是 L 点的序列。在这 L 点的序列值中, $x_1(n)$ 只有前 N_1 个是非零值,后 $L - N_1$ 个均为补充的零值。同样, $x_2(n)$ 只有前 N_2 个是非零值,后 $L - N_2$ 个均为补充的零值。则

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L R_L(n) \quad (3-39)$$

可以证明

$$\tilde{y}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_1(n+rL) \quad (3-40)$$

$\tilde{y}(n)$ 为 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 线性卷积的周期延拓,周期也为 L , 定义为周期卷积。

前面已经分析了 $y_1(n)$ 具有 $N_1 + N_2 - 1$ 个非零值。因此可以看到,如果周期卷积的周期 $L < N_1 + N_2 - 1$, 那么 $y_1(n)$ 的周期延拓必然有一部分非零序列值会交叠起来,从而出现混叠现象。只有在 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时,才没有交叠现象,而圆周卷积正是周期卷积取主值序列。

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = \tilde{y}(n) R_L(n) \quad (3-41)$$

因此

$$y(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_1(n+rL) \right] R_L(n) \quad (3-42)$$

所以要使圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠的必要条件为 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 。线性卷积与圆周卷积关系如表 3-1 所示。

表 3-1 线性卷积与圆周卷积的关系

圆周卷积	线性卷积
1. 针对 DFT 引出的一种表示方法	1. 信号通过线性系统时,信号输出等于输入与系统单位脉冲响应的卷积
2. 两序列长度必须相等,若不等则按要求补零	2. 两序列长度可以相等,也可以不相等
3. 卷积结果长度与两信号长度相等皆为 N	3. 卷积结果长度 $N = N_1 + N_2 - 1$

下面以具体示例说明,两个有限长矩形序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$,它们长度分别为 $N_1=4$ 、 $N_2=5$,分别计算线性卷积和圆周卷积结果如图 3-23 所示。其中,图 3-22(c)为线性卷积结果,图 3-22(d)~(f)分别为长度为 6、8、10 的圆周卷积结果,根据 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 关系,确实可以看到当 $L=8$ 时线性卷积与圆周卷积结果相等。

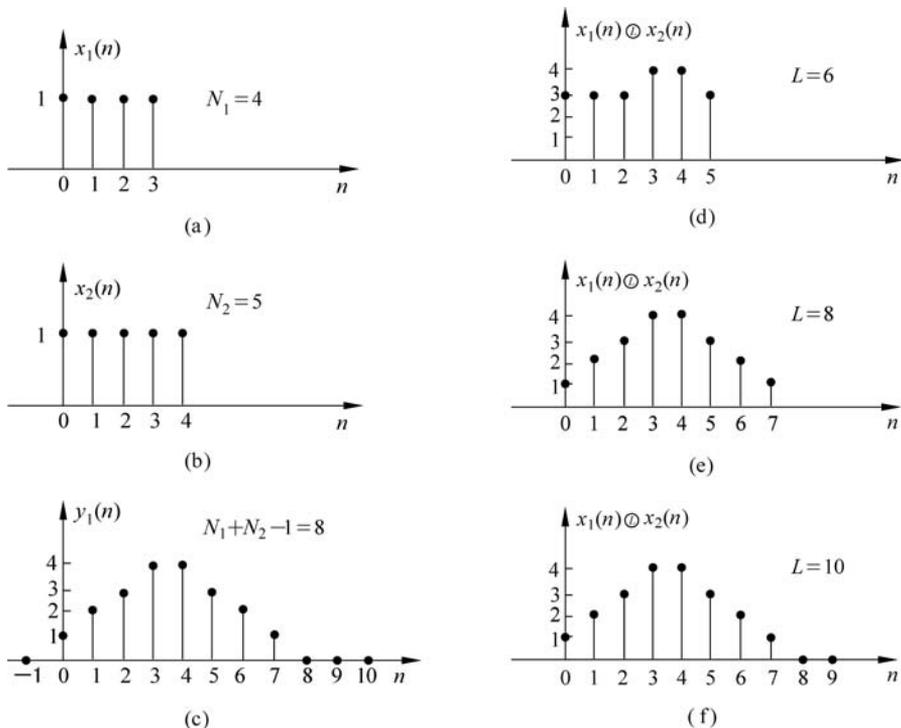


图 3-23 线性卷积与圆周卷积示例

【例 3-8】 一个有限长序列为 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$,

(1) 计算序列 $x(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换。

(2) 若序列 $y(n)$ 的 DFT 为 $Y(k) = e^{j2k\frac{2\pi}{10}} X(k)$, 式中, $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换, 求序列 $y(n)$ 。

(3) 若 10 点序列 $y(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换是 $Y(k) = X(k)W(k)$, 式中, $X(k)$ 是序列 $x(n)$ 的 10 点 DFT, $W(k)$ 是序列 $w(n)$ 的 10 点 DFT。

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求序列 $y(n)$ 。

【解】 (1) 由式(3-27)可求得 $x(n)$ 的 10 点 DFT:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{10-1} [\delta(n) + 2\delta(n-5)]W_{10}^{nk} \\ &= 1 + 2W_{10}^{5k} = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{10}5k} = 1 + 2(-1)^k \end{aligned}$$

(2) 根据移位性质 $\text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k)$, $X(k)$ 乘以一个 W_N^{-mk} 形

式的复指数相当于是 $x(n)$ 圆周移位 m 点。本题中 $m=2$, $x(n)$ 向左圆周移位了 2 点, 就有

$$y(n) = x((n+2))_{10} R_{10}(n) = 2\delta(n-3) + \delta(n-8)$$

(3) $X(k)$ 乘以 $W(k)$ 相当于 $x(n)$ 与 $w(n)$ 的圆周卷积。为了进行圆周卷积, 可以先计算线性卷积再将结果周期延拓并取主值序列。 $x(n)$ 与 $w(n)$ 的线性卷积为

$$z(n) = x(n) * w(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2\}$$

根据式(3-42), 圆周卷积为

$$y(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} z(n+10r) \right] R_{10}(n)$$

在 $0 \leq n \leq 9$ 求和中, 仅有序列 $z(n)$ 和 $z(n+10)$ 有非零值, 用表列出 $z(n)$ 和 $z(n+10)$ 的值, 对 $n=0, 1, 2, \dots, 9$ 求和, 得到

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$Z(n)$	1	1	1	1	1	3	3	2	2	2	2	2
$z(n+10)$	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y(n)$	3	3	1	1	1	3	3	2	2	2	—	—

所以 10 点圆周卷积为: $y(n) = \{3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 2\}$, 由于 $6+7-1=12 > 10$ 所以线性卷积不等于圆周卷积。

【例 3-9】 已知 $x_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 2\}$, $x_2(n) = \{0, 1, 2, 1, 0, 3\}$, $n=0, 1, \dots, 5$ 。求圆周卷积 $y_1(n) = x_1(n) \textcircled{6} x_2(n)$, $y_2(n) = x_1(n) \textcircled{9} x_2(n)$, $y_3(n) = x_1(n) \textcircled{11} x_2(n)$ 。

【解】 首先计算线性卷积和 $y_l(n) = \{0, 1, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 5, 0, 6\}$, $n=0, 1, \dots, 10$ 。 $y_l(n)$ 长度为 11。

然后, 将 $y_l(n)$ 以 6 为周期进行周期延拓得到 $\tilde{y}(n)$ 。由于周期延拓的周期小于 $y_l(n)$ 的长度, 所以, 在周期延拓时每个周期会有 $(N_1 + N_2 - 1) - L$ 个混叠点。当 $L=6, N_1 + N_2 - 1 = 11$, 每个周期有 5 个混叠点, 得到

$$\tilde{y}(n) = \{\dots, \underline{6}, 8, 8, 4, 10, 6, \dots\}$$

最后取 $\tilde{y}(n)$ 的主值序列即为圆周卷积和

$$y_1(n) = x_1(n) \textcircled{6} x_2(n) = \{6, 8, 8, 4, 10, 6\}, \quad n=0, 1, \dots, 5$$

同理, 可以得到

$$y_2(n) = x_1(n) \textcircled{9} x_2(n) = \{0, 7, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 5\}, \quad n=0, 1, \dots, 8$$

当 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时, $y(n) = y_l(n)$, 所以

$$y_3(n) = x_1(n) \textcircled{11} x_2(n) = y_l(n) = \{0, 1, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 5, 0, 6\}, \quad n=0, 1, \dots, 10$$

7. DFT 形式下的帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k) \quad (3-43)$$

证明:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-kn} \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$$

如果令 $y(n) = x(n)$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) X^*(k)$$

即

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

表明一个序列在时域计算的能量与在频域计算的能量是相等的。



视频讲解

3.5 频域采样理论

考虑一个任意的绝对可和的非周期序列 $x(n)$, 它的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

由于绝对可和, 所以其傅里叶变换存在且连续, 故 Z 变换收敛域包括单位圆。如果对 $X(z)$ 在单位圆上进行 N 点等距采样:

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{nk}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-44)$$

问题在于, 这样采样以后是否仍能不失真地恢复原序列 $x(n)$ 。也就是说, 频率采样后从 $X(k)$ 的反变换中所获得的有限长序列, 即 $x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, 能不能代表原序列 $x(n)$? 为此, 先来分析 $X(k)$ 的周期延拓序列 $\tilde{X}(k)$ 的离散傅里叶级数的反变换, 令其为 $\tilde{x}_N(n)$ 。

$$\tilde{x}_N(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad (3-45)$$

将式(3-27)代入式(3-45), 可得

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) W_N^{mk} \right] W_N^{-nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} \right] \quad (3-46)$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m = n + rN, r \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-47)$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) \quad (3-48)$$

这说明由 $\tilde{X}(k)$ 得到的周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 是原非周期序列 $x(n)$ 的周期延拓, 其时域周期为频域采样点数 N 。在第 1.2 节中已经知道, 时域采样造成频域的周期延拓, 这里又看到一个对称的特性, 即频域采样同样会造成时域的周期延拓。

(1) 如果 $x(n)$ 是有限长序列, 点数为 M , 则当频域采样不够密, 即当 $N < M$ 时, $x(n)$ 以 N 为周期进行延拓, 就会造成混叠。这时, 从 $\tilde{x}_N(n)$ 就不能不失真地恢复出原信号 $x(n)$ 。因此, 频域采样不失真的条件是频域采样点数 N 大于或等于时域采样点数 M (时域

序列长度),即满足

$$N \geq M$$

此时可得到

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)R_N(n) = x(n), \quad N \geq M \quad (3-49)$$

也就是说,点数为 N (或小于 N) 的有限长序列,可以利用它的 Z 变换在单位圆上的 N 个等间隔点上的采样值精确地表示。

(2) 如果 $x(n)$ 不是有限长序列(即无限长序列),时域周期延拓后,必然造成混叠现象,因而一定会产生误差;当 n 越大时信号衰减得越快,或频域采样越密(即采样点数 N 越大),则误差越小,即 $x_N(n)$ 越接近 $x(n)$ 。

【例 3-10】 已知一个序列 $x(n)$ 为 5 点矩形序列,其序列傅里叶变换如图 3-24 所示,分析频域上的 5 点抽样。

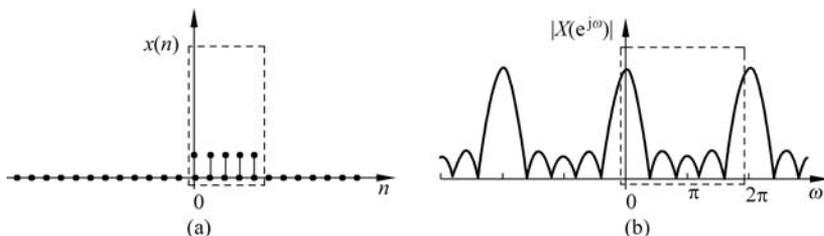


图 3-24 矩形序列及其 DTFT

【解】 序列 $x(n)$ 时域是有限长非周期的,所以频域是连续信号。现在频域上进行抽样处理,使其频域离散化。按 $N=5$ 点进行频域抽样,由于频域抽样会造成时域延拓相加,时域延拓的周期个数等于频域的抽样点数 $N=5$,由于 $N=M$,所以时域延拓恰好无混叠现象,如图 3-25 所示。

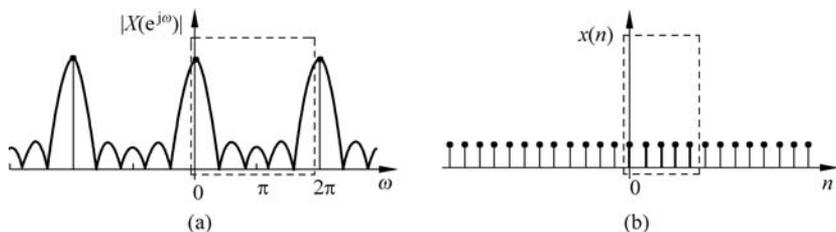


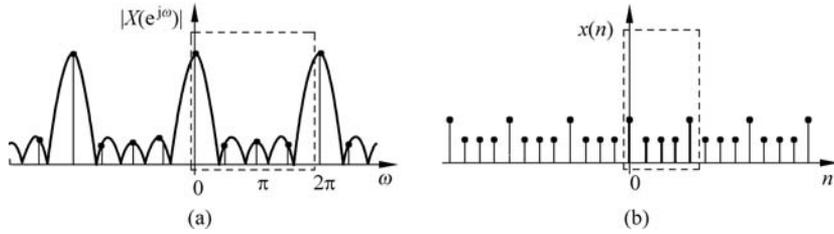
图 3-25 频域抽样时域周期延拓($N=M$)

按 $N=4$ 时进行抽样,由于 $N=4$,序列长度为 $M=5$, $N < M$,时域延拓后产生混叠现象如图 3-26 所示。

既然 N 个频域采样 $X(k)$ 能不失真地代表 N 点有限长序列 $x(n)$,那么这 N 个采样值 $X(k)$ 也一定能够完全地表达整个 $X(z)$ 及频率响应 $X(e^{j\omega})$ 。讨论如下:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

由于

图 3-26 频域抽样时域周期延拓 ($N < M$)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad (3-50)$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right) z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3-51)$$

由于 $W_N^{-Nk} = 1$, 因此

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3-52)$$

这就是用 N 个频率采样 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 的内插公式。它可以表示为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \quad (3-53)$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3-54)$$

式(3-54)称为内插函数。令其分子为零,得

$$z = e^{j\frac{2\pi}{N}r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, k, \dots, N-1 \quad (3-55)$$

即内插函数在单位圆的 N 等分点上(也即采样点上)有 N

个零点。而分母为零,则有 $z = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 的一个极点, 它将与第 k 个零点相抵消。因而,插值函数 $\Phi_k(z)$ 只在本身采样点 $r=k$ 处不为零,在其他 $(N-1)$ 个采样点 r 上 ($r=0, 1, 2, \dots, N-1, r \neq k$) 都是零点(有 $N-1$ 个零点)。而它在 $z=0$ 处还有 $(N-1)$ 阶极点,如图 3-27 所示。

现在讨论频率响应,即求单位圆上 $z = e^{j\omega}$ 的 Z 变换。

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega}) \quad (3-56)$$

将 $z = e^{j\omega}$ 代入式(3-54), $\Phi_k(e^{j\omega})$ 可以表示成更方便的形式:

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega - \frac{2\pi}{N}k}{2}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{k\pi}{N}\right)}$$

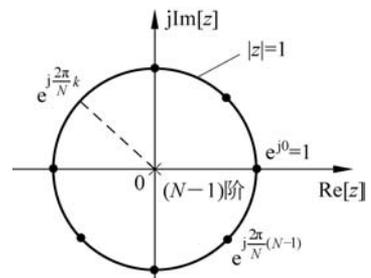


图 3-27 内插函数的零极点分布

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} e^{j \frac{k \pi}{N} (N-1)} e^{-j \frac{N-1}{2} \omega}$$

这样

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi \left(\omega - k \frac{2\pi}{N} \right) \quad (3-57)$$

其中,

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega} \quad (3-58)$$

式(3-58)称为频域响应的内插函数。而式(3-56)又可改写为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi \left(\omega - \frac{2\pi}{N} k \right) \quad (3-59)$$

$\Phi \left(\omega - k \frac{2\pi}{N} \right)$ 满足以下关系

$$\Phi \left(\omega - k \frac{2\pi}{N} \right) = \begin{cases} 1, & \omega = k \frac{2\pi}{N} = \omega_k \\ 0, & \omega = i \frac{2\pi}{N} = \omega_i, i \neq k \end{cases} \quad (3-60)$$

也就是说,函数 $\Phi \left(\omega - k \frac{2\pi}{N} \right)$ 在本采样点 $\left(\omega_k = k \frac{2\pi}{N} \right)$ 上, $\Phi \left(\omega_k - k \frac{2\pi}{N} \right) = 1$, 而在其他采样点 $\left(\omega_i = i \frac{2\pi}{N}, i \neq k \right)$ 上, 函数 $\Phi \left(\omega_i - k \frac{2\pi}{N} \right) = 0$ 。整个 $X(e^{j\omega})$ 就是由 N 个 $\Phi \left(\omega - k \frac{2\pi}{N} \right)$ 函数分别乘上 $X(k)$ 后求和的。所以很明显, 在每个采样点上 $X(e^{j\omega})$ 就精确地等于 $X(k)$ (因为其他点的插值函数在这一点上的值为零, 没有影响) 即

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-61)$$

就是说, 各采样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 值由各采样点的加权插值函数 $X(k) \Phi \left(\omega - \frac{2\pi}{N} k \right)$ 在所求 ω 点上的值的叠加得到的, 如图 3-28 所示。

【例 3-11】 频域采样定理的验证, 给定信号如下:

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 13 \\ 27-n, & 14 \leq n \leq 26 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

编写程序分别对频谱函数 $X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上等间隔采样 32 和 16 点, 得到

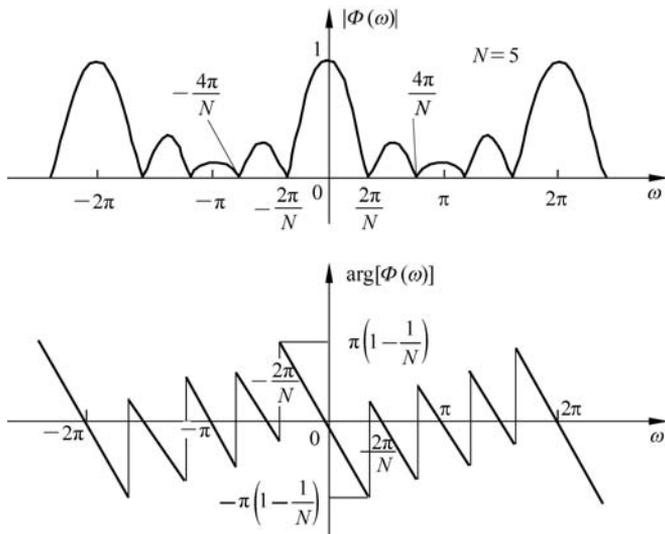
$$X_{32}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{32}k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 31$$

$$X_{16}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{16}k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 15$$

再分别对 $X_{32}(k)$ 和 $X_{16}(k)$ 进行 32 点和 16 点 IFFT, 得到

$$x_{32}(n) = \text{IFFT}[X_{32}(k)]_{32}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 31$$

$$x_{16}(n) = \text{IFFT}[X_{16}(k)]_{16}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 15$$

图 3-28 内插函数幅度特性与相位特性($N=5$)

分别画出 $X(e^{j\omega})$ 、 $X_{32}(k)$ 和 $X_{16}(k)$ 的幅度谱,并绘图显示 $x(n)$ 、 $x_{32}(n)$ 和 $x_{16}(n)$ 的波形,进行对比和分析,验证总结频域采样理论。

提示: 频域采样用以下方法编程实现。

(1) 直接调用 MATLAB 函数 FFT 计算 $X_{32}(k) = \text{FFT}[x(n)]_{32}$ 得到 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 的 32 点频率域采样。

(2) 抽取 $X_{32}(k)$ 的偶数点即可得到 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 的 16 点频率域采样 $X_{16}(k)$, 即 $X_{16}(k) = X_{32}(2k)$, $k=0, 1, 2, \dots, 15$ 。

(3) 当然也可以按照频域采样理论,先将信号 $x(n)$ 以 16 为周期进行周期延拓,取其主值区(16 点),再对其进行 16 点 DFT(FFT),得到的就是 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 的 16 点频率域采样 $X_{16}(k)$ 。

MATLAB 代码如下:

```
M = 27; N = 32; N = 0:M;
% 产生 M 长三角波序列 x(n)
xa = 0:floor(M/2); xb = ceil(M/2) - 1:-1:0; xn = [xa, xb];
Xk = fft(xn, 1024); % 1024 点 FFT[x(n)], 用于近似序列 x(n) 的 TF
X32k = fft(xn, 32); % 32 点 FFT[x(n)]
x32n = ifft(X32k); % 32 点 IFFT[X32(k)] 得到 x32(n)
X16k = X32k(1:2:N); % 隔点抽取 X32k 得到 X16(k)
x16n = ifft(X16k, N/2); % 16 点 IFFT[X16(k)] 得到 x16(n)
subplot(3, 2, 2); stem(n, xn, '.'); box on
title('(b) 三角波序列 x(n)'); xlabel('n'); ylabel('x(n)');
axis([0, 32, 0, 20]); k = 0:1023; wk = 2 * k/1024;
subplot(3, 2, 1); plot(wk, abs(Xk)); title('(a) FT[x(n)]');
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('|X(e^{j\omega})|'); axis([0, 1, 0, 200])
k = 0:N/2 - 1; subplot(3, 2, 3); stem(k, abs(X16k), '.'); box on
title('(c) 16 点频域采样'); xlabel('k'); ylabel('|X_{1_6}(k)|');
axis([0, 8, 0, 200]); n1 = 0:N/2 - 1; subplot(3, 2, 4); stem(n1, x16n, '.'); box on
title('(d) 16 点 IDFT[X_{1_6}(k)]'); xlabel('n'); ylabel('x_{1_6}(n)');
```

```
axis([0,32,0,20]);k = 0:N-1;subplot(3,2,5);stem(k,abs(X32k),'.' );box on
title('(e) 32 点频域采样');xlabel('k');ylabel('|X_3_2(k)|');
axis([0,16,0,200]);n1 = 0:N-1;subplot(3,2,6);stem(n1,x32n,'.' );box on
title('(f) 32 点 IDFT[X_3_2(k)]');xlabel('n');ylabel('x_3_2(n)');
axis([0,32,0,20])
```

```
function tstem(xn, yn)
% 时域序列绘图函数
% xn:信号数据序列,yn:绘图信号的纵坐标名称(字符串)
n = 0:length(xn) - 1;
stem(n,xn,'.' );box on
xlabel('n');ylabel(yn);
axis([0,n(end),min(xn),1.2 * max(xn)])
```

结果如图 3-29 所示。图 3-29(a)和(b)分别为 $X(e^{j\omega})$ 和 $x(n)$ 的波形；图 3-29(c)和(d)分别为 $X(e^{j\omega})$ 的 16 点采样 $|X_{16}(k)|$ 和 $x_{16}(n) = \text{IDFT}[X_{16}(k)]$ 波形；图 3-29(e)和(f)分别为 $X(e^{j\omega})$ 的 32 点采样 $|X_{32}(k)|$ 和 $x_{32}(n) = \text{IDFT}[X_{32}(k)]$ 波形图；由于实序列 DFT 满足共轭对称性，因此频域图仅画出 $[0, \pi]$ 上的幅频特性波形。本例中 $x(n)$ 的长度 $M = 26$ 。从图中可以看出，当采样点数 $N = 16 < M$ 时， $x_{16}(n)$ 确实等于原三角序列 $x(n)$ 以 16 为周期的周期延拓序列的主值序列。由于存在时域混叠失真，因而 $x_{16}(n) \neq x(n)$ ；当采样点数 $N = 32 > M$ 时，无时域混叠失真， $x_{32}(n) = \text{IDFT}[X_{32}(k)] = x(n)$ 。

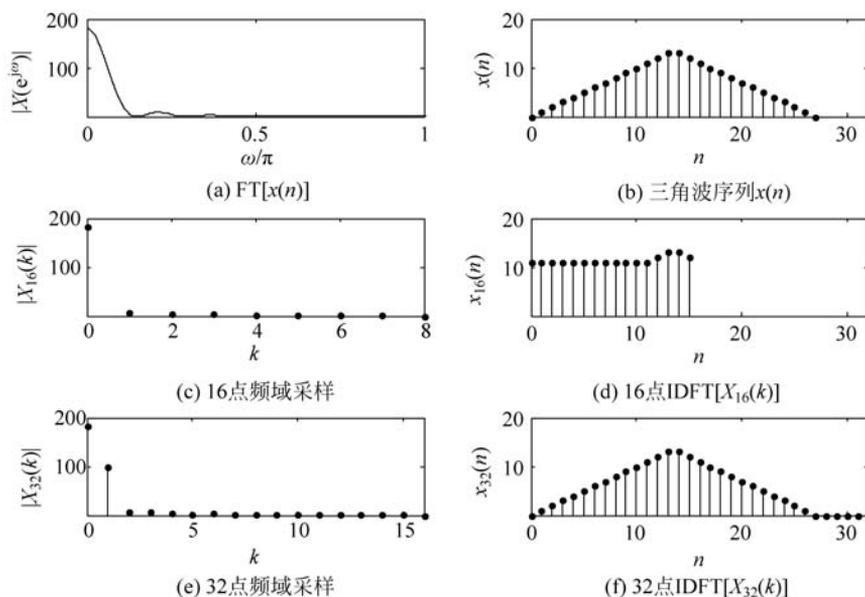


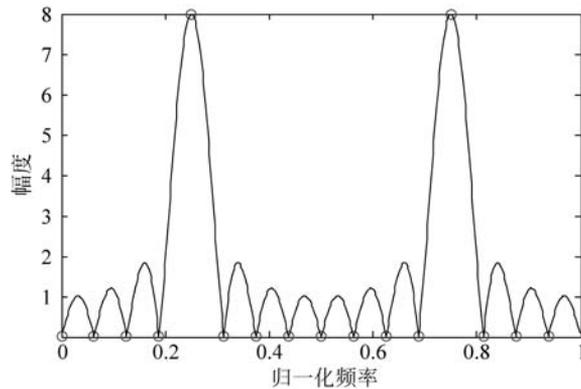
图 3-29 例 3-11 图

3.6 MATLAB 应用实例

【例 3-12】 $x[k] = \cos(2\pi rk/N)$, $N = 16$, $r = 4$, 利用 MATLAB 计算 16 点序列 $x[k]$ 的 512 点 DFT, 如图 3-30 所示。



视频讲解

图 3-30 $x[k]$ 的 512 点 DFT

MATLAB 代码如下：

```
N = 16;k = 0:N-1;
L = 0:511;x = cos(2 * pi * k * 4./16);
X = fft(x);plot(k/16,abs(X),'o');
hold on;XE = fft(x,512);
plot(L/512,abs(XE))
xlabel('归一化频率');ylabel('幅度');
```

【例 3-13】 离散傅里叶变换 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$ (矩阵相乘的方法)。

MATLAB 代码如下：

```
function [Xk] = dft(xn,N)
n = [0:1:N-1];
k = [0:1:N-1];
WN = exp(-j * 2 * pi/N);
nk = n' * k;
WNnk = WN.^(nk);
Xk = xn * WNnk;
```

【例 3-14】 逆离散傅里叶变换 $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$ 。

MATLAB 代码如下：

```
function [xn] = idft(Xk,N)
n = [0:1:N-1];
k = [0:1:N-1];
WN = exp(-j * 2 * pi/N);
nk = n' * k;
WNnk = WN.^(-nk);
```

【例 3-15】 信号的傅里叶分解与合成。

MATLAB 代码如下：

```
clear all
```

```

N = 256; dt = 0.05; % data numbers and sampling interval, sampling frequency is 20Hz
n = 0:N-1; t = n * dt; % 序号序列和时间序列
x1 = sin(2 * pi * t); x2 = 0.5 * sin(2 * pi * 5 * t);
x = sin(2 * pi * t) + 0.5 * sin(2 * pi * 5 * t); % signals add
m = floor(N/2) + 1; % down for integer
a = zeros(1,m); b = zeros(1,m);
for k = 0:m-1
    for ii = 0:N-1
        a(k+1) = a(k+1) + 2/N * x(ii+1) * cos(2 * pi * k * ii/N); % matlab's array index must
        be increase from 1
        b(k+1) = b(k+1) + 2/N * x(ii+1) * sin(2 * pi * k * ii/N);
    end
    c(k+1) = sqrt(a(k+1).^2 + b(k+1).^2);
end
if(mod(N,2)~=1)a(m) = a(m)/2;end
for ii = 0:N-1
    xx(ii+1) = a(1)/2;
    for k = 1:m-1;
        xx(ii+1) = xx(ii+1) + a(k+1) * cos(2 * pi * k * ii/N) + b(k+1) * sin(2 * pi * k * ii/N);
    end
end
subplot(2,2,1), plot(t, x1); title('正弦信号 1'), xlabel('时间/s');
subplot(2,2,2), plot(t, x2); title('正弦信号 2'), xlabel('时间/s');
% subplot(4,1,1), plot((0:N-1) * dt, xx); title('Composed signal');
subplot(2,2,3), plot(t, x); title('合成信号'), xlabel('时间/s');
subplot(2,2,4), plot((0:m-1)/(N * dt), c), title('傅里叶变换'), xlabel('频率/Hz'), ylabel('幅
度');

```

信号傅里叶合成与分解如图 3-31 所示。

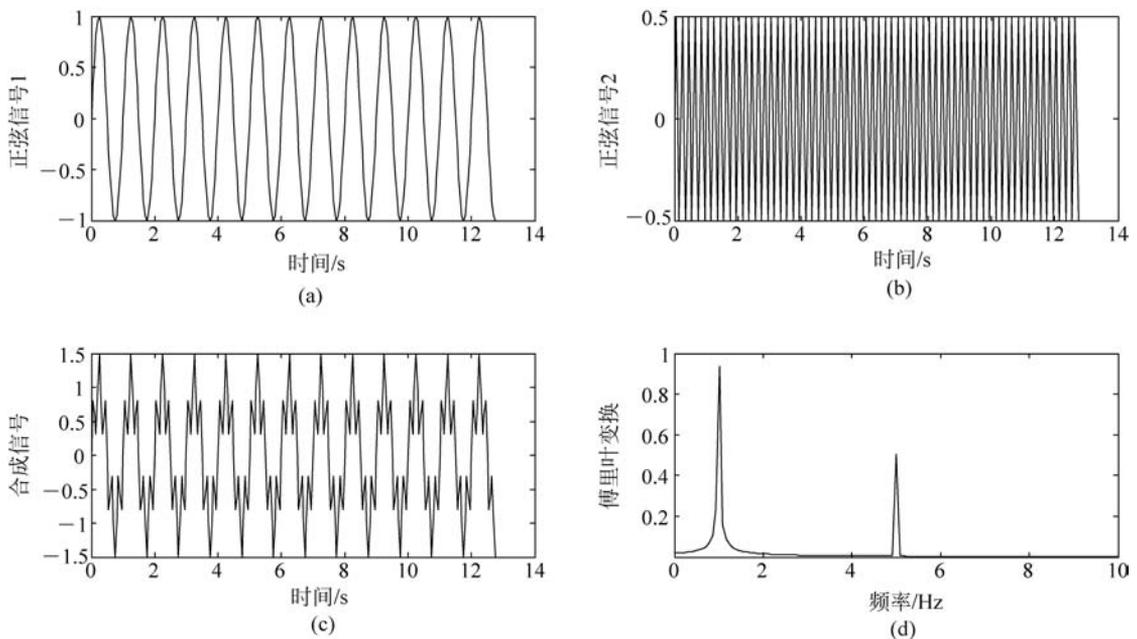


图 3-31 例 3-15 图

此处的 1Hz 和 5Hz 的振幅与原来信号振幅不完全一致,是由于数据采样点较少导致的,即 N 较小。

【例 3-16】 补零序列的离散傅里叶变换。

MATLAB 代码如下:

```
n = 0:4; x = [ones(1,5)]; % 产生矩形序列
k = 0:999; w = (pi/500) * k;
X = x * (exp(-j * pi/500)).^(n * k); % 计算离散时间傅里叶变换
Xe = abs(X); % 取模
subplot(3,2,1); stem(n,x); ylabel('x(n)'); % 画出矩形序列
subplot(3,2,2); plot(w/pi,Xe); ylabel('|X(ejw)|'); % 画出离散时间傅里叶变换
N = 10; x = [ones(1,5), zeros(1,N-5)]; % 将原序列补零为 10 长序列
n = 0:1:N-1; X = dft(x,N); % 进行 DFT
magX = abs(X); k = (0:length(magX)-1) * N/length(magX);
subplot(3,2,3); stem(n,x); ylabel('x(n)'); % 画出补零序列
subplot(3,2,4); stem(k,magX); % 画出 DFT 结果
axis([0,10,0,5]); ylabel('|X(k)|');
N = 20; x = [ones(1,5), zeros(1,N-5)]; % 将原序列补零为 20 长序列
n = 0:1:N-1; X = dft(x,N); % 进行 DFT
magX = abs(X); k = (0:length(magX)-1) * N/length(magX);
subplot(3,2,5); stem(n,x); ylabel('x(n)'); % 画出补零序列
subplot(3,2,6); stem(k,magX); % 画出 DFT 结果
axis([0,20,0,5]); ylabel('|X(k)|');
```

补零序列的离散傅里叶变换如图 3-32 所示。

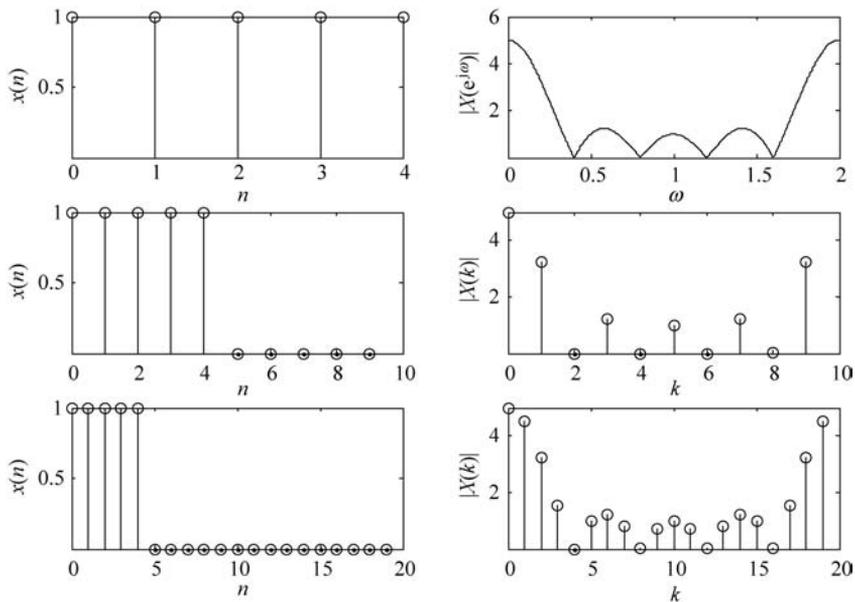


图 3-32 补零序列的离散傅里叶变换

序列末端补零后,尽管信号的频谱不会变化,但对序列做补零后再做 L 点 DFT,计算出的频谱实际上是原信号频谱在 $[0, 2\pi)$ 区间上 L 个等间隔采样,从而增加了对真实频谱采样

的点数,并改变了采样点的位置,将会显示出原信号频谱更多的细节。故而数据后面补零可以克服栅栏效应。在第4章快速傅里叶变换中将详细介绍。

【本章习题】

3.1 填空题

(1) 已知一个长度为 N 的序列 $x(n)$, 它的离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 它的 N 点离散傅里叶变换 $X(k)$ 是关于 $X(e^{j\omega})$ 的 _____ 点等间隔 _____。

(2) DFT 与 DFS 有密切关系, 因为有限长序列可以看成周期序列的 _____, 而周期序列可以看成有限长序列的 _____。

(3) 对长度为 N 的序列 $x(n)$ 圆周移位 m 位得到的序列用 $x_m(n)$ 表示, 其数学表达式为 $x_m(n) =$ _____。

(4) 设序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X(k)$, 则 $x((n+m))_N R_N(n)$ 的 N 点 DFT 为 _____。

(5) 某序列的 DFT 表达式为 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$, 由此可以看出, 该序列时域的长度为 _____, 变换后数字频域上相邻两个频率样点的间隔是 _____。

(6) 圆周卷积可被看作是周期卷积的 _____; 圆周卷积的计算是在 _____ 区间中进行的, 而线性卷积不受此限制。

(7) 有限长序列 $X(z)$ 与 $X(k)$ 的关系 _____, $X(k)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的关系 _____。

3.2 选择题

(1) 序列 $x_1(n)$ 的长度为 4, 序列 $x_2(n)$ 的长度为 3, 则它们线性卷积的长度是 (), 5 点圆周卷积的长度是 ()。

- A. 5, 5 B. 6, 5 C. 6, 6 D. 7, 5

(2) 下面描述中最适合离散傅里叶变换 DFT 的是 ()。

- A. 时域为离散序列, 频域也为离散序列
B. 时域为离散有限长序列, 频域也为离散有限长序列
C. 时域为离散无限长序列, 频域为连续周期信号
D. 时域为离散周期序列, 频域也为离散周期序列

(3) 若序列的长度为 M , 要能够由频域抽样信号 $X(k)$ 恢复原序列, 而不发生时域混叠现象, 则频域抽样点数 N 需满足的条件是 ()。

- A. $N \geq M$ B. $N \leq M$ C. $N \leq 2M$ D. $N \geq 2M$

3.3 $x(n)$ 和 $h(n)$ 是如下给定的有限序列 $x(n) = \{5, 2, 4, -1, 2\}$, $h(n) = \{-3, 2, -1\}$ 。

- (1) 计算 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$;
(2) 计算 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 6 点循环卷积 $y_1(n) = x(n) \textcircled{6} h(n)$;
(3) 计算 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 8 点循环卷积 $y_2(n) = x(n) \textcircled{8} h(n)$;
比较以上结果, 有何结论?

3.4 证明 $W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk} = (W_N^{nk})^*$ 。

3.5 对有限长序列 $x(n) = \{1, 0, 1, 1, 0, 1\}$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上进行 5 等分取样, 得到取样值 $X(k)$, 即 $X(k) = X(z) \Big|_{z=W_5^{-k}}, k=0, 1, 2, 3, 4$ 求 $X(k)$ 的逆傅里叶变换 $x_1(n)$ 。

3.6 试用定义计算周期为 5, 且一个周期内 $x(n) = \{2, 1, 3, 0, 4\}$ 的序列 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS。

3.7 设

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将 $x(n)$ 以 4 为周期进行周期延拓, 形成周期序列 $\tilde{x}(n)$, 画出 $x(n)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 的波形, 求出 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$ 和傅里叶变换。

3.8 已知序列 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$, 若 $y(n)$ 是 $x(n)$ 与其本身的 4 点循环卷积, 求 $y(n)$ 及其 4 点 DFT $Y(k)$ 。

3.9 序列 $x(n)$ 为

$$x(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3)$$

计算 $x(n)$ 的 5 点 DFT, 然后对得到的序列求平方:

$$Y(k) = X^2(k)$$

求 $Y(k)$ 的 5 点 DFT 反变换 $y(n)$ 。

3.10 设序列 $x(n) = \{1, 2, 3, 2, 1, 0\}$, $v(n) = \{3, 2, 1, 0, 1, 2\}$ 。

(1) 求 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$;

(2) 求 $v(k) = \text{DFT}[v(n)]_6$;

(3) 请解释 $v(k)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 之间的关系。