

小波变换与滤波器组

本章要点

- 什么是小波变换？它与短时傅里叶变换有何联系和区别？
- 短时傅里叶变换的基本原理是什么？它与滤波器组有何联系？
- 什么是 Haar 小波变换？如何实现 Haar 小波变换？
- 离散小波变换与滤波器组有何联系？
- 什么是小波提升变换？提升变换有哪些优势？

5.1 小波的由来

小波 (wavelet) 一词源自法语 “ondelette”，直译即 “很小的波形”。该名称最初由法国地球物理学家 Morlet 命名。20 世纪 80 年代，Morlet 在分析人造地震数据时遇到了一个问题。人造地震数据是典型的非平稳信号，如图 5.1 所示，信号在起始时刻剧烈震荡，随后快速衰减。传统的傅里叶变换只能提供信号的频率信息，无法准确给出某个频率发生的时刻；而短时傅里叶变换 (short-time Fourier transform, STFT) 虽然能够刻画局部时频信息，但由于时频分辨率固定，依然具有局限性。Morlet 借鉴 Gabor 变换^①的思想，在窗函数中引入一个尺度因子，从而得到一种具有尺度伸缩且震荡衰减的基函数，如图 5.2 所示，即 Morlet 小波。然而该方法缺乏良好的重构性质，遭受了一些学者的质疑。在其好友数学家 Grossman 的帮助下，两人将分析方法完善，诞生了小波分析的雏形。

随后，在 Meyer, Mallat, Daubechies 等学者的工作推动之下，小波分析快速发展起来。特别是多分辨分析 (multiresolution analysis, MRA) 理论的建立，使得小波变换具有离散化算法，并同工程中广泛使用的滤波器组联系起来，促进了小波变换在工程中的应用。小波分析融合了应用数学、物理学、电子工程、计算机科学、信息科学等学科知识，成为一门新兴的学科分支，在学科发展史上具有里程碑式的意义。

^① Gabor 变换是指高斯窗的短时傅里叶变换，该变换由 Gabor 于 1946 年提出。

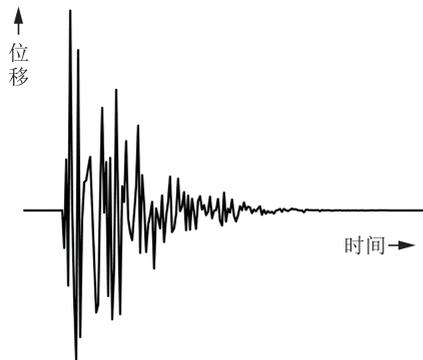


图 5.1 人造地震数据

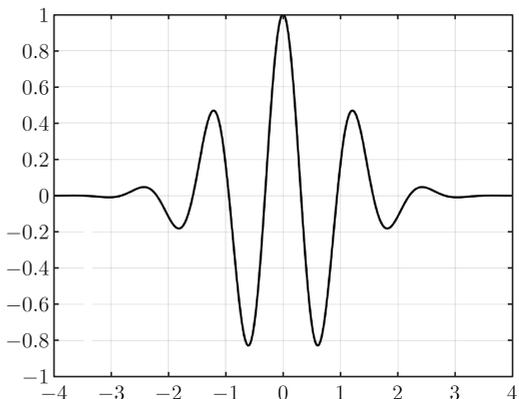


图 5.2 Morlet 小波

概括来讲,小波变换可分为连续小波变换 (continuous wavelet transform, CWT) 和离散小波变换 (discrete wavelet transform, DWT), 两者的区别在于参数是否连续。连续小波变换定义为

$$Wf(s, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \quad (5.1.1)$$

式中, $\psi(t)$ 即为小波函数, $*$ 表示复共轭, $s > 0$ 为尺度因子, u 为平移因子, 两者均为实数。

连续小波变换将信号映射为二维时间-尺度平面。当尺度因子较大时,反映的是信号的整体信息;反之,当尺度因子较小时,则能够刻画信号的局部信息。这种尺度伸缩性质是小波变换最具特色之处。恰是因为如此,小波变换被形象地称为“数学显微镜”。

实际应用中通常需要将尺度因子和平移因子离散化,若以二进制对尺度因子进行离散化,即 $s = 1/2^j, j \in \mathbb{Z}$, 同时平移因子 k 为整数,则得到离散小波变换:

$$Wf(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sqrt{2^j} \psi^*(2^j t - k) dt \quad (5.1.2)$$

本书主要讨论离散小波变换。稍后会看到,离散小波变换与滤波器组具有密切联系,它可以通过两通道滤波器组来实现。

5.2 短时傅里叶变换与滤波器组

5.2.1 短时傅里叶变换的概念

在介绍小波变换之前,首先回顾短时傅里叶变换,并通过滤波器组的观点阐释短时傅里叶变换的实现过程。

短时傅里叶变换的基本思想是在傅里叶变换的基础上,引入一个(时间)窗函数,使得变换能够刻画信号的时频局部特征。设信号为 $f(t)$, 窗函数为 $g(t)$, 短时傅里叶变换定

义为

$$Sf(\omega, u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-j\omega t}g^*(t-u)dt = \langle f(t), e^{j\omega t}g(t-u) \rangle \quad (5.2.1)$$

式中, ω 为频率变量^①; u 为窗函数的中心位置。由此可见, 短时傅里叶变换将信号映射为二维时频平面, 从而能够提供信号在某段时间或某个时刻的频率信息。

窗函数的选取对短时傅里叶变换至关重要。假设对信号 $f(t)$ 在时刻 $t = \tau$ 附近的频率感兴趣, 最简单的方法是取矩形窗函数:

$$g_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{|I_{\tau}|}, & t \in I_{\tau} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.2.2)$$

式中, I_{τ} 为以 τ 为中心的有限区间, $|I_{\tau}|$ 为区间长度。此时, 短时傅里叶变换即是对 I_{τ} 这段时间内的信号作傅里叶变换:

$$Sf(\omega, \tau) = \frac{1}{|I_{\tau}|} \int_{I_{\tau}} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

显然, $|I_{\tau}|$ 越小越能反映信号的局部信息。当 $|I_{\tau}| \rightarrow 0$ 时, $g_{\tau}(t) \rightarrow \delta(t - \tau)$ 。利用 δ -函数的筛选性质可知

$$Sf(\omega, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t - \tau)e^{-j\omega t}dt = f(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

由此可见, 当窗函数为 δ -函数时, 时间分辨率极高, 但失去了频率分辨能力。

进一步分析, 窗函数可视为对原始信号在某个时段内的加权。为了突出信号的时间局部性, 一个自然的想法是窗函数在中心时刻 $t = \tau$ 的权值应当最大, 而随着距中心位置的距离增大, 权值逐渐衰减乃至趋向于零。显然, 由于矩形窗函数的权重是相等的, 因此局部刻画能力有限。Gabor 在 1946 年提出了利用具有无穷光滑 (可微) 的高斯函数作为窗函数:

$$g_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.2.3)$$

以高斯函数为窗函数的短时傅里叶变换又称为 Gabor 变换。由于时域的高斯函数在频域依然为高斯函数, 即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)$$

因此采用高斯窗函数在时域和频域均具有较好的局部刻画能力。

^① 为了便于书写, 本章频率变量均采用 ω 表示, 对其物理意义 (真实频率或归一化频率) 可结合变换定义来理解。

此外，B 样条 (B-spline) 函数也可用于窗函数。 m 阶 B 样条函数定义为

$$N_m(t) = N_{m-1}(t) * N_1(t) \tag{5.2.4}$$

其中， $N_1(t)$ 为 1 阶 B 样条：

$$N_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{5.2.5}$$

m 阶 B 样条是 $m-1$ 阶分段光滑的 (存在 $m-1$ 阶导数)，且具有紧支集 $[0, m]$ ^①，图 5.3 画出了 3 阶以内的 B 样条函数。

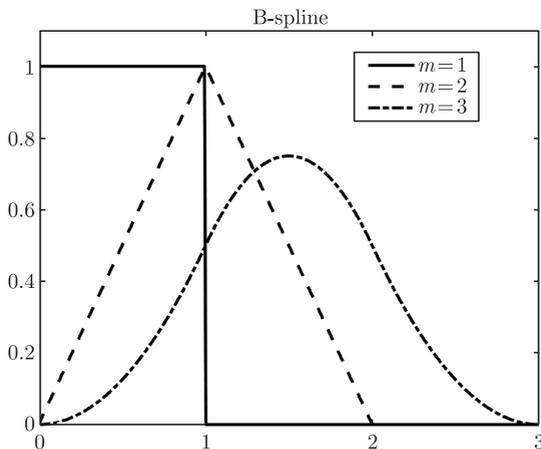


图 5.3 B 样条函数

根据傅里叶变换的卷积定理：

$$f(t)g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega) \tag{5.2.6}$$

这里用 “ $\hat{\cdot}$ ” 表示信号的傅里叶变换。可见，加窗信号的频谱相当于对原始信号的频谱进行了“加权组合”。我们希望加窗信号的频谱与原始信号的频谱尽可能接近。这意味着 $\hat{g}(\omega)$ 的频宽应尽可能窄，最理想情况为 $\delta(\omega)$ ，此时两者完全相同。然而根据傅里叶变换的尺度性质：

$$g_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t}{s}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{g}_s(\omega) = \sqrt{s} \hat{g}(s\omega) \tag{5.2.7}$$

频宽变小意味着时宽变大，故失去了时域局部刻画能力。反之，时宽变小则频宽变大，加窗信号的频谱变得更加模糊。以矩形窗函数为例，如图 5.4 所示，设时宽为 $2T$ ，它对应的

① 称集合 $\{t : f(t) \neq 0\}$ 为函数 f 的支撑集 (support)。如果该集合是闭的，则称为紧 (compact) 支集。

频域为 sinc 函数, 频宽 (主瓣宽度) 为 $2\pi/T$, 显然两者成反比。这说明, 时宽与频宽存在制约关系。

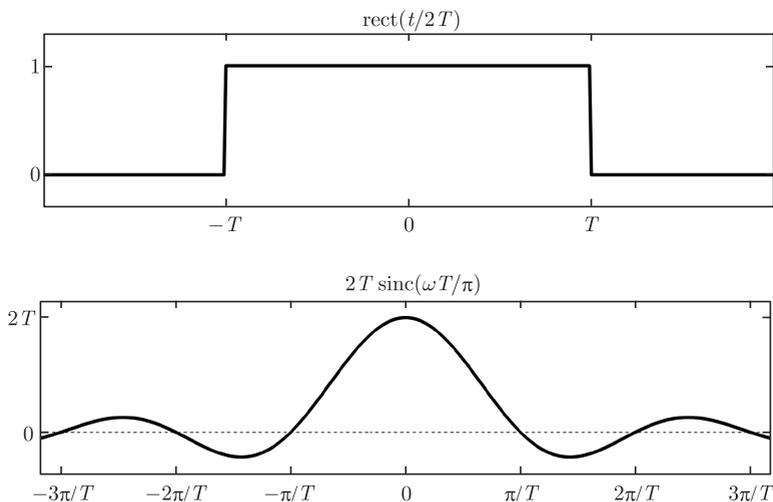


图 5.4 时宽与频宽的关系

也可从时频分析的角度来描述时频制约关系。设窗函数与其傅里叶变换 $g \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{g}$, 定义时域和频域的中心位置分别为

$$t_0 = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |g(t)|^2 dt \quad (5.2.8)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi\|\hat{g}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \quad (5.2.9)$$

时宽和频宽分别为

$$\sigma_t = \left(\frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (5.2.10)$$

$$\sigma_\omega = \left(\frac{1}{2\pi\|\hat{g}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (5.2.11)$$

根据不确定性原理 (uncertainty principle)^[81], 时宽与频宽的乘积具有如下关系:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (5.2.12)$$

当且仅当 f 为高斯函数时, 上式取等号。这说明两者不可能同时充分地小。

综合上述分析可知, 对于短时傅里叶变换, 一旦窗函数取定, 其时宽与频宽也就固定下来, 因此时频分辨率也是固定的。然而实际中更希望时频分辨率是可调节的。具体来说, 通常信号的高频信息主要体现在变化比较剧烈的部分, 这时希望时宽窄一些, 以便刻画这种短时间内的突变信息; 而信号的低频信息主要蕴含在变化比较平缓的部分, 这时时宽可

以宽一些，以反映信号整体的信息。短时傅里叶变换不具备这种特性。而小波变换通过引入一个尺度因子，使得变换具有尺度伸缩的功能，这样就克服了短时傅里叶变换的不足。根据连续小波定义式(5.1.1)及时频尺度性质，小波在低频（大尺度）部分时宽较大、频宽较窄，而在高频（小尺度）部分恰好反之。图 5.5 画出了四类不同表示在时频平面上的划分，其中图 5.5 (a)，图 5.5 (b) 分别为时域和频域表示，两者不具备时频局部化能力。短时傅里叶变换的时频单元是固定的，如图 5.5 (c) 所示。而小波变换的时频单元随尺度伸缩变化，如图 5.5 (d) 所示，因而更适合分析非平稳信号。有关时频分析的更多内容不在本书的讨论范围之内，感兴趣的读者可参阅相关论著^[81-82]。

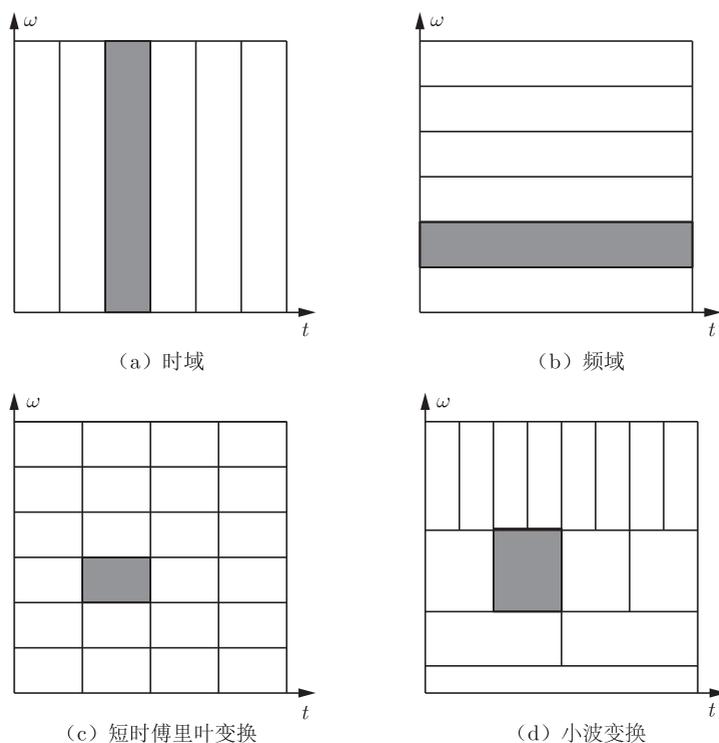


图 5.5 四种表示的时频单元

5.2.2 短时傅里叶变换与分析滤波器组

本节分析短时傅里叶变换与滤波器组的关系。已知离散时间信号为 $x[n]$ ，定义离散时间短时傅里叶变换 (DT-STFT) 为：

$$X(e^{j\omega}, mD) = \sum_n x[n]w^*[n - mD]e^{-jn\omega} \quad (5.2.13)$$

式中， ω 为归一化角频率； $w[n - mD]$ 是以 $t = mDT$ 为中心的窗函数^①。由于窗函数一般为实的，故共轭可以省略。为了保证时域采样信息不丢失，通常假设窗函数的宽度 $L \geq D$ ，

^① 这里 $t = mDT$ 以连续时间为单位，其中 T 为采样间隔。但对于离散时间信号，也可以忽略采样间隔。

即相邻窗函数允许有重叠部分。图 5.6 给出了当窗函数为三角窗, 且 $L = D$ 时的示意图。

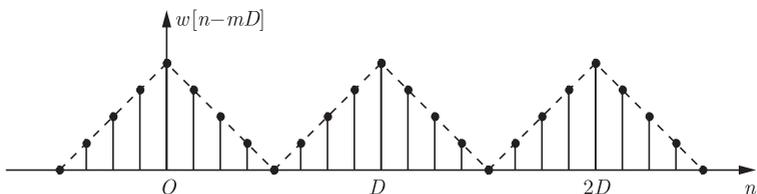


图 5.6 三角窗示意图

离散时间短时傅里叶变换的实现过程可以从滤波器组的角度来阐释, 其中包括低通滤波与带通滤波两种实现过程。下面进行详细介绍。

1. 低通滤波实现

为了便于分析, 不妨先将 ω 取值固定, 记 $\omega = \omega_k$, 假设窗函数为实的, 将式(5.2.13)重新整理为

$$X(e^{j\omega_k}, mD) = \sum_n (x[n]e^{-jn\omega_k}) w[n - mD] \quad (5.2.14)$$

记 $s_k[n] = x[n]e^{-jn\omega_k}$, 则 $s_k[n]$ 是 $x[n]$ 的复指数调制, 两者的频谱关系为

$$S_k(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+\omega_k)})$$

若 $X(e^{j\omega})$ 的中心频率为零, 则 $S_k(e^{j\omega})$ 相当于将前者搬移到中心频率位于 $\omega = -\omega_k$ 的位置。

继续将式(5.2.14)改写为

$$X(e^{j\omega_k}, mD) = \sum_n s_k[n] \bar{w}[mD - n] = (s_k * \bar{w})[mD] \quad (5.2.15)$$

式中, $\bar{w}[n] = w[-n]$ 。

式(5.2.15)可以理解为信号 $s_k[n]$ 与 $\bar{w}[n]$ 进行卷积, 随后再进行 D 倍抽取, 过程如图 5.7 所示。

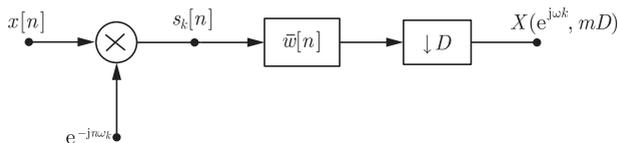


图 5.7 短时傅里叶变换的低通滤波实现过程

下面分析式(5.2.15)的物理意义。根据卷积定理,

$$s_k[n] * \bar{w}[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} S_k(e^{j\omega}) \bar{W}(e^{j\omega})$$

假设 $\bar{w}[n]$ 关于 $n = 0$ 对称 (如图 5.6 所示的三角窗), 则 $\bar{W}(e^{j\omega})$ 亦关于 $\omega = 0$ 对称, 其作用类似于低通滤波器。 $S_k(e^{j\omega})$ 与 $\bar{W}(e^{j\omega})$ 相乘即滤出 $S_k(e^{j\omega})$ 在 $\omega = 0$ 附近的频率成分。又由于 $S_k(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+\omega_k)})$, 实际上滤出的是 $X(e^{j\omega})$ 在 $\omega = \omega_k$ 附近的频率成分。图 5.8 给出了上述过程的示意图。

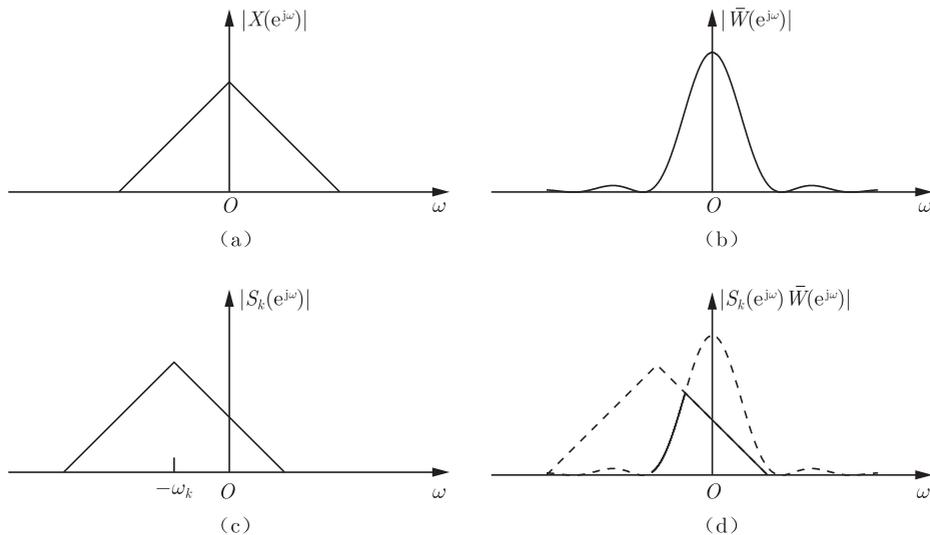


图 5.8 低通滤波实现过程示意图

上述分析过程对任意取值的 ω 都成立。由于离散时间短时傅里叶变换的频谱是以 2π 为周期的, 故通常只需考虑一个周期即可。现不妨取 $\omega_k = 2\pi k/D (0 \leq k \leq D-1)$, 此时短时傅里叶变换恰好构成一个 D 通道的均匀滤波器组, 结构如图 5.9 所示, 其中每条支路滤出的是信号 $x[n]$ 在 $t = mDT$, $\omega = \omega_k$ 附近的频率成分。由此可见, 短时傅里叶变换具有频谱分析的作用, 又称为频谱分析器。

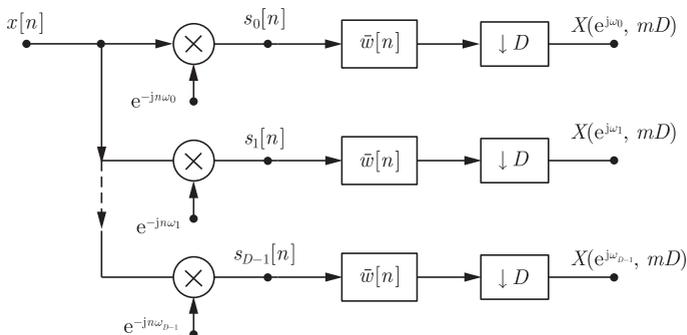


图 5.9 短时傅里叶变换分析滤波器组 (低通滤波实现)

2. 带通滤波实现

短时傅里叶变换还可以通过带通滤波的方式来实现。与上面的分析类似, 令 $\omega = \omega_k$, 将式(5.2.13)整理为如下形式:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega_k}, mD) &= \sum_n x[n]w[n - mD]e^{-jn\omega_k} \\
 &= e^{-jmD\omega_k} \sum_n x[n]w[n - mD]e^{-j(n-mD)\omega_k} \\
 &= e^{-jmD\omega_k} \sum_n x[n]\bar{w}[mD - n]e^{j(mD-n)\omega_k} \\
 &= e^{-jmD\omega_k} (x * r_k)[mD]
 \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

式中, $r_k[n] = \bar{w}[n]e^{jn\omega_k} = w[-n]e^{jn\omega_k}$ 。

式(5.2.16)的实现过程如图 5.10 所示, 下面分析其物理意义。假设 $\bar{w}[n]$ 依然为低通滤波器, 则 $r_k[n]$ 为带通滤波器, 中心频率位于 ω_k 。信号 $x[n]$ 经过带通滤波再经 $e^{-jn\omega_k}$ 调制, 即将频谱中心移至原点, 该过程如图 5.11 所示。对比低通滤波的结果可知, 两种实现过程完全等价。

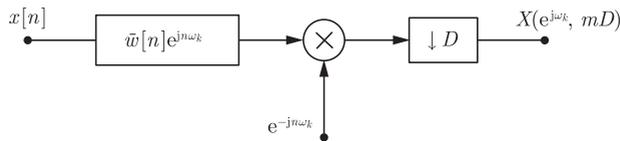


图 5.10 短时傅里叶变换的带通滤波实现过程

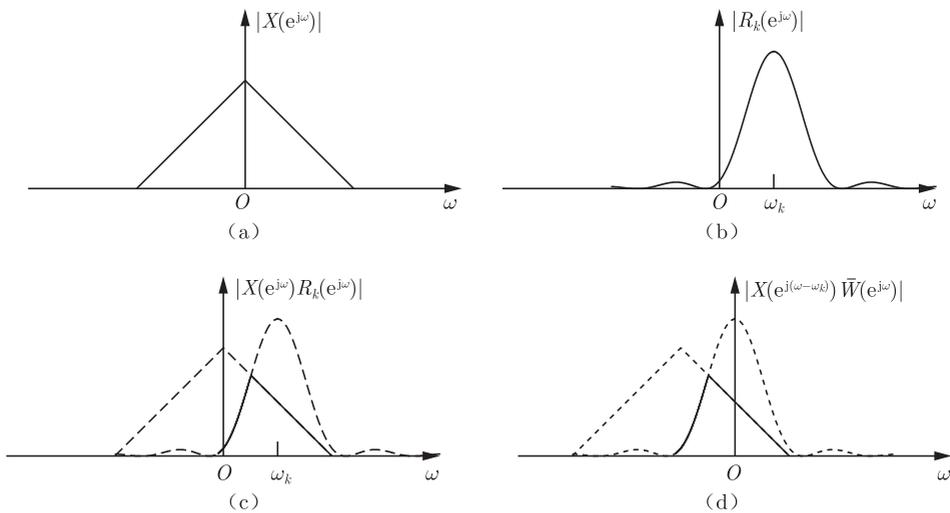


图 5.11 带通滤波实现过程示意图

进一步, 若取 $\omega_k = 2\pi k/D (k = 0, 1, \dots, D-1)$, 则上述过程构成一个 D 通道均匀滤波器组, 结构如图 5.12 所示。

综合上述分析可知, 无论是低通滤波实现还是带通滤波实现, 其中关键在于将短时傅里叶变换式转化为卷积的形式, 即式(5.2.15)或式(5.2.16)。相应地, $\bar{w}[n]$ 可视为低通滤波器, 而 $r_k[n]$ 则视为带通滤波器。两种实现方式本质上都是提取信号在 $t = mDT$, $\omega = \omega_k$

附近的频率成分。而随着 m 与 k 的变化, $X(e^{j\omega_k}, mD)$ 形成了一幅二维时频谱, 如图 5.13 所示。

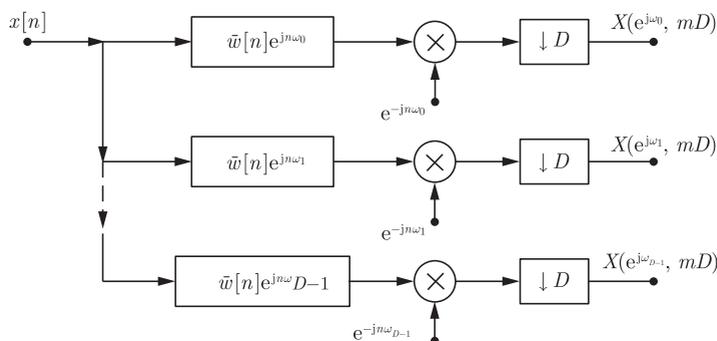


图 5.12 短时傅里叶变换分析滤波器组 (带通滤波实现)

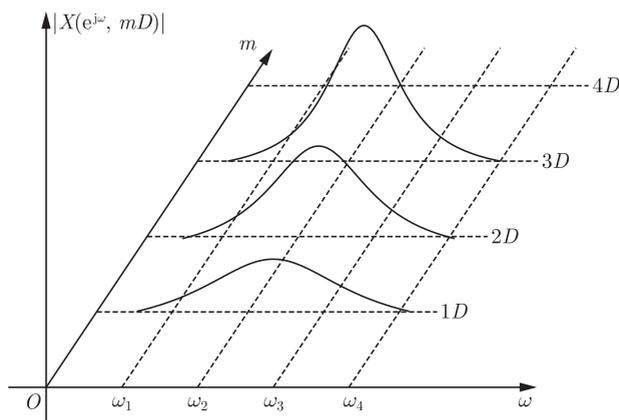


图 5.13 短时傅里叶变换时频谱

5.2.3 逆短时傅里叶变换与综合滤波器组

本节讨论信号重构过程。假设窗函数为实的, 记加窗信号 $x_m[n] := x[n]w[n-mD]$, 注意到它与时频谱的关系为: $x_m[n] \xrightarrow{\text{DTFFT}} X(e^{j\omega}, mD)$, 根据逆离散时间傅里叶变换可知

$$x_m[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}, mD) e^{jn\omega} d\omega \quad (5.2.17)$$

因此接下来的问题便是如何根据加窗信号 $x_m[n]$ 重构原始信号 $x[n]$ 。注意到

$$\sum_m x_m[n] w^a[n-mD] = \sum_m x[n] w^{a+1}[n-mD] = x[n] \sum_m w^{a+1}[n-mD] \quad (5.2.18)$$

式中, a 为任意常数。

若

$$\sum_m w^{a+1}[n-mD] \neq 0 \quad (5.2.19)$$