第 3 章　机器人运动学与动力学

机器人运动学包括正向运动学和逆向运动学。正向运动学即给定机器人各关节变量，计算机器人末端的位置姿态；逆向运动学即已知机器人末端的位置姿态，计算机器人对应位置时的每一关节变量的值。机器人动力学包括动力学正问题和动力学逆问题。动力学正问题是已知机器人各关节的作用力或力矩，计算各关节的位移、速度、加速度，求得运动轨迹；机器人动力学逆问题是已知机器人末端的运动轨迹(即各关节的位移、速度、加速度)，求各关节所需的驱动力或力矩。

正向运动学容易求出它的唯一解，而逆向运动学分析比较复杂，有多个解无法建立通用的解析算法，需要考虑解的存在性、唯一性及求解的方法等问题。动力学问题一般需要建立6个非线性微分方程组，求解非线性微分方程组，得不出一般的通解，需要假设简化方程组进行处理。

本章主要介绍机器人运动学和动力学。首先介绍位姿的描述和齐次坐标的表示，它们是运动学分析的数学基础，然后讲述了运动学的正逆问题，重点介绍D-H方法建立机器人运动学过程，简要介绍了机器人雅可比公式，讲述了动力学方程的推导以及简化计算，最后综合运动学和动力学介绍了机器人的静态特性与动态特性。

3.1　位姿描述与齐次变换

机器人在进行运动学分析时，有许多矩阵公式需要运算，这都是建立在位姿的描述以及齐次坐标变换的基础上。以下讲述位姿描述与齐次坐标变换。

3.1.1　位置描述

在二维平面内，某点 P 在坐标系中可用二维点(p_x，p_y)表示。类似的，在三维空间中，某点 P 在其内的表达可用三维点(p_x，p_y，p_z)表示。p_x，p_y，p_z 表示矢量 $\boldsymbol{OP}$ 在坐标系中的坐标分量，如图3.1所示。

在直角坐标系$\{A\}$中，把三个分量记为列矢量，空间任一点 P 的位置用 3×1 的列矢量 ${}^{A}\boldsymbol{P}$ 表示，即

$$ {}^{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

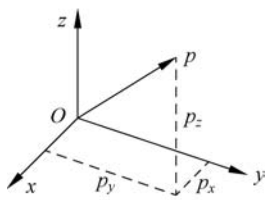

图3.1　矢量 $\boldsymbol{OP}$ 及其分量

3.1.2　姿态描述

研究机器人的运动与操作，不仅需要知道刚体在空间中某个点的位置，而且需要知道刚体的姿态。刚体的姿态可由某个固连与此刚体的坐标系描述。为了描述空间某刚体 P 的

姿态，可以设置一直角坐标系$\{B\}$与此刚体固连。用坐标系$\{B\}$的三个单位主矢量${}^{A}\boldsymbol{x}_B$，${}^{A}\boldsymbol{y}_B$，${}^{A}\boldsymbol{z}_B$ 相对于参考坐标系$\{A\}$的方向余弦组成的 3×3 矩阵：

$$ {}_{B}^{A}\boldsymbol{R} = [{}^{A}\boldsymbol{x}_B \quad {}^{A}\boldsymbol{y}_B \quad {}^{A}\boldsymbol{z}_B] \tag{3.2}$$

或

$$ {}_{B}^{A}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

表示刚体 B 相对于坐标系$\{A\}$的姿态。${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$ 称为旋转矩阵。在式(3.2)中，上标 A 代表参考坐标系$\{A\}$，下标 B 代表被描述的坐标系$\{B\}$。${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$ 总共有 9 位元素，但只有 3 个是独立的，由于${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$ 的三个矢量${}^{A}\boldsymbol{x}_B$，${}^{A}\boldsymbol{y}_B$，${}^{A}\boldsymbol{z}_B$ 都是单位矢量，且双双相互垂直，因此它们满足 6 个正交条件：

$$ {}^{A}\boldsymbol{x}_B \cdot {}^{A}\boldsymbol{x}_B = {}^{A}\boldsymbol{y}_B \cdot {}^{A}\boldsymbol{y}_B = {}^{A}\boldsymbol{z}_B \cdot {}^{A}\boldsymbol{z}_B = 1 \tag{3.3}$$

$$ {}^{A}\boldsymbol{x}_B \cdot {}^{A}\boldsymbol{y}_B = {}^{A}\boldsymbol{y}_B \cdot {}^{A}\boldsymbol{z}_B = {}^{A}\boldsymbol{z}_B \cdot {}^{A}\boldsymbol{x}_B = 0 \tag{3.4}$$

当然，上述正交条件式(3.4)也可用下面三个矢量的叉积代替：${}^{A}\boldsymbol{x}_B \times {}^{A}\boldsymbol{y}_B = {}^{A}\boldsymbol{z}_B$。

可见，旋转矩阵${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$ 是正交的，并且满足：

$$ {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{-1} = {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \quad |{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}| = 1 \tag{3.5}$$

机器人运动过程中，经常用到绕 x 轴、y 轴或 z 轴转动一角度 θ，以下列出它们的姿态旋转矩阵：

$$ \boldsymbol{R}(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$ \boldsymbol{R}(y,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$ \boldsymbol{R}(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

在本书中，用 s 表示 $\sin\theta$，c 表示 $\cos\theta$。

3.1.3 位姿描述

上面已经了解采用位置矢量描述点的位置，用旋转矩阵描述刚体的姿态。刚体 B 在空间的位置和姿态称为刚体的位姿，要完全描述刚体的位姿，通常将物体 B 与坐标系$\{B\}$相固连。坐标系$\{B\}$的坐标原点一般选取在物体 B 的质心处。相对参考系$\{A\}$，坐标系$\{B\}$的原点位置和坐标的姿态，分别由位置矢量${}^{A}\boldsymbol{P}_{BO}$ 和旋转矩阵${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$ 描述。这样，我们就可以描述刚体在空间的位姿。

$$ \{B\} = \{{}_{B}^{A}\boldsymbol{R} \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_{BO}\} \tag{3.9}$$

当表示位置时，式(3.9)中的旋转矩阵${}_{B}^{A}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$(单位矩阵)；当表示姿态时，式(3.9)中的位置矢量${}^{A}\boldsymbol{P}_{BO} = 0$。

3.1.4　运动坐标系描述

一般在笛卡儿坐标系中描述参考坐标系和运动坐标系。用 x、y、z 轴表示参考坐标系 $\{A\}$，用 n、o、a 轴表示运动坐标系 $\{B\}$。运动坐标系固连在末端执行器上，a（英文单词为 approach 的首字母）轴对应于参考坐标系的 z 轴，用来表示手爪接近物体的方向，o（英文单词为 orientation 的首字母）轴对应于参考坐标系的 y 轴，用来表示手爪抓紧物体的方向，n（英文单词为 normal 的首字母）轴对应于参考坐标系的 x 轴，用来表示垂直于 a 轴和 o 轴的方向，根据右手法则确定。图 3.2 是参考坐标系与运动坐标系。

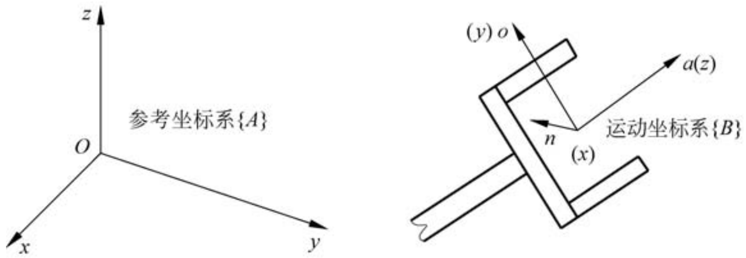

图 3.2　参考坐标系{A}与运动坐标系{B}

根据式(3.9)，可知手爪的位姿矩阵为：

$$\{\boldsymbol{B}\}=\{n \quad o \quad a \quad P\} \tag{3.10}$$

3.1.5　齐次坐标变换

上面所述的为单一的固定坐标系的描述，但空间中任意一点 P 在不同的坐标系中的描述是各不相同的。为了阐述从一个坐标系到另一个坐标系的关系表示，需用讨论矩阵变换的相关问题，由此引出齐次坐标变换。

1. 平移坐标变换

首先，我们假设坐标系 $\{B\}$，$\{A\}$ 具有相同的姿态，但是 $\{B\}$ 与 $\{A\}$ 的坐标系原点不重合。用位置矢量 ${}^{A}\boldsymbol{P}_{BO}$ 描述它相对于 $\{A\}$ 的位置，如图 3.3 所示。称 ${}^{A}\boldsymbol{P}_{BO}$ 为 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的平移矢量。如果点 P 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置为 ${}^{B}\boldsymbol{P}$，那么它相对于坐标系 $\{A\}$ 的位置矢量 ${}^{A}\boldsymbol{P}$ 可由矢量相加得出，即

$${}^{A}\boldsymbol{P}={}^{B}\boldsymbol{P}+{}^{A}\boldsymbol{P}_{BO} \tag{3.11}$$

式(3.11)为平移方程。平移坐标变换如图 3.3 所示。

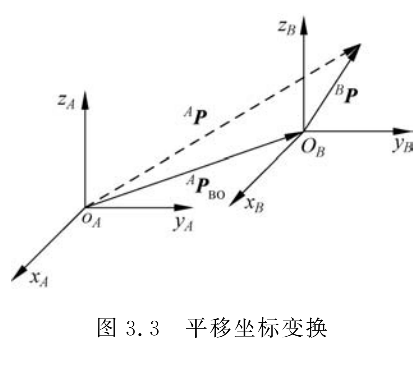

图 3.3　平移坐标变换

2. 旋转坐标变换

P 点在坐标系 $\{B\}$ 和 $\{A\}$ 有共同的坐标原点，只是姿态不同。可用旋转矩阵 ${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$ 描述 $\{A\}$ 相对于 $\{B\}$ 的姿态，如图 3.4 所示。得出同一点 P 在两个坐标系中的变换关系为：

$${}^{A}\boldsymbol{P}={}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P} \tag{3.12}$$

式(3.12)为旋转方程。

类似地用${}^{B}_{A}\boldsymbol{R}$描述坐标系$\{A\}$相对于$\{B\}$的姿态。${}^{B}_{A}\boldsymbol{R}$和${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$都是正交矩阵，两者互逆。根据正交矩阵的性质结合式(3.5)可得到如下公式：

$$ {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{-1} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{3.13}$$

一般情况，坐标系$\{B\}$的原点和坐标系$\{A\}$的原点不重合，$\{B\}$的姿态与$\{A\}$的姿态也不相同。综合平移和旋转变换公式，可以得到任意一点P的变换关系如下：

$$ {}^{A}\boldsymbol{P} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P} + {}^{A}\boldsymbol{P}_{BO} \tag{3.14}$$

式(3.14)是平移和旋转的复合变换方程，如图3.5所示。

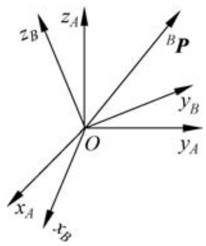

图3.4 旋转坐标变换

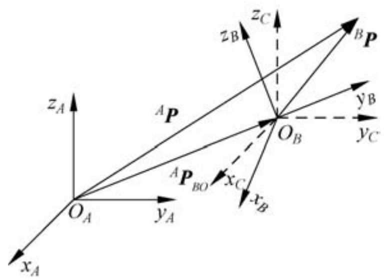

图3.5 复合变换

复合变换方程可以这样理解，在变换过程中相当于有一个中间的坐标系$\{C\}$，此坐标系$\{C\}$的坐标原点与$\{B\}$重合，而姿态与$\{A\}$相同。根据式(3.12)，得到中间坐标系$\{C\}$的变换方程为：

$$ {}^{C}\boldsymbol{P} = {}^{C}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P} \quad {}^{C}_{B}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \quad {}^{C}\boldsymbol{P} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P} $$

由式(3.11)，同样得到复合变换式(3.14)(见图3.5)。

$$ {}^{A}\boldsymbol{P} = {}^{C}\boldsymbol{P} + {}^{A}\boldsymbol{P}_{CO} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P} + {}^{A}\boldsymbol{P}_{BO} $$

例3.1 已知坐标系$\{B\}$和$\{A\}$，它们的初始位姿重合，首先坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的Z_A轴转30°，又沿$\{A\}$的X_A轴移动10个单位，再沿$\{A\}$的Y_A轴移动20个单位。求位置矢量${}^{A}\boldsymbol{P}_{BO}$和旋转矩阵${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$。如果点$P$在$\{B\}$的描述为${}^{B}\boldsymbol{P}=[4,8,0]^{\mathrm{T}}$，求它在坐标系$\{A\}$中的描述${}^{A}\boldsymbol{P}$。

解：根据式(3.8)和式(3.1)可得：

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(Z,30^\circ) = \begin{bmatrix} \cos30^\circ & -\sin30^\circ & 0 \\ \sin30^\circ & \cos30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_{BO} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} $$

由式(3.14)可得：

$$ {}^{A}\boldsymbol{P} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P} + {}^{A}\boldsymbol{P}_{BO} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.464 \\ 28.928 \\ 0 \end{bmatrix} $$

3. 齐次变换

在平面直角坐标系中，点A的坐标可以表示为$A(x,y)$或$A'(x',y')$。但在图3.6中，点F可表示为AD和BC的交点，变换后$A'D' /\!/ B'C'$，其交点F'为一无穷远点，但是这一无穷远点不能用直角坐标来表示。为了解决此问题，可以把某点的x或y坐标用两个数的

比来表示，如 5 可以表示为 10/2 或 5/1 等。因此，一点的直角坐标(x,y)可表示为(X/W，Y/W)。对同一点，随着 W 的值不同而会有不同的坐标。有序的三组数(X,Y,W)称为点的齐次坐标。这样一来就可以将 N 维空间的点在 $N+1$ 维空间中表示。点的齐次坐标(X,Y,W)与直角坐标(x,y)的关系为：

$$x=X/W \quad y=Y/W$$

平行线的交点示意图如图 3.6 所示。

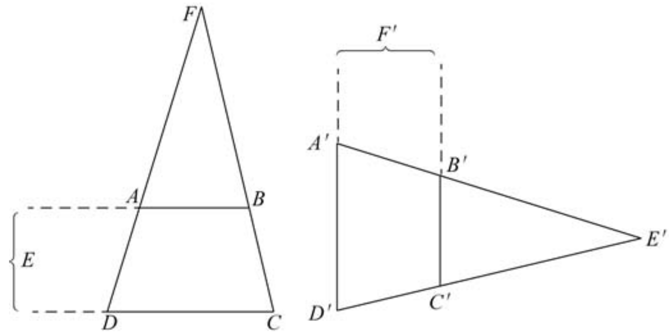

图 3.6　平行线的交点示意图

可以得到某点 P 的直角坐标和齐次坐标分别为：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

坐标原点的矢量，即零矢量表示为 [0,0,0,1]，它是没有定义的。具有形如[a,b,c,0]的矢量表示无限远的矢量，用来表示方向，即用 [1,0,0,0]，[0,1,0,0]，[0,0,1,0] 分别表示 x,y,z 轴的方向。

在机器人矩阵变换中同理，三维坐标点可以用四维空间进行表示。

可得式(3.14)的齐次变换形式为：

$$\begin{bmatrix}{}^{A}\boldsymbol{P}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{P}_{BO}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{P}\\1\end{bmatrix} \tag{3.15}$$

式(3.15)的矩阵形式为：

$${}^{A}\boldsymbol{P}={}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\,{}^{B}\boldsymbol{P} \tag{3.16}$$

式(3.16)中，齐次坐标${}^{A}\boldsymbol{P}$ 和${}^{B}\boldsymbol{P}$ 是一个 4×1 的列矢量，与式(3.14)中的维数不同，加入了第 4 个元素 1。齐次变换矩阵${}^{A}_{B}\boldsymbol{T}$ 是 4×4 的方阵，具有如下形式：

$${}^{A}_{B}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}{}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{P}_{B0}\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.17}$$

${}^{A}_{B}\boldsymbol{T}$ 综合地表示了平移变换和旋转变换。

可见，引入齐次坐标后，主要解决了以下问题：

(1) 无穷远点表示问题。在几何当中，两条平行线表示为 $Ax+By+C=0$，$Ax+By+D=0$ 的两个方程，它们之间没有交点(解)，但引入齐次坐标后两条直线可表示为 $AX/W+$

$BY/W+C=0$，$AX/W+BY/W+D=0$，它们之间有交点（解），交点为无穷远点，即 $W=0$，$(X,Y,0)$表示无穷远点。

（2）矩阵运算。可以在矩阵运算中，把平移旋转等各种变换放在一个矩阵内进行，便于表达齐次变换矩阵${}^A_B\boldsymbol{T}$。

4. 平移齐次坐标变换

为了保证所表示的矩阵为方阵，如果同一矩阵既表示姿态又表示位置，那么可在矩阵中加入比例因子使之成为 4×4 矩阵，如果只表示姿态，则可去掉比例因子得到 3×3 矩阵，或加入第 4 列全为零的位置数据以保持矩阵为方阵。

平移齐次变换矩阵可以简单地表示为：

$$\boldsymbol{T}=\mathrm{Trans}(d_x,d_y,d_z)=\begin{bmatrix}1&0&0&d_x\\0&1&0&d_y\\0&0&1&d_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.18}$$

其中 d_x，d_y 和 d_z 是纯平移矢量 d 相对于参考坐标系 x，y，z 的三个分量。

5. 旋转齐次坐标变换

为了得到在参考坐标系中的坐标，旋转坐标系中的点 P（或矢量 $\boldsymbol{P}$）的坐标必须左乘旋转矩阵。

对于绕轴 x，y，z 做转角为 θ 的旋转变换，其旋转齐次变换矩阵可以表示为：

$$\boldsymbol{T}=\mathrm{Rot}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c\theta&-s\theta&0\\0&s\theta&c\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{T}=\mathrm{Rot}(y,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta&0&s\theta&0\\0&1&0&0\\-s\theta&0&c\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{T}=\mathrm{Rot}(z,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta&-s\theta&0&0\\s\theta&c\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.21}$$

6. 复合变换

复合变换是由固定参考坐标系或者当前运动坐标系的一系列沿轴平移变换和旋转变换所组成的。任何变换都可以分解为按一定顺序的组合平移变换和旋转变换。

在实际应用中，点 P 相对于参考坐标系的坐标都是通过用相应的每个变换矩阵左乘该点的坐标得到的。如果相对于运动坐标系或当前坐标系的轴的变换，则为了计算当前坐标系中点的坐标相对于参考坐标系的变化，这时需要右乘变换矩阵。

例 3.2 在坐标系$\{A\}$中，点 P 的运动轨迹为：首先绕 Z_a 轴转 30°，又沿$\{A\}$的 X_a 轴移动 10 个单位，再沿$\{A\}$的 Y_a 轴移动 20 个单位。如果点 P 在原来的位置为${}^A\boldsymbol{P}_1=[4,8,0]^{\mathrm{T}}$，

用齐次坐标变换法求运动后的位置$^{A}\boldsymbol{P}_2$。

解：用齐次坐标变换来解答，可得实现旋转和平移的齐次复合变换矩阵为：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0.866 & -0.5 & 0 & 10\\ 0.5 & 0.866 & 0 & 20\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

已知：

$$^{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

利用齐次坐标变换的复合变换矩阵，可得：

$$^{A}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{T}\,^{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0.866 & -0.5 & 0 & 10\\ 0.5 & 0.866 & 0 & 20\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.464\\ 28.928\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

3.2　正运动学与逆运动学

机器人运动学研究的是机器人的工作空间与关节空间之间的映射关系或机器人的运动学模型，包括正运动学问题和逆运动学问题两部分。

运动学问题是在不考虑引起运动的力和力矩的情况下，描述机械臂的运动。因此运动学描述的是一种几何方法。首先介绍正运动学问题，它是根据给定的机器人关节变量的取值确定末端执行器的位置和姿态。逆运动学问题是根据给定的末端执行器的位置和姿态确定机器人关节变量的取值。

3.2.1　连杆参数与关节变量

机器人是由一组通过关节连接在一起的连杆组成。杆间的连接物称为关节。可以对杆件和关节进行编号，应用于矩阵中，表示机器人运动。编号的方法为：固定的基座为连杆 0，从基座起依次向上第一个可动连杆为连杆 1，之后为连杆 2、……、连杆 n；关节 i 连接连杆 $i-1$ 和连杆 i，即连杆 i 离基座近的一端（简称近端）有关节 i，而离基座远的一端（简称远端）有关节 $i+1$。

为了确定末端执行器在三维空间的位置和姿态，机器人至少需要 6 个关节（因为当描述一个物体在空间的位置和姿态时需要 6 个参数：3 个位置和 3 个姿态）。

1. 连杆参数

建立机器人运动学方程时，为了确定两个相邻关节轴的位置关系，可以把连杆看作刚体，用空间的直线表示关节轴，关节轴 i 可用空间的一条直线，也就是用一个矢量表示，连杆 i 绕关节轴 i 相对于连杆 $i-1$ 转动。所以，在描述连杆运动时，一个连杆的运动用两个参数

描述，这两个参数定义了空间两个关节轴之间的相对位置，具体如图 3.7 所示。

三维空间中，任意两轴之间的距离为确定值，两轴之间的距离就是轴心线之间的公垂线的长度。两轴的公垂线条数取决于轴心线是否平行。当轴心线平行时，有无数条长度相等的公垂线，而当轴心线不平行时，两轴之间的公垂线只有一条。

在图 3.7 中，关节轴 $i-1$ 和关节轴 i 之间的公垂线长度记为 a_{i-1}，a_{i-1} 即为连杆长度。

两关节轴的相对位置关系除了连杆长度，还有另一个参数——连杆转角。它表示关节轴 $i-1$ 和关节轴 i 投影在与两连杆公垂线垂直的平面内，测量的轴 $i-1$ 依据右手法则绕关节长度 a_{i-1} 转向轴 i 的角度。

在图 3.7 中，关节轴 $i-1$ 和关节轴 i 之间的夹角角度记为 α_{i-1}，α_{i-1} 即为连杆转角。

2. 关节变量

相邻两连杆之间有一个共同的关节轴线。因此，每一关节轴线有两条公垂线与它垂直，每条公垂线相应于一个连杆。一般把这两条公垂线的距离称为连杆的偏距，记为 d_i，它代表连杆 i 相对于连杆 $i-1$ 的偏置。两公垂线之间的夹角称为关节角，记为 θ_i，它代表连杆 i 相对于连杆 $i-1$ 绕该轴线 i 的旋转角度。具体如图 3.8 所示。

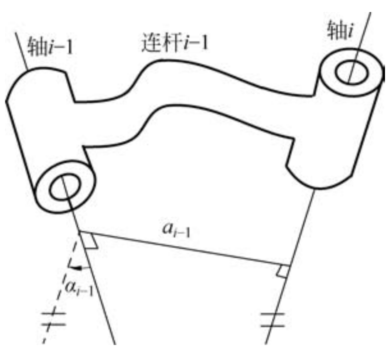

图 3.7 连杆参数

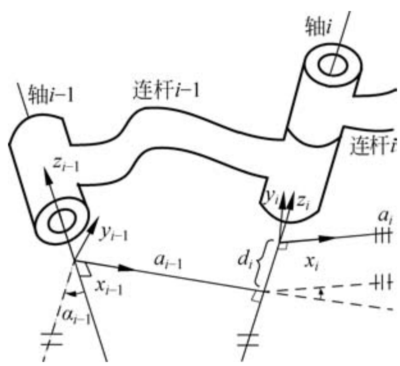

图 3.8 关节变量

在图 3.8 中，公垂线 a_{i-1} 和公垂线 a_i 之间的长度记为 d_i，d_i 即为连杆偏距。

在图 3.8 中，公垂线 a_{i-1} 的延长线和公垂线 a_i 之间绕关节轴 i 旋转所形成的角度记为 θ_i，θ_i 即为关节角。

3.2.2 D-H 方法与正运动学方程

D-H 方法是在 1955 年由 Denavit 和 Hartenberg 在 *ASME Journal of Applied Mechanics* 提出的。后来作者利用这篇论文对机器人进行表示和建模，并推导出了它们的运动方程，这已成为表示机器人和对机器人运动学建模的标准方法。

3.2.1 节介绍的连杆参数和关节变量的四个参数：连杆长度 a_{i-1}，连杆转角 α_{i-1}，连杆偏距 d_i 和关节角 θ_i 即为机器人的 Denavit-Hartenberg 参数，简称 D-H 参数。它们是 D-H 方法建立机器人运动学的基础。

D-H 法建立机器人运动学模型的步骤，首先需要指定单个关节的参考坐标系。参考图 3.8，以下是给每个关节指定参考坐标系的步骤：

(1) 指定 z 轴。坐标系$\{i\}$的 z 轴 z_i 与关节轴 i 共线，指向任意规定。对于旋转关节，

z 轴位于按右手规则旋转方向，绕 z 轴的旋转 θ 是关节变量。对于滑动关节，z 轴为沿直线运动的方向，沿 z 轴的连杆长度 d 是关节变量。关节 i 处的坐标原点位于轴 $i-1$ 和 i 的公垂线与关节 i 轴线的交点上。若相邻连杆的轴线相交于一点，那原点就在交点上，若两轴线平行，则选择原点使对下一连杆的距离 $d_{i+1}=0$。

(2) 指定 x 轴。通常在公垂线方向上定义本地参考坐标系的 x 轴。例如，如果 a_{i-1} 表示 z_{i-1} 与 z_i 之间的公垂线，则定义 x_{i-1} 的方向为沿 a_{i-1} 的方向。同样，如果 z_i 与 z_{i+1} 之间的公垂线为 a_i，则 x_i 的方向将沿 a_i 的方向。如果 $a_i=0$，则取 x_i 的方向为 z_i 与 z_{i+1} 的矢量积同轴方向上，可同向或反向。

(3) y 轴。知道了 x 和 z 轴，y 轴按右手法则确定。即为 z_i 和 x_i 的矢量积方向。

D-H 参数的正负取值。在建立机器人关节坐标系时，在关节轴 i 上，建立坐标系轴 z_i，z_i 正向在两个方向中选一个方向即可，但所有 z 轴应尽可能一致。D-H 法 4 个参数中，a_i 是大于等于 0 的，α_{i-1}、θ_i 的正负根据判定旋转矢量方向的右手法则确定，d_i 的正负根据移动方向与 z_i 一致时取正，否则取负号。

其次需要知道将一个参考坐标系变换到下一个参考坐标系的变换矩阵。

假设现在位于本地参考坐标系 $x_{i-1}-z_{i-1}$，那么通过以下 4 步标准运动即可到达下一个本地参考坐标系 x_n-z_n。

(1) 将 z_{i-1} 轴绕 x_{i-1} 轴旋转 α_{i-1}，使得 z_{i-1} 与 z_i 互相平行。

(2) 沿着 x_{i-1} 轴平移 a_{i-1} 的距离，使得 z_{i-1} 与 z_i 共线。这时两个坐标系的原点处在同一位置。

(3) 绕 z_i 旋转 θ_i。使得 x_{i-1} 与 x_i 互相平行。

(4) 沿 z_i 轴平移 d_i 距离。这时坐标系 $i-1$ 和 i 完全相同。

以上从一个坐标系变换到了下一个坐标系。表示前面 4 个运动的两个依次坐标之间的变换 ${}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}$ 是 4 个运动变换矩阵的乘积。由于所有的变换都是相对于当前的坐标系进行的，因此所有的变换矩阵都是右乘的。从而得到如下结果：

$$
{}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}=\mathrm{Rot}(x,\alpha_{i-1})\times\mathrm{Trans}(x,a_{i-1,})\times\mathrm{Rot}(z,\theta_i)\times\mathrm{Trans}(z,d_i) \tag{3.22}
$$

该公式把关节 $i-1$ 变换到 i 的变换矩阵。

把式(3.18)～式(3.21)，代入式(3.22)，可得连杆变换矩阵 ${}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}$ 的一般表达式：

$$
{}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.23}
$$

从机器人的参考坐标系开始，我们可以将其转换到机器人的第 1 个关节，再转换到第 2 个关节，以此类推，直至转换到末端执行器。注意，在任何坐标之间的变换均采用与前面相同的运动步骤。

在机器人的基座上，可以从第 1 个关节开始变换到第 2 个关节，然后到第 3 个关节，等等，直到机器人末端和最终的末端执行器。则机器人对基座的关系 ${}^{0}_{6}\boldsymbol{T}$ 为：

$$
{}^{0}_{6}\boldsymbol{T}={}^{0}_{1}\boldsymbol{T}\,{}^{1}_{2}\boldsymbol{T}\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{T}\,{}^{3}_{4}\boldsymbol{T}\,{}^{4}_{5}\boldsymbol{T}\,{}^{5}_{6}\boldsymbol{T} \tag{3.24}
$$

如果机器人 6 个关节中的变量分别是：$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6$，则末端相对于基座的齐次矩阵也应该是包含这 6 个变量的 4×4 矩阵，即

$$ {}_6^0\boldsymbol{T} = {}_1^0\boldsymbol{T}(\theta_1)\,{}_2^1\boldsymbol{T}(\theta_2)\,{}_3^2\boldsymbol{T}(\theta_3)\,{}_4^3\boldsymbol{T}(\theta_4)\,{}_5^4\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}_6^5\boldsymbol{T}(\theta_6) \tag{3.25} $$

此为机器人正向运动学的表达式，即已知机器人各关节值，计算出末端相对于基座的位姿。

一般为了简化 $\boldsymbol{T}$ 矩阵计算，可以制作一张关节和连杆参数的表格，其中每个关节和连杆的参数值可从机器人的结构示意图上确定，并且将这些参数代入 $\boldsymbol{T}$ 矩阵，如表 3.1 所示。

表 3.1　D-H 参数表

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1				
…				
n				

例 3.3　PUMA560 属于关节式机器人，6 个关节都是转动关节，如图 3.9 所示。前 3 个关节确定手腕参考点的位置，后 3 个关节确定手腕的方位。与大多数工业机器人一样，后 3 个关节轴线交于一点。该点选作为手腕的参考点，也选作为连杆坐标系{4}，{5}和{6}的原点。关节 1 的轴线为铅直方向，关节 2 和关节 3 的轴线水平，且平行，距离为 a_2。关节 1 和关节 2 的轴线垂直相交，关节 3 和关节 4 的轴线垂直交错，距离为 a_3。各连杆坐标系如图 3.9 所示，相应的连杆参数列于表 3.2。其中，$a_2=431.8\text{mm}$，$a_3=20.32\text{mm}$，$d_2=149.09\text{mm}$，$d_4=433.07\text{mm}$，$d_6=56.25\text{mm}$。

解：

表 3.2　PUMA560 D-H 参数表

连杆 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	变量范围
1	0°	0	0	$\theta_1(90°)$	−160°～160°
2	−90°	0	d_2	$\theta_2(0°)$	−225°～45°
3	0°	a_2	0	$\theta_3(-90°)$	−45°～225°
4	−90°	a_3	d_4	$\theta_4(0°)$	−110°～170°
5	90°	0	0	$\theta_5(0°)$	−100°～100°
6	−90°	0	0	$\theta_6(0°)$	−266°～266°

据式(3.23)和表 3.2 所示连杆参数，可求得各连杆变换矩阵如下：

$$ {}_1^0\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}_2^1\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_3^2\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}_4^3\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

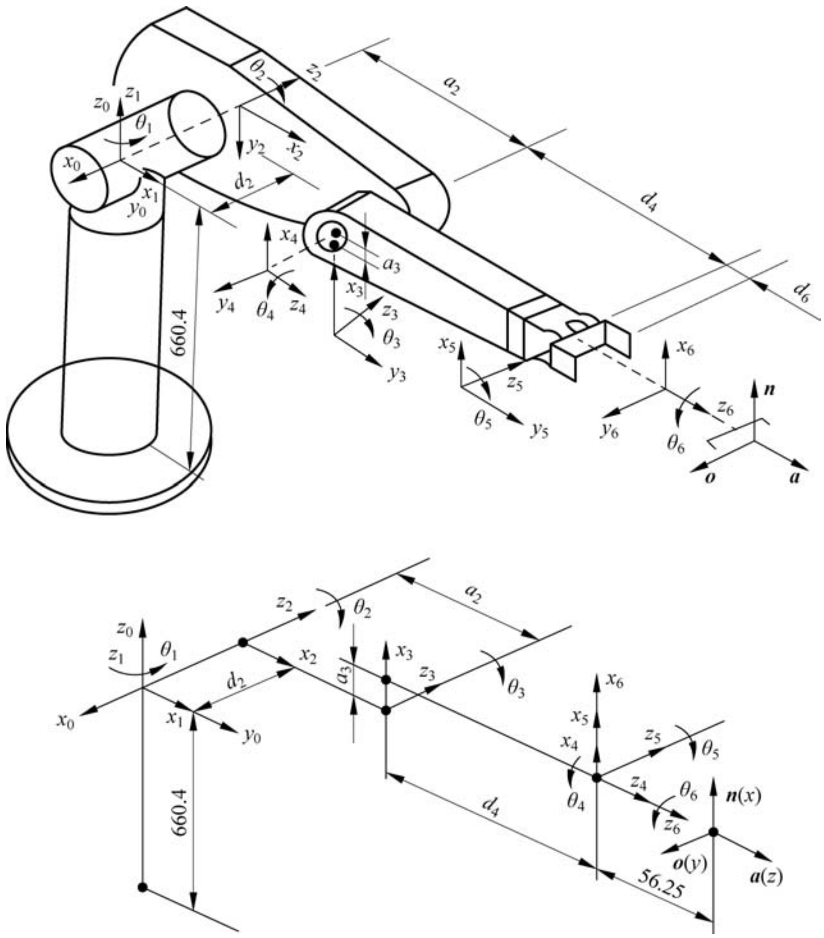

图 3.9　PUMA560 机器人 D-H 坐标系

$$
{}_5^4\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad {}_6^5\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

各连杆变换矩阵相乘,得到 PUMA560 机器人的变换矩阵：

$$
{}_6^0\boldsymbol{T}={}_1^0\boldsymbol{T}(\theta_1){}_2^1\boldsymbol{T}(\theta_2){}_3^2\boldsymbol{T}(\theta_3){}_4^3\boldsymbol{T}(\theta_4){}_5^4\boldsymbol{T}(\theta_5){}_6^5\boldsymbol{T}(\theta_6)
$$

即为关节变量 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6$ 的函数。要求解此运动方程,需先计算某些中间结果：

$$
{}_6^4\boldsymbol{T}={}_5^4\boldsymbol{T}{}_6^5\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0\\ s_6 & c_6 & 0 & 0\\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.26}
$$

$$
{}^{3}_{6}\boldsymbol{T}={}^{3}_{4}\boldsymbol{T}{}^{4}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5c_6-s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.27}
$$

由于 PUMA560 的关节 2 和关节 3 相互平行，把${}^{1}_{2}T(\theta_2)$和${}^{2}_{3}T(\theta_3)$相乘

$$
{}^{1}_{3}\boldsymbol{T}={}^{1}_{2}\boldsymbol{T}{}^{2}_{3}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.28}
$$

其中，$c_{23}=\cos(\theta_2+\theta_3)=c_2c_3-s_2s_3$； $s_{23}=\sin(\theta_2+\theta_3)=c_2s_3+s_2c_3$。可见，两旋转关节平行时，利用角度之和的公式，可以得到比较简单的表达式。

再将式(3.27)与式(3.28)相乘，可得

$$
{}^{1}_{6}\boldsymbol{T}={}^{1}_{3}\boldsymbol{T}{}^{3}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} {}^{1}n_x & {}^{1}o_x & {}^{1}a_x & {}^{1}p_x \\ {}^{1}n_y & {}^{1}o_y & {}^{1}a_y & {}^{1}p_y \\ {}^{1}n_z & {}^{1}o_z & {}^{1}a_z & {}^{1}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.29}
$$

其中：

$$
\begin{cases}
{}^{1}n_x=c_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_{23}s_5c_6, \\
{}^{1}n_y=-s_4c_5c_6-c_4s_6, \\
{}^{1}n_z=-s_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_{23}s_5c_6, \\
{}^{1}o_x=-c_{23}(c_4c_5s_6+s_4c_6)+s_{23}s_5s_6, \\
{}^{1}o_y=s_4c_5s_6-c_4c_6, \\
{}^{1}o_z=s_{23}(c_4c_5s_6+s_4c_6)+c_{23}s_5s_6, \\
{}^{1}a_x=-c_{23}c_4s_5-s_{23}c_5, \\
{}^{1}a_y=s_4s_5, \\
{}^{1}a_z=s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5, \\
{}^{1}p_x=a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}, \\
{}^{1}p_y=d_2, \\
{}^{1}p_z=-a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23},
\end{cases} \tag{3.30}
$$

于是，可求得机器人的 $\boldsymbol{T}$ 变换矩阵：

$$
{}^{0}_{6}\boldsymbol{T}={}^{0}_{1}\boldsymbol{T}{}^{1}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.31}
$$

其中：

$$
\begin{cases}
n_x = c_1\left[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6\right] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\
n_y = s_1\left[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6\right] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\
n_z = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6, \\
o_x = c_1\left[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6\right] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6), \\
o_y = s_1\left[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6\right] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5c_6), \\
o_z = -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6, \\
a_x = -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5, \\
a_y = -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5, \\
a_z = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5, \\
p_x = c_1\left[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}\right] - d_2s_1, \\
p_y = s_1\left[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}\right] + d_2c_1, \\
p_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23},
\end{cases}
\tag{3.32}
$$

式(3.31)表示的 PUMA560 手臂变换矩阵${}^0_6\boldsymbol{T}$，描述了末端连杆坐标系{6}相对基坐标系{0}的位姿，是机器人运动分析的基础。

为校核所得${}^0_6\boldsymbol{T}$ 的正确性，计算 $\theta_1=90°$，$\theta_2=0°$，$\theta_3=-90°$，$\theta_4=\theta_5=\theta_6=0°$时，手臂变换矩阵${}^0_6\boldsymbol{T}$ 的值。其计算结果为：

$$
{}^0_6\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_2+d_4 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

与图 3.9 所示的情况完全一致。

3.2.3　逆运动学方程

在 3.2.2 节讨论了机器人的正向运动学，此节将研究逆向运动学问题，即机器人运动方程的求解问题：已知末端坐标系相对于基座坐标系的期望位置和姿态，求机器人能够达到预期位姿的关节变量。

以 PUMA560 机器人为例来阐述如何求解这些方程。

将 PUMA560 的运动方程(3.31)写为：

$$
{}^0_6\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1\boldsymbol{T}(\theta_1){}^1_2\boldsymbol{T}(\theta_2){}^2_3\boldsymbol{T}(\theta_3){}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4){}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5){}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6) \tag{3.33}
$$

若末端连杆的位姿已经给定，即 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 为已知，则求关节变量 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6$ 的值称为运动反解。用未知的连杆逆变换同时左乘方程(3.33)两边，把关节变量分离出来，从而求解。具体步骤如下：

1）求 θ_1

可用逆变换${}^0_1\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1)$左乘方程(3.33)两边，

$$
{}^0_1\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1){}^0_6\boldsymbol{T} = {}^1_2\boldsymbol{T}(\theta_2){}^2_3\boldsymbol{T}(\theta_3){}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4){}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5){}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6) \tag{3.34}
$$

各式代入得

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6\boldsymbol{T} \tag{3.35}$$

令矩阵方程(3.35)两端的元素(2,4)对应相等,可得:

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_2 \tag{3.36}$$

利用三角代换:

$$p_x = \rho\cos\Phi, \quad p_y = \rho\sin\Phi \tag{3.37}$$

式中,$\rho=\sqrt{p_x^2+p_y^2}$;$\Phi=\mathrm{atan2}(p_y,p_x)$。把代换式(3.37)代入式(3.36),得到 θ_1 的解:

$$\begin{cases} \sin(\Phi-\theta_1)=d_2/\rho;\ \cos(\Phi-\theta_1)=\pm\sqrt{1-(d_2/\rho)^2} \\ \Phi-\theta_1=\mathrm{atan2}\left[\dfrac{d_2}{\rho},\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{d_2}{\rho}\right)^2}\right] \\ \theta_1=\mathrm{atan2}(p_y,p_x)-\mathrm{atan2}\left(d_2,\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2-d_2^2}\right) \end{cases} \tag{3.38}$$

式中,正负号对应于 θ_1 的两个可能解。

2) 求 θ_3

在选定 θ_1 的一个解之后,再令矩阵方程(3.35)两端的元素(1,4)和(3,4)分别对应相等,即得两方程:

$$\begin{cases} c_1 p_x + s_1 p_y = a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2 \\ -p_z = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2 \end{cases} \tag{3.39}$$

式(3.36)与式(3.39)的平方和为:

$$a_3 c_3 - d_4 s_3 = k \tag{3.40}$$

式中,

$$k=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2-a_2^2-a_3^2-d_2^2-d_4^2}{2a_2} \tag{3.41}$$

方程(3.40)中已经消去 θ_2,且方程(3.36)与方程(3.40)具有相同形式,因而可由三角代换求解 θ_3:

$$\theta_3=\mathrm{atan2}(a_3,d_4)-\mathrm{atan2}\left(k,\pm\sqrt{a_3^2+d_4^2-k^2}\right) \tag{3.42}$$

式中,正负号对应 θ_3 的两种可能解。

3) 求 θ_2

为求解 θ_2,在矩阵方程(3.33)两边左乘逆变换${}^0_3\boldsymbol{T}^{-1}$,有:

$${}^0_3\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\,{}^0_6\boldsymbol{T} = {}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4)\,{}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6) \tag{3.43}$$

即有

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3_6\boldsymbol{T} \tag{3.44}$$

式中,变换${}^3_6\boldsymbol{T}$ 由式(3.27)给出。令矩阵方程(3.44)两边的元素(1,4)和(2,4)分别对应相等,可得:

$$\begin{cases}c_1c_{23}p_x+s_1c_{23}p_y-s_{23}p_z-a_2c_3=a_3\\-c_1s_{23}p_x-s_1s_{23}p_y-c_{23}p_x+a_2s_3=d_4\end{cases}\tag{3.45}$$

联立求解得 s_{23} 和 c_{23}：

$$\begin{cases}s_{23}=\dfrac{(-a_3-a_2c_3)p_z+(c_1p_x+s_1p_y)(a_2s_3-d_4)}{p_z^2+(c_1p_x+s_1p_y)^2}\\c_{23}=\dfrac{(-d_4+a_2s_3)p_z-(c_1p_x+s_1p_y)(-a_2c_3-a_3)}{p_z^2+(c_1p_x+s_1p_y)^2}\end{cases}$$

s_{23} 和 c_{23} 表达式的分母相等，且为正。于是：

$$\theta_{23}=\theta_2+\theta_3=\operatorname{atan2}[-(a_3+a_2c_3)p_z+(c_1p_x+s_1p_y)(a_2s_3-d_4),(-d_4+a_2s_3)p_z+(c_1p_x+s_1p_y)(a_2c_3+a_3)]\tag{3.46}$$

根据 θ_1 和 θ_3 解的四种可能组合，由式(3.46)可以得到相应的四种可能值 θ_{23}，于是可得到 θ_2 的四种可能解：

$$\theta_2=\theta_{23}-\theta_3\tag{3.47}$$

式中，θ_2 取与 θ_3 相对应的值。

4）求 θ_4

因为式(3.44)的左边均为已知，令两边元素(1,3)和(3,3)分别对应相等，则可得：

$$\begin{cases}a_xc_1c_{23}+a_ys_1c_{23}-a_zs_{23}=-c_4s_5\\-a_xs_1+a_yc_1=s_4s_5\end{cases}$$

只要 $s_5\neq 0$，便可求出 θ_4：

$$\theta_4=\operatorname{atan2}(-a_xs_1+a_yc_1,-a_xc_1c_{23}-a_ys_1c_{23}+a_zs_{23})\tag{3.48}$$

当 $s_5=0$ 时，机器人处于奇异形位。此时，关节轴 4 和 6 重合，只能解出 θ_4 与 θ_6 的和或差。奇异形位可以由式(3.48)中 atan2 的两个变量是否都接近零来判别。若都接近零，则为奇异形位；否则，不是奇异形位。在奇异形位时，可任意选取 θ_4 的值，再计算相应的 θ_6 值。

5）求 θ_5

据求出的 θ_4，可进一步解出 θ_5，将式(3.33)两端左乘逆变换${}^0_4\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$，可得：

$${}^0_4\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4){}^0_6\boldsymbol{T}={}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5){}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6)\tag{3.49}$$

式(3.49)的 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 前已求出，则逆变换${}^0_4\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$为：

$$\begin{bmatrix}c_1c_{23}c_4+s_1s_4 & s_1c_{23}c_4-c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4+d_2s_4-a_3c_4\\-c_1c_{23}s_4+s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4-c_1c_4 & s_{23}s_4 & a_2c_3s_4+d_2c_4+a_3s_4\\-c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3-d_4\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

方程式(3.49)的右边${}^4_6\boldsymbol{T}(\theta_5,\theta_6)={}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5){}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6)$，由式(3.26)给出。据矩阵两边元素(1,3)和(3,3)分别对应相等，可得：

$$\begin{cases}a_x(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)+a_y(s_1c_{23}c_4-c_1s_4)-a_z(s_{23}c_4)=-s_5\\a_x(-c_1s_{23})+a_y(-s_1s_{23})+a_z(-c_{23})=c_5\end{cases}\tag{3.50}$$

由此得到 θ_5 的封闭解：

$$\theta_5=\operatorname{atan2}(s_5,c_5)\tag{3.51}$$

6）求 θ_6

将式(3.33)改写为：

$$ {}^0_5\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_5){}^0_6\boldsymbol{T}={}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6) \tag{3.52}$$

让矩阵方程(3.52)两边元素(3,1)和(1,1)分别对应相等，可得：

$$-n_x(c_1c_{23}s_4-s_1c_4)-n_y(s_1c_{23}s_4+c_1c_4)+n_z(s_{23}s_4)=s_6$$

$$n_x[(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)c_5-c_1s_{23}s_5]+n_y[(s_1c_{23}c_4-c_1s_4)c_5-s_1s_{23}s_5]$$
$$-n_z(s_{23}c_4c_5+c_{23}s_5)=c_6$$

从而可求出 θ_6 的封闭解：

$$\theta_6=\mathrm{atan2}(s_6,c_6) \tag{3.53}$$

PUMA560 的运动反解可能存在 8 种解。但是，由于结构的限制，例如各关节变量不能在全部 360°范围内运动，有些解不能实现。在机器人存在多种解的情况下，应选取其中最满意的一组解，以满足机器人的工作要求。

3.3 雅可比公式

雅可比矩阵表示机构部件随时间变化的几何关系，它可以将单个关节的微分运动或速度转换为末端执行器的微分运动或速度，也可将单个关节的运动与整个机构的运动联系起来。微分运动指机构(如机器人)的微小运动，可以用它来推导不同部件之间的速度关系。在对机器人进行操作与控制时，常常涉及机器人位置和姿态的微小变化。这些变化可由描述机器人位置的齐次变换矩阵的微小变化表示。由于关节角的值是随时间变化的，从而雅可比矩阵各元素的大小也随时间变化，因此雅可比矩阵是与时间相关的。

3.3.1 雅可比矩阵

机器人的操作速度与关节速度的线性变换定义为机器人的雅可比矩阵，可视它为从关节空间向操作空间运动速度的传动比。

令六自由度机器人的运动方程为：

$$x_i=f_i(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6) \tag{3.54}$$

代表操作空间 x 与关节空间 q 之间的位移关系。

由 q_i 的微分变化引起的 x_i 的微分变化为：

$$\begin{cases}
\delta x_1=\dfrac{\partial f_1}{\partial q_1}\delta q_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial q_2}\delta q_2+\dfrac{\partial f_1}{\partial q_3}\delta q_3+\dfrac{\partial f_1}{\partial q_4}\delta q_4+\dfrac{\partial f_1}{\partial q_5}\delta q_5+\dfrac{\partial f_1}{\partial q_6}\delta q_6\\
\delta x_2=\dfrac{\partial f_2}{\partial q_1}\delta q_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial q_2}\delta q_2+\dfrac{\partial f_2}{\partial q_3}\delta q_3+\dfrac{\partial f_2}{\partial q_4}\delta q_4+\dfrac{\partial f_2}{\partial q_5}\delta q_5+\dfrac{\partial f_2}{\partial q_6}\delta q_6\\
\delta x_3=\dfrac{\partial f_3}{\partial q_1}\delta q_1+\dfrac{\partial f_3}{\partial q_2}\delta q_2+\dfrac{\partial f_3}{\partial q_3}\delta q_3+\dfrac{\partial f_3}{\partial q_4}\delta q_4+\dfrac{\partial f_3}{\partial q_5}\delta q_5+\dfrac{\partial f_3}{\partial q_6}\delta q_6\\
\delta x_4=\dfrac{\partial f_4}{\partial q_1}\delta q_1+\dfrac{\partial f_4}{\partial q_2}\delta q_2+\dfrac{\partial f_4}{\partial q_3}\delta q_3+\dfrac{\partial f_4}{\partial q_4}\delta q_4+\dfrac{\partial f_4}{\partial q_5}\delta q_5+\dfrac{\partial f_4}{\partial q_6}\delta q_6\\
\delta x_5=\dfrac{\partial f_5}{\partial q_1}\delta q_1+\dfrac{\partial f_5}{\partial q_2}\delta q_2+\dfrac{\partial f_5}{\partial q_3}\delta q_3+\dfrac{\partial f_5}{\partial q_4}\delta q_4+\dfrac{\partial f_5}{\partial q_5}\delta q_5+\dfrac{\partial f_5}{\partial q_6}\delta q_6\\
\delta x_6=\dfrac{\partial f_6}{\partial q_1}\delta q_1+\dfrac{\partial f_6}{\partial q_2}\delta q_2+\dfrac{\partial f_6}{\partial q_3}\delta q_3+\dfrac{\partial f_6}{\partial q_4}\delta q_4+\dfrac{\partial f_6}{\partial q_5}\delta q_5+\dfrac{\partial f_6}{\partial q_6}\delta q_6
\end{cases} \tag{3.55}$$

式(3.55)写为矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\\ \delta x_3\\ \delta x_4\\ \delta x_5\\ \delta x_6\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3} & \frac{\partial f_1}{\partial q_4} & \frac{\partial f_1}{\partial q_5} & \frac{\partial f_1}{\partial q_6}\\
\frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3} & \frac{\partial f_2}{\partial q_4} & \frac{\partial f_2}{\partial q_5} & \frac{\partial f_2}{\partial q_6}\\
\frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} & \frac{\partial f_3}{\partial q_3} & \frac{\partial f_3}{\partial q_4} & \frac{\partial f_3}{\partial q_5} & \frac{\partial f_3}{\partial q_6}\\
\frac{\partial f_4}{\partial q_1} & \frac{\partial f_4}{\partial q_2} & \frac{\partial f_4}{\partial q_3} & \frac{\partial f_4}{\partial q_4} & \frac{\partial f_4}{\partial q_5} & \frac{\partial f_4}{\partial q_6}\\
\frac{\partial f_5}{\partial q_1} & \frac{\partial f_5}{\partial q_2} & \frac{\partial f_5}{\partial q_3} & \frac{\partial f_5}{\partial q_4} & \frac{\partial f_5}{\partial q_5} & \frac{\partial f_5}{\partial q_6}\\
\frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \frac{\partial f_6}{\partial q_2} & \frac{\partial f_6}{\partial q_3} & \frac{\partial f_6}{\partial q_4} & \frac{\partial f_6}{\partial q_5} & \frac{\partial f_6}{\partial q_6}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\delta q_1\\ \delta q_2\\ \delta q_3\\ \delta q_4\\ \delta q_5\\ \delta q_6\end{bmatrix}
\quad \text{或} \quad [\delta x_i]=\left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right][\delta q_j]
\tag{3.56}
$$

式(3.56)表示各单个变量和函数之间的微分关系。包含这一关系的矩阵称为雅可比矩阵。

同理，对六自由度机器人位置方程求微分，可写下列矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\\ \delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}\text{机器人}\\ \text{雅可比}\\ \text{矩阵}\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\mathrm{d}\theta_1\\ \mathrm{d}\theta_2\\ \mathrm{d}\theta_3\\ \mathrm{d}\theta_4\\ \mathrm{d}\theta_5\\ \mathrm{d}\theta_6\end{bmatrix}
\quad \text{或} \quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{D}_\theta
\tag{3.57}
$$

其中，$\boldsymbol{D}$ 中的 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 分别表示机器人手爪沿 x、y、z 轴的微分运动；$\boldsymbol{D}$ 中的 δx、δy、δz 分别表示机器人手爪绕 x、y、z 轴的微分旋转；$\boldsymbol{D}_\theta$ 表示关节的微分运动。

将式(3.54)或式(3.57)两边对时间求导，即得出 q 与 x 之间的微分关系

$$\dot{x}=\boldsymbol{J}(q)\dot{q} \tag{3.58}$$

式中，x 为末端在操作空间的广义速度，简称操作速度；q 为关节速度；$\boldsymbol{J}(q)$是 6×6 的偏导数矩阵，称为机器人的雅可比矩阵。

例 3.4　给定某时刻的机器人雅可比矩阵如下，计算在给定微分运动的情况下，机器人末端执行器坐标系的线位移微分运动和角位移微分运动。

$$
\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix},\quad
\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0\\ -0.1\\ 0\\ 0\\ 0.1\end{bmatrix}
$$

解：根据式(3.57)，可得：

$$
\boldsymbol{D}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{D}_\theta=\begin{bmatrix}1&0&0&0&2&0\\-1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\0\\-0.1\\0\\0\\0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\-0.2\\0\\0\\-0.1\\0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\\\mathrm{d}z\\\delta x\\\delta y\\\delta z\end{bmatrix}
$$

3.3.2 机器人的微分运动

1. 微分平移

用式 $\mathrm{Trans}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$表示坐标系中微分平移 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的变换，其含义为坐标系沿 x,y,z 轴做微小运动。

$$
\mathrm{Trans}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=\begin{bmatrix}1&0&0&\mathrm{d}x\\0&1&0&\mathrm{d}y\\0&0&1&\mathrm{d}z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.59}
$$

2. 绕坐标系轴微分旋转

用式 $\mathrm{Rot}(x,\delta x)$、$\mathrm{Rot}(y,\delta y)$、$\mathrm{Rot}(z,\delta z)$表示坐标系中微分绕 x,y,z 轴旋转的变换，其含义为坐标系绕 x,y,z 轴做微小旋转。

在旋转量很小的情况下，近似下列值：

$\sin\delta x=\delta x$(以弧度值计)，$\cos\delta x=1$，则可得：

$$
\mathrm{Rot}(x,\delta x)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-\delta x&0\\0&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.60}
$$

$$
\mathrm{Rot}(y,\delta y)=\begin{bmatrix}1&0&\delta y&0\\0&1&0&0\\-\delta y&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.61}
$$

$$
\mathrm{Rot}(z,\delta z)=\begin{bmatrix}1&-\delta z&0&0\\\delta z&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.62}
$$

3. 绕任意轴 q 轴微分旋转

在数学计算中，若略去高阶微分，即使 $\delta x\delta y=0$，可证明：

$$
\mathrm{Rot}(x,\delta x)\mathrm{Rot}(y,\delta y)=\mathrm{Rot}(y,\delta y)\mathrm{Rot}(x,\delta x)\tag{3.63}
$$

由此可得，在微分旋转计算中，矩阵相乘的顺序对计算结果影响甚小，故而在微分旋转计算中可交换相乘顺序。可得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rot}(q,\mathrm{d}\theta) &= \mathrm{Rot}(x,\delta x)\mathrm{Rot}(y,\delta y)\mathrm{Rot}(z,\delta z) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta x\delta y & -\delta x\delta y\delta z + 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y + \delta x\delta z & \delta x + \delta y\delta z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.64}
$$

忽略所有高阶微分，可得：

$$
\mathrm{Rot}(q,\mathrm{d}\theta) = \mathrm{Rot}(x,\delta x)\mathrm{Rot}(y,\delta y)\mathrm{Rot}(z,\delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.65}
$$

例 3.5　求绕三个坐标系轴旋转小的旋转后，所得总微分变换。其中（$\delta x = 0.05\mathrm{rad}$、$\delta y = 0.1\mathrm{rad}$、$\delta z = 0.05\mathrm{rad}$）。

解：由式（3.65），可得：

$$
\mathrm{Rot}(q,\mathrm{d}\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.05 & 0.1 & 0 \\ 0.05 & 1 & -0.05 & 0 \\ -0.1 & 0.05 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

4．微分算子

机器人实际操作和运行时，是微分平移和绕任意轴旋转的复杂运动。假如用 $\boldsymbol{T}$ 表示原始坐标系，$\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ 表示变化量，若沿坐标系轴进行运动，则有下式表达：

$$
\boldsymbol{T} + \mathrm{d}\boldsymbol{T} = [\mathrm{Trans}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\mathrm{Rot}(q,\mathrm{d}\theta)]\,\boldsymbol{T} \tag{3.66}
$$

移项得：$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = [\mathrm{Trans}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\mathrm{Rot}(q,\mathrm{d}\theta) - \boldsymbol{I}]\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

令$\boldsymbol{\Delta} = [\mathrm{Trans}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\mathrm{Rot}(q,\mathrm{d}\theta) - \boldsymbol{I}]$，则上式可简化为：

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{T} \tag{3.67}
$$

其中$\boldsymbol{\Delta}$ 称为对于固定基坐标系的微分算子。

$$
\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{d}x \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{d}y \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{d}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.68}
$$

$$
\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & \mathrm{d}x \\ \delta z & 0 & -\delta x & \mathrm{d}y \\ -\delta y & \delta x & 0 & \mathrm{d}z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.69}
$$

同理，若沿着当前坐标系进行运动，则可得到如下公式：

$$
{}^{T}\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix} 0 & -{}^{T}\delta z & {}^{T}\delta y & {}^{T}\mathrm{d}x \\ {}^{T}\delta z & 0 & -{}^{T}\delta x & {}^{T}\mathrm{d}y \\ -{}^{T}\delta y & {}^{T}\delta x & 0 & {}^{T}\mathrm{d}z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.70}
$$

$[{}^{T}\boldsymbol{\Delta}]$称为对于当前坐标系的微分算子。

例 3.6 已知坐标系$\{A\}$和对基坐标系的微分平移与微分旋转为：

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{d}=[0.8,0,0.6], \quad \boldsymbol{\delta}=[0,0.2,0]
$$

试求微分变换结果。

解：首先据式(3.69)可得下式：

$$
\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

再按照 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}=\Delta\boldsymbol{T}$，有 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\Delta\boldsymbol{A}$，即

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

坐标系$\{A\}$的这一微分变化如图 3.10 所示。

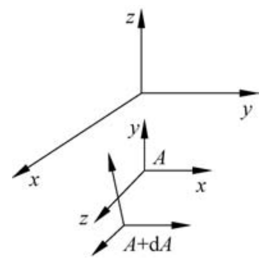

图 3.10 坐标系$\{A\}$微分变化

5. 微分运动的等价变换

要求得机器人的雅可比(Jacobian)矩阵，就需要把一个坐标系内的位置和姿态的微分变化，变换为另一坐标系内的等效表达式。

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{T}=\Delta\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\,{}^{T}\Delta
$$

等式两边同时乘以 $\boldsymbol{T}^{-1}$，得到 $\boldsymbol{T}^{-1}\Delta\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\,{}^{T}\Delta$

所有

$$
{}^{T}\Delta=\boldsymbol{T}^{-1}\Delta\boldsymbol{T} \tag{3.71}
$$

若坐标系 T 用 noap 矩阵表达，则：

$$
\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

可得：

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p\cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -p\cdot o \\ a_x & a_y & a_z & -p\cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

$$\Delta\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & \mathrm{d}x \\ \delta z & 0 & -\delta x & \mathrm{d}y \\ -\delta y & \delta x & 0 & \mathrm{d}z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

利用式${}^T\Delta=\boldsymbol{T}^{-1}\Delta\boldsymbol{T}$ 可得${}^T\Delta$ 的表达式为：

$$\Delta\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} -\delta_z n_y+\delta_y n_z & -\delta_z o_y+\delta_y o_z & -\delta_z a_y+\delta_y a_z & -\delta_z p_y+\delta_y p_z+d_x \\ \delta_z n_x+\delta_x n_z & \delta_z o_x+\delta_x o_z & \delta_z a_x+\delta_x a_z & \delta_z p_x+\delta_x p_z+d_y \\ -\delta_y n_x+\delta_x n_y & -\delta_y o_x+\delta_x o_y & -\delta_y a_x+\delta_x a_y & -\delta_y p_x+\delta_x p_y+d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

它与下式等价：

$$\Delta\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d})_x \\ (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d})_y \\ (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n})_z & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o})_z & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a})_z & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d})_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

式中，下标表示只取某方向的一个量。

用 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 左乘式(3.75)得：

$$\boldsymbol{T}^{-1}\Delta\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d})_x \\ (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d})_y \\ (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n})_z & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o})_z & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a})_z & (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d})_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\Delta\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o}) & \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d}) \\ \boldsymbol{o}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{o}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o}) & \boldsymbol{o}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{o}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d}) \\ \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{o}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

应用三矢量相乘的两个性质 $a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)$及 $a\cdot(a\times c)=0$，并据式(3.71)可把式(3.77)变换为：

$${}^T\Delta=\begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{o}) & \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{o}) & 0 & -\boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{o}\times\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{o}\times\boldsymbol{a}) & 0 & \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

化简得：

$$
{}^{T}\Delta=\begin{bmatrix}0 & -\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{o} & \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{a} & 0 & -\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{o}\\ -\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{o} & \boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{n} & 0 & \boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.79}
$$

由于${}^{T}\Delta$已被式(3.70)所定义,所以令式(3.70)与式(3.79)各元分别相等,可求得下列各式:

$$
{}^{T}\delta_x=\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{n},\quad {}^{T}\delta_y=\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{o},\quad {}^{T}\delta_z=\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{a} \tag{3.80}
$$

$$
\begin{cases}{}^{T}d_x=\boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}\\ {}^{T}d_y=\boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{o}\\ {}^{T}d_z=\boldsymbol{\delta}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}\end{cases} \tag{3.81}
$$

式中 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{o},\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{p}$,分别为微分坐标变换 T 的列矢量。从上列两式可得微分运动${}^{T}\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 关系如下:

$$
\begin{bmatrix}{}^{T}d_x\\ {}^{T}d_y\\ {}^{T}d_z\\ {}^{T}\delta_x\\ {}^{T}\delta_y\\ {}^{T}\delta_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_x & n_y & n_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z\\ o_x & o_y & o_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z\\ a_x & a_y & a_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z\\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z\\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z\\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_x\\ d_y\\ d_z\\ \delta_x\\ \delta_y\\ \delta_z\end{bmatrix} \tag{3.82}
$$

应用三矢量相乘的性质 $a\cdot(b\times c)=c\cdot(a\times b)$,我们可进一步将式(3.80)和式(3.81)写为:

$$
\begin{cases}{}^{T}d_x=\boldsymbol{n}\cdot((\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p})+\boldsymbol{d})\\ {}^{T}d_y=\boldsymbol{o}\cdot((\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p})+\boldsymbol{d})\\ {}^{T}d_z=\boldsymbol{a}\cdot((\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p})+\boldsymbol{d})\end{cases} \tag{3.83}
$$

$$
\begin{cases}{}^{T}\delta_x=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta}\\ {}^{T}\delta_y=\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{\delta}\\ {}^{T}\delta_z=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\delta}\end{cases} \tag{3.84}
$$

应用上述二式,能够方便地把对基坐标系的微分变化变换为对坐标系 T 的微分变化。式(3.82)可简写为:

$$
\begin{bmatrix}{}^{T}\boldsymbol{d}\\ {}^{T}\boldsymbol{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^{T} & -\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{T}(\boldsymbol{p})\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{\delta}\end{bmatrix} \tag{3.85}
$$

式中,$\boldsymbol{R}$ 是旋转矩阵,

$$
\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}n_x & n_x & a_x\\ n_y & n_z & a_y\\ n_z & o_z & a_z\end{bmatrix} \tag{3.86}
$$

对于任何三维矢量 $\boldsymbol{P}=[p_x,p_y,p_z]^{\mathrm{T}}$,其反对称矩阵 $\boldsymbol{S}(p)$定义为:

$$
\boldsymbol{S}(p)=\begin{bmatrix}0 & -p_x & p_y\\ p_z & 0 & -p_x\\ -p_y & p_x & 0\end{bmatrix} \tag{3.87}
$$

例 3.7　已知坐标系 $\boldsymbol{A}$ 和对基坐标系的微分平移与微分旋转为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&8\\1&0&0&4\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{d}=[0.8,0,0.6]$，$\boldsymbol{\delta}=[0,0.2,0]$。试求对坐标系 $\boldsymbol{A}$ 的等价微分平移和微分旋转。

解：因为

$$\boldsymbol{n}=[0,1,0],\quad \boldsymbol{o}=[0,0,1],\quad \boldsymbol{a}=[1,0,0],\quad \boldsymbol{p}=[8,4,0],$$
$$\boldsymbol{d}=[0.8,0,0.6],\quad \boldsymbol{\delta}=[0,0.2,0]$$

以及

$$\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&0.2&0\\8&4&0\end{vmatrix}=[0,0,-1.6]$$

$$\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{d}=[0,0,-1.6]+[0.8,0,0.6]=[0.8,0,-1]$$

又据式(3.83)和式(3.84)，可求得等价微分平移和微分旋转为：

$$^{A}\boldsymbol{d}=[0,-1,0.8],\quad ^{A}\boldsymbol{\delta}=[0.2,0,0]$$

据式 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{T}\Delta$ 计算 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{A}\Delta$，以检验所得微分运动是否正确。据式(3.70)有：

$$^{A}\Delta=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-0.2&-1\\0&0.2&0&0.8\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&8\\1&0&0&4\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-0.2&-1\\0&0.2&0&0.8\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0.2&0&0.8\\0&0&0&0\\0&0&-0.2&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所得结果与例 3.6 一致。可见所求得的对 A 的微分平移和微分旋转是正确无误的。

3.3.3　雅可比矩阵的计算

雅可比矩阵中的每个元素是对应的运动学方程对其中一个变量的导数，参考式(3.57)。

可以看到，D 中的第一个元素是 $\mathrm{d}x$，它表示第一个运动学方程且必须沿 x 轴的运动，即 p_x。换句话说，p_x 表示手的坐标系沿 x 轴的运动，它的微分为 $\mathrm{d}x$。同样，$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$ 也是如此。若考虑用 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{o}$、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 表示的矩阵，对相应的元素 p_x、p_y 和 p_z 求微分就可得到 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$。

1. 微分变换法

对于转动关节 i，连杆 i 相对连杆 $i-1$ 绕坐标系$\{i\}$的 z_i 轴做微分转动 $d\theta_i$，其微分运动矢量为：

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}d\theta_i \tag{3.88}$$

利用式(3.82)得出手爪相应的微分运动矢量为：

$$\begin{bmatrix}{}^T d_x\\{}^T d_y\\{}^T d_z\\{}^T \delta_x\\{}^T \delta_y\\{}^T \delta_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}d\theta_i \tag{3.89}$$

对于移动关节，连杆 i 沿 z_i 轴相对于连杆 $i-1$ 做微分移动 dd_i，其微分运动矢量为：

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}dd_i\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3.90}$$

而手爪的微分运动矢量为：

$$\begin{bmatrix}{}^T d_x\\{}^T d_y\\{}^T d_z\\{}^T \delta_x\\{}^T \delta_y\\{}^T \delta_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\\0\\0\\0\end{bmatrix}dd_i \tag{3.91}$$

于是，可得雅可比矩阵 $J(q)$的第 i 列如下：

对于转动关节 i 有：

$${}^T\boldsymbol{J}_{li}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z\end{bmatrix},\quad {}^T\boldsymbol{J}_{ai}=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix} \tag{3.92}$$

对于移动关节 i 有：

$${}^T\boldsymbol{J}_{li}=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix},\quad {}^T\boldsymbol{J}_{ai}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3.93}$$

式中，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{p}$ 是${}^i_n\boldsymbol{T}$ 的 4 个列向量。

上述求雅可比${}^T\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$的方法是构造性的，只要知道各连杆变换${}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}$，就可自动生成雅可比矩阵，不需求解方程。其自动生成的步骤如下：

(1) 计算各连杆变换${}^0_1\boldsymbol{T}$，${}^1_2\boldsymbol{T}$，L，${}^{n-1}_{n}\boldsymbol{T}$。${}^T\boldsymbol{J}_i$ 和${}^i_n\boldsymbol{T}$ 之间的关系如图 3.11 所示。

(2) 计算各连杆至末端连杆的变换(见图 3.11)：

$$^{n-1}_{\ \ n}\boldsymbol{T} = {}^{n-1}_{\ \ n}\boldsymbol{T},\ {}^{n-2}_{\ \ n}\boldsymbol{T} = {}^{n-2}_{n-1}\boldsymbol{T}\,{}^{n-1}_{\ \ n}\boldsymbol{T},\cdots,$$

$$^{i-1}_{\ \ n}\boldsymbol{T} = {}^{i-1}_{\ \ i}\boldsymbol{T}\,{}^{i}_{n}\boldsymbol{T},\cdots,{}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = {}^{0}_{1}\boldsymbol{T}\,{}^{1}_{n}\boldsymbol{T}$$

(3) 计算 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$的各列元素，第 i 列$^{T}\boldsymbol{J}_i$ 由$^{i}_{n}\boldsymbol{T}$ 决定。根据式(3.90)和式(3.91)计算$^{T}\boldsymbol{J}_{li}$ 和$^{T}\boldsymbol{J}_{ai}$。

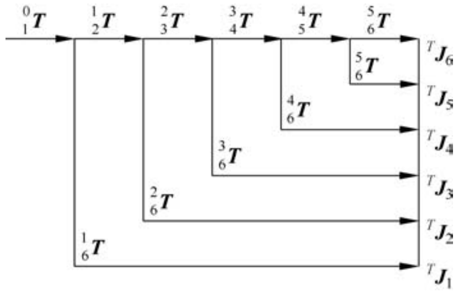

图 3.11　$^{T}\boldsymbol{J}_i$ 和$^{i}_{n}\boldsymbol{T}$ 之间的关系

2. 雅可比计算

例 3.8　PUMA560 的六个关节均为转动，所以它的雅可比矩阵有六列，以微分变换法求其雅可比矩阵。

解：$^{T}\boldsymbol{J}(q)$第一列$^{T}\boldsymbol{J}_1(q)$对应变换矩阵记为$^{1}_{6}\boldsymbol{T}$，根据上节内容，可得：

$$^{T}\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} ^{T}J_{1x} \\ ^{T}J_{1y} \\ ^{T}J_{1z} \\ -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \\ s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5c_6 \\ -s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

其中

$$^{T}J_{1x} = -d_2\,[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - (a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$

$$^{T}J_{1y} = -d_2\,[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + (a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})(s_4c_5s_6 - c_4c_6)$$

$$^{T}J_{1z} = d_2(c_{23}c_5s_5 + s_{23}c_5) + (a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})s_4s_5$$

由变换矩阵$^{2}_{6}\boldsymbol{T}$，可得：

$$^{T}\boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} ^{T}J_{2x} \\ ^{T}J_{2y} \\ ^{T}J_{2z} \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ s_4s_5 \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

其中

$$^{T}J_{2x} = a_3s_5c_6 - d_4(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + a_2\,[s_3(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_3s_5c_6]$$

$$^{T}J_{2y} = -a_3s_5s_6 - d_4(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + a_2\,[s_3(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_3s_5s_6]$$

$$^{T}J_{2z} = a_3c_6 + d_4c_4s_5 + a_2(-s_3c_4s_5 + c_3c_6)$$

同理可得：

$$^{T}\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -d_4(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + a_3(s_5c_6) \\ d_4(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - a_3(s_5s_6) \\ d_4c_4s_5 + a_3c_6 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ s_4s_5 \end{bmatrix} \tag{3.96}$$

$$
{}^{T}\boldsymbol{J}_4(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\s_5c_6\\-s_5s_6\\c_5\end{bmatrix}
\tag{3.97}
$$

$$
{}^{T}\boldsymbol{J}_5(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-s_6\\-c_6\\0\end{bmatrix}
\tag{3.98}
$$

$$
{}^{T}\boldsymbol{J}_6(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}
\tag{3.99}
$$

3.4 动力学方程

动力学方程描述力和运动之间的关系。当机器人手臂加速时，驱动器就要有足够的力和力矩驱动机器人的连杆与关节，以获得期望的速度和加速度。解决此类问题最常用的是拉格朗日方法和牛顿—欧拉方法。拉格朗日方法只需从能量的角度列写计算公式，计算相对比较简单；而牛顿—欧拉方法需要计算内部作用力，多自由度机器人计算起来比较复杂，常用于数值计算中。本节主要介绍拉格朗日方程。

3.4.1 拉格朗日法

拉格朗日函数 L 被定义为系统的动能 K 和势能 P 之差，即

$$
L=K-P
\tag{3.100}
$$

对直线运动，拉格朗日方程如下：

$$
F_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i},\quad i=1,2,\cdots,n
\tag{3.101}
$$

对旋转运动，拉格朗日方程如下：

$$
T_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_i},\quad i=1,2,\cdots,n
\tag{3.102}
$$

式中，x_i 和 θ_i 为系统变量；F_i 是产生线性运动的外力之和；T_i 是产生旋转运动的外力矩之和；n 为连杆数目。

为了得到运动方程，需要推导能量方程，根据能量方程求得拉格朗日方程，然后根据以上两个公式求得动力学方程。

例 3.9　求图 3.12 的二自由度机器人的动力学方程，其两个关节均为旋转关节。图中，m_1 和 m_2 为连杆 1 和连杆 2 的质量，且以连杆末端的点质量表示；d_1 和 d_2 分别为两连杆的长度，θ_1 和 θ_2 为广义坐标；g 为重力加速度。

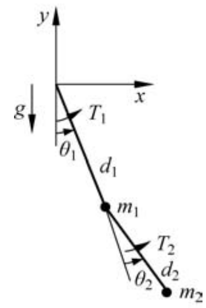

图 3.12　二自由度机器人

解：(1) 计算动能。

连杆 1 的动能为

$$K_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2$$

式中

$$v_1=d_1\dot{\theta}_1$$

则

$$K_1=\frac{1}{2}m_1d_1^2\dot{\theta}_1^2$$

连杆 2 的动能为

$$K_2=\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

式中

$$v_2^2=\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2$$
$$x_2=d_1\sin\theta_1+d_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$y_2=-d_1\cos\theta_1-d_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$
$$\dot{x}_2=d_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1+d_2\cos(\theta_1+\theta_2)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)$$
$$\dot{y}_2=d_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1+d_2\sin(\theta_1+\theta_2)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)$$

求得：$v_2^2=d_1^2\dot{\theta}_1^2+d_2^2(\dot{\theta}_1^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2^2)+2d_1d_2\cos\theta_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$

则 $K_2=\frac{1}{2}m_2d_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2d_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2+m_2d_1d_2\cos\theta_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$

总动能：$K=K_1+K_2$

$$K=\frac{1}{2}(m_1+m_2)d_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2d_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2+m_2d_1d_2\cos\theta_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\tag{3.103}$$

(2) 计算势能。

连杆 1 的势能为：

$$P_1=m_1gh_1$$

式中　$$h_1=-d_1\cos\theta_1$$

则　$$P_1=-m_1gd_1\cos\theta_1$$

连杆 2 的势能为：

$$P_2=mgy_2$$

式中　$$y_2=-d_1\cos\theta_1-d_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

则　$$P_2=-m_2gd_1\cos\theta_1-m_2gd_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

总势能：
$$P = P_1 + P_2$$
$$P = -(m_1 + m_2)gd_1\cos\theta_1 - m_2gd_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.104}$$

(3) 计算拉格朗日方程。

由以上求得的总动能和总势能，可得拉格朗日方程

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)d_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2d_2^2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + m_2d_1d_2\cos\theta_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gd_1\cos\theta_1 + m_2gd_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{3.105}$$

(4) 二自由度机器人动力学方程。

对 L 求偏导数和导数：

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2)gd_1\sin\theta_1 - m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2d_1d_2\sin\theta_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)d_1^2\dot{\theta}_1 + m_2d_2^2\dot{\theta}_1 + m_2d_2^2\dot{\theta}_2 + 2m_2d_1d_2\cos\theta_2\dot{\theta}_1 + m_2d_1d_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2d_2^2\dot{\theta}_1 + m_2d_2^2\dot{\theta}_2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2\dot{\theta}_1$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= [(m_1 + m_2)d_1^2 + m_2d_2^2 + 2m_2d_1d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 + (m_2d_2^2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 \\ &\quad - 2m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d_t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2d_2^2\ddot{\theta}_1 + m_2d_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2\ddot{\theta}_1 - m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

把相应各导数和偏导数代入式(3.102)中，即可求得力矩 T_1 和 T_2 的动力学方程式：

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{d}{d_t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ &= [(m_1 + m_2)d_1^2 + m_2d_2^2 + 2m_2d_1d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 + (m_2d_2^2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 \\ &\quad - 2m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2)gd_1\sin\theta_1 + m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{d}{d_t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ &= (m_2d_2^2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2d_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 + m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{3.107}$$

式(3.106)和式(3.107)的一般形式和矩阵形式如下：

$$T_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_1 \tag{3.108}$$

$$T_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_2 \tag{3.109}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \tag{3.110}$$

式中，D_{ii} 称为关节 i 的有效惯量，因为关节 i 的加速度 $\ddot{\theta}_i$ 将在关节 i 上产生一个等于 $D_{ii}\ddot{\theta}_i$ 的惯性力；D_{ij} 称为关节 i 和 j 间耦合惯量，因为关节 i 和 j 的加速度 $\ddot{\theta}_i$ 和 $\ddot{\theta}_j$ 将在关节 j 或 i 上分别产生一个等于 $D_{ij}\ddot{\theta}_i$ 或 $D_{ij}\ddot{\theta}_j$ 的惯性力；$D_{ijk}\dot{\theta}_1^2$ 项是由关节 j 的速度 $\dot{\theta}_j$ 在关节 i 上产生的向心力；$(D_{ijk}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k + D_{ijk}\dot{\theta}_k\dot{\theta}_j)$ 项是由关节 j 和 k 的速度 $\dot{\theta}_i$ 和 $\dot{\theta}_k$ 引起的作用于关节 i 的哥氏力；D_i 表示关节 i 处的重力。

比较式(3.106)、式(3.107)与式(3.108)、式(3.109)，可得本系统各系数如下：

有效惯量

$$D_{11} = (m_1 + m_2)d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2m_2 d_1 d_2 \cos\theta_2$$
$$D_{22} = m_2 d_2^2$$

耦合惯量

$$D_{12} = m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos\theta_2 = m_2(d_2^2 + d_1 d_2 \cos\theta_2)$$

向心加速度系数

$$D_{111} = 0$$
$$D_{122} = -m_2 d_1 d_2 \sin\theta_2$$
$$D_{211} = m_2 d_1 d_2 \sin\theta_2$$
$$D_{222} = 0$$

哥氏加速度系数

$$D_{112} = D_{121} = -m_2 d_1 d_2 \sin\theta_2$$
$$D_{212} = D_{221} = 0$$

重力项

$$D_1 = (m_1 + m_2) g d_1 \sin\theta_1 + m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$
$$D_2 = m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

3.4.2　多自由度机器人拉格朗日动力学

从以上的二自由度机器人分析中，可以同理推导出多自由度机器人动力学方程。推导过程分 5 步进行：

(1) 计算任一连杆上任一点的速度；

(2) 计算各连杆的动能和机器人的总动能；

(3) 计算各连杆的势能和机器人的总势能；

(4) 建立机器人系统的拉格朗日函数；

(5) 对拉格朗目函数求导，以得到动力学方程式。

图 3.13 表示一个多自由度机器人的结构(连杆 2 和连杆 1 之间是滑动连接，其他是旋转连接)，以它为例，求得此机器人某个连杆(如连杆 3)上某一点(如点 P)的速度，质点和机器人的动能与势能、拉格朗日方程，再求系统的动力学方程式。

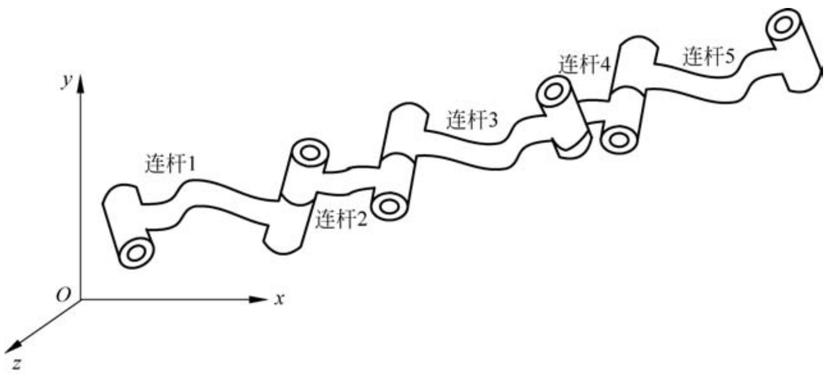

图 3.13 多自由度机器人

1. 动能

1）速度的计算

图 3.13 中连杆 3 上点 P 的位置为：

$$^{0}\boldsymbol{r}_p=\boldsymbol{T}_3^{3}\boldsymbol{r}_p$$

式中，$^{0}\boldsymbol{r}_p$ 为总(基)坐标系中的位置矢量；$^{3}\boldsymbol{r}_p$ 为局部(相对关节 O_3)坐标系中的位置矢量；$\boldsymbol{T}_3$ 为变换矩阵，包括旋转变换和平移变换。

对于任一连杆 i 上的一点，其位置为：

$$^{0}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{T}_i^{i}\boldsymbol{r} \tag{3.111}$$

P 点的速度为：

$$^{0}\boldsymbol{v}_p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(^{0}\boldsymbol{r}_p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{T}_3^{3}\boldsymbol{r}_P)=\dot{\boldsymbol{T}}_3^{3}\boldsymbol{r}_p \tag{3.112}$$

式中，$\dot{\boldsymbol{T}}_3=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_i}\dot{q}_j$，所以有：

$$^{0}\boldsymbol{v}_p=\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_j}\dot{q}_i\right)(^{3}\boldsymbol{r}_p)$$

对于连杆 i 上任一点的速度为：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^{i}\boldsymbol{r}$$

P 点的加速度为：

$$\begin{aligned}^{0}\boldsymbol{a}_p&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(^{0}\boldsymbol{v}^{p})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{T}}_3^{3}\boldsymbol{r}_p)=\ddot{\boldsymbol{T}}_3^{3}\boldsymbol{r}_p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)(^{3}\boldsymbol{r}_p)\\&=\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}\right)(^{3}\boldsymbol{r}_p)+\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}_3}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j\right)(^{3}\boldsymbol{r}_p)\\&=\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_i}\ddot{q}_i\right)(^{3}\boldsymbol{r}_p)+\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}_3}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j\right)(^{3}\boldsymbol{r}_p)\end{aligned}$$

速度的平方为：

$$(^{0}\boldsymbol{v}_p)^2=(^{0}\boldsymbol{v}_p)\cdot(^{0}\boldsymbol{v}_p)=\mathrm{Trace}\left[(^{0}\boldsymbol{v}_p)\cdot(^{0}\boldsymbol{v}_p)^{\mathrm{T}}\right]$$

$$= \mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_j}\dot{q}_j({}^3\boldsymbol{r}_p)\cdot\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)({}^3\boldsymbol{r}_p)^{\mathrm{T}}\right]$$

$$= \mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_j}({}^3\boldsymbol{r}_p)({}^3\boldsymbol{r}_p)\frac{\partial \boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

对于任一机器人上一点的速度平方为：

$$\boldsymbol{v}^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_i}\dot{q}_j\,{}^i\boldsymbol{r}\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\,{}^i\boldsymbol{r}\right)^{\mathrm{T}}\right]$$

$$= \mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}{}_i\,{}^i\boldsymbol{r}\,{}^i\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_k\dot{q}_k\right] \tag{3.113}$$

式中，Trace 表示矩阵的迹。对于 n 阶方阵来说，其迹即为它的主对角级上各元素之和。

2）质点动能的计算

令连杆 3 上任一质点处的质量为 $\mathrm{d}m$，则其动能为：

$$\mathrm{d}K_3 = \frac{1}{2}v_p^2\,\mathrm{d}m$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_i}{}^3\boldsymbol{r}_p({}^3\boldsymbol{r}_p)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_i\dot{q}_k\right]\mathrm{d}m$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_i}({}^3\boldsymbol{r}_p\,\mathrm{d}m\,{}^3\boldsymbol{r}_p^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_i\dot{q}_k\right] \tag{3.114}$$

任一机器人连杆上位置矢量 r 的质点，其动能如下式所示：

$$\mathrm{d}K_K = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_j}{}_{i\,j}\,{}^i\boldsymbol{r}\,{}^i\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]\mathrm{d}m$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_j}({}^i\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m\,{}^i\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{T}_i^{T}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \tag{3.115}$$

对连杆 3 积分 $\mathrm{d}K_3$，得连杆 3 的动能为：

$$K_3 = \int_{连杆3}\mathrm{d}K_3 = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_j}\left(\int_{连杆3}{}^3\boldsymbol{r}_p\,{}^3\boldsymbol{r}_p^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \tag{3.116}$$

式中，积分 $\int^3\boldsymbol{r}_p^3\boldsymbol{r}_p^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m$ 称为连杆的伪惯量矩阵，并记为：

$$\boldsymbol{I}_3 = \int_{连杆3}{}^3\boldsymbol{r}_p\,{}^3\boldsymbol{r}_p^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m$$

这样，

$$K_3 = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_3\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_3}{\partial q_k}\right)^{\mathrm{T}}\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \tag{3.117}$$

任何机器人上任一连杆 i 动能为：

$$K_i = \int_{连杆i}\mathrm{d}K_i = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q^k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \tag{3.118}$$

式中，I_i 为伪惯量矩阵，其一般表达式为：

$$\boldsymbol{I}_i = \int_{连杆i}{}^i\boldsymbol{r}\,{}^i\boldsymbol{r}^T\mathrm{d}m = \int_i{}^i\boldsymbol{r}\,{}^i\boldsymbol{r}^T\mathrm{d}m$$

$$
=\begin{bmatrix}
\int_i {}^ix^2\mathrm{d}m & \int_i {}^ix\,{}^iy\,\mathrm{d}m & \int_i {}^ix\,{}^iz\,\mathrm{d}m & \int_i {}^ix\,\mathrm{d}m \\
\int_i {}^ix\,{}^iy\,\mathrm{d}m & \int_i {}^iy^2\mathrm{d}m & \int_i {}^iy\,{}^iz\,\mathrm{d}m & \int_i {}^iy\,\mathrm{d}m \\
\int_i {}^ix\,{}^iz\,\mathrm{d}m & \int_i {}^iy\,{}^iz\,\mathrm{d}m & \int_i {}^iz^2\mathrm{d}m & \int_i {}^iz\,\mathrm{d}m \\
\int_i {}^ix\,\mathrm{d}m & \int_i {}^iy\,\mathrm{d}m & \int_i {}^iz\,\mathrm{d}m & \int_i \mathrm{d}m
\end{bmatrix} \tag{3.119}
$$

根据理论力学或物理学可知,物体的转动惯量、矢量积以及一阶矩量为:

$$I_{xx}=\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m,\quad I_{yy}=\int(x^2+z^2)\mathrm{d}m,\quad I_{zz}=\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m;$$

$$I_{xy}=I_{yx}=\int xy\,\mathrm{d}m,\quad I_{xz}=I_{zx}=\int xz\,\mathrm{d}m,\quad I_{yz}=I_{zy}=\int yz\,\mathrm{d}m;$$

$$mx=\int x\,\mathrm{d}m,\quad my=\int y\,\mathrm{d}m,\quad mz=\int z\,\mathrm{d}m$$

如果令

$$
\begin{aligned}
\int x^2\mathrm{d}m &= -\frac{1}{2}\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m+\frac{1}{2}\int(x^2+z^2)\mathrm{d}m+\frac{1}{2}\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m \\
&= (-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz})/2 \\
\int y^2\mathrm{d}m &= +\frac{1}{2}\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m-\frac{1}{2}\int(x^2+z^2)\mathrm{d}m+\frac{1}{2}\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m \\
&= (+I_{xx}-I_{yy}+I_{zz})/2 \\
\int z^2\mathrm{d}m &= +\frac{1}{2}\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m+\frac{1}{2}\int(x^2+z^2)\mathrm{d}m-\frac{1}{2}\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m \\
&= (+I_{xx}+I_{yy}-I_{zz})/2
\end{aligned}
$$

于是可把 $\boldsymbol{I}_i$ 表示为:

$$
\boldsymbol{I}_i=\begin{bmatrix}
\dfrac{-I_{ixx}+I_{iyy}+I_{izz}}{2} & I_{ixy} & I_{ixz} & m_i\bar{x}_i \\
I_{ixy} & \dfrac{I_{ixx}-I_{iyy}+I_{izz}}{2} & I_{iyz} & m_i\bar{y}_i \\
I_{ixz} & I_{iyz} & \dfrac{I_{ixx}+I_{iyy}-I_{izz}}{2} & m_i\bar{z}_i \\
m_i\bar{x}_i & m_i\bar{y}_i & m_i\bar{z}_i & m_i
\end{bmatrix} \tag{3.120}
$$

具有 n 个连杆的机器人总的动能为:

$$K=\sum_{i=1}^{n}K_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Trace}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial\boldsymbol{T}_i}{\partial q_i}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_k\right] \tag{3.121}$$

此外,连杆 i 的传动装置动能为:

$$K_{ai}=\frac{1}{2}I_{ai}\dot{q}_i^2 \tag{3.122}$$

式中,I_{ai} 为传动装置的等效转动惯量,对于平动关节;I_a 为等效质量;$\dot{q}_i$ 为关节 i 的速度所有关节的传动装置总动能为:

$$K_a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_{ai}\dot{q}_i^2 \tag{3.123}$$

于是得到机器人系统(包括传动装置)的总动能为：

$$\begin{aligned} K_t &= K + K_a \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_i}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} I_{ai}\dot{q}_i^2 \end{aligned} \tag{3.124}$$

2. 势能

下面再来计算机器人的势能。众所周知，一个在高度 h 处质量为 m 的物体，其势能为：

$$P = m\boldsymbol{g}h \tag{3.125}$$

连杆 i 上位置${}^i r$ 处的质点 dm。其势能为：

$$\mathrm{d}P_i = -\mathrm{d}m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}_0}\boldsymbol{r} + -\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}T_i{}^i r\,\mathrm{d}m \tag{3.126}$$

式中，$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} = [g_x, g_y, g_z, 1]$。

$$P_i = \int_{\text{连杆}i}\mathrm{d}P_i = -\int_{\text{连杆}i}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m = -\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i\int_{\text{连杆}i}{}^i r\,\mathrm{d}m$$

其中，m_i 为连杆 i 的质量；${}^i r_i$ 为连杆 i 相对于其前端关节坐标系的重心位置。

由于传动装置的重力作用 P_{ai} 一般是很小的，可以忽略不计，所以，机器人系统的总势能为：

$$P = \sum_{i=1}^{n}(P_i - P_{ai}) \approx \sum_{i=1}^{n} P_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}_i \tag{3.127}$$

3. 多自由度机器人动力学方程

据式(3.100)求拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L &= K_t - P \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_{ai}\dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{r}_i, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{3.128}$$

根据式(3.128)可以求得动力学方程。由于篇幅现实，本书的求导过程省略，感兴趣的读者可查阅和参考相关书籍。

多自由度机器人动力学方程的最终形式为：

$$\boldsymbol{T}_i = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}\ddot{q}_j + I_{ai}\ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + D_i \tag{3.129}$$

其中

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^{n}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_p}{\partial q_j}\boldsymbol{I}_p\frac{\partial \boldsymbol{T}_p^{\mathrm{T}}}{\partial q_i}\right) \tag{3.130}$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^{n}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}_p}{\partial q_j\partial q_k}\boldsymbol{I}_i\frac{\partial \boldsymbol{T}_p^{\mathrm{T}}}{\partial q_i}\right) \tag{3.131}$$

$$D_i = \sum_{p=i}^{n} -m_p\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{T}_p}{\partial q_i}{}^p\boldsymbol{r}_p \tag{3.132}$$

上述各方程中，第一部分是角加速度惯量项，第二部分是传动装置惯量项，第三部分是科里奥利力和向心力项，第四部分是重力项。

4. 拉格朗日动力学方程的简化

3.4.2 节中惯量项 D_{ij} 和重力项 D_i 等的计算必须化简，便于进行实际计算。

1）惯量项 D_{ij} 的简化

3.3 节中讨论雅可比矩阵时，曾得到偏导数 $\partial T_6/\partial q_i = \boldsymbol{T}_6^{T_6}\Delta_i$，这实际上是 $p=6$ 时的特例。可以把它推广至一般形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}_p}{\partial q_i} = \boldsymbol{T}_p^{T_p}\Delta_i \tag{3.133}$$

式中，${}^{T_p}\Delta_i = (A_i, A_{i+1}, \cdots, A_p)^{-1\,i+1}\Delta_i(A_i, A_{i+1}, \cdots, A_P)$，而微分坐标变换为：

$${}^{i-1}\boldsymbol{T}_p = (A_i, A_{i+1}, \cdots, A_p)$$

对于旋转关节，据式(3.74)可得如下微分平移矢量和微分旋转矢量：

$$\begin{cases} {}^p d_{ix} = -{}^{i-1}n_{px}\,{}^{i-1}p_{py} + {}^{i-1}n_{py}\,{}^{i-1}p_{px} \\ {}^p d_{iy} = -{}^{i-1}o_{px}\,{}^{i-1}p_{py} + {}^{i-1}o_{py}\,{}^{i-1}p_{px} \\ {}^p d_{iz} = -{}^{i-1}a_{px}\,{}^{i-1}p_{py} + {}^{i-1}a_{py}\,{}^{i-1}p_{px} \end{cases} \tag{3.134}$$

$${}^p\boldsymbol{\delta}_i = {}^{i-1}n_{pz}\boldsymbol{i} + {}^{i-1}o_{pz}\boldsymbol{j} + {}^{i-1}a_{pz}\boldsymbol{k} \tag{3.135}$$

上式中采用了下列缩写：把 ${}^{T_p}\boldsymbol{d}_i$ 写为 ${}^p\boldsymbol{d}_i$，把 ${}^{T_{i-1}}\boldsymbol{n}$ 写成 ${}^{i-1}\boldsymbol{n}_p$，等等。

对于平移关节，据式(3.79)可得各矢量为：

$${}^p\boldsymbol{d}_i = {}^{i-1}p_{pz}\boldsymbol{i} + {}^{i-1}o_{pz}\boldsymbol{j} + {}^{i-1}a_{pz}\boldsymbol{k}$$

$${}^p\boldsymbol{\delta}_i = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

以式(3.133)代入式(3.130)得：

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^{6} \mathrm{Trace}(\boldsymbol{T}_p\,{}^p\Delta_j\boldsymbol{I}_p\,{}^p\Delta_i{}^T\boldsymbol{T}_p^T) \tag{3.136}$$

对式(3.136)中间三项展开得：

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^{6} \mathrm{Trace}\left[\begin{matrix} \boldsymbol{T}_p \begin{bmatrix} 0 & -{}^p\delta_{jz} & {}^p\delta_{jy} & {}^pd_{jx} \\ {}^p\delta_{jz} & 0 & -{}^p\delta_{jx} & {}^pd_{jy} \\ -{}^p\delta_{jy} & {}^p\delta_{jx} & 0 & {}^pd_{jz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \\ \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i\bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{-I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i\bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} & m_i\bar{z}_i \\ m_i\bar{x}_i & m_i\bar{y}_i & m_i\bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \\ X \begin{bmatrix} 0 & {}^p\delta_{ix} & -{}^p\delta_{iy} & 0 \\ -{}^p\delta_{iz} & 0 & {}^p\delta_{ix} & 0 \\ {}^p\delta_{iy} & -{}^p\delta_{ix} & 0 & 0 \\ {}^p\delta_{ix} & {}^p\delta_{iy} & {}^pd_{iz} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{T}_p^T \end{matrix}\right] \tag{3.137}$$

这中间三项是由式(3.69)、式(3.120)和式(3.69)的转置得到的。它们相乘所得矩阵的底行及右列各元均为零。当它们左乘 $\boldsymbol{T}_p$ 和右乘 $\boldsymbol{T}_p^T$ 时，只用到 $\boldsymbol{T}_p$ 变换的旋转部分。在这种运算下，矩阵的迹为不变式。因此，只要上述表达式中间三项的迹，它的简化矢量为：

$$D_{ij}=\sum_{p=\max(i,y)}^{6} m_p\left[{}^p\boldsymbol{\delta}_i{}^T\boldsymbol{k}_p{}^p\boldsymbol{\delta}_j+{}^p\boldsymbol{d}_i{}^p\boldsymbol{d}_j+{}^p\bar{\boldsymbol{r}}_j({}^p\boldsymbol{d}_i\times{}^p\boldsymbol{\delta}_j+{}^p\boldsymbol{d}_j\times{}^p\boldsymbol{\delta}_j)\right] \tag{3.138}$$

式中，

$$\boldsymbol{k}_p=\begin{bmatrix} k_{pxx}^2 & -k_{pxy} & -k_{pxy}^2 \\ -k_{pxy}^2 & k_{pyy}^2 & -k_{pyz}^2 \\ -k_{pxz}^2 & -k_{pyz}^2 & k_{pzz}^2 \end{bmatrix}$$

以及

$$m_p k_{pxx}^2=I_{pxx},\quad m_p k_{pxz}^2=I_{pzz},\quad m_p k_{pzz}^2=I_{pzz}$$

$$m_p k_{pxy}^2=I_{pxy},\quad m_p k_{pyz}^2=I_{pyz},\quad m_p k_{pxz}^2=I_{pxz}$$

如果设定上式中非对角线各惯量项为0，即为一个正态假设，那么式(3.134)进一步简化为：

$$\begin{aligned} D_{ij}=\sum_{p=\max(i,j)}^{6} m_p\{ & [{}^p\delta_{ix}k_{pxx}^2{}^p\delta_{jx}+{}^p\delta_{jy}k_{pyy}^2{}^p\delta_{jy}+{}^p\delta_{iz}k_{pzz}^2{}^p\delta_{jz}] \\ & +[{}^p\boldsymbol{d}_i\cdot{}^p\boldsymbol{d}_j]+[{}^p\bar{\boldsymbol{r}}_p\cdot(\boldsymbol{d}_i\times{}^p\delta_i+{}^p\boldsymbol{d}_j\times{}^p\delta_i]\} \end{aligned} \tag{3.139}$$

由式(3.139)可见，D_{ij} 和式的每一元是由三组项组成的。其第一组项 ${}^p\delta_{ix}k_{pxx}^2{}^p\delta_{jx}$ 表示质量 m_p，在连杆 p 上的分布作用。第二组项表示连杆 p 质量的分布，记为有效力矩臂 ${}^p\boldsymbol{d}_i\cdot{}^p\boldsymbol{d}_j$。最后一组项是由连杆 p 的质心不在其坐标系原点而产生的。当各连杆的质心相距较大时，上述第二部分的项将起主要作用，而且可以忽略第一组项和第三组项的影响。

2) 惯量项 D_{ij} 的进一步简化

在式(3.139)中，当 $i=j$ 时，D_{ij} 可进一步简化为 D_{ii}：

$$D_{ii}=\sum_{p=i}^{6} m_p\{[{}^p\delta_{ix}^2k_{pxx}^2+{}^p\delta_{iy}^2k_{pyy}^2+{}^p\delta_{iz}^2k_{pzz}^2]+[{}^p\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{d}_i]+[2{}^p\bar{\boldsymbol{r}}_p\cdot({}^p\boldsymbol{d}_i\cdot{}^p\delta_i)]\} \tag{3.140}$$

如果为旋转关节，那么把式(3.134)和式(3.135)代入式(3.140)可得：

$$\begin{aligned} D_{ii}=\sum_{p=i}^{6} m_p\{ & [n_{px}^2k_{pxx}^2+o_{py}^2k_{pyy}^2+a_{px}^2k_{pzz}^2]+[\bar{p}_p\cdot\bar{p}_p] \\ & +[2{}^p\bar{\boldsymbol{r}}_p.[(\bar{\boldsymbol{p}}_p\cdot\boldsymbol{n}_p)\boldsymbol{i}+(\bar{\boldsymbol{p}}_p\cdot\boldsymbol{o}_p)\boldsymbol{j}+(\bar{\boldsymbol{p}}_p\cdot\boldsymbol{a}_p)\boldsymbol{k}]]\} \end{aligned} \tag{3.141}$$

式中，$\boldsymbol{n}_p,\boldsymbol{o}_p,\boldsymbol{a}_p$ 和 $\boldsymbol{p}_p$ 为 ${}^{i-1}\boldsymbol{T}_p$ 的矢量，且

$$\bar{\boldsymbol{p}}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}$$

可使式(3.139)和式(3.140)中的有关对应项相等：

$${}^p\delta_{ix}^2k_{pxx}^2+{}^p\delta_{iy}^2k_{pyy}^2+{}^p\delta_{iz}^2k_{pzz}^2=n_{px}^2k_{pxx}^2+o_{py}^2k_{pyy}^2+a_{px}^2k_{pzz}^2$$

$${}^p\boldsymbol{d}_i\cdot{}^p\boldsymbol{d}_i=\bar{\boldsymbol{p}}_p\cdot\bar{\boldsymbol{p}}_p$$

$${}^p\boldsymbol{d}_i\cdot{}^p\boldsymbol{\delta}_i=(\bar{\boldsymbol{p}}_p\cdot\boldsymbol{n}_p)\boldsymbol{i}+(\bar{\boldsymbol{p}}_p\cdot\boldsymbol{o}_p)\boldsymbol{j}+(\bar{\boldsymbol{p}}_p\cdot\boldsymbol{a}_p)\boldsymbol{k}$$

正如式(3.128)一样，D_{ii} 和式的每个元也是由三个项组成的。如果为平移关节，${}^p\boldsymbol{\delta}_i=0$，${}^p\boldsymbol{d}_i\cdot{}^p\boldsymbol{d}_i=1$，那么

$$D_{ii}=\sum_{p=i}^{6}m_p \tag{3.142}$$

3）重力项 D_i 的化简

将式(3.133)代入式(3.132)得：

$$D_i=\sum_{p=i}^{6}-m_p\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_p{}^p\Delta_i{}^p\bar{\boldsymbol{r}}_p \tag{3.143}$$

把 $\boldsymbol{T}_p$ 分离为 $\boldsymbol{T}_{i-1}{}^{i-1}\boldsymbol{T}_P$，并用${}^{i-1}\boldsymbol{T}_P{}^{-1\,i-1}\boldsymbol{T}_p$ 后乘${}^p\Delta_i$，得：

$$D_i=\sum_{p=i}^{6}-m_p\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{i-1}{}^{i-1}\boldsymbol{T}_p{}^p\Delta_i{}^{i-1}\boldsymbol{T}_p^{-1\,i-1}\boldsymbol{T}_p{}^p\bar{\boldsymbol{r}}_p \tag{3.144}$$

当${}^{i-1}\Delta_i={}^{i-1}\boldsymbol{T}_P^{-1}$，${}^i\boldsymbol{r}_p={}^i\boldsymbol{T}_p{}^p\ \bar{\boldsymbol{r}}_p$ 时，可进一步化简 D_i 为：

$$D_i=-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{i-1}{}^{i-1}\Delta_i\sum_{p=i}^{6}m_p{}^{i-1}\bar{\boldsymbol{r}}_p \tag{3.145}$$

定义${}^{i-1}\boldsymbol{g}=-\boldsymbol{g}^TT_{i-1}{}^{i-1}\Delta_i$，则有：

$$^{i-1}\boldsymbol{g}=-[g_x\quad g_y\quad g_z\quad 0]\begin{bmatrix}n_x&o_x&a_x&p_x\\n_y&o_y&a_y&p_y\\n_z&o_z&a_z&p_z\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-\delta_x&\delta_y&d_x\\\delta_z&0&-\delta_x&d_y\\-\delta_y&\delta_x&0&d_z\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

对应旋转关节 i，${}^{i-1}\Delta_i$ 对应于绕 z 轴的旋转。于是可把上式化简为：

$$\begin{aligned}^{i-1}\boldsymbol{g}&=-[g_x\quad g_y\quad g_z\quad 0]\begin{bmatrix}n_x&o_x&a_x&p_x\\n_y&o_y&a_y&p_y\\n_z&o_z&a_z&p_z\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\&=[-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{o},\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n},0,0]\end{aligned} \tag{3.146}$$

对于平移关节，${}^{i-1}\Delta_i$ 对应于沿 z 轴的平移，这时有下式：

$$\begin{aligned}^{i-1}\boldsymbol{g}&=-[g_x\quad g_y\quad g_z\quad 0]\begin{bmatrix}n_x&o_x&a_x&p_x\\n_y&o_y&a_y&p_y\\n_z&o_z&a_z&p_z\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\&[0,0,0,-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{a}]\end{aligned} \tag{3.147}$$

于是，可把 D_i 写成：

$$D_i={}^{i-1}\boldsymbol{g}\sum_{p=i}^{6}m_p{}^{i-1}\bar{\boldsymbol{r}}_p \tag{3.148}$$

3.4.3 牛顿-欧拉方程

1. 一般形式

牛顿-欧拉(Newton-Euler)方程的动力学一般形式为：

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i}+\frac{\partial P}{\partial q_i},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.149}$$

式中，W，K，D，P 和 q_i 等的含义与拉格朗日法相同；i 为连杆代号，n 为连杆数目。

2. 二自由度机器人牛顿-欧拉方程

质量 m_1 和 m_2 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$(见图 3.14)为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{r}_0 + (d_1\cos\theta_1)\boldsymbol{i} + (d_1\sin\theta_1)\boldsymbol{j}\\ &= (d_1\cos\theta_1)\boldsymbol{i} + (d_1\sin\theta_1)\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{r}_1 + [d_2\cos\theta(\theta_2+\theta_2)]\boldsymbol{i} + [d_2\sin(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{j}\\ &= [d_1\cos\theta_1 + d_2\cos(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{i} + [d_1\sin\theta_1 + d_2\sin(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

速度矢量$\boldsymbol{v}_1$ 和$\boldsymbol{v}_2$：

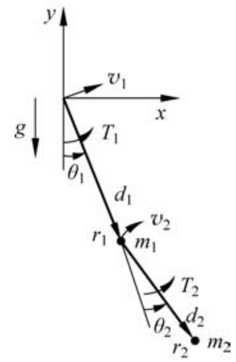

图 3.14　二自由度机器人

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} = [-\dot{\theta}_1 d_1\sin\theta_1]\boldsymbol{i} + [\dot{\theta}_1 d_1\cos\theta_1]\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t} &= [-\dot{\theta}_1 d_1\sin\theta_1 - (\theta_1+\theta_2)d_2\sin(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{i}\\ &\quad + [\dot{\theta}_1 d_1\cos\theta_1 - (\theta_1+\theta_2)d_2\cos(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

再求速度的平方，计算结果得：

$$\boldsymbol{v}_1^2 = d_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$\boldsymbol{v}_2^2 = d_1^2\dot{\theta}_1^2 + d_2^2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + 2d_1d_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\cos\theta_2$$

于是可得系统动能：

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2\\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)d_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2d_2^2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + m_2d_1d_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\cos\theta_2\end{aligned}$$

系统的势能随 $\boldsymbol{r}$ 的增大(位置下降)而减少。我们以坐标原点为参考点进行计算：

$$\begin{aligned}P &= -m_1\boldsymbol{g}\boldsymbol{r}_1 - m_2\boldsymbol{g}\boldsymbol{r}_2\\ &= -(m_1+m_2)\boldsymbol{g}d_1\cos\theta_1 - m_2\boldsymbol{g}d_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

系统能耗：

$$D = \frac{1}{2}C_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}C_2\dot{\theta}_2^2$$

外力矩所做的功：

$$W = T_1\theta_1 + T_2\theta_2$$

至此，求得关于 K,P,D 和 W 的四个标量方程式。有了这四个方程式，就能够按式(3.149)求出系统的动力学方程式。为此，先求有关导数和偏导数。

当 $q_i = \theta_1$ 时，

$$\frac{\partial K}{\partial\dot{\theta}_1} = (m_1+m_2)d_1^2\dot{\theta}_1 + m_2d_2^2(\theta_1+\theta_2) + m_2d_1d_2(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos\theta_2$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial\dot{\theta}_1} &= (m_1+m_2)d_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2d_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2) + m_2d_1d_2(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\cos\theta_2\\ &\quad - m_2d_1d_2(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2\sin\theta_2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial K}{\partial\theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1}=C_1\dot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1}=(m_1+m_2)gd_1\sin\theta_1+m_2d_2g\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta_1}=T_1$$

把所求得的上列各导数代入式(3.149),经合并整理可得：

$$\begin{aligned}T_1 = {} & [(m_1+m_2)d_1^2+m_2d_2^2+2m_2d_1d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 \\ & +[m_2d_2^2+m_2d_1d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1+c_1\dot{\theta}_1-(2m_2d_1d_2\sin\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ & -(m_2d_1d_2\sin\theta_2)[(m_1+m_2)gd_1\sin\theta_1+m_2d_2\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned} \tag{3.150}$$

当 $q_i=\theta_2$ 时，

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2}=m_2d_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)+m_2d_1d_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2}=m_2d_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+m_2d_1d_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2-m_2d_1d_2\ddot{\theta}_1\ddot{\theta}_2\sin\theta_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2}=-m_2d_2^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\sin\theta_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2}=C_2\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1}=m_2gd_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta_2}=T_2$$

把上列各式代入式(3.149),并化简得：

$$\begin{aligned}T_1 = {} & [m_2d_2^2+m_2d_1d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1+m_2d_2^2\ddot{\theta}_2+m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 \\ & +c_2\dot{\theta}_2+m_2gd_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned} \tag{3.151}$$

以上为二自由度机器人牛顿—欧拉动力学方程的形式。

3.5 机器人静态特性与动态特性

机器人的静态特性主要是指稳定负载——力和力矩。关节力和力矩可以由末端执行器固连的坐标系的力和力矩决定。机器人的动态特性则包含稳定性、空间分辨度和精度、重复性和固有频率等。

3.5.1 机器人的静态特性

1. 静力分析

机器人末端执行器上的力和力矩都是矢量,用固连坐标系描述。用矢量 $\boldsymbol{f}$ 标记力,用

f_x，f_y 和 f_z 表达沿坐标系轴 x，y 和 z 的作用力。用矢量 $\boldsymbol{m}$ 标记力矩，用 m_x，m_y 和 m_z 表达各轴的分力矩。用矢量 $\boldsymbol{F}$ 定义：

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \tag{3.152}$$

根据定义力和力矩的表示方法，定义坐标系轴 x，y 和 z 的位移和转角矩阵：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} \tag{3.153}$$

定义关节处的力(对滑动关节)和力矩(对转动关节)：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \tag{3.154}$$

定义关节的微分运动：

$$\boldsymbol{D}_\theta=\begin{bmatrix} \mathrm{d}\theta_1 \\ \mathrm{d}\theta_2 \\ \mathrm{d}\theta_3 \\ \mathrm{d}\theta_4 \\ \mathrm{d}\theta_5 \\ \mathrm{d}\theta_6 \end{bmatrix} \tag{3.155}$$

根据虚功法，关节的总虚功等于坐标系内的总虚功，结合雅可比矩阵，得到关节力和力矩与坐标系中期望的力和力矩关节，省略其推导过程，可得：

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{3.156}$$

根据运动学分析和雅可比矩阵，由此控制器便可控制力和力矩。

2. 力和力矩的变换

不同坐标系间静力和静力矩需要进行等效变换。假设一个物体固连两个不同的坐标系，假设一个力和力矩作用在第一个坐标系的原点处，求出作用在另一个坐标系的等效力和力矩，使它们对物体作用效果一样。可以用虚功法解决等效变换这个问题。

设作用在物体固连坐标系 A 上的力和力矩为 $\boldsymbol{F}$，由它引起的 A 坐标系上的位移为 $\boldsymbol{D}$，

同样设作用在物体固连坐标系 B 上的力和力矩为${}^{B}\boldsymbol{F}$,由它引起的 B 坐标系上的位移为${}^{B}\boldsymbol{D}$。虚功用 δW 表示,根据下式:

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=[f_x,f_y,f_z,m_x,m_y,m_z] \tag{3.157}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=[\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z_z,\delta x,\delta y,\delta z] \tag{3.158}$$

$${}^{B}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=[{}^{B}f_x,{}^{B}f_y,{}^{B}f_z,{}^{B}m_x,{}^{B}m_y,{}^{B}m_z] \tag{3.159}$$

$${}^{B}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=[{}^{B}\mathrm{d}x,{}^{B}\mathrm{d}y,{}^{B}\mathrm{d}z,{}^{B}\delta x,{}^{B}\delta y,{}^{B}\delta z] \tag{3.160}$$

用虚功原理,即作用于同一物体上的虚功相等,得:

$$\delta W=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}={}^{B}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}\,B}\boldsymbol{D} \tag{3.161}$$

式中,坐标系 B 内的虚位移${}^{B}D$ 等价于坐标系 A 内的虚位移 D,可得:

$${}^{B}\boldsymbol{D}={}^{B}\boldsymbol{J}\boldsymbol{D} \tag{3.162}$$

把式(3.162)带入式(3.161),得:

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}={}^{B}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}\,B}\boldsymbol{J}\boldsymbol{D} \tag{3.163}$$

式(3.163)可化简为:

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}={}^{B}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}\,B}\boldsymbol{J} \tag{3.164}$$

式(3.164)变换为:

$$\boldsymbol{F}={}^{B}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}\,B}\boldsymbol{F} \tag{3.165}$$

参照式(3.82)把式(3.165)写成矩阵方程形式:

$$\begin{bmatrix} f_x\\ f_y\\ f_z\\ m_x\\ m_y\\ m_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 & 0 & 0\\ n_y & o_y & a_y & 0 & 0 & 0\\ n_z & o_z & a_z & 0 & 0 & 0\\ (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_x & n_x & o_x & a_x\\ (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_y & n_y & o_y & a_y\\ (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z & n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{B}f_x\\ {}^{B}f_y\\ {}^{B}f_z\\ {}^{B}m_x\\ {}^{B}m_y\\ {}^{B}m_z \end{bmatrix} \tag{3.166}$$

对式(3.166)求逆:

$$\begin{bmatrix} {}^{B}f_x\\ {}^{B}f_y\\ {}^{B}f_z\\ {}^{B}m_x\\ {}^{B}m_y\\ {}^{B}m_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0\\ o_x & o_y & o_z & 0 & 0 & 0\\ a_x & a_y & a_z & 0 & 0 & 0\\ (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z & n_x & n_y & n_z\\ (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z & o_x & o_y & o_z\\ (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x\\ f_y\\ f_z\\ m_x\\ m_y\\ m_z \end{bmatrix} \tag{3.167}$$

再对式(3.167)左边和右边的前三行与后三行进行交换:

$$\begin{bmatrix} {}^{B}m_x\\ {}^{B}m_y\\ {}^{B}m_z\\ {}^{B}f_x\\ {}^{B}f_y\\ {}^{B}f_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z\\ o_x & o_y & o_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z\\ a_x & a_y & a_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z\\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z\\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z\\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_x\\ m_y\\ m_z\\ f_x\\ f_y\\ f_z \end{bmatrix} \tag{3.168}$$

比较式(3.167)和式(3.161)可见，两式的右边第一个矩阵，即雅可比矩阵是相同的。因此，不同坐标系间的力和力矩变换可用与微分平移变换及微分旋转变换一样的方法进行。因此，由式(3.82)～式(3.84)进行推导，可以得到：

$$\begin{aligned}{}^{B}f_x &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{f} \\ {}^{B}f_y &= \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{f} \\ {}^{B}f_z &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{f}\end{aligned} \tag{3.169}$$

$$\begin{aligned}{}^{B}m_x &= \boldsymbol{n} \cdot [(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m}] \\ {}^{B}m_y &= \boldsymbol{o} \cdot [(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m}] \\ {}^{B}m_z &= \boldsymbol{a} \cdot [(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m}]\end{aligned} \tag{3.170}$$

式中 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 为 3.3 节所定义的微分坐标变换的列矢量。用与微分平移一样的方法进行力变换，而用与微分旋转一样的方法进行力矩变换。

例 3.10　一个物体固连于坐标系 B，它受到坐标系 A 中力和力矩 $\boldsymbol{F}$ 的作用，求它在坐标系 B 内的等效力和力矩。

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = [5,0,0,0,10,0]$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：根据已知两式，可得

$$\boldsymbol{f} = [5,0,0] \quad \boldsymbol{m} = [0,10,0] \quad \boldsymbol{p} = [2,4,6]$$

$$\boldsymbol{n} = [0,0,1] \quad \boldsymbol{o} = [1,0,0] \quad \boldsymbol{a} = [0,1,0]$$

$$\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (0)i - (30)j + (20)k$$

$$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{p}) + m = -20j + 20k$$

根据式(3.165)，可得

$$\begin{aligned}{}^{B}f_x &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{f} = 0 \\ {}^{B}f_y &= \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{f} = 5 \\ {}^{B}f_z &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{f} = 0 \\ {}^{B}m_x &= \boldsymbol{n} \cdot [(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m}] = 20 \\ {}^{B}m_y &= \boldsymbol{o} \cdot [(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m}] = 0 \\ {}^{B}m_z &= \boldsymbol{a} \cdot [(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m}] = -20\end{aligned}$$

则 ${}^{B}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = [0,5,0,20,0,-20]$

3.5.2　机器人的动态特性

机器人的动态特性描述下列能力：它能够移动多快，能以怎样准确性快速地停在给定点，以及它对停止位置超调了多少距离等。如果机器人移动太慢，虽然容易控制，但耗费比较多的时间，损失了效率；如果移动太快，任何超调都可能造成损失或事故。从伺服控制角

度看，惯性负载不仅是由物体的惯量决定的，而且也取决于这些关节的瞬时位置及运动情况。在快速运动时，机器人上各刚性连杆的质量和转动惯量（即惯量矩）给这些关节的伺服系统的总负载强加上一个很大的摩擦负载。

本节将简要介绍机器人的稳定性、空间分辨度和精度、重复性以及固有频率。

1. 稳定性

稳定性主要涉及系统运行过程中的振动。

伺服系统的设计者确信，机器人决不会突然引起振荡。当手臂的姿态改变时，单独关节伺服装置上的惯性负载和重力负载也随之变动，这就使振荡难以形成。此外，伺服系统必须在一个宽大的位置误差（在某些情况下还有速度误差）动态范围内运行，而且必须在所有情况下可靠地工作，而不管所做传动装置强加的速度和加速度限制如何。

有一种机器人控制器，当它的每个关节第一次到达其设定点时，能够独立地锁定该关节。当工具进入离设定位置一定距离时，它也能使关节减速。这种锁定，可按任何次序进行。当所有关节都锁定时，机械臂处于稳态，并可开始向下一位置运动。如果维持在一个位置的时间达几秒以上，那么工具将从编程位置缓慢移开。当位置误差积累达到显著值时，关节伺服系统能够使工具返回初始位置。工具位置的这一变化，是一种技术上的不稳定形式，但不影响机器人的正常运行。另一种控制器允许各关节伺服系统连续运行。从建造数控工具的经验中得到的复杂的伺服系统设计技术，能够防止启动时产生振荡，而不管负载情况如何。一些特殊的条件可能使关节伺服系统处于极不稳定的状态。当负载突然从工具末端滑脱出去时所发生的情况，就是一个典型的例子。这会使一个或多个关节上的重力负载产生阶跃变化，并会使设计不好的机器人引起振荡。关节的运动也能产生有效惯性力、向心力和对其他关节的耦合向心力（或力矩）的各种组合。其他关节对这些力矩的作用也会对原关节产生各种作用力。这是另一个潜在的振荡根源。

2. 空间分辨度和精度

空间分辨度是设计机器人控制系统的特性指标，它指明系统能够区别工作空间所需要的最小运动增量。分辨度可以是控制系统能够控制的最小位置增量的函数，或者是控制测量系统能够辨别的最小位置增量。空间分辨度与机械偏差一起构成控制分辨度。为了确定空间分辨度，机器人上每个关节的工作范围是由控制增量数进行区分的。

机器人精度主要包含三个方面因素：①各控制部件的分辨度；②各机械部件的偏差；③某个任意的从未接近的固定位置（目标）。

当包括机械部件偏差时，精度将变差。图 3.15 给出考虑机械偏差时精度与空间分辨度的关系。产生最大位置偏差的机械偏差确定了最恶劣的条件，这个偏差用来决定实际的空间分辨度，并据这一分辨度来求出精度。产生这些偏差的因素有齿轮啮合间隙、连杆松动和负载的影响等。在转轴情况下，反馈元件被装在旋转关节上，而且负载离轴伸出一定距离；这时，齿轮啮合间隙的影响更大。对于大负载重量，横梁偏转开始发生作用，并降低精度，在动态条件下，梁偏转作用存在于所有

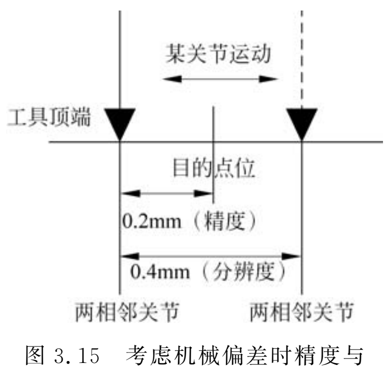

图 3.15　考虑机械偏差时精度与空间分辨度的关系

轴上。如果出现驱动啮合间隙,那么横梁偏转还可能引起严重的谐振。

当机器人只在示教复演模式下运行时,谈论其精度是没有意义的。在这种模式下,控制系统在机器人训练(示教)期间,只记录关节的位置,然后在作业期间复现这些位置。这时,重复性和分辨度是重要的技术性能。分辨度这一技术要求确定机器人是否能足够接近地到达训练(示教)时第一次作业的位置。重复性这一技术要求确定机器人在生产中第二次和以后各次作业时能否足够接近地到达目标位置。

当机器人控制系统中的计算机必须计算一系列关节位置,而且这些位置使工具顶端放置到以机器人独立坐标系描述的位置时,精度对于描述这样的机器人才有意义。

3. 重复性

重复性又称重复定位精度,指的是机器人自身重复到达原先被命令或训练位置的能力。

图 3.16 绘出重复性的简单例子。开始时,机器人被定位在由控制分辨度所限制的尽可能接近于任意目标的位置上,对应于位置 T。接着,移开机器人,并命令它返回位置 T。当它力图返回预先示教过的位置时,由于控制系统和机械部件的偏差,使此机器人停止在位置 R。位置 T 和 R 之间的差距就是此机器人重复性的一种量度。图中的位置变化是被夸大了的。

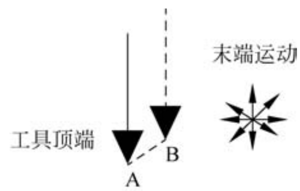

图 3.16　重复性示例

4. 固有频率

固有频率是系统在受到外界激励产生运动时发生自然振动的频率,这些特定的频率被称为系统的固有频率。

由振动理论可知在某一振型下机器人的固有频率越高,则相应的刚度越大,抵抗相应变形的能力越强,振动衰减的速度越快,机器人跟踪预期运动轨迹的振动衰减的速度越快,机器人跟踪预期运动轨迹的精度也越高。由于机器人在运动时其拓扑结构发生改变,所以机器人系统的固有频率也会发生相应的变化,这直接导致了机器人的力学特性和动态性能的改变。机器人的固有频率不仅与机器人的结构参数有关,而且还与标识机器人位形和运动状态的运动参数有关,机器人在运动的过程中固有频率可能会明显下降,这不仅会降低机器人抵抗变形的能力,而且一旦固有频率下降到与激振力的频率接近或相等时,机器人会发生动力奇异,导致出现振幅急剧增大甚至使系统结构发生破坏的现象。既然机器人的动态性能与其固有频率有关,而固有频率又与机器人的运动参数有关,因此可以通过适当调整运动参数来提高机器人在运动过程中的固有频率,以改善机器人的动态性能。

本 章 小 结

本章描述了机器人运动学的相关数学描述,用改进 D-H 法推导了机器人正逆运动学,用正运动学确定末端执行器的位姿,当某个位姿确定后,实际应用中,是以位姿为源头,计算每个关节处的运动值。为了能够精确地控制机器人,需要知道机器人的微分运动,推导了微分算子。接着,简要介绍了机器人关节运动与末端运动的控制关系。

机器人动力学问题的研究目的在于控制和保证机器人保持优良的动态特性和静态特

性。文中推导了机器人的动力学方程，用来估计以一定速度和加速度驱动机器人各关节所需的力和力矩，并以此为基础选择机器人驱动器。

参 考 文 献

[1] 蔡自兴，谢斌. 机器人学[M]. 3版. 北京：清华大学出版社，2015.
[2] Mark W. Spong、Seth Hutchinson、M. Vidyasagar. 机器人建模与控制[M]. 北京：机械工业出版社，2016：127-154.
[3] 毕树生，宗光华. 微操作机器人系统的研发开发[J]. 中国机械工程，1990，10(9)：1024-1027.
[4] 蔡自兴，徐光佑. 人工智能及其应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004.
[5] Saeed B. Niku. 机器人学导论：分析、控制及应用[M]. 2版. 孙富春，朱纪洪，刘国栋，译. 北京：电子工业出版社，2013.3.
[6] 蔡自兴，郭潘. 中国工业机器人发展的若干问题[J]. 机器人技术与应用，2013(3)：9-12.
[7] 蔡自兴，刘建勤. 面向21世纪的智能机器人技术[J]. 机器人技术与应用，1998，(6)：2-3.
[8] 霍伟. 机器人动力学与控制[M]. 北京：高等教育出版社，2005.
[9] John J. Craig. 机器人学导论[M]. 负超，译. 北京：机械工业出版社，2006.
[10] 蔡自兴. 机器人学基础[M]. 北京：机械工业出版社，2009.
[11] 张涛. 机器人引论[M]. 北京：机械工业出版社，2010.
[12] 刘极峰，易际明. 机器人技术基础[M]. 北京：高等教育出版社，2006.
[13] 柳洪义，宋伟刚. 机器人技术基础[M]. 北京：冶金工业出版社，2002.
[14] 丁学贡. 机器人控制研究[M]. 杭州：浙江大学出版社，2006.
[15] 蒋新松，机器人学导论[M]. 沈阳：辽宁科学出版社，1994.

思考题与练习题

思考题

1. 技术的革新会带来对传统机器人建模方法的颠覆。
2. 如软体机器人(D-H 是否适用)。
3. 多传感器的融合(智能空间)。
4. 本章中所述的齐次变换与计算机图形学等有相同的地方吗？相同点在哪里？
5. 并联机器人能否用 D-H 方法建模？
6. 如何提高柔性机器人的动力学性能？
7. 含间隙机构的机器人动力学建模需要哪些理论知识？

练习题

1. 有一旋转变换，先绕固定坐标系 Z_0 轴转 45°，再绕其 X_0 轴转 60°，最后绕其 Y_0 轴转 30°，试求该齐次坐标变换矩阵。

2. 在坐标系$\{A\}$中，点 P 的运动轨迹为：首先绕 Z_a 轴转 60°，又沿$\{A\}$的 X_a 轴移动 3 个单位，再沿$\{A\}$的 Y_a 轴移动 4 个单位。如果点 P 在原来的位置为 ${}^AP_1=[1,2,0]^T$，用齐次坐标变换法求运动后的位置 ${}^AP_2$。

3．如图 3.17 所示的 Stanford 机器人，试建立其 D-H 坐标系，并在表 3.3 中填写参数。

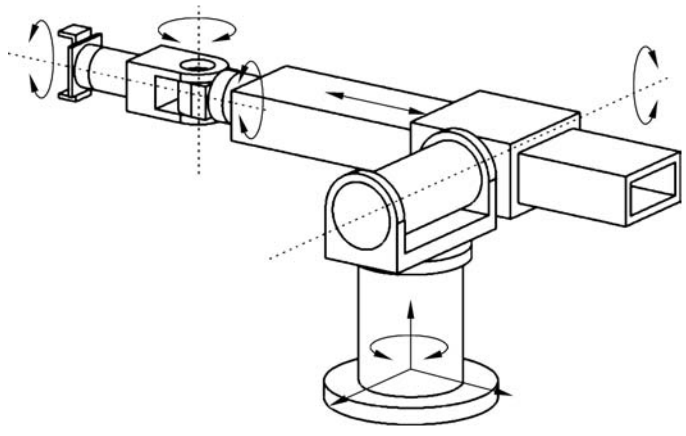

图 3.17　练习题 1 图

表 3.3　D-H 坐标系参数

连杆 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				

4．写出题 3 中 Stanford 机器人各关节的变换矩阵和总变换矩阵。

5．如图 3.18 所示的三自由度机械手（两个旋转关节加一个平移关节，简称 RPR 机械手），求末端机械手的运动学方程。

6．如图 3.19 所示的二自由度机械手，手部沿固定坐标系 X_0 轴正向以 1.0m/s 的速度移动，杆长 $l_1=l_2=0.5\text{m}$。设在某瞬时 $\theta_1=30°$，$\theta_2=60°$，求相应瞬时的关节速度。

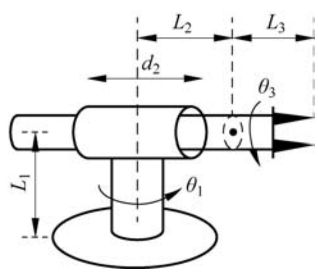

图 3.18　三自由度机械手

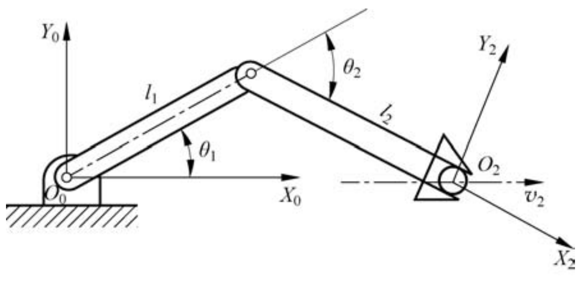

图 3.19　二自由度机械手

7．给定机器人末端坐标系 T 以及机器人在这个位置的雅可比矩阵的逆，在微分运动下，试求：(1)找出做微分运动的为哪一个关节，求其运动量。(2)求坐标系的变化。(3)求出进行微分运动后的新位置。(4)假如对应于坐标系 T 进行测量，运动到(3)中所求位置，

则微分运动量为多少。

$$
\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\1 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & -1 & 5\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{J}^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

思考题与练习题参考答案

思考题

1. 答：(开放题)，言之有理即可。例如传统建模方法不适用于某一领域或某一工况。

2. 答：(开放题)，言之有理即可。目前是适用的，但是随着技术的发展，有可能出现不适用的情况。

3. 答：(开放题)，言之有理即可。多传感器的融合，可以使机器人更加智能，算法更加精确，测得的数据更加准确，也增加了机器人实时处理的难度。

4. 答：有相同的地方。都是应用齐次坐标来解决问题，机器人利用齐次坐标解决了运动学建模的问题，而计算机图形学利用齐次坐标解决了图形变换的问题。

5. 答：能。

6. 答：从机器人机构研究的角度出发，应在改善其机械结构和特性方面进行深入研究，充分利用机构冗余度、结构柔性等机械特性，在冗余驱动、欠驱动等方面想办法，从多部展冗余度柔性机器人、欠驱动柔性机器人、柔性机器人协调操作和冗余度柔性机器人协调操作等交叉领域的研究，同时，与先进的控制方法相结合，从机器人的内部特性和外部手段两方面入手，综合提高机器人的整体动力学性能。

7. 答：(开放题)，言之有理即可。含间隙机构的动力学模型、运动副分离准则、混沌特性、优化设计、误差理论、构建柔性等。

练习题

1. **解**：齐次坐标变换矩阵 $\boldsymbol{R}=\mathrm{Rot}(Y,30°)\mathrm{Rot}(X,60°)\mathrm{Rot}(Z,45°)$

$$
=\begin{bmatrix}0.866 & 0 & 0.5 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-0.5 & 0 & 0.866 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0.5 & -0.866 & 0\\0 & 0.866 & 0.5 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.707 & -0.707 & 0 & 0\\0.707 & 0.707 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}0.918 & 0.306 & 0.25 & 0\\0.353 & 0.353 & -0.866 & 0\\0.176 & 0.883 & 0.433 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

2. **解**：用齐次坐标变换来解答，可得实现旋转和平移的齐次复合变换矩阵为：

$$T=\begin{bmatrix}0.5 & -0.866 & 0 & 3\\0.866 & 0.5 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

已知：

$$^{A}P_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$$

利用齐次坐标变换的复合变换矩阵，可得：

$$^{A}P_2=T\,^{A}P_1=\begin{bmatrix}0.5 & -0.866 & 0 & 3\\0.866 & 0.5 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.768\\6.732\\0\\1\end{bmatrix}$$

3. 见图 3.20。

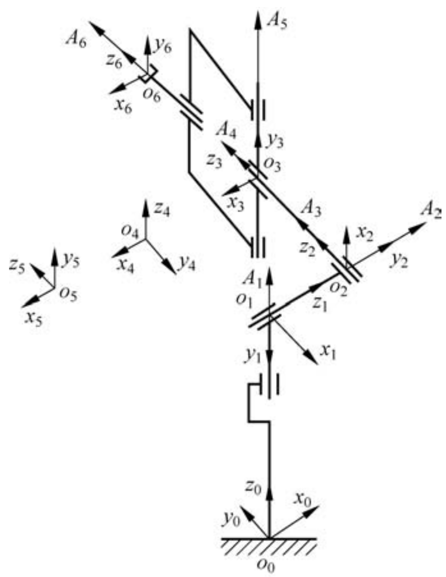

图 3.20　Stanford 机器人连杆坐标系

表 3.4　D-H 坐标系参数

连杆 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	$-90°$	0	0	θ_1
2	$90°$	0	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0
4	$-90°$	0	0	θ_4
5	$90°$	0	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

4. 略。

5. **解**：建立如图 3.21 所示坐标系，则各连杆的 D-H 参数见表 3.5。

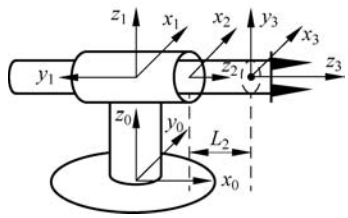

图 3.21　三自由度机械手连杆坐标系

表 3.5　D-H 参数表

连杆	转角 θ_n	偏距 d_n	扭角 α_{i-1}	杆长 a_{i-1}
1	θ_1	L_1	0	0
2	0	d_2	90°	0
3	θ_3	L_2	0	0

由连杆齐次坐标变换递推公式

$$
{}^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

有

$$
{}^0_1\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^1_2\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^2_3\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

故

$$
{}^0_3\boldsymbol{T} = {}^0_1\boldsymbol{T}{}^1_2\boldsymbol{T}{}^2_3\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 s\theta_3 & s\theta_1 & s\theta_1 L_2 + s\theta_1 d_2 \\ s\theta_1 c\theta_3 & -s\theta_1 s\theta_3 & -c\theta_1 & -c\theta_1 L_2 - c\theta_1 d_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

式中：$s\theta_1 = \sin\theta_1$

$c\theta_1 = \cos\theta_1$

…

三连杆操作臂的逆运动学方程：

第一组解：由几何关系得：

$$
x = L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3) \tag{1}
$$

$$
y = L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2 + \theta_3) \tag{2}
$$

将式(1)平方加式(2)平方得：

$$x^2+y^2=L_2^2+L_3^2+2L_2L_3\cos\theta_3$$

由此式可推出：

$$\theta_3=\arccos\left(\frac{x^2+y^2-L_2^2-L_3^2}{2L_2L_3}\right)$$

$$\theta_2=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\arctan\left(\frac{L_3\sin\theta_3}{L_2+L_3\cos\theta_3}\right)$$

第二组解：由余弦定理 $x^2+y^2=L_2^2L_3^2-2L_2L_3\cos\partial$，得：

$$\partial=\arccos\left[\frac{L_2^2L_3^2-(x^2+y^2)}{2L_2^2L_3^2}\right]$$

$$\theta'_3=\pi+\partial$$

$$\theta'_2=\frac{\pi-\partial}{2}+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

6．**解**：

$$\begin{cases}X=l_1c_1+l_2c_{12}\\Y=l_1s\theta_1+l_2s_{12}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}X=\dfrac{\partial X}{\partial\theta_1}\mathrm{d}\theta_1+\dfrac{\partial X}{\partial\theta_2}\mathrm{d}\theta_2\\[2ex]\mathrm{d}Y=\dfrac{\partial Y}{\partial\theta_1}\mathrm{d}\theta_1+\dfrac{\partial Y}{\partial\theta_2}\mathrm{d}\theta_2\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}X\\\mathrm{d}Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial\theta_1}&\dfrac{\partial X}{\partial\theta_2}\\[2ex]\dfrac{\partial Y}{\partial\theta_1}&\dfrac{\partial Y}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\theta_1\\\mathrm{d}\theta_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}v&=\begin{bmatrix}v_X\\v_Y\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-l_1s_1-l_2s_{12}&-l_2s_{12}\\l_1c_1+l_2c_{12}&l_2c_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\\dot\theta_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-(l_1s_1+l_1s_{12})\dot\theta_1-l_2s_{12}\dot\theta_2\\(l_1c_1+l_2c_{12})\dot\theta_1+l_2c_{12}\dot\theta_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

求解得，该瞬时两关节的位置分别为 30°，−60°；速度为−2rad/s，4rad/s。

7．略。