第 5 章 通信接收端的自适应均衡

CHAPTER 5

通信系统和通信技术朝着从有线到无线、从模拟到数字、从固定到移动、从低数据速率到高数据速率的方向发展，特别是当代的数字蜂窝移动通信系统及所采用的技术已经成为通信发展水平的重要标志。码间干扰是影响数字通信质量的一个主要因素，产生码间干扰的主要原因是信道的非理想特性，多径传输是导致信道非理想特性的重要原因。目前，克服码间干扰的主要技术手段是均衡。均衡是指在通信系统的接收端插入滤波器，以校正和补偿信道特性并减小码间干扰的信号处理技术。在高速时变信道和短序列时隙传输中，信道均衡必须具有较强的时变适应能力。如果在均衡器的设计中加入自适应算法，使之参数可调，则称为自适应均衡器。均衡器可以分为两种：时域均衡器和频域均衡器。常规的均衡需要训练序列，而在某些缺乏训练序列的情况下可以采用盲均衡。

第 16 集
微课视频

本章从均衡器的原理入手，重点介绍几种常用的自适应均衡算法和自适应盲均衡方法的原理及其应用。

5.1 时域均衡器

由于接收信号是由发送信号的多条延迟分量组成，这些延时分量的和或差造成了码间干扰，并且这种码间干扰不能通过增加发射功率或降低接收机噪声来消除。一种消除码间干扰的方法就是均衡器。

5.1.1 均衡器的原理

考虑频率选择性衰落的离散时间接收模型。假设完美同步，在匹配滤波器之后，采样之前，接收的复基带信号可表示为

$$y(t)=g_{\mathrm{rx}}(t)*h(t)*\sqrt{E_x}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}s(m)g_{\mathrm{tx}}(t-mT)+g_{\mathrm{rx}}(t)*v(t) \tag{5.1.1}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}s(m)h_{\mathrm{eff}}(t-mT)+g_{\mathrm{rx}}(t)*v(t) \tag{5.1.2}$$

其中，$g_{\mathrm{rx}}(t)$和 $g_{\mathrm{tx}}(t)$分别为发射机的脉冲信号成形滤波器和接收机的脉冲信号匹配滤波器；$h(t)$为时域信道响应；$\sqrt{E_x}$ 为归一化的发送能量；$s(m)$为第 m 个时刻的发送符号；$v(t)$为接收噪声。考虑收发端的滤波器效应后，有效的信道模型 $h_{\mathrm{eff}}(t)=g_{\mathrm{rx}}(t)*g_{\mathrm{tx}}(t)*$

$\sqrt{E_x}h(t)$。

这个接收到的有效脉冲信号 $y(t)$通常不再是奈奎斯特脉冲信号波形。对式(5.1.2)按照符号速率采样,并且用 $h(n)=h_{\mathrm{eff}}(nT)$表示采样的有效信道离散时间模型,则可将接收信号表示为

$$y(k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}h(l)s(k-l)+v(k) \tag{5.1.3}$$

由于每个观测信号 $y(k)$是所有发送信号经过卷积后的线性组合,造成了码间干扰。

【例 5.1.1】 设 $h(k)=\sqrt{E_s}\delta(k)+\sqrt{E_s}h_1\delta(k-1)$,考虑码间干扰的影响,接收信号为

$$y(k)=\sqrt{E_s}s(k)+\sqrt{E_s}h_1 s(k-1)+v(k)$$

在接收第 k 个符号时受到了前一个符号周期发出的符号 $s(k-1)$的干扰。若不纠正这种干扰,则信干噪比将变为

$$\mathrm{SINR}=\frac{E_s}{E_s|h_1|^2+N_0}$$

显然,信干噪比是$|h_1|^2$ 的函数,$|h_1|^2$ 越大,信干噪比越小。当 $E_s=10$ 且$|h_1|^2=1$时,SINR$=10/(10+1)\approx0.91$ 或-0.41dB。

为了消除信道的影响即克服码间干扰,在带限数字通信系统中,在接收端采样和判决之前需要加入一个信道均衡器。加入均衡器之后的时域传输等效模型如图 5.1.1 所示。

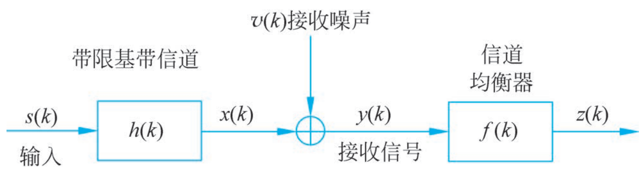

图 5.1.1 加入均衡器之后的时域传输等效模型

设输入信号 $s(k)$经信道传输后的输出为 $x(k)$,再加上接收端的接收噪声 $v(k)$,则未均衡前的接收信号模型为

$$y(k)=h(k)*s(k)+v(k)=\sum_{l=0}^{L}h(l)s(k-l)+v(k) \tag{5.1.4}$$

其中,$h(l)$为传输信道的第 l 个抽头系数。

经信道均衡器作用后,若忽略接收噪声,则均衡器的输出为

$$z(k)=f(k)*y(k)=f(k)*h(k)*s(k) \tag{5.1.5}$$

其中,$f(k)$为均衡器在 k 时刻的权系数。

通过均衡器可使 $f(k)*h(k)=\delta(k-d)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$,其中,$\delta(k)$为 Kronecker$\delta$ 函数,d 为整数时延,φ 为常数相移。均衡后,得到的输出为

$$z(k)=s(k-d)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{5.1.6}$$

它是输入信号的整数倍时延和常数相移的信号。由于整数倍时延可以通过同步来消除,常数相移可以通过锁相环来消除,因此加入均衡器可以消除信道对输入信号的影响。

事实上,产生码间干扰的原因是信道可视作因果的有限冲激响应,信道完全由 $L+1$ 个抽头系数 $h(l)$确定,信道的阶数 L 在很大程度上决定了码间干扰的严重程度。假设信道参

数 $h(l), l=0,1,\cdots,L$ 是接收机完全已知的，则可设计均衡器消除由于信道影响而产生的码间干扰。简单地说，均衡就是消除码间干扰的方法和实现算法，均衡器是消除码间干扰的滤波器。

5.1.2　迫零均衡器

均衡的方法有很多种。例如最大似然估计均衡器，它可以在加性高斯白噪声环境下对发送序列检测，但当信道的冲激响应长度 L 很大时，检测器的实现变得复杂。再如判决反馈均衡器，这类均衡器将检出的符号从接收信号中排除掉，使接收信号不包含已检出符号所造成的干扰，从而减小码间干扰对符号检测的影响。

一种简单的适用于时域信号均衡的滤波器是迫零均衡器。设 $\{f(l)\}_{l=0}^{L_f}$ 是一个阶数为 L_f 的有限冲激响应(Finite Impulse Response，FIR)均衡器。忽略接收噪声，在 $k=0,1,\cdots,L_f+L$ 时刻，一个理想的均衡器应满足

$$\sum_{l=0}^{L_f} f(l)h(k-l)=\delta(k-n_{\mathrm{d}}) \tag{5.1.7}$$

为求解 L_f+1 个未知的均衡器参数，将式(5.1.7)表示为线性方程

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}_{n_{\mathrm{d}}}=\boldsymbol{e}_{n_{\mathrm{d}}} \tag{5.1.8}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为托普利兹(Toeplitz)矩阵，即有

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & h(0) & 0 & 0 \\ h(L) & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & h(L) & \vdots & h(0) \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h(L) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(L_f) \end{bmatrix} \tag{5.1.9}$$

$\boldsymbol{e}_{n_{\mathrm{d}}}$ 为理想的响应向量，它在 $n_{\mathrm{d}}+1$ 位置的元素是1，其余位置的元素都是0。

因此，在噪声为0时求解 $\boldsymbol{f}_{n_{\mathrm{d}}}$，可得

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{LS},n_{\mathrm{d}}}=(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}_{n_{\mathrm{d}}} \tag{5.1.10}$$

它是常用的最小二乘估计解，该解也被称为迫零(Zero Forcing，ZF)解。此时的均方误差最小，且最小值为

$$J(n_{\mathrm{d}})=\boldsymbol{e}_{n_{\mathrm{d}}}^{\mathrm{H}}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}]\boldsymbol{e}_{n_{\mathrm{d}}} \tag{5.1.11}$$

均衡器的延迟 n_{d} 也是一个设计参数，最好的均衡器考虑若干 n_{d} 的取值并选择最好的一个，因此，进一步选择 n_{d} 使 $J(n_{\mathrm{d}})$ 最小。称这种方法为最小均方最优均衡器，也称为迫零均衡器。

【例5.1.2】 设信道的冲激响应为 $h(0)=0.5, h(1)=\frac{1}{2}\mathrm{j}, h(2)=0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{5}}$，设计长度为 $L_f=6$ 的最小均方最优均衡器。

解　首先构造卷积矩阵

$$
\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}
0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\mathrm{j} & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{5}} & \frac{1}{2}\mathrm{j} & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{5}} & \frac{1}{2}\mathrm{j} & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{5}} & \frac{1}{2}\mathrm{j} & 0.5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{5}} & \frac{1}{2}\mathrm{j} & 0.5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{5}} & \frac{1}{2}\mathrm{j} & 0.5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{5}} & \frac{1}{2}\mathrm{j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{5}}
\end{bmatrix}
$$

然后利用矩阵 $\boldsymbol{H}$，由式(5.1.10)计算 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{LS},n_{\mathrm{d}}}$，确定最佳均衡器的长度。如图 5.1.2(a)所示的均衡器均方误差，可得 $n_{\mathrm{d}}=5$，且 $J(5)=0.0266$。此时最佳均衡器为

$$
\boldsymbol{f}_{\mathrm{LS},5}=\begin{bmatrix}
-0.1051-\mathrm{j}0.1054 \\
-0.1848+\mathrm{j}0.1665 \\
0.2100+\mathrm{j}0.3607 \\
0.6065-\mathrm{j}0.2521 \\
-0.2146-\mathrm{j}0.9521 \\
0.4835+\mathrm{j}0.0926 \\
-0.1907-\mathrm{j}0.1905
\end{bmatrix}
$$

均衡后信道的冲激响应如图 5.1.2(b)所示。

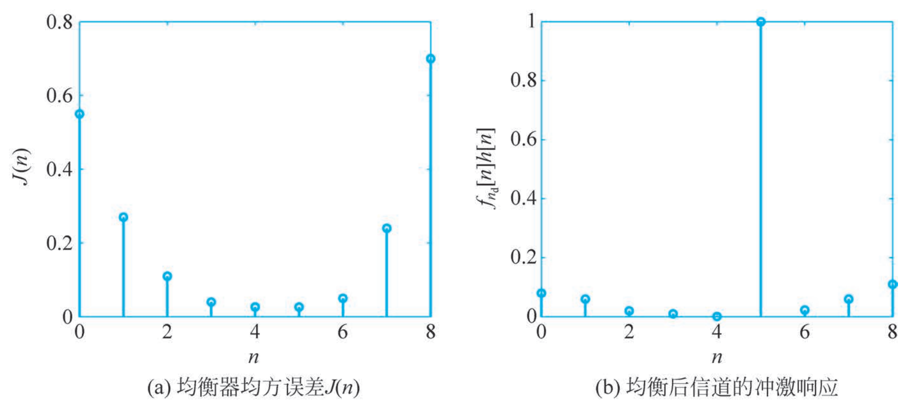

图 5.1.2　均衡器的均方误差和均衡后信道的冲激响应(例 5.1.2)

5.1.3　最小均方误差均衡器

把均衡器用于采样信号上，可以得到输出信号即输入信号的估计值为

$$\hat{s}(k-n_{\mathrm{d}})=\sum_{l=0}^{L_f} f_{n_{\mathrm{d}}}(l)y(k-l) \tag{5.1.12}$$

由于 n_{d} 已知，因此对输出信号用相应数量的样值纠正。将均衡器参数表示为向量，则式(5.1.12)可以表示为

$$\hat{s}(k-n_{\mathrm{d}})=\boldsymbol{f}_{n_{\mathrm{d}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(k) \tag{5.1.13}$$

其中，$\boldsymbol{y}(k)=[y(k),y(k-1),\cdots,y(k-L)]^{\mathrm{T}}$，且有

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{v}(k) \tag{5.1.14}$$

其中，$\boldsymbol{s}(k)=[s(k),s(k-1),\cdots,s(k-L)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{H}$ 如式(5.1.9)所示。最小均方误差均衡器寻找使均方误差

$$\mathbb{E}[\,|\,s(k-n_{\mathrm{d}})-\boldsymbol{f}_{n_{\mathrm{d}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(k)\,|^2] \tag{5.1.15}$$

最小的 $\boldsymbol{f}_{n_{\mathrm{d}}}$。假设 $s(k)$是零均值单位方差的 IID，$v(k)$是方差为 σ_v^2 的 IID，$s(k)$与 $v(k)$相互独立，则

$$\boldsymbol{C}_{yy}=\mathbb{E}[\boldsymbol{y}(k)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(k)]=\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}+\sigma_v^2\boldsymbol{I} \tag{5.1.16}$$

并且

$$\boldsymbol{C}_{ys}=\mathbb{E}[\boldsymbol{y}(k)s^*(k-n_{\mathrm{d}})]=\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}_{n_{\mathrm{d}}} \tag{5.1.17}$$

因此，可得最小均方误差(Minimum Mean-Square Error，MMSE)均衡器为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{\mathrm{MMSE},n_{\mathrm{d}}}&=\boldsymbol{C}_{yy}^{-1}\boldsymbol{C}_{ys}\\&=(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}+\sigma_v^2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}_{n_{\mathrm{d}}}\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

最小均方误差均衡器在信噪比较低时能增强均衡性能。它具有渐进特性，即当 $\sigma_v^2\to 0$ 时，$\boldsymbol{f}_{\mathrm{MMSE},n_{\mathrm{d}}}\to\boldsymbol{f}_{\mathrm{LS},n_{\mathrm{d}}}$。也就是说，没有噪声时，最小均方误差均衡就是迫零均衡。当 $\sigma_v^2\to\infty$ 时，$\boldsymbol{f}_{\mathrm{MMSE},n_{\mathrm{d}}}\to\dfrac{1}{\sigma_v^2}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}_{n_{\mathrm{d}}}$，最小均方误差均衡器可被视为一个空间匹配滤波器。

5.2 自适应均衡

若信道是时变的，则需用自适应均衡器消除码间干扰。自适应均衡器是一种时变滤波器，它按照某种优化准则动态地调整其特性和参数，使其能够跟踪信道的变化，从而达到最佳均衡的目的。各种调整均衡器权系数的方法被称为自适应均衡方法，其中，最小均方(Least Mean Square，LMS)算法一直是自适应均衡和滤波的经典有效算法之一，并且 LMS 算法是统计梯度算法类的很重要的成员之一。它的运算量小，应用广泛并且易于实现。LMS 算法建立在维纳(Wiener)滤波的基础上。维纳滤波是在最小均方误差优化准则下的最优滤波，它基于横向滤波器的结构，被广泛应用于雷达、通信、声呐、系统辨识及信号处理等领域，可以有效地滤除平稳随机信号中的噪声，获得很好的信号质量。

5.2.1 横向滤波器

横向滤波器也称为抽头延迟线滤波器或有限冲激响应滤波器。它是自适应滤波器最常用的结构，包括 3 个基本单元：单位延迟单元(z^{-1})、乘法器和加法器。图 5.2.1 所示为有 M 个权系数(抽头)的横向滤波器结构，其中复数 w_i^* 是滤波器的权系数。设输入信号

$u(n)$是随机过程(在实际系统中,每次处理的输入是随机过程的一个样本函数),不难发现,滤波器在 n 时刻的输出不仅与 n 时刻的输入信号有关,还与 n 时刻之前的 $M-1$ 个时刻的输入信号有关。

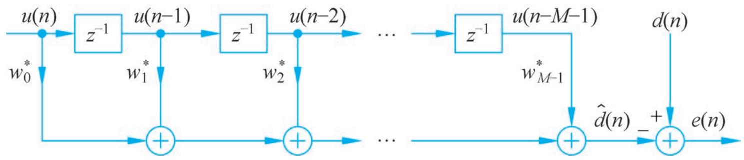

图 5.2.1　有 M 个权系数的横向滤波器结构

记 n 时刻的输入信号为 $u(n)$,横向滤波器的输出信号 $\hat{d}(n)$为

$$\hat{d}(n)=\sum_{i=0}^{M-1} w_i^* u(n-i) \tag{5.2.1}$$

如果将式(5.2.1)写成向量形式,那么有

$$\hat{d}(n)=\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}(n)=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{w}^* \tag{5.2.2}$$

其中,滤波器权向量 $\boldsymbol{w}$ 和 n 时刻的输入信号向量 $\boldsymbol{u}(n)$分别为

$$\boldsymbol{w}=[w_0\ w_1\ \cdots\ w_{M-1}]^{\mathrm{T}} \tag{5.2.3}$$

$$\boldsymbol{u}(n)=[\boldsymbol{u}(n)\ \boldsymbol{u}(n-1)\ \cdots\ \boldsymbol{u}(n-M+1)]^{\mathrm{T}} \tag{5.2.4}$$

在图 5.2.1 中,信号 $d(n)$称为期望响应,滤波器的输出 $\hat{d}(n)$称为对期望响应 $d(n)$的估计。定义估计误差 $e(n)$为

$$e(n)=d(n)-\hat{d}(n) \tag{5.2.5}$$

在自适应信号处理中,通过设计横向滤波器的权向量 $\boldsymbol{w}$,使滤波器的输出 $\hat{d}(n)$在某种意义上逼近期望响应 $d(n)$,使估计误差 $e(n)$在某种意义上最小。需要指出的是,由于滤波器的输入是随机过程,期望响应 $d(n)$和估计误差 $e(n)$也都是随机过程,因此在实际应用中,使估计误差 $e(n)$等于零是不现实的,只能使“估计误差 $e(n)$在某种意义上最小”。

图 5.2.2 所示为常用的自适应横向滤波器结构,其中,滤波器的权向量 $\boldsymbol{w}(n)$不是固定的,而是根据估计误差 $e(n)$,利用自适应算法自动修正,使 $e(n)$在某种意义上达到最小。

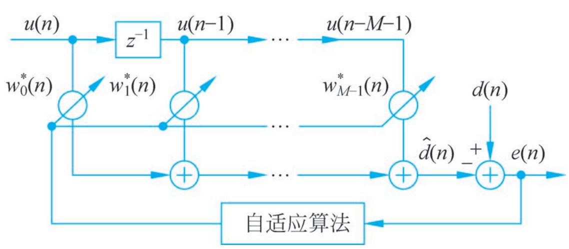

图 5.2.2　自适应横向滤波器结构

5.2.2　维纳滤波

维纳滤波(Wiener Filtering)是一种常用的降噪方法,它能够把信号从含有噪声的观测量中提取出来,在通信中的自适应均衡以及语音和图像的信号处理中有着重要的应用。它是一种基于线性最小均方误差准则的最优估计器,适用于对连续的或离散的、标量的或向量

的平稳随机信号的处理。

1. 均方误差准则及误差性能面

由式(5.2.2)和式(5.2.5),可以得到估计误差为

$$e(n)=d(n)-\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}(n) \tag{5.2.6}$$

定义均方误差(Mean Square Error,MSE)为

$$J(\boldsymbol{w})=\mathbb{E}[|e(n)|^2]=\mathbb{E}[e(n)e^*(n)] \tag{5.2.7}$$

并称 $J(\boldsymbol{w})$ 为代价函数。

将式(5.2.6)代入式(5.2.7),得到均方误差为

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{w})&=\mathbb{E}\{[d(n)-\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}(n)][d^*(n)-\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)\boldsymbol{w}]\}\\&=\mathbb{E}[|d(n)|^2]-\mathbb{E}[d(n)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)]\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\mathbb{E}[\boldsymbol{u}(n)d^*(n)]+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\mathbb{E}[\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)]\boldsymbol{w}\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

其中,滤波器权向量 $\boldsymbol{w}$ 是一个确定量,因此可以将其放到数学期望运算符号之外。假设期望响应 $d(n)$ 的均值为 0,那么式(5.2.8)中的第 1 项为期望响应的方差,记为 $\sigma_d^2=\mathbb{E}[|d(n)|^2]$。

定义互相关向量 $\boldsymbol{p}$ 为

$$\boldsymbol{p}\triangleq\mathbb{E}[\boldsymbol{u}(n)d^*(n)]=\begin{bmatrix}\mathbb{E}[u(n)d^*(n)]\\\mathbb{E}[u(n-1)d^*(n)]\\\vdots\\\mathbb{E}[u(n-M+1)d^*(n)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p(0)\\p(-1)\\\vdots\\p(-M+1)\end{bmatrix} \tag{5.2.9}$$

其中,$p(-m)$ 为输入 $u(n-m)$ 与期望响应 $d(n)$ 的互相关函数,即 $p(-m)=\mathbb{E}[u(n-m)d^*(n)]$。

定义输入信号向量 $\boldsymbol{u}(n)$ 的自相关矩阵为

$$\boldsymbol{R}\triangleq\mathbb{E}[\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)]=\begin{bmatrix}r(0)&r(1)&\cdots&r(M-1)\\r(-1)&r(0)&\cdots&r(M-2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\r(-M+1)&\cdots&\cdots&r(0)\end{bmatrix} \tag{5.2.10}$$

其中,自相关矩阵的元素 $r(i-k)=\mathbb{E}[u(n-k)u^*(n-i)]$。

根据 σ_d^2、$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的定义,均方误差式(5.2.8)可以表示为

$$J(\boldsymbol{w})=\sigma_d^2-\boldsymbol{p}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} \tag{5.2.11}$$

可以看出,$J(\boldsymbol{w})$ 是滤波器权向量 $\boldsymbol{w}$ 的二次函数。

特别地,如果滤波器仅有一个抽头,即 $M=1$,则有 $\boldsymbol{p}=p(0)$,$\boldsymbol{R}=r(0)$,可得

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{w})&=J(w_0)\\&=\sigma_d^2-p(0)w_0-p(0)w_0+r(0)w_0^2\\&=\sigma_d^2-2p(0)w_0+r(0)w_0^2\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

这是平面上开口向上的抛物线方程,它具有一个全局极小点值。在该极小点处,估计的均方误差达到最小。如果滤波器有两个实值权系数,即 $M=2$,则 $J(\boldsymbol{w})$ 在三维空间中构成了一个开口向上的抛物面,也称为碗形面,它也有一个全局极小值。

事实上,可以把具有 M 个自变量 $w_0,w_1,\cdots,w_{M-1}$ 的函数 $J(\boldsymbol{w})$ 看成一个在 $M+1$ 维

空间中具有 M 个自由度的抛物面，而这个抛物面具有唯一的全局极小值点（估计的均方误差最小）。经常把 $J(\boldsymbol{w})$ 构成的这样一个多维空间的曲面称为误差性能面。误差性能面的极小值点可以通过维纳-霍夫方程（Wiener-Holf Equation）获得。

2. 维纳-霍夫方程

根据矩阵理论，如果多元函数 $J(\boldsymbol{w})$ 在点 $\boldsymbol{w}=[w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{M-1}]^{\mathrm{T}}$ 处存在偏导数 $\partial J/\partial w_i^*$，$i=0,1,\cdots,M-1$，那么 $J(\boldsymbol{w})$ 在点 $\boldsymbol{w}$ 处取得极值的必要条件是 $\partial J/\partial w_i^*=0$（称点 $\boldsymbol{w}$ 为函数 $J(\boldsymbol{w})$ 的驻点）。利用标量函数关于向量的微分运算，可以用梯度表示标量函数关于多个自变量的偏导数。因此，令代价函数的梯度为 0，即

$$\nabla J(\boldsymbol{w})=2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{w}^*}[J(\boldsymbol{w})]=-2\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}=0 \tag{5.2.13}$$

则得到著名的维纳-霍夫方程

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{p} \tag{5.2.14}$$

由于 $\boldsymbol{R}$ 总是非奇异的，用 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 左乘式(5.2.14)，得到

$$\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p} \tag{5.2.15}$$

因此，要使均方误差 $J(\boldsymbol{w})$ 最小，滤波器权向量 $\boldsymbol{w}$ 应满足 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{p}$ 或 $\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}$，此时的权向量称为最优权向量，记为 $\boldsymbol{w}_0$。上述使均方误差最小的优化准则，在信号处理中经常称为 MMSE 准则。

3. 最小均方误差

将维纳-霍夫方程（式(5.2.14)）代入均方误差方程（式(5.2.11)），可以得到均方误差的最小值

$$J_{\min}=J(\boldsymbol{w}_0)=\sigma_d^2-\boldsymbol{p}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_0-\boldsymbol{w}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{w}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0=\sigma_d^2-\boldsymbol{p}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_0 \tag{5.2.16}$$

其中，σ_d^2 为给出的期望响应信号 $d(n)$ 的方差。

利用自相关矩阵的 Hermite 对称性，即 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{R}$，结合维纳-霍夫方程，则均方误差的最小值可以改写为

$$J_{\min}=\sigma_d^2-\boldsymbol{w}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0 \tag{5.2.17}$$

由于 $\boldsymbol{R}=\mathbb{E}[\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)]$，$\boldsymbol{w}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0$ 可以表示为

$$\boldsymbol{w}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{w}_0^{\mathrm{H}}\mathbb{E}[\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)]\boldsymbol{w}_0 \tag{5.2.18a}$$

$$=\mathbb{E}\{[\boldsymbol{w}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}(n)][\boldsymbol{w}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}(n)]^*\} \tag{5.2.18b}$$

$$=\mathbb{E}[|\hat{d}(n)|^2] \tag{5.2.18c}$$

令 $\sigma_{\hat{d}}^2=\mathbb{E}\{|\hat{d}(n)|^2\}$，则均方误差的最小值可以写为

$$J_{\min}=\sigma_d^2-\sigma_{\hat{d}}^2 \tag{5.2.19}$$

因此，最小均方误差 $J_{\min}$ 就是期望响应的均方误差与最优滤波时滤波器输出的估计信号的均方误差之差。

4. 维纳滤波的最陡下降算法

假设在 n 时刻，已得到滤波器的权向量 $\boldsymbol{w}(n)$，则 $n+1$ 时刻的权向量可表示为 $\boldsymbol{w}(n)$ 与修正量 $\Delta\boldsymbol{w}$ 之和，即

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)+\Delta\boldsymbol{w} \tag{5.2.20}$$

如图5.2.3所示，用迭代方法求最佳权向量时权向量的位置，第 $n+1$ 时刻的权向量 $\boldsymbol{w}(n+1)$ 应较 $\boldsymbol{w}(n)$ 更接近均方误差 $J[\boldsymbol{w}(n)]$ 的极小值点。由于沿曲面不同方向，函数值下降的速度有快有慢，最陡的下降方向是负梯度方向。在这个方向上，在点 $\boldsymbol{w}(n)$ 的邻域内，函数值 $J[\boldsymbol{w}(n)]$ 下降最多。

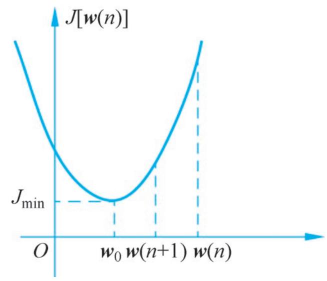

图5.2.3　用迭代方法求最佳权向量时权向量的位置

修正量 $\Delta\boldsymbol{w}$ 可表示为

$$\Delta\boldsymbol{w}=-\frac{1}{2}\mu\nabla J[\boldsymbol{w}(n)] \tag{5.2.21}$$

其中，$\nabla J[\boldsymbol{w}(n)]$ 为均方误差的梯度；μ 为步长，$0<\mu<1$，它控制着自适应算法的迭代速度。所以有

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)-\frac{1}{2}\mu\nabla J[\boldsymbol{w}(n)] \tag{5.2.22}$$

由于 n 时刻的均方误差为

$$J[\boldsymbol{w}(n)]=\sigma_d^2-\boldsymbol{p}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}(n)-\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}(n)\boldsymbol{p}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}(n)\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}(n)$$

可得

$$\nabla J[\boldsymbol{w}(n)]=-2\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}(n) \tag{5.2.23}$$

因此，最陡下降算法的迭代式可表示为

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)+\mu[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}(n)] \tag{5.2.24}$$

由于梯度向量 $\nabla J(\boldsymbol{w})$ 是指向均方误差极小值点的最陡方向，所以式(5.2.24)称为最陡下降算法。需要注意的是，最陡下降算法只是维纳滤波的递归求解方法。

5.2.3　LMS算法原理

在最陡下降算法中，必须事先估计出互相关向量 $\boldsymbol{p}=\mathbb{E}[\boldsymbol{u}(n)d^*(n)]$ 和自相关矩阵 $\boldsymbol{R}=\mathbb{E}[\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)]$，如果假设输入信号 $\boldsymbol{u}(n)$ 与期望响应 $d(n)$ 是联合各态历经的平稳过程，那么可以用有限观测样本的时间平均逼近统计平均，即

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{u}(i)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(i) \tag{5.2.25}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{u}(i)d^*(i) \tag{5.2.26}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{R}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 分别为 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的估计；N 为观测样本数。$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 在 n 时刻的瞬时估计值为

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n) \tag{5.2.27}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{u}(n)d^*(n) \tag{5.2.28}$$

将式(5.2.27)和式(5.2.28)代入最陡下降算法的迭代式(5.2.24)，得到

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)=\hat{\boldsymbol{w}}(n)+\mu\boldsymbol{u}(n)[d^*(n)-\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)\hat{\boldsymbol{w}}(n)] \tag{5.2.29}$$

并且，滤波器输出 $\hat{d}(n)$ 和估计误差 $e(n)$ 可分别写为

$$\hat{d}(n)=\hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{H}}(n)\boldsymbol{u}(n) \tag{5.2.30}$$

$$e(n)=d(n)-\hat{d}(n) \tag{5.2.31}$$

其中，估计误差的计算基于滤波器权向量当前时刻的估计 $\hat{\boldsymbol{w}}(n)$。因此，滤波器权向量的更新方程为

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)=\hat{\boldsymbol{w}}(n)+\mu\boldsymbol{u}(n)e^{*}(n) \tag{5.2.32}$$

式(5.2.30)、式(5.2.31)和式(5.2.32)就是由 Widrow 等在 1975 年提出的最小均方算法，即 LMS 算法。

在最陡下降算法中，由于互相关向量 $\boldsymbol{p}$ 和自相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 都是确定量，所以，根据最陡下降算法迭代式 $\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)+\mu[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}(n)]$得到的权向量 $\boldsymbol{w}(n)$是一个确定的向量序列(不是随机过程)。LMS 算法是一种梯度下降算法，由于它的 $\boldsymbol{u}(n)$和 $e(n)$都是随机过程，因此根据迭代式(5.2.32)得到的权向量 $\hat{\boldsymbol{w}}(n)$也是一个随机过程向量。LMS 算法使用瞬时梯度估计值(随机梯度)代替最陡下降法中的梯度$\nabla J(n)$，实现了权向量的自适应估计。

瞬时梯度估计值可表示为

$$\hat{\nabla} J(n)=-2\hat{\boldsymbol{p}}+2\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{w}(n) \tag{5.2.33a}$$

$$=-2\boldsymbol{u}(n)d^{*}(n)+2\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)\boldsymbol{w}(n) \tag{5.2.33b}$$

$$=-2\boldsymbol{u}(n)[d^{*}(n)-\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n)\boldsymbol{w}(n)] \tag{5.2.33c}$$

$$=-2\boldsymbol{u}(n)e^{*}(n) \tag{5.2.33d}$$

一个标准的 LMS 算法的计算过程如算法 5.2.1 所示。

[算法 5.2.1] LMS 算法

输入：$\boldsymbol{u}(n)=[u(n) \quad u(n-1) \quad \cdots \quad u(n-M+1)]^{\mathrm{T}}$

输出：$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)$

步骤 1：初始化

$n=0$

权向量 $\hat{\boldsymbol{w}}(0)=0$

估计误差 $e(0)=d(0)-\hat{d}(0)=d(0)$

输入向量 $\boldsymbol{u}(0)=[u(0) \quad u(-1) \quad \cdots \quad u(-M+1)]^{\mathrm{T}}=[u(0) \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^{\mathrm{T}}$

步骤 2：当 $n=1,2,\cdots$时

更新权向量 $\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)=\hat{\boldsymbol{w}}(n)+\mu\boldsymbol{u}(n)e^{*}(n)$

估计期望信号 $\hat{d}(n+1)=\hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{H}}(n+1)\boldsymbol{u}(n+1)$

计算估计误差 $e(n+1)=d(n+1)-\hat{d}(n+1)$

步骤 3：令 $n=n+1$，转到步骤 2。

5.2.4 性能测度

在自适应均衡中，所采用的性能测度准则有均方误差准则、最大信噪比准则、最大似然准则、最小噪声方差准则等。

1. 均方误差准则

均方误差准则适用于总的系统输出为期望响应 $d(k)$，自适应系统的实际输出为 $y(k)$的系统。如图 5.2.4 所示的自适应系统，它由一个自适应线性组合器和一个相减器组成。

在 k 时刻，输出误差为

$$e(k)=d(k)-y(k) \tag{5.2.34}$$

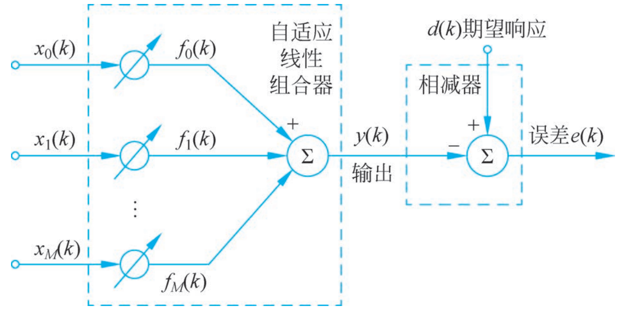

图 5.2.4 利用均方误差准则的自适应系统

其中，$y(k)$为线性组合器的输出，写为

$$y(k)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}(k)\boldsymbol{x}(k) \tag{5.2.35}$$

其中，$\boldsymbol{x}(k)=[x_0(k),x_1(k),\cdots,x_M(k)]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{f}(k)=[f_0(k),f_1(k),\cdots,f_M(k)]^{\mathrm{T}}$ 分别为自适应系统在 k 时刻的输入向量和权向量。定义均方误差为

$$J(\boldsymbol{f})=\mathbb{E}[|e(k)|^2]=\mathbb{E}\{[d(k)-\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}(k)\boldsymbol{x}(k)][d(k)-\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}(k)\boldsymbol{x}(k)]^{\mathrm{H}}\} \tag{5.2.36}$$

为了求权向量的最优值，对权向量 $\boldsymbol{f}$ 求偏导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{f}}J(\boldsymbol{f})&=2\mathbb{E}[\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(k)]\boldsymbol{f}-2\mathbb{E}[\boldsymbol{x}(k)d^*(k)]\\&=2\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{f}-2\boldsymbol{R}_{xd}\end{aligned} \tag{5.2.37}$$

其中，$\boldsymbol{R}_{xx}=\mathbb{E}[\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(k)]$为接收信号向量 $\boldsymbol{x}(k)$的自相关矩阵；$\boldsymbol{R}_{xd}=\mathbb{E}[\boldsymbol{x}(k)d^*(k)]$为数据向量 $\boldsymbol{x}(k)$与期望信号 $d(k)$的互相关向量。

令$\dfrac{\partial J(\boldsymbol{f})}{\partial \boldsymbol{f}}=0$，可得

$$\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{R}_{xd} \tag{5.2.38}$$

此式是维纳-霍夫方程。若 $\boldsymbol{R}_{xx}$ 是满秩的，则可得到在最小均方误差(MMSE)意义上的最佳权向量

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}=\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{R}_{xd} \tag{5.2.39}$$

这个最佳权向量是维纳滤波理论中最佳滤波器的标准形式。此时，系统的代价函数可以改写为

$$J(\boldsymbol{f})=\mathbb{E}[|e(k)|^2] \tag{5.2.40a}$$

$$\begin{aligned}&=\mathbb{E}[d(k)d^*(k)]-\mathbb{E}[d(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(k)]\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\mathbb{E}[\boldsymbol{x}(k)d^*(k)]+\\&\quad\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\mathbb{E}[\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(k)]\end{aligned} \tag{5.2.40b}$$

$$=\mathbb{E}[|d(k)|^2]-2\mathrm{Re}[\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{xd}]+\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{f} \tag{5.2.40c}$$

将维纳-霍夫方程代入系统代价函数，得到

$$\begin{aligned}J_{\min}(f)&=\mathbb{E}[|d(k)|^2]+\boldsymbol{R}_{xd}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}-2\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{xd}\\&=\mathbb{E}[|d(k)|^2]-\boldsymbol{R}_{xd}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

在理想情况下，输入无噪声，此时系统的代价函数 $J_{\min}(\boldsymbol{f})$趋于 0；而通常是输入有噪声的情况，则 $J_{\min}(\boldsymbol{f})$不为 0。

2. 最大信噪比准则

在最大信噪比(Maximum Signal-to-Noise Ratio，MSNR)准则中，选择使信号噪声比最

大的权向量。设 $\boldsymbol{a}(k)$和 $\boldsymbol{n}(k)$分别表示输入信号和噪声分量,则自适应滤波器的输入向量可以表示为

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{a}(k)+\boldsymbol{n}(k) \tag{5.2.42}$$

相应的输出信号为

$$y(k)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(k)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(k) \tag{5.2.43}$$

假设输入信号的自相关矩阵为 $\boldsymbol{R}_{aa}=\mathbb{E}[\boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(k)]$,噪声的自相关矩阵为 $\boldsymbol{R}_{nn}=\mathbb{E}[\boldsymbol{n}(k)\boldsymbol{n}^{\mathrm{H}}(k)]$且已知,则输出信号功率和噪声功率可以分别写为

$$\sigma_a^2=\mathbb{E}[|\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(k)|^2]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{aa}\boldsymbol{f} \tag{5.2.44}$$

$$\sigma_n^2=\mathbb{E}[|\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(k)|^2]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}\boldsymbol{f} \tag{5.2.45}$$

由于 $\boldsymbol{R}_{nn}$ 为正定的 Hermitian 矩阵,所以 $\boldsymbol{R}_{nn}=(\boldsymbol{R}_{nn}^{1/2})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}^{1/2}=\boldsymbol{R}_{nn}^{\mathrm{H}/2}\boldsymbol{R}_{nn}^{1/2}$。令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{R}_{nn}^{1/2}\boldsymbol{f}$,输出信噪比为

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{out}}=\frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}=\frac{\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{aa}\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}\boldsymbol{f}}=\frac{(\boldsymbol{R}_{nn}^{-1/2}\boldsymbol{z})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{aa}(\boldsymbol{R}_{nn}^{1/2}\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}}=\frac{\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}} \tag{5.2.46}$$

其中,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{nn}^{-\mathrm{H}/2}\boldsymbol{R}_{aa}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1/2}$。

可以证明,对应于 $\boldsymbol{R}$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 的特征向量,即 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}_{\mathrm{opt}}=\lambda_{\max}\boldsymbol{z}_{\mathrm{opt}}$ 时的 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_{\mathrm{opt}}$,使 $\mathrm{SNR}_{\mathrm{out}}$ 取得最大值,并有 $\mathrm{SNR}_{\mathrm{out}}^{\max}=\lambda_{\max}$。因此,可以得到

$$\boldsymbol{R}_{aa}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}=\lambda_{\max}\boldsymbol{R}_{nn}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}} \tag{5.2.47}$$

若用 $\boldsymbol{a}$ 表示一个固定向量,输入信号向量可表示为 $\boldsymbol{a}(k)=a(k)\boldsymbol{a}$,对于平面波 $\boldsymbol{a}$ 相当于方向向量,由于

$$\boldsymbol{R}_{aa}=\mathbb{E}[\boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(k)]=\mathbb{E}[|a(k)|^2]\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}=P_a\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}} \tag{5.2.48}$$

其中,$P_a=\mathbb{E}[|a(k)|^2]$为输入信号功率,因而可以得到

$$P_a\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}=\lambda_{\max}\boldsymbol{R}_{nn}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}} \tag{5.2.49}$$

又因为 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}$ 为标量,所以得 $\boldsymbol{R}_{aa}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}=\alpha\boldsymbol{a}$,其中 $\alpha=\lambda_{\max}^{-1}(P_a\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}})$。因此最佳权向量为

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{SNR}}=\alpha\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{a} \tag{5.2.50}$$

此准则的优点是可以使信噪比最大化,缺点是必须知道噪声的统计量和信号的波达方向,还要处理特征分量的问题。

3. 最大似然准则

在有用信号是完全先验未知的情况下,无法设置参考信号,最小均方误差准则不再适用。这时,在干扰噪声背景下,对有用信号的波形可作最(极)大似然(Maximum Likelihood,ML)估计。假设自适应系统的输入为

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{a}(k)+\boldsymbol{n}(k) \tag{5.2.51}$$

输入信号向量 $\boldsymbol{x}(k)$的对数似然函数为

$$L(x)=\ln p[\boldsymbol{x}(k)\mid\boldsymbol{a}(k)] \tag{5.2.52}$$

其中,$p[\boldsymbol{x}(k)|\boldsymbol{a}(k)]$为在给定 $\boldsymbol{a}(k)$的条件下 $\boldsymbol{x}(k)$出现的条件概率。假设噪声 $\boldsymbol{n}(k)$为零均值平稳高斯随机过程,其自相关矩阵为 $\boldsymbol{R}_{nn}$,而 $\boldsymbol{a}(k)=a(k)\boldsymbol{a}$。这时,对数似然函数可以写为

$$L(x)=\alpha[\boldsymbol{x}(k)-a(k)\boldsymbol{a}]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}[\boldsymbol{x}(k)-a(k)\boldsymbol{a}] \tag{5.2.53}$$

其中,α 为一个与 $\boldsymbol{x}(k)$与 $\boldsymbol{a}(k)$无关的常数。现在需要求使似然函数最大的 $a(k)$,称为

$a(k)$的最大似然估计,记作 $\hat{a}(k)$。即 $\hat{a}(k)=y(k)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}(k)$。将对数似然函数对 $a(k)$求偏导数,并令其为0,可以得到 $a(k)$的最大似然估计为

$$\hat{a}(k)=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}(k) \tag{5.2.54}$$

考虑 $\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}$ 的厄米特特性,则最佳权向量可以表示为

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{ML}}=\frac{1}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{a}=\gamma\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{a} \tag{5.2.55}$$

其中,$\gamma=\dfrac{1}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{a}}$。

对照最大信噪比准则和最大似然准则的最佳权向量可以发现,在高斯噪声情况下,二者并没有本质上的区别。

4. 最小噪声方差准则

当有用信号及其方向均已知时,为了更好地接收和检测有用信号而消除干扰,可以采用最小噪声方差(Minimum Noise Variance,MNV)准则。自适应滤波器输出为

$$y(k)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(k)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(k) \tag{5.2.56}$$

在实际应用中,希望自适应均衡只对干扰起作用。令 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(k)=a(k)$,自适应滤波器的输出表示为

$$y(k)=a(k)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(k) \tag{5.2.57}$$

$y(k)$的方差表示为

$$D[y(k)]=D[a(k)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(k)] \tag{5.2.58}$$

假定$\mathbb{E}[y(k)]=\mathbb{E}[a(k)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}(k)]=a(k)$,可以得到

$$D[y(k)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{5.2.59}$$

用式(5.2.46)对 $\boldsymbol{f}$ 求导,并令其为0,求解方差最小时的近似向量,则 $\boldsymbol{f}=0$,也就是说,这种方法无法求出最佳权向量。

为此,应用拉格朗日乘子法,首先引入约束条件 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{1}=1$,其中,$\boldsymbol{1}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$。令

$$D[y(k)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{f}+2\lambda[1-\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{1}] \tag{5.2.60}$$

再对 $\boldsymbol{f}$ 求导并令其为0,得到 $\boldsymbol{f}=\lambda\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{1}$,从而得到 $\lambda=\dfrac{1}{\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{1}}$。因此,最佳权向量为

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{MNV}}=\frac{1}{\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{1}}\boldsymbol{R}_{nn}^{-1}\boldsymbol{1} \tag{5.2.61}$$

如果将 $\boldsymbol{1}$ 用 $\boldsymbol{a}$ 替换,就变成了最大似然准则,因此最大似然准则和最小噪声方差准则也没有本质区别。

最优化准则可以写成通式

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}=\alpha\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{R}_{xd} \tag{5.2.62a}$$

或

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}=\beta\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{a} \tag{5.2.62b}$$

其中,α 和 β 为系数。以上表达式称为维纳-霍夫方程或维纳解,这是维纳滤波理论的结果。

设一个信道的有限冲激响应长度为 $L=3$,使用 $L_f=12$ 的 LMS 均衡器,其 MATLAB 程序如下。

```
clc; clear all; close all;
h = [0.9 0.3 0.5 - 0.1];                              % 信道
SNRr = 30;                                            % 信噪比
                                                      % LMS 的参数
runs = 100;                                           % 独立的运行次数
eta = 5e-3;                                           % 学习率/步长
order = 12;                                           % 均衡器的阶数
fsize = 14; lw = 2;                                   % 可视化图形的字体大小和图形的线宽
% LMS 算法
for run = 1 : runs
                                                      % 初始化权值
    U = zeros(1,order);                               % 输入的帧
    W = randn(1,order);                               % 权值
    % 输入/输出数据
    N = 5000;                                         % 采样数
    Bits = 2;                                         % 调制的比特数(二进制调制)
    data = randi([0 1],1,N);                          % 随机输入信号
    d = real(pskmod(data,Bits));                      % BPSK 调制信号(期望的输出)
    r = filter(h,1,d);                                % 通过信道的接收信号
    x = awgn(r, SNRr);                                % 通过信道的噪声(给定的输入信号)
    for n = 1 : N
        U(1,2:end) = U(1,1:end-1);                    % 滑动窗
        U(1,1) = x(n);                                % 当前的输入
        y = (W) * U';                                 % 计算 LMS 的输出
        e = d(n) - y;                                 % 瞬时的误差
        W = W + eta * e * U ;                         % LMS 的权重更新
        J(run,n) = e * e';                            % 瞬时的平方误差
    end
end
%计算性能参数
MJ = mean(J,1);                                       % 均方误差
CS = freqz(h);                                        % 信道的频谱
NF = (0:length(CS)-1)./(length(CS));                  % 归一化的频率
IMR = -10 * log10(real(CS).^2 + imag(CS).^2);         % 信道幅值响应的逆(期望的)
IPR = -imag(CS)./real(CS);                            % 信道相位响应的逆(期望的)
ES = freqz(W);                                        % 均衡器的频谱
EMR = 10 * log10(real(ES).^2 + imag(ES).^2);          % 均衡器的幅频响应
EPR = imag(ES)./real(ES);                             % 均衡器的相频响应
% 画图
figure
plot(10 * log10(MJ),'-.g','linewidth',lw)             % 绘制 MSE 图
trendMJ = polyval(polyfit((0:N),[0 10 * log10(MJ)],7),(1:N));
hold on
plot(trendMJ,'k','linewidth',lw)
hg = legend('MSE{瞬时值}','MSE{拟合值}','Location','Best','fontsize',fsize);
grid minor
xlabel('迭代次数','FontSize',fsize);
ylabel('均方误差/dB','FontSize',fsize);
figure
subplot(2,1,1)                                        % 幅频响应
plot(NF,IMR,'k','linewidth',lw)
hold on
plot(NF,EMR,'--b','linewidth',lw)
legend('信道的逆','均衡器','Location','Best','fontsize',fsize);
grid minor
xlabel('归一化频率','FontSize',fsize);
ylabel('幅值/dB','FontSize',fsize);
subplot(2,1,2)                                        % 相频响应
plot(NF, IPR,'k','linewidth',lw)
hold on
```

```
plot(NF, EPR,'-- b','linewidth',lw)
legend('信道的逆','均衡器','Location','Best','fontsize',fsize);
grid minor
xlabel('归一化频率','FontSize',fsize);
ylabel('相移/rad','FontSize',fsize);
```

上述代码的仿真结果为 LMS 均衡器随迭代次数的均方误差以及 LMS 均衡器的幅频响应和相频响应，分别如图 5.2.5 和图 5.2.6 所示。

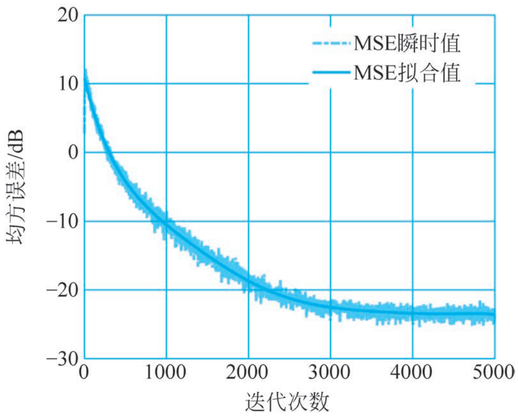

图 5.2.5 LMS 均衡器随迭代次数的均方误差

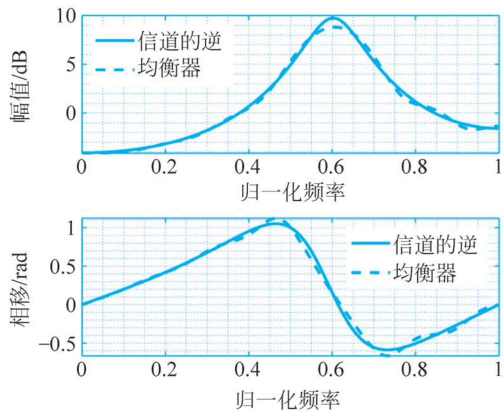

图 5.2.6 LMS 均衡器的幅频响应和相频响应

5.2.5 基于 LMS 的判决反馈均衡算法

判决反馈均衡器(Decision Feedback Equalizer，DFE)的基本结构如图 5.2.7 所示。

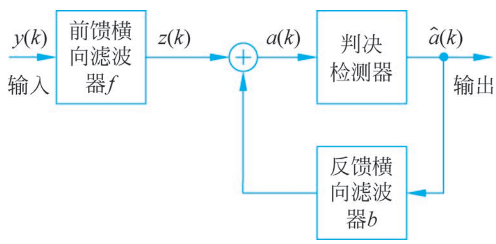

图 5.2.7 判决反馈均衡器的基本结构

这种均衡器包括两个横向滤波器：前馈横向滤波器和反馈横向滤波器。两个滤波器的抽头延时均等于输入符号的采样间隔 T，前馈横向滤波器是均衡器，反馈横向滤波器用于进一步抑制当前时刻之前的信息符号所产生的码间干扰。虽然两个均衡器均采用线性横向滤波器的结构，但反馈滤波器的输入取自判决检测器，而且判决检测器是非线性结构，也就是说，判决反馈均衡器是非线性均衡器。

判决反馈均衡器是一种应用广泛的均衡器。自适应判决反馈均衡器(Automatic Decision Feedback Equalizer，ADFE)有各种自适应算法。基于 LMS 的自适应判决反馈均衡器原理结构如图 5.2.8 所示。

由图 5.2.8 可知，均衡器的输出为

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}(k) &= \boldsymbol{f}(k)\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{b}(k)\hat{\boldsymbol{a}}(k) \\
&= \sum_{i=-N}^{N} f_i(k)y(k-i) - \sum_{i=-M}^{M} b_i(k)\hat{a}(k-i)
\end{aligned}
\tag{5.2.63}
$$

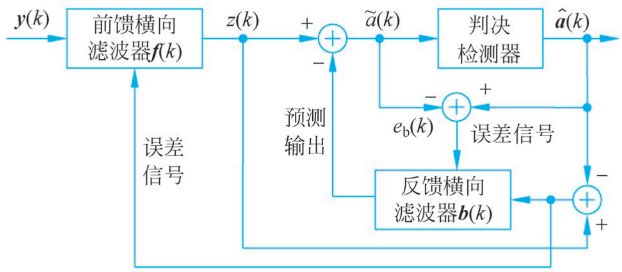

图 5.2.8　基于 LMS 的自适应判决反馈均衡器原理结构

其中，

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}(k)=[y(k+N),y(k+N-1),\cdots,y(k-N)]^{\mathrm{T}} \\ \hat{\boldsymbol{a}}(k)=[\hat{a}(k+M),\hat{a}(k+M-1),\cdots,\hat{a}(k-M)]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{f}(k)=[f_{-N}(k),\cdots,f_{-1}(k),f_0(k),f_1(k),\cdots,f_N(k)]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}(k)=[b_{-M}(k),\cdots,b_{-1}(k),b_0(k),b_1(k),\cdots,b_M(k)]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{5.2.64}$$

基于 LMS 算法的前馈和反馈滤波器的权向量更新公式为

$$\boldsymbol{f}(k+1)=\boldsymbol{f}(k)+2\mu e_{\mathrm{f}}(k)\boldsymbol{y}^*(k) \tag{5.2.65}$$

$$\boldsymbol{b}(k+1)=\boldsymbol{b}(k)+2\mu e_{\mathrm{b}}(k)\hat{\boldsymbol{a}}^*(k) \tag{5.2.66}$$

其中，$e_{\mathrm{f}}(k)=z(k)-\hat{a}(k)$为前馈误差；$e_{\mathrm{b}}(k)=\tilde{a}(k)-\hat{a}(k)$为反馈误差。

采用 LMS 及其他自适应算法均要求知道期望信号 $d(k)$。为了得到期望信号 $d(k)$，一种方法是发送端定期向接收端发送训练信号（又称为导引信号或导频信号）；另一种方法是采用判决检测器，直接由滤波器输出 $y(k)$产生 $d(k)$ 。这种方法称为判决引导法。图 5.2.9 给出了更详细的采用判决引导法的 LMS 均衡器结构框图。

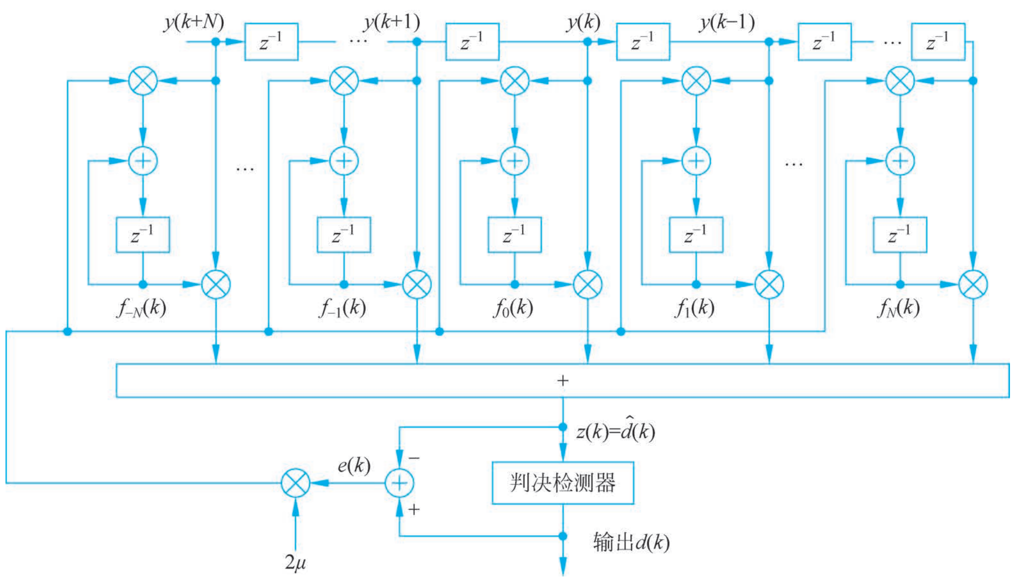

图 5.2.9　采用判决引导法的 LMS 均衡器结构框图

这种结构为前馈式结构，相应的均衡器为线性自适应均衡器。设

$$\boldsymbol{f}(k)=[f_{-N}(k),\cdots,f_{-1}(k),f_0(k),f_1(k),\cdots,f_N(k)]^{\mathrm{T}} \tag{5.2.67}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=[y(k+N),\cdots,y(k+1),y(k),y(k-1),\cdots,y(k-N)]^{\mathrm{T}} \tag{5.2.68}$$

则基于 LMS 算法的均衡器权向量为

$$\boldsymbol{f}(k+1)=\boldsymbol{f}(k)+2\mu e(k)\boldsymbol{y}(k) \tag{5.2.69}$$

它的第 i 支路的权向量为

$$\boldsymbol{f}_i(k+1)=\boldsymbol{f}_i(k)+2\mu e(k)\boldsymbol{y}(k-i) \tag{5.2.70}$$

因为自适应调整方向取决于 $e(k)\boldsymbol{y}(k-i)$ 的符号，所以第 i 支路的更新公式可简化为以下几种形式。

$$f_i(k+1)=f_i(k)+2\mu\,\mathrm{sgn}[e(k)]y(k-i) \tag{5.2.71a}$$

$$f_i(k+1)=f_i(k)+2\mu e(k)\,\mathrm{sgn}[y(k-i)] \tag{5.2.71b}$$

$$f_i(k+1)=f_i(k)+2\mu\,\mathrm{sgn}[e(k)]\,\mathrm{sgn}[y(k-i)] \tag{5.2.71c}$$

权向量可采用中心抽头初始化，即 $\boldsymbol{f}(0)=[0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$。此时均衡器具有单位增益。随着自适应调整的进行，$\boldsymbol{f}$ 将在一定条件范围内逐渐收敛到最佳解。

5.2.6 基于 LMS 的正交小波均衡算法

根据均衡器输入信号的自相关矩阵，可得出其特征值的分散程度，用比值 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 表示，其中 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别为自相关矩阵的最大特征值和最小特征值。该比值是影响 LMS 自适应算法收敛速度的主要因素，$\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 越大，收敛速度越慢，否则正好相反。通过对信号进行归一化的正交小波变换，使其自相关矩阵接近对角阵，即降低输入信号的自相关，可在一定程度上加快 LMS 自适应算法的收敛速度。

1. 均衡器的正交小波表示

根据马拉特(Mallat)塔形算法思想，在有限尺度下，有限冲激响应均衡器的权系数 $f(k)$ 可由一簇正交小波函数 $\varphi_{j,l}(k)$，$j=1,2,\cdots,J$，$l=1,2,\cdots,k_j$ 及尺度函数 $\phi_{J,l}(k)$，$l=1,2,\cdots,k_j$ 来表示，有

$$f(k)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=0}^{k_j}d_{j,l}\varphi_{j,l}(k)+\sum_{l=0}^{k_J}v_{J,l}\phi_{J,l}(k) \tag{5.2.72}$$

其中，$k=0,1,\cdots,N-1$；N 为均衡器的长度；J 为最大尺度；$k_j=N/2^j-1$ 为尺度 j 下小波函数的最大平移；$d_{j,l}$ 和 $v_{J,l}$ 分别为

$$\begin{cases} d_{j,l}=\langle f(k),\quad \varphi_{j,l}(k)\rangle \\ v_{J,l}=\langle f(k),\quad \phi_{J,l}(k)\rangle \end{cases} \tag{5.2.73}$$

由于 $f(k)$ 的特性可由 $d_{j,l}$ 和 $v_{J,l}$ 反映出来，故称 $d_{j,l}$ 和 $v_{J,l}$ 为均衡器的权系数。根据信号传输理论，对输入 $y(k)$ 作离散正交小波变换，均衡器的输出 $z(k)$ 为

$$\begin{aligned} z(k)&=\sum_{i=0}^{N-1}f_i(k)y(k-i) \\ &=\sum_{i=0}^{N-1}y(k-i)\left[\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=0}^{k_j}d_{j,l}\varphi_{j,l}(i)+\sum_{k=0}^{k_J}v_{J,l}\phi_{J,l}(i)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=0}^{k_j} d_{j,l}(k)\left[\sum_{i=0}^{N-1} y(k-i)\varphi_{j,l}(i)\right] + \\
&\quad \sum_{l=0}^{k_J} v_{J,l}(k)\left[\sum_{i=0}^{N-1} y(k-i)\phi_{J,l}(i)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=0}^{k_j} d_{j,l}(k) r_{j,l}(k) + \sum_{l=0}^{k_J} v_{J,l}(k) s_{J,l}(k)
\end{aligned} \tag{5.2.74}
$$

其中，$r_{j,l}(k)$为尺度为 j，平移为 l 的小波变换系数；$s_{J,l}(k)$是尺度为 J、平移为 l 的尺度变换系数，进一步表示为

$$
\begin{cases}
r_{j,l}(k) = \sum_{i} y(k-i)\varphi_{j,l}(i) \\
s_{J,l}(k) = \sum_{i} y(k-i)\phi_{J,l}(i)
\end{cases} \tag{5.2.75}
$$

采用正交小波变换后，均衡器在 k 时刻的输出 $z(k)$等于输入 $y(k)$经小波变换后的相应变换系数 $r_{j,l}(k)$和 $s_{J,l}(k)$与均衡器系数 $d_{j,l}(k)$和 $v_{J,l}(k)$的加权和。也就是说，将小波引入均衡器的实质是将输入信号进行正交变换，从而改变均衡器的结构。小波系数 $r_{j,l}(k)$与尺度系数 $s_{J,l}(k)$的值依赖于小波函数 $\varphi(k)$与尺度函数 $\phi(k)$，而实际上除了 Harr 小波外，小波函数 $\varphi(k)$与尺度函数 $\varphi(k)$并没有明确的表达式，利用 Mallat 算法则能够解决这一问题。

Mallat 算法于 1986 年由 S. Mallat 等提出。这种算法利用小波的多分辨率特性，在多个尺度上观测信号的不同特征：在大尺度下可得到信号的粗粒度特征，在小尺度下可得到信号的细粒度特征。

2. 算法原理

如果采用 LMS 算法更新权向量并对权系数引入正交小波变换，则构成基于 LMS 的正交小波变换均衡算法，采用该算法的自适应均衡原理如图 5.2.10 所示。

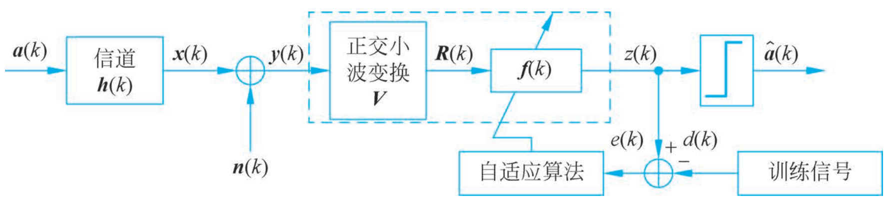

图 5.2.10 基于 LMS 的正交小波变换自适应均衡原理

由图 5.2.10 可知，均衡器的输入信号 $\boldsymbol{R}(k)$、均衡器的输出信号 $z(k)$和误差信号 $e(k)$可以分别表示为

$$\boldsymbol{R}(k) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{y}(k) \tag{5.2.76}$$

$$z(k) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{f}(k) \tag{5.2.77}$$

$$e(k) = z(k) - d(k) \tag{5.2.78}$$

代价函数为

$$J(k) = \mathbb{E}\left[e^2(k)\right] \tag{5.2.79}$$

均衡器权向量的迭代公式为

$$\boldsymbol{f}(k+1) = \boldsymbol{f}(k) + \frac{\mu}{2}\frac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{f}(k)} \tag{5.2.80}$$

其中，μ 为迭代步长；$\dfrac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{f}(k)}$为代价函数对权向量的梯度，而

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{f}(k)} &= \mathbb{E}\left[2e(k)\frac{\partial e(k)}{\partial \boldsymbol{f}(k)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[2e(k)\frac{\partial[\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{f}(k)-d(k)]}{\partial \boldsymbol{f}(k)}\right] \\ &= \mathbb{E}[2e(k)\boldsymbol{R}(k)]\end{aligned} \tag{5.2.81}$$

由于在同一尺度下，对不同的平移 l，$r_{j,l}(k)$间的相关性很小，$s_{J,l}(k)$间的相关性也很小。取瞬时值后，对$\dfrac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{f}(k)}$变换后的信号能量作归一化处理，均衡器权向量的迭代公式可以更新为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(k+1) &= \boldsymbol{f}(k)-\mu(k)\boldsymbol{R}(k) \\ &= \boldsymbol{f}(k)-\mu\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}(k)e(k)\boldsymbol{R}(k)\end{aligned} \tag{5.2.82}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}(k)=\mathrm{diag}[\hat{\sigma}_{j,0}^2(k),\hat{\sigma}_{j,1}^2(k),\cdots,\hat{\sigma}_{J,k_J}^2(k),\hat{\sigma}_{J+1,0}^2(k),\cdots,\hat{\sigma}_{J+1,k_J}^2(k)]$，$\hat{\sigma}_{j,l}^2(k)$与$\hat{\sigma}_{J+1,l_j}^2(k)$分别表示对 $r_{j,l}(k)$和 $s_{J,l}(k)$的平均功率估计。其递推估计公式为

$$\hat{\sigma}_{j,l}^2(k+1)=\beta_\sigma\hat{\sigma}_{j,l}^2(k)+(1-\beta_\sigma)\,|r_{j,l}(k)|^2 \tag{5.2.83a}$$

$$\hat{\sigma}_{J+1,l}^2(k+1)=\beta_\sigma\hat{\sigma}_{J+1,l}^2(k)+(1-\beta_\sigma)\,|s_{J,l}(k)|^2 \tag{5.2.83b}$$

其中，β_σ 为平滑因子，且 $0<\beta_\sigma<1$，一般取 β_σ 接近于 1。$R^2=\mathbb{E}[|a(k)|^4]/\mathbb{E}[|a(k)|^2]$，以上公式构成了基于 LMS 的正交小波均衡算法。

3. 性能分析

如前所述，LMS 算法的收敛速度取决于输入信号自相关矩阵最大特征值与最小特征值的比值，即矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{R})=\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$。该值越小，收敛越快，因此引入小波变换可以加快算法收敛速度。假设输入信号为实信号 $\boldsymbol{y}(k)$，其输入自相关矩阵为 $\boldsymbol{R}_{yy}$；设信号经小波变换后的自相关矩阵为 $\boldsymbol{R}_{rr}$，则 $\boldsymbol{R}_{yy}$ 和 $\boldsymbol{R}_{rr}$ 均为实对称矩阵，因而存在正交阵 $\boldsymbol{Q}_y$ 和 $\boldsymbol{Q}_r$，满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_{yy}=\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{Q}_y^{-1} \\ \boldsymbol{R}_{rr}=\boldsymbol{Q}_r\boldsymbol{\Lambda}_r\boldsymbol{Q}_r^{-1}\end{cases} \tag{5.2.84}$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda}_y$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_r$ 分别为 $\boldsymbol{R}_{yy}$ 和 $\boldsymbol{R}_{rr}$ 的特征值对角阵，且其特征值均为正数，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Lambda}_y=\mathrm{diag}[\lambda_1^y \quad \lambda_2^y \quad \cdots \quad \lambda_N^y] \\ \boldsymbol{\Lambda}_r=\mathrm{diag}[\lambda_1^r \quad \lambda_2^r \quad \cdots \quad \lambda_N^r]\end{cases} \tag{5.2.85}$$

信号经小波变换后的自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{rr}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{rr} &= \boldsymbol{Q}_r\boldsymbol{\Lambda}_r\boldsymbol{Q}_r^{-1} \\ &= \mathbb{E}[\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(k)] \\ &= \mathbb{E}\{\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}(k)[\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}(k)]^{\mathrm{T}}\} \\ &= \mathbb{E}\{\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}(k)\boldsymbol{y}(k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\} \\ &= \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}_{yy}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$=\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{Q}_y^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.86}$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda}_r=\boldsymbol{Q}_r^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{Q}_y^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_r=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}_y$。矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的元素可以表示为

$$\lambda_l^r=\sum_{i=1}^{M}p_{li}^2\lambda_l^y,\quad l=1,2,\cdots,M \tag{5.2.87}$$

其中，p_{li} 为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的第(l,i)个元素。

因各特征值均为正数，即 $0<\lambda_{\min}^y\min\limits_l\left(\sum\limits_{i=1}^{M}p_{li}^2\right)\leqslant\lambda_{\min}^r\leqslant\lambda_{\max}^r\leqslant\lambda_{\max}^r\max\limits_l\left(\sum\limits_{i=1}^{M}p_{li}^2\right)$，一般情况下，有

$$\min_l\left(\sum_{i=1}^{M}p_{li}^2\right)\approx\max_l\left(\sum_{i=1}^{M}p_{li}^2\right) \tag{5.2.88}$$

因此，$\lambda_{\max}^r/\lambda_{\min}^r\leqslant\lambda_{\max}^y/\lambda_{\min}^y$。由此可见，经小波变换后矩阵 $\boldsymbol{R}_{rr}$ 的最大特征值与最小特征值之比小于 $\boldsymbol{R}_{yy}$ 的最大特征值与最小特征值之比，即引入小波变换后，收敛性能得到改善。

5.3 频域均衡器

时域均衡器的一种替代方案是完全在频域中进行的均衡。频域均衡的优点是可以计算理想的信道逆函数，但频域均衡需要发射波形具有额外的数学结构。

考虑有码间干扰但没有噪声的接收信号，在频域有

$$y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f})=h(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f})a(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}) \tag{5.3.1}$$

理想的迫零均衡器可以表示为

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f})=\frac{1}{h(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f})} \tag{5.3.2}$$

但是，在频域上不可能实现理想的迫零均衡器。因为均衡器不存在于 $h(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f})$取零的频率值上，这个问题可以通过使用伪逆均衡器而不是逆均衡器来解决。在应用中也无法计算理想的发送信号频域数值 $a(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f})$，因为通常只有有限个发送符号 $a(k)$的样本，而且 $h(l)$仅在短时间窗口上是时不变的。

解决这个问题的方法是专门设计 $a(k)$并利用离散傅里叶变换。将发送信号 a 设计为具有适当保护间隔的信号，常用的方法是采用循环前缀或补零。考虑长度为 K 的一组符号 $\{a(k)\}_{k=0}^{K-1}$，$K>L$，它与信道$\{h(l)\}_{l=0}^{L}$ 作循环卷积时，对信道$\{h(l)\}_{l=0}^{L}$ 补零以具有长度 K，即 $h(k)=0$，$k\in[L+1,K-1]$。此时，循环卷积的输出为

$$\begin{aligned}
y(k)&=\sum_{l=0}^{N-1}h(l)a(k-l)\\
&=\sum_{l=0}^{L}h(l)a(k-l)\\
&=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{k}h(l)a(k-l)+\sum\limits_{l=N+1}^{L}h(l)a(k+k-l), & 0\leqslant k<L\\ \sum\limits_{l=0}^{L}h(l)a(k-l), & k\geqslant L\end{cases}
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

其中，$k \geqslant L$ 类似于线性卷积，而循环回绕只出现在最前面的 L 个样值。

我们还可以在发送序列中插入循环前缀，此时循环前缀是 K 个数据符号的最后 L_c 个符号，如图 5.3.1 所示。

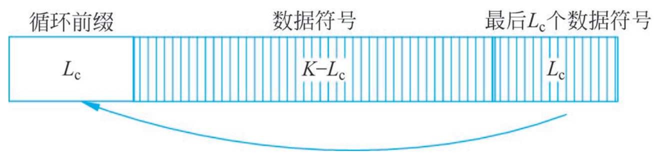

图 5.3.1　在发送序列中插入循环前缀

设 $L_c \geqslant L$ 为循环前缀的长度，形成信号 $\{w(k)\}_{k=0}^{K+L_c-1}$，其中，循环前缀为

$$w(k)=a(k+K-L_c),\quad k=0,1,\cdots,L_c-1 \tag{5.3.4}$$

数据为

$$w(k)=a(k-L_c),\quad k=L_c,L_c+1,\cdots,L_c+K-1 \tag{5.3.5}$$

它与 $L+1$ 个抽头的信道卷积后，可得

$$y(k)=\sum_{l=0}^{L} h(l)w(k-l) \tag{5.3.6}$$

忽略卷积后 $y(k)$ 的前 L_c 项，或称为丢弃循环前缀，形成新的信号

$$\begin{aligned}\bar{y}(k)&=y(k+L_c)\\&=\sum_{l=0}^{L} h(l)w(k+L_c-l),\quad k=0,1,\cdots,K-1\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

也就是说，通过填充循环前缀，对于 $k \geqslant L$ 的取值，循环卷积变成了线性卷积，因此实现频域均衡只需要计算 $\bar{y}(n)=\mathcal{F}_K[y(k)]$，$\bar{a}(n)=\mathcal{F}_K[a(k)]$，那么

$$\hat{a}(k)=\mathcal{F}_K^{-1}\left[\frac{\bar{y}(n)}{h(n)}\right]=\mathcal{F}_K^{-1}\left\{\frac{\mathcal{F}_K[y(k)]}{\mathcal{F}_K[h(k)]}\right\} \tag{5.3.8}$$

5.3.1　基于 LMS 的频域均衡器

基于 LMS 的频域自适应均衡器原理如图 5.3.2 所示。

在该滤波器中，输入信号 $x(k)$ 和期望响应 $d(k)$ 分别形成 N 点数据块，然后作 N 点快速傅里叶变换（Fast Fourier Transform，FFT），每个 FFT 的输出组成 N 个复数点 $\boldsymbol{X}(n)$ 和 $\boldsymbol{D}(n)$，具有权向量 $\boldsymbol{F}(n)$ 的均衡器输出 $\boldsymbol{Y}(n)$ 为

$$\boldsymbol{Y}(n)=\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{F}(n) \tag{5.3.9}$$

这表明时域上信号的卷积等于其频域变换信号的乘积。第 n 个数据块的频域权向量 $\boldsymbol{F}(n)$ 和输入信号的傅里叶变换系数对角矩阵 $\boldsymbol{X}(n)$ 分别为

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(n)=[F_1(n),F_2(n),\cdots,F_N(n)] \tag{5.3.10}$$

$$\boldsymbol{X}(n)=\begin{bmatrix}X_1(n) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & X_2(n) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & X_N(n)\end{bmatrix} \tag{5.3.11}$$

频域自适应滤波器的计算误差 $\boldsymbol{E}(n)$ 为

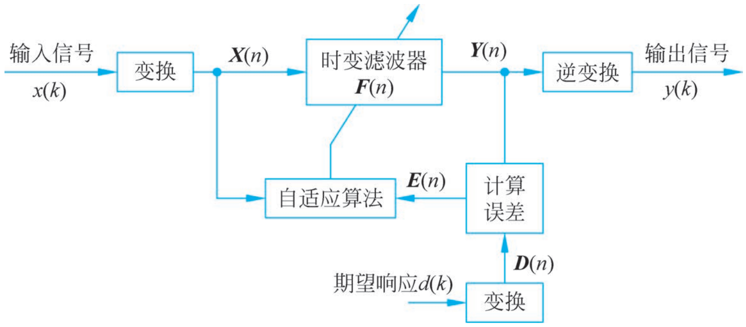

图 5.3.2 基于 LMS 的频域自适应均衡器原理

$$\boldsymbol{E}(n)=\boldsymbol{D}(n)-\boldsymbol{Y}(n) \tag{5.3.12}$$

频域 LMS 自适应均衡器的权向量为

$$\boldsymbol{F}(n+1)=\boldsymbol{F}(n)+\mu[\boldsymbol{X}^{*}(n)\boldsymbol{D}(n)-\boldsymbol{X}^{*}(n)\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{F}(n)] \tag{5.3.13}$$

频域自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{XX}$ 与互相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{XD}$ 分别为

$$\boldsymbol{R}_{XX}=\mathbb{E}[\boldsymbol{X}^{*}(n)\boldsymbol{X}(n)] \tag{5.3.14}$$

$$\boldsymbol{R}_{XD}=\mathbb{E}[\boldsymbol{X}^{*}(n)\boldsymbol{D}(n)] \tag{5.3.15}$$

这里自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{XX}$ 是对角矩阵，它的第 i 个对角元素为 $\mathbb{E}[\boldsymbol{X}_i^{*}(n)\boldsymbol{X}_i(n)]$。互相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{XD}$ 的第 i 个元素为 $\mathbb{E}[\boldsymbol{X}_i^{*}(n)\boldsymbol{D}_i(n)]$，权向量的最优解为

$$\boldsymbol{F}_{\text{opt}}=\boldsymbol{R}_{XX}^{-1}\boldsymbol{R}_{XD} \tag{5.3.16}$$

与频域 LMS 算法等价的时域权向量可表示为

$$\boldsymbol{f}(k+1)=\boldsymbol{f}(k)+\mu[\boldsymbol{x}_{\text{c}}^{\text{T}}(k)\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{x}_{\text{c}}^{\text{T}}(k)\boldsymbol{x}_{\text{c}}(k)\boldsymbol{f}(k)] \tag{5.3.17}$$

其中，$\boldsymbol{f}(k)=\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{F}(n)$；$\boldsymbol{d}(k)=\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{D}(n)$，$\mathcal{F}$是离散傅里叶变换(DFT)矩阵，$\mathcal{F}^{-1}$是 DFT 的逆矩阵；$\boldsymbol{x}_{\text{c}}(n)$为一个循环矩阵，且 $\boldsymbol{x}_{\text{c}}(k)=\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{X}(n)\mathcal{F}$，$\boldsymbol{x}_{\text{c}}(k)$的第 1 列就是频域自适应均衡器的输入信号向量 $\boldsymbol{x}(k)$，因为它是 $\boldsymbol{X}(n)$对角线元素的离散傅里叶逆变换，循环矩阵 $\boldsymbol{x}_{\text{c}}(k)$为

$$\boldsymbol{x}_{\text{c}}(k)=\begin{bmatrix} x(k) & x(k+N-1) & \cdots & x(k+1) \\ x(k+1) & x(k) & \cdots & x(k+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(k+N-1) & x(k+N-2) & \cdots & x(k) \end{bmatrix} \tag{5.3.18}$$

用 $\boldsymbol{x}_i^{\text{T}}(k)$表示 $\boldsymbol{x}_{\text{c}}(k)$的第 i 行，$y_i(k)$表示输出向量 $\boldsymbol{y}(k)$的第 i 个元素，有 $\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{x}_{\text{c}}(k)\boldsymbol{f}(k)$。时域输出向量 $\boldsymbol{y}(k)$的元素等于滤波器冲激响应 $\boldsymbol{f}(k)$与输入信号 $\boldsymbol{x}(k)$的循环卷积。等价的时域权向量更新公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(k+1)&=\boldsymbol{f}(k)+\mu\sum_{i=1}^{N}[d_i(k)\boldsymbol{x}_i(k)-y_i(k)\boldsymbol{x}_i(k)] \\ &=\boldsymbol{f}(k)+\mu\sum_{i=1}^{N}e_i(k)x_i(k)\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

样本误差计算为

$$e_i(k)=\mathcal{F}^{-1}[E_i(n)]=d_i(k)-y_i(k) \tag{5.3.20}$$

频域 LMS 算法与时域 LMS 算法的区别在于：前者对每块数据只进行一次自适应调整，在被用来修正权向量之前，整个数据块上的梯度由各样本梯度 $e_i(k)x_i(k)$ 相加得到，样本数为 $i=1,2,\cdots,N$；时域样本的计算误差 $e_i(k)$ 等于频域期望响应与频域输出之间误差的离散傅里叶逆变换。

同理，循环卷积滤波器的最佳时域权向量为

$$\boldsymbol{f}_{\text{opt}}=\mathcal{F}^{-1}[\boldsymbol{F}_{\text{opt}}]=\boldsymbol{r}_{XX}^{-1}\boldsymbol{r}_{XD} \tag{5.3.21}$$

$$\boldsymbol{r}_{XX}=\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{R}_{XX}\mathcal{F} \tag{5.3.22a}$$

$$\boldsymbol{r}_{XD}=\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{R}_{XD}\mathcal{F} \tag{5.3.22b}$$

其中，$\boldsymbol{r}_{XX}$ 为循环矩阵；$\boldsymbol{R}_{XX}$ 为对角线矩阵。$\boldsymbol{r}_{XX}$ 的第 1 行元素由输入 $\boldsymbol{x}(k)$滞后 $0\sim N-1$ 的循环自相关函数给出。此算法的稳定条件为 $0<\mu<2/\lambda_{\max}$，其中 $\lambda_{\max}$ 为自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{XX}$ 的最大特征值。这与最陡下降法的稳定条件一致。

5.3.2　基于 LMS 的 OFDM 系统均衡算法

信道的时域表示可以等效为一个抽头延时线模型，而 OFDM 系统通过接收端的傅里叶变换将这种横向模型变换为频域上一个个相互独立的并行子信道，将每个子信道简化为单抽头模型。所以，将 LMS 算法与 OFDM 系统相结合以后，每个子信道完全可以通过一个单抽头滤波器完成对信号的恢复。当然，多抽头滤波器结构也同样有效，但计算复杂度较高。目前自适应算法在 OFDM 系统中大都采用单抽头滤波器结构。图 5.3.3 给出了一个 OFDM 子载波采用 LMS 滤波的系统框图，其中，$f_l(k)$为 k 时刻的均衡器权系数，$E_l(k)$为均衡器的输出 $Z_l(k)$与原始的发送信号 $X_l(k)$的差值。

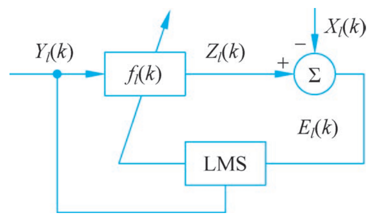

图 5.3.3　一个 OFDM 子载波采用 LMS 滤波的系统框图

均衡器的输出 $Z_l(k)$与误差 $E_l(k)$可以分别表示为

$$Z_l(k)=f_l^*(k)Y_l(k) \tag{5.3.23}$$

$$E_l(k)=Z_l(k)-X_l(k)=f_l^*(k)Y_l(k)-X_l(k) \tag{5.3.24}$$

在单载波系统中，自适应均衡算法的性能一般都是从收敛速度和均方误差两方面来考查。而对于多载波系统，由于每个子载波均采用一个均衡器，单一地考查某个子载波均衡算法的性能则显得有失合理，故这里重新定义系统性能测度方法，将均方误差性能测度定义为

$$\text{MSE}(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\text{MSE}_l(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}10\lg[E_l^2(k)] \tag{5.3.25}$$

LMS 算法的性能由所有子载波的 LMS 算法性能共同决定，其均方误差收敛曲线为每个子载波信道均衡器收敛曲线的数学平均。为了获得最优性能，需要代价函数 $J_l(k)$收敛到一个最小值。当均衡器无噪声输入时，$J_l(k)$的最小值趋于零；而当输入含有噪声时，$J_l(k)$的最小值趋于一个非零常数。

求出 $J_l(k)$对 f_l 的梯度后，可得 $f_l(k)$的迭代公式为

$$f_l(k)=f_l(k-1)-\mu e^*(k)Y_l(k) \tag{5.3.26}$$

5.4 自适应盲均衡

传统的自适应均衡器或均衡方法及算法需要外部提供期望信号，即需要发射端发送一段接收端已知的训练序列估计信道，再通过自适应算法调节均衡器的权向量，最终达到反卷积的目的。训练序列的使用不仅占用了大量的信道带宽，而且在载波恢复过程中，一旦训练序列中断，将直接导致均衡失败，盲均衡为解决这一问题提供了有效途径。

盲均衡是无须训练序列的自适应均衡算法的总称，它们不需要外部提供期望响应，能够产生与待估计输入信号在某种意义上最逼近的滤波器输出，算法对期望响应而言是“盲”的，但算法本身在自适应过程中需要通过一个非线性变换估计出期望响应。

5.4.1 Bussgang 均衡

Bussgang 均衡器在自适应均衡器的基础上发展起来。它的一个重要概念是 Bussgang 过程。若随机过程$\{z(k)\}$满足条件$\mathbb{E}[z(k)z(k+m)]=\mathbb{E}\{g[z(k)]z(k+m)\}$，其中$g(\cdot)$为无记忆非线性函数，$m$ 和k 为整数，则称$z(k)$为 Bussgang 过程。Bussgang 过程的自相关函数等于该过程与用它作自变量的无记忆非线性函数之间的互相关。大量的随机过程都属于 Bussgang 过程，如高斯过程、具有指数衰减自相关函数的随机过程等。基于 Bussgang 过程的盲均衡算法称为 Bussgang 算法。

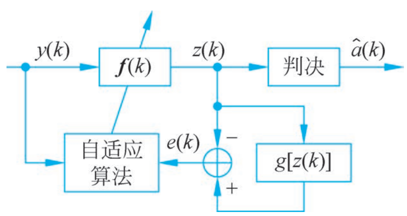

图 5.4.1 Bussgang 盲均衡结构

1. 实基带信道的 Bussgang 算法

为避免使用训练序列，Bussgang 盲均衡算法采用非线性估计器$g(\cdot)$对均衡器的输出信号$z(k)$进行非线性变换，并构造误差信号$e(k)=g[z(k)]-z(k)$，采用自适应算法对均衡器权向量$\boldsymbol{f}(k)$进行调整，通过对$z(k)$进行判决，获得输入信号$a(k)$的估计值$\hat{a}(k)$。Bussgang 盲均衡结构如图 5.4.1 所示。

Bussgang 盲均衡算法可描述为

$$e(k)=g[z(k)]-z(k) \tag{5.4.1a}$$

$$f_i(k+1)=f_i(k)+\mu e(k)y(k-i) \tag{5.4.1b}$$

令$\{\boldsymbol{f}(k)\}$表示理想逆滤波器的权系数序列，它与信道冲激响应序列$\{\boldsymbol{c}(k)\}$之间满足理想逆关系，即

$$\boldsymbol{f}(k)*\boldsymbol{c}(k)=\delta(k),\quad \forall k \tag{5.4.2}$$

用$\{f_i(k)\}$对接收信号$y(k)$进行滤波，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f_i(k)c_m(k)a(k-i-m)&=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a(k-l)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}f_i(k)c_{l-i}(k)\\&=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(l)a(k-l)\\&=a(k)\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

因此，由式(5.4.2)定义的逆滤波器可以正确恢复发射端的数据序列$\{a(k)\}$。从这个意义上讲，它是理想的逆滤波器。然而，这个理想的逆滤波器具有无穷多个抽头，这在实际

使用中是不现实的。若用一个长度为 $2N+1$ 的逆滤波器 $\{f(k)\}$ 表示截尾的理想逆滤波器，则此滤波器的输出为

$$z(k)=\sum_{i=-N}^{N} f_i(k)y(k-i) \tag{5.4.4}$$

这样就得到近似实现逆滤波器的横向滤波器，其结构如图 5.4.2 所示，但这种近似将导致一部分残余的码间干扰。

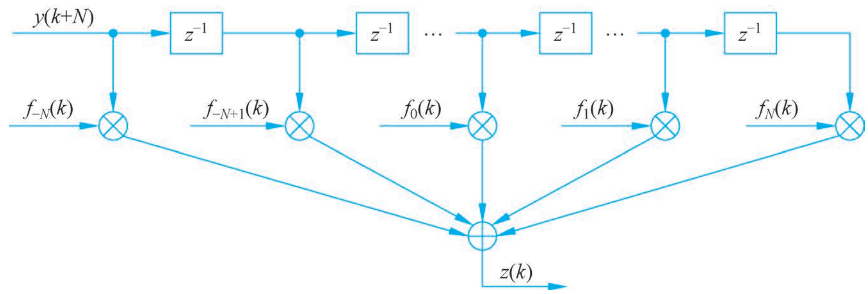

图 5.4.2　近似实现逆滤波器的横向滤波器结构

由式(5.4.1)可知，当 $\mathbb{E}[e(k)y(k-i)]=\mathbb{E}\{[g[z(k)]-z(k)]y(k-i)\}=0$ 时，横向滤波器的权向量 $\boldsymbol{f}(k)$ 趋于收敛。因此，算法的收敛条件可以表示为

$$\mathbb{E}\{[g[z(k)]-z(k)]y(k-i)\}=\mathbb{E}[z(k)y(k-i)],\quad \text{对于大的 } k, i=-N,-(N-1),\cdots,N \tag{5.4.5}$$

$$\mathbb{E}\left\{g[z(k)]\sum_{i=-N}^{N} f_i(k)y(k-i)\right\}=\mathbb{E}\left[z(k)\sum_{i=-N}^{N} f_i(k)y(k-i)\right],\quad \text{对于大的 } N \tag{5.4.6}$$

根据式(5.4.4)，滤波器的输出更新可写为

$$z(k-m)=\sum_{i=-N}^{N} f_i(k-m)y(k-m-i),\quad \text{对于大的 } N \tag{5.4.7}$$

因此，有

$$\mathbb{E}[z(k)z(k+m)]=\mathbb{E}\{g[z(k)]z(k+m)\},\quad \text{对于大的 } k \tag{5.4.8}$$

由于采用 $g[z(k)]$ 作为期望信号，均方误差性能函数可以表示为

$$J(k)=\mathbb{E}[e^2(k)]=\mathbb{E}\{|\,g[z(k)]-z(k)\,|^2\} \tag{5.4.9}$$

权向量的更新为

$$\boldsymbol{f}(k+1)=\boldsymbol{f}(k)+\mu\hat{\nabla}_f J \tag{5.4.10}$$

其中，$\hat{\nabla}_f J$ 为 $J(k)$ 的梯度估计值；μ 为一个步长常数，通常 $0<\mu<1$。

当 $g[z(k)]$ 取不同的形式时，就可以得到不同的 Bussgang 算法。Bussgang 算法的收敛性可由 Benveniste-Goursat-Ruget 定理判断。该定理可表述如下：若待估计的序列 $\{a(k)\}$ 是亚高斯的，并且 $\psi(z)=g(z)-z$ 的二阶导数为负值，即 $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}<0, 0<z<\infty$，则 Bussgang 算法是收敛的。

需要注意的是，以上讨论的 Bussgang 自适应均衡算法只适用于由实基带描述的 M 进制脉冲信号幅度调制(MPAM)系统。

2. 复基带信道的 Bussgang 算法

由于正交幅度调制(QAM)混合了幅度调制和相位调制,这类调制系统的自适应均衡需要由复基带信道描述。在复基带信道中,发送数据、信道冲激响应和接收信号可分别表示为

$$a(k)=a_{\mathrm{Re}}(k)+\mathrm{j}a_{\mathrm{Im}}(k) \tag{5.4.11}$$

$$h(k)=h_{\mathrm{Re}}(k)+\mathrm{j}h_{\mathrm{Im}}(k) \tag{5.4.12}$$

$$y(k)=y_{\mathrm{Re}}(k)+\mathrm{j}y_{\mathrm{Im}}(k) \tag{5.4.13}$$

其中,Re 表示同相分量;Im 表示正交分量。当同相和正交信道的发射数据相互统计独立时,若给定均衡器的输出信号 $z(k)$,并且复数据序列 $a(k)$ 的条件均值估计为 $\hat{a}(k)$,则 $\hat{a}(k)$ 的复基带形式为

$$\hat{a}(k)=\mathbb{E}[a(k)\mid z(k)] \tag{5.4.14a}$$

$$=\hat{a}_{\mathrm{Re}}(k)+\mathrm{j}\hat{a}_{\mathrm{Im}}(k) \tag{5.4.14b}$$

$$=\mathrm{g}[z_{\mathrm{Re}}(k)]+\mathrm{jg}[z_{\mathrm{Im}}(k)] \tag{5.4.14c}$$

这表明,发送数据 $a(k)$ 的同相分量和正交分量可以由均衡器输出 $z(k)$ 的同相分量和正交分量分别估计。复基带信道的 Bussgang 算法过程如算法 5.4.1 所示。

[算法 5.4.1] 复基带信道的 Bussgang 算法

输入:$y(k)$

输出:$f_i(k+1)$

步骤 1:参数选取

选取滤波器的长度 M、步长因子 $\mu(0<\mu<1)$ 和信噪比

步骤 2:初始化

令 $k=0, f_i(0)=\begin{cases}1, & i=0\\ 0, & i=\pm1,\pm2,\cdots,\pm L\end{cases}$

步骤 3:当 $k\geqslant1$ 时,获取数据 $y(k)$

计算 $z(k)=z_{\mathrm{Re}}(k)+\mathrm{j}z_{\mathrm{Im}}(k)=\sum_{i=-L}^{l} f_i(k)y(k-i)$

计算 $\hat{a}(k)=\hat{a}_{\mathrm{Re}}(k)+\mathrm{j}\hat{a}_{\mathrm{Im}}(k)=\mathrm{g}[z_{\mathrm{Re}}(k)]+\mathrm{jg}[z_{\mathrm{Im}}(k)]$

计算 $e(k)=\hat{a}(k)-z(k)$

计算 $f_i(k+1)=f_i(k)+\mu e(k)y^*(k-i)$

5.4.2 基于倒三谱的自适应盲均衡算法

基于倒三谱的自适应盲均衡算法(Tricepstrum Equalization Algorithm,TEA)利用接收信号序列的四阶累积量的复倒谱估计信道特性,重构信道的最小相位特性和最大相位特性,根据估计重构的信道特性计算均衡器参数。

1. 倒三谱

当信道有限冲激响应的传递函数 $H(z)$ 为慢时变时,可分解为最小和最大相位分量

$$H(z)=AI(z)O(z^{-1}) \tag{5.4.15}$$

其中,$I(z)=\prod_{k=1}^{N_1}[1-a(k)z^{-1}]$,$|a(k)|<1$ 为最小相位分量;$O(z^{-1})=\prod_{k=1}^{N_2}[1-b(k)z]$,

$|b(k)|<1$ 为最大相位分量；参数 A 为比例因子。

倒三谱可以写为

$$\kappa_{4y}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=\begin{cases}\log(\gamma_{4y}^3 A), & \tau_1=\tau_2=\tau_3=0\\ -\dfrac{A(\tau_1)}{\tau_1}, & \tau_1>0,\tau_2=\tau_3=0\\ -\dfrac{A(\tau_2)}{\tau_2}, & \tau_2>0,\tau_1=\tau_3=0\\ -\dfrac{A(\tau_3)}{\tau_3}, & \tau_3<0,\tau_1=\tau_2=0\\ \dfrac{B(-\tau_1)}{\tau_1}, & \tau_1<0,\tau_2=\tau_3=0\\ \dfrac{B(-\tau_2)}{\tau_2}, & \tau_2<0,\tau_1=\tau_3=0\\ \dfrac{B(-\tau_3)}{\tau_3}, & \tau_3>0,\tau_1=\tau_2=0\\ -\dfrac{B(\tau_2)}{\tau_2}, & \tau_1=\tau_2=\tau_3>0\\ \dfrac{A(\tau_2)}{\tau_2}, & \tau_1=\tau_2=\tau_3<0\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5.4.16}$$

其中，$A(\tau)$、$B(\tau)$ 分别对应于因子 $I(z)$ 和 $O(z^{-1})$ 的最小、最大差分倒谱参数，定义为 $A(\tau)=\sum_{k=0}^{N_1}a^{\tau}(k)$，$B(\tau)=\sum_{k=0}^{N_2}b^{\tau}(k)$，并满足倒谱-累积量方程，即

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{M_1}A(k)[c_{4y}(\tau_1-k,\tau_2,\tau_3)-c_{4y}(\tau_1+k,\tau_2+k,\tau_3+k)]+\\&\sum_{k=1}^{M_2}B(k)[c_{4y}(\tau_1-k,\tau_2-k,\tau_3-k)-c_{4y}(\tau_1+k,\tau_2,\tau_3)]\\=&-\tau_1 c_{4y}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

理论上，参数 M_1 和 M_2 为无穷大，实际可取为有限值，$A(k)$ 和 $B(k)$ 随 k 的增大而指数衰减，倒谱-累积量方程的向量方程形式为

$$\boldsymbol{HE}=\boldsymbol{F} \tag{5.4.18}$$

其中，$\boldsymbol{E}=[A(1),A(2),\cdots,A(M_1),B(1),B(2),\cdots,B(M_2)]^{\mathrm{T}}$。为求解 $A(k)$ 和 $B(k)$，将误差函数定义为

$$e(k)=\hat{\boldsymbol{F}}(k)-\hat{\boldsymbol{H}}(k)\hat{\boldsymbol{E}}(k) \tag{5.4.19}$$

用 LMS 算法更新 $\hat{\boldsymbol{E}}(k)$，则

$$\hat{\boldsymbol{E}}(k+1)=\hat{\boldsymbol{E}}(k)+\mu(k)\hat{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{H}}(k)\hat{\boldsymbol{E}}(k) \tag{5.4.20}$$

其中，$0<\mu(k)<\dfrac{2}{\mathrm{tr}[\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}(k)\boldsymbol{H}(k)]}$，$\mathrm{tr}[\cdot]$ 表示取矩阵的迹。求出信道的最大和最小相位分

量后，便完成了信道辨识。

2. 线性均衡器权向量估计算法

在信道估计后，设无激励条件下的均衡器传递函数为 $F(z)$，采用自适应倒三谱盲均衡算法的线性均衡器结构如图 5.4.3 所示。它的权向量计算过程如算法 5.4.2 所示。

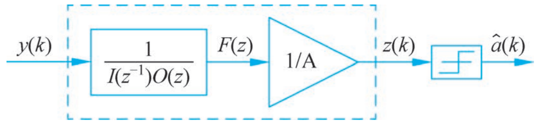

图 5.4.3　采用自适应倒三谱盲均衡算法的线性均衡器结构

［算法 5.4.2］　自适应倒三谱盲均衡算法的线性均衡器权向量估计算法

输入：$y(k)$

输出：$\hat{a}(k)$

步骤 1：参数选取

选取 N_1 和 N_2 使 $N_1+N_2+1=N_f$（N_f 为均衡器的抽头数）

步骤 2：初始化

$\hat{i}_{\text{inv}}(q,0)=\hat{o}_{\text{inv}}(q,0)=1$，迭代求解过渡参数

步骤 3：计算 $\hat{i}_{\text{inv}}(m,k)=-\dfrac{1}{k}\sum\limits_{q=2}^{k+1}[-\hat{A}^{(m)}(q-1)]\hat{i}_{\text{inv}}(m,k-q+1)$，$k=1,2,\cdots,N_1$

计算 $\hat{o}_{\text{inv}}(m,k)=-\dfrac{1}{k}\sum\limits_{q=k+1}^{0}[-\hat{B}^{(k)}(1-q)]\cdot\hat{o}_{\text{inv}}(m,k-q+1)$，$k=-1,-2,\cdots,-N_2$

计算 $h(m,k)=\hat{i}_{\text{inv}}(m,k)\otimes\hat{o}_{\text{inv}}(m,k)$，$k=-N_2,\cdots,-N_1$

（其中，$\hat{i}_{\text{inv}}(q,k)$ 和 $\hat{o}_{\text{inv}}(q,k)$ 分别代表逆滤波器 $1/I(z^{-1})$ 和 $1/O(z)$ 的冲激响应）。

第 17 集
微课视频

5.5　智能盲均衡

随着深度学习在人工智能和大数据上的应用成果不断涌现，智能算法在通信系统中的应用方兴未艾。将计算智能的有关方法应用到通信系统，特别是对接收端的信号进行智能的均衡处理，旨在得到性能更加优良的接收机和通信系统，一直是一个有待开拓的前沿领域。计算智能包含诸多的方法，如遗传算法、粒子群算法、人工神经网络、模糊逻辑、模式识别、数据挖掘等。将这些方法应用于盲均衡，就可以得到智能化的盲均衡算法。

5.5.1　基于遗传算法优化的常模盲均衡算法

在盲均衡方法中，传统的常模盲均衡算法（Constant Modulus Blind Equalization Algorithm，CMA）利用代价函数对均衡器权向量的梯度确定均衡器权向量的迭代方程。这种方法只考虑局部区域的梯度下降搜索，缺乏全局搜索能力，构造的代价函数需满足可导要求。

遗传算法是一种群体搜索方法，它将一组问题的解用种群来表示，通过对当前种群进行

选择、交叉和变异等进化操作产生新一代种群，逐步使种群进化到近似最优解。它不依赖梯度信息，也不需要代价函数可微，是一种具有全局性和强鲁棒性的随机搜索方法。

将遗传算法引入常模盲均衡算法中，可得到基于遗传算法优化的常模盲均衡算法(Genetic Algorithm Based CMA，GACMA)，采用该算法的均衡器结构如图 5.5.1 所示。其中，$\boldsymbol{a}(k)$为输入信号向量；$\boldsymbol{h}(k)$为信道冲激响应向量；$\boldsymbol{v}(k)$为干扰噪声向量，一般为加性高斯白噪声；$\boldsymbol{y}(k)$为均衡器输入信号向量或信道输出含噪向量；$\boldsymbol{f}(k)$为均衡器权向量；$z(k)$为最接近输入信号 $\boldsymbol{a}(k)$的均衡器输出信号，均衡后的 $z(k)$和 $\boldsymbol{a}(k)$之间误差非常小，$z(k)$经过判决后就能够准确地表示输入信号 $\boldsymbol{a}(k)$；$\Psi(\cdot)$为误差生成函数；$e(k)$为误差。

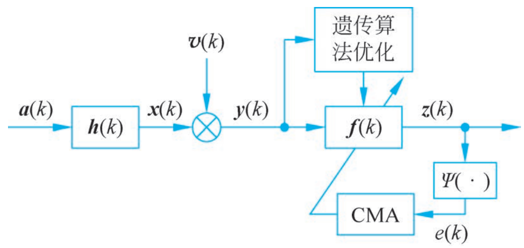

图 5.5.1 基于 GACMA 的均衡器结构

接收端的接收信号 $\boldsymbol{y}(k)$可以表示为

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{a}(k)+\boldsymbol{v}(k) \tag{5.5.1}$$

均衡器的输出信号为

$$z(k)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{f}(k) \tag{5.5.2}$$

输入常模盲均衡算法的误差函数为

$$e(k)=|z(k)|^2-R^2 \tag{5.5.3}$$

其中，R^2 为常模盲均衡算法的模值。常模盲均衡算法权向量的迭代公式为

$$\boldsymbol{f}(k+1)=\boldsymbol{f}(k)-2\mu e(k)z(k)\boldsymbol{y}^*(k) \tag{5.5.4}$$

在基于遗传算法优化的常模盲均衡算法中，利用遗传算法寻找均衡器最优权向量的基本思想是把均衡器的权向量作为遗传算法的决策变量，把均衡器的输入信号作为遗传算法的输入，由 CMA 代价函数定义遗传算法的适应度函数，利用遗传算法求解均衡器代价函数全局最小值，得到均衡器权向量最优值。均衡器的代价函数由均衡器误差的时间平均表示，假设接收信号序列的长度为 N，其代价函数定义为

$$J_{\mathrm{CMA}}(n)=\sum_{k=-N-n-1}^{n}(|z(k)|^2-R^2)^2/N \tag{5.5.5}$$

其中，$z(k)$为均衡器的输出；R^2 为均衡器的模值。遗传算法在进化中的每代都将依次接收 N 个输入信号，每代中这 N 个信号利用常模盲均衡算法来实现均衡，再进行遗传算法的进化操作，并将进化产生的新种群作为下一代进化的初始种群。具体优化过程如下。

(1) 初始化种群。随机产生一定数目的个体构成初始种群 $f=[f_1,f_2,\cdots,f_M]$，每个个体 $f_i(0<i\leqslant M)$对应均衡器的一个权向量，设编码方式为实数编码，编码值为$[-1,1]$内的一个随机数。

(2) 确定适应度函数。遗传算法求解的目标是得到适应度值最大的个体，但盲均衡算

法的目标是使代价函数最小。为了解决这个矛盾，可以将均衡器代价函数的倒数作为遗传算法的适应度函数，即

$$\mathrm{Fit}(f)=\frac{1}{J(f)} \tag{5.5.6}$$

其中，$\mathrm{Fit}(f)$为遗传算法的适应度函数；$J(f)$为均衡器的代价函数。

(3) 设计遗传算子。遗传操作利用个体的适应度函数进行。它包括选择、运算和变异算子。选择算子利用群体中个体的适应度值，通过选择概率决定其遗传到下一代的可能性。常用的选择算子为轮盘选择。轮盘选择法使用与适应度成比例的方法计算选择概率，再按照选择概率挑选个体。假设第 i 个权向量个体 f_i 的适应度值为 $\mathrm{Fit}(f_i)$，其被选择的概率为

$$p(f_i)=\frac{\mathrm{Fit}(f_i)}{\sum_{i=1}^{K}\mathrm{Fit}(f_i)} \tag{5.5.7}$$

第 n 个权向量个体的累积概率为

$$q_n=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Fit}(f_i),\quad 1\leqslant n\leqslant K \tag{5.5.8}$$

轮盘选择法是一种单指针选择法。它用 K 个权向量个体的累积概率依次在累积概率为 1 的圆盘上画出扇形，然后用随机生成的 K 个[0,1]间的随机数代表转动圆盘所得到的指针位置，选择出相应的个体。

为了使选择的个体具有遍历性，随机遍历采样法使用 K 个相等距离的指针，其中 K 为要选择的权向量个体数目，使选择指针的距离为 $1/K$，第 1 个指针的位置由$[0,1/K]$区间的均匀随机数决定，这样 K 个个体就由相隔一个指针距离的 K 个指针选择，选择累积概率离指针位置近的权向量个体。

交叉算子在遗传操作中起核心作用，它是产生新的权向量个体的主要方法。考虑到权向量个体采用了实数编码，为保证交叉后产生新的个体值并开辟出新的搜索空间，交叉操作采用两点交叉和线性组合的方法，对相互配对的两个权向量个体的二进制编码串随机设置一个交叉点，再对交叉后的二进制编码串所对应的实数个体进行线性组合，生成新的权向量个体。

设进行交叉的两个父代个体分别为 f_i 和 f_{i+1}，线性组合后得到子代个体 f'_i和 f'_{i+1}，分别为

$$f'_i=f_i+\alpha(f_{i+1}-f_i) \tag{5.5.9a}$$

$$f'_{i+1}=f_{i+1}+\alpha(f_i-f_{i+1}) \tag{5.5.9b}$$

其中，α 为比例因子，可由[0,1]均匀分布的随机数产生。

变异算子在遗传操作中属于辅助性的搜索操作，它从局部的角度出发使个体更加逼近最优解。对实数编码的权向量个体采用实值变异的方法如下。设 $f_i(m)$是变异前的第 i 个权向量个体的第 m 个抽头值，$f'_m(m)$为变异后的第 i 个权向量个体的第 m 个抽头值。则有

$$f'_i(m)=f_i(m)\pm 0.5L\Delta \tag{5.5.10}$$

其中，$\Delta=\sum_{t=0}^{m-1}\frac{B(t)}{2^t}$，$B(t)$以概率 $1/m$ 取值 1，以概率 $1-1/m$ 取值 0；L 为权值的取值范围。

（4）判断是否达到终止条件。终止条件可设置为最大进化代数，当进化代数不大于最大进化代数时，则返回（2），否则进入（5）。

（5）输出最佳的权向量个体。考虑到算法在抽取最佳个体时的实时性和盲均衡算法需要满足迫零条件，抽取最佳权向量个体时将本代的最佳权向量个体作为下一代的最佳权向量个体输出，在算法结束时输出适应度值最大的权向量个体作为均衡器的权值。

5.5.2　基于遗传算法优化的正交小波常模盲均衡算法

盲均衡算法的性能与均衡器输入信号的自相关性有着一定的关系，自相关性越小，收敛速度越快。利用正交小波基函数对均衡器输入信号进行正交小波变换并作能量归一化处理后，会使信号与噪声的相关性得到一定程度的降低，因而能有效地加快收敛速度。基于正交小波变换的常模盲均衡算法（Orthogonal Wavelet Transform Based Constant Modulus Blind Equalization Algorithm，WTCMA）对均衡器权向量进行更新时，先构造一个代价函数，然后利用局部区域的梯度下降搜索法确定均衡器权值的迭代方程。该算法全局搜索能力较差，易陷入局部收敛。为了克服该缺陷，将遗传算法引入 WTCMA 中，便得到基于遗传算法的正交小波常模盲均衡算法（Genetic Optimization Algorithm Based WTCMA，GA-WTCMA）。

基于 GA-WTCMA 的均衡器结构如图 5.5.2 所示。其中，$\boldsymbol{a}(k)$为发射信号；$\boldsymbol{h}(k)$为信道脉冲信号响应向量；$\boldsymbol{n}(k)$为高斯白噪声向量；$\boldsymbol{y}(k)$为均衡器的接收信号向量；WT 表示正交小波变换；$\Psi(\cdot)$为误差生成函数；$e(k)$为误差函数；$\boldsymbol{f}(k)$为均衡器权向量；$z(k)$为均衡器输出信号。

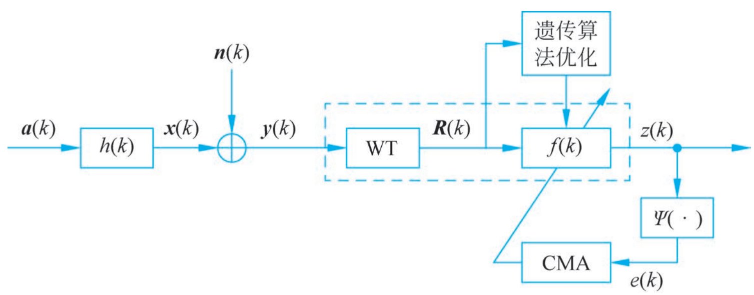

图 5.5.2　基于 GA-WTCMA 的均衡器结构

由小波分析理论可知，当均衡器权向量 $\boldsymbol{f}(k)$为有限冲激响应时，$\boldsymbol{f}(k)$可用一组正交小波基函数来表示。

$$\boldsymbol{f}(k)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=0}^{k_j}d_{jl}\varphi_{jl}(k)+\sum_{l=0}^{k_j}v_{jl}\phi_{jl}(k) \tag{5.5.11}$$

其中，$l=0,1,\cdots,N-1$；J 为小波分解的最大尺度；$k_j=N/2^j$，$j=1,2,\cdots,J$ 为尺度 j 下小波函数的最大平移；d_{jl} 和 v_{jl} 为均衡器的权系数；$\varphi_{jl}(k)$和 $\phi_{jl}(k)$分别为小波函数和尺度函数。

根据信号传输理论，均衡器输出为

$$\begin{aligned} z(k) &= \sum_{l=0}^{N-1} f_l(k) y(k-l) \\ &= \sum_{j=1}^{J} \sum_{l=0}^{k_j} d_{jl} u_{jl}(k) + \sum_{l=0}^{k_J} v_{jl} s_{jl}(k) \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

其中，$u_{jl}(k)$为尺度为 j 平移 l 的小波变换系数；v_{jl} 为尺度 J 平移 l 的尺度变换系数。$\boldsymbol{f}(k)$用小波基函数表示的实质是对均衡器的输入信号进行正交小波变换，从而改变了均衡器的结构。

将均衡器的正交小波变换系数记为

$$\boldsymbol{R}(k) = [u_{J,0}(k), u_{J,1}(k), \cdots, u_{J,k_J}(k), s_{J,0}(k), s_{J,1}(k), \cdots, s_{J,k_J}(k)]^{\mathrm{T}} \tag{5.5.13}$$

均衡器未知权向量记为

$$\boldsymbol{f}(k) = [d_{J,0}(k), d_{J,1}(k), \cdots, d_{J,k_J}(k), v_{J,0}(k), v_{J,1}(k), \cdots, v_{J,k_J}(k)]^{\mathrm{T}} \tag{5.5.14}$$

假设 $\boldsymbol{V}$ 为正交小波变换矩阵，经过正交小波变换后均衡器的输入为

$$\boldsymbol{R}(k) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{y}(k) \tag{5.5.15}$$

均衡器的输出为

$$z(k) = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k) \tag{5.5.16}$$

均衡器的误差为

$$e(k) = R^2 - |z(k)|^2 \tag{5.5.17}$$

均衡器权向量的更新为

$$\boldsymbol{f}(k+1) = \boldsymbol{f}(k) - \mu\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}(k) e(k) \boldsymbol{R}^*(k) \tag{5.5.18}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{R}}(k) = \mathrm{diag}[\hat{\sigma}_{j,0}^2(k), \hat{\sigma}_{j,1}^2(k), \cdots, \hat{\sigma}_{J,k_J}^2(k), \hat{\sigma}_{J+1,0}^2(k), \cdots, \hat{\sigma}_{J+1,k_J}^2(k)]$；$\mu$ 为迭代步长；$\hat{\sigma}_{j,l}^2(k)$和 $\hat{\sigma}_{J+1,l}^2(k)$分别表示对小波变换系数 $u_{j,l}(k)$和尺度变换系数 $s_{J,l}(k)$的平均功率估计，其递推公式为

$$\hat{\sigma}_{j,l}^2(k+1) = \beta\hat{\sigma}_{j,l}^2(k) + (1-\beta)|u_{j,l}(k)|^2 \tag{5.5.19}$$

$$\hat{\sigma}_{J+1,l}^2(k+1) = \beta\hat{\sigma}_{J+1,l}^2(k) + (1-\beta)|s_{J,l}(k)|^2 \tag{5.5.20}$$

其中，β 为平滑因子，且 $0<\beta<1$，一般取 β 值接近于 1。

遗传算法的输入信号由经过正交小波交换后均衡器的输入信号提供，决策变量对应于均衡器的权向量，它通过随机方法产生，适应度函数对应于 CMA 代价函数的倒数，利用遗传算法求解均衡器的代价函数，寻找最优权向量。将每代中适应度值最大的权向量个体（称为最佳个体）选择出来，考虑到算法在抽取最佳个体时的实时性和盲均衡算法要满足迫零条件，抽取最佳权向量个体时将本代的最佳权向量个体作为下一代的最佳权向量个体输出。优化过程类似基于遗传算法优化的常模盲均衡算法的内容，此处不再赘述。

5.5.3 基于粒子群优化的正交小波常模盲均衡算法

在盲均衡算法中，影响盲均衡算法收敛速度的主要因素是输入信号的自相关矩阵。利用小波变换理论降低输入信号的自相关性，改善了常模盲均衡算法结构，在一定程度上可以加快收敛速度。但是，基于正交小波变换的常模盲均衡算法用代价函数对均衡器权向量求梯度的方法，所得到的权向量迭代方程缺乏全局搜索能力。

粒子群优化(Particle Swarm Optimization,PSO)算法的基本思想是通过群体中个体之间的协作与信息共享寻找种群最优解。该类算法利用粒子的自身经验并共享其他个体信息搜索全局最优解,通过线性调整惯性权重保持粒子的惯性运动,使搜索空间不断扩展,可保证收敛到最优位置。在粒子群优化算法中,所有粒子都以它们自身的位置和速度决定它们各自飞行的距离和方向,并用被优化的目标函数决定粒子的适应度值,粒子的搜索轨迹由当前最优粒子的位置和速度向量来引导,通过不断更新粒子的位置和速度进化到全局最优。与传统的种群进化算法相比,粒子群优化操作简单、实现容易,避免了遗传算法等其他进化算法对个体进行交叉、变异、选择等操作,可调参数少,无需梯度信息且运行效率高。

通过粒子群优化算法的寻优迭代,可以快速找到适应度最大值所对应的权向量个体(即粒子全局最优位置向量),作为基于粒子群优化的正交小波常模盲均衡算法(Orthogonal Wavelet Transform Constant Modulus Blind Equalization Algorithm Based on Particle Swarm Optimization,PSO-WTCMA)的初始化权向量,并通过迭代寻找均衡器的最优权向量。

粒子 i 在寻优过程中记录其当前的个体极值 $p_i=(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{iD})$(个体极值 p_i 指个体所经历位置中计算得到的适应度最大的位置向量)和整个粒子群当前的全局极值 $p_{\mathrm{g}}=(p_{\mathrm{g}1},p_{\mathrm{g}2},\cdots,p_{\mathrm{g}D})$(全局极值 p_{g} 是指种群中所有粒子搜索到的适应度最大的位置向量)。迭代到 $t+1$ 次时,第 i 个粒子的第 d 维速度和位置可表示为

$$v_{id}(t+1)=jv_{id}(t)+c_1r_1[p_{id}(t)-x_{id}(t)]+c_2r_2[p_{gd}(t)-x_{id}(t)] \tag{5.5.21}$$

$$x_{id}(t+1)=x_{id}(t)+v_{id}(t+1) \tag{5.5.22}$$

$$j=j_{\max}-(j_{\max}-j_{\min})t/N \tag{5.5.23}$$

其中,$i=1,2,\cdots,N$;$d=1,2,\cdots,D$;t 为迭代次数;$x_{id}(t)$为第 t 次迭代时第 i 个粒子的第 d 维位置;$v_{id}(t)$为第 t 次迭代时第 i 个粒子的第 d 维速度;$p_{id}(t)$为第 t 次迭代时第 i 个粒子的第 d 维个体极值;$p_{gd}(t)$为第 t 次迭代时第 i 个粒子的第 d 维全局极值;c_1 和 c_2 为加速因子,用来调节最大的学习步长;r_1 和 r_2 为在[0,1]内变化的随机数,用来增加搜索的随机性;j 为惯性权重,用来调节解空间的搜索范围;$j_{\max}$ 和 $j_{\min}$ 分别为最大和最小的惯性权重;N 为粒子群优化算法的最大迭代次数。

在粒子群优化算法中,较大的惯性权重有利于在更大空间范围内进行搜索,而相对较小的惯性权重则可以保证粒子群体收敛到最优位置,所以线性调整惯性权重值可以加快收敛速度。

基于粒子群优化的正交小波常模盲均衡算法(PSO-WTCMA)的均衡器结构如图 5.5.3 所示。

由图 5.5.3 可知

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}(k)+\boldsymbol{v}(k) \tag{5.5.24}$$

$$\boldsymbol{R}(k)=\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}(k) \tag{5.5.25}$$

$$z(k)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k) \tag{5.5.26}$$

$$e(k)=R^2-|z(k)|^2 \tag{5.5.27}$$

$$\boldsymbol{f}(k+1)=\boldsymbol{f}(k)+\mu\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}(k)z(k)(|z(k)|^2-R^2)\boldsymbol{R}^*(k) \tag{5.5.28}$$

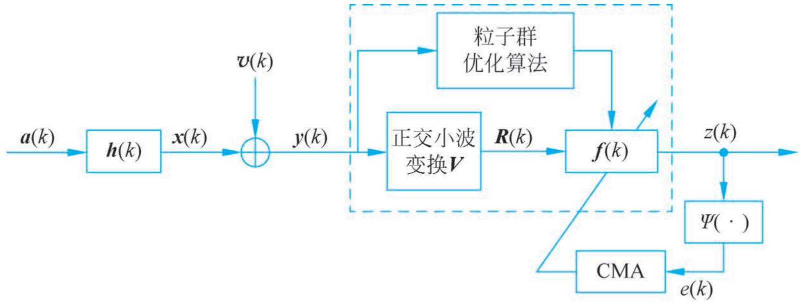

图 5.5.3 基于 PSO-WTCMA 的均衡器结构

其中，$\boldsymbol{y}(k)$为经过正交小波变换后的信号向量；$\boldsymbol{V}$ 为正交小波变换矩阵；μ 为步长；$\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}(k)=\mathrm{diag}[\hat{\sigma}_{1,0}^{2}(k),\hat{\sigma}_{1,1}^{2}(k),\cdots,\hat{\sigma}_{1,k_J-1}^{2}(k),\hat{\sigma}_{J+1,0}^{2}(k),\cdots,\hat{\sigma}_{J+1,k_J-1}^{2}(k)]$，且 $\hat{\sigma}_{j,l}^{2}(k)$ 与 $\hat{\sigma}_{J+1,l}^{2}(k)$分别表示对小波变换系数 $u_{j,l}(k)$与尺度变换系数 $s_{J,l}(k)$的平均功率估计，其迭代公式为

$$\hat{\sigma}_{j,l}^{2}(k+1)=\beta\hat{\sigma}_{j,l}^{2}(k)+(1-\beta)\,|\,u_{j,l}(k)\,|^{2} \tag{5.5.29}$$

$$\hat{\sigma}_{J+1,l}^{2}(k+1)=\beta\hat{\sigma}_{J+1,l}^{2}(k)+(1-\beta)\,|\,s_{J,l}(k)\,|^{2} \tag{5.5.30}$$

其中，β 为平滑因子，且 $0<\beta<1$。

本章小结

均衡是通信接收机克服码间干扰的重要手段。本章阐述了均衡器的原理，介绍了维纳滤波和 LMS 算法的原理、性能测度和几种常用的基于 LMS 方法的自适应均衡算法，然后给出盲均衡的概念，介绍了 Bussgang 类盲均衡算法和基于倒三谱的自适应盲均衡算法，最后介绍了基于遗传算法和粒子群优化算法的常模盲均衡算法。

本章习题

5.1 试设计一个三抽头的迫零均衡器。已知输入信号 $x(t)$在各抽样点的值依次为 $x_{-2}=0,x_{-1}=0.2,x_0=1,x_1=-0.3,x_2=0.1,\cdots$。

5.2 考虑系统

$$y(n)=hs(n)+v(n)$$

其中，$s(n)$为零均值 WSS 随机过程，相关函数为 $r_{ss}(n)$，$s(n)$和 $v(n)$不相关。确定线性 MMSE 均衡器 g 以最小化如下的均方误差。

$$\mathbb{E}[\,|\,e(n)\,|^{2}]=\mathbb{E}[\,|\,s(n)-g^{*}y(n)\,|^{2}]$$

(1) 求 MMSE 均衡器 g 的方程式。

(2) 求均方误差的方程式。

(3) 假设已知 $r_{ss}(n)$，且可从收到的数据估计 $r_{yy}(n)$，说明如何从 $r_{ss}(n)$和 $r_{yy}(n)$中获得 $r_{vv}(n)$。

(4) 假设利用过程的遍历性通过 N 个样本的样本平均估计 $r_{yy}(n)$。用这个函数形式

重写 g 的方程式。

(5) 比较迫零均衡器和 MMSE 均衡器。

5.3　有一个三抽头的横向滤波器,设抽头系数分别为:$C_{-1}=-1/4$,$C_0=1$,$C_{+1}=-1/2$;均衡器输入 $x(t)$在各抽样点上的取值分别为:$x_{-1}=1/4$,$x_0=1$,$x_{+1}=1/2$,其余都为 0。试求均衡器输出 $y(t)$在各抽样点上的值。