

### 3.1 引言

信号可以用时间函数来表示,第2章学习了在时域中分析和研究信号的特性。除了时域分析以外,信号还可以在频域中进行分析和研究,频域分析法即傅里叶分析法,是信号与系统变换域分析的基础。信号具有频率特性:一个复杂的信号可以分解成许多不同频率的正弦函数的线性组合,各个正弦分量的幅度和相位按频率的高低排列形成了信号的频谱。

对信号进行频谱分析及其应用至今已有近两百年的历史。1822年法国数学家傅里叶(J. Fourier, 1768—1830,见图3-1)在研究热传导理论时提出并证明了周期函数展开为正弦级数的原理,之后泊松(Poisson)、高斯(Gauss)等人将这一成果应用到电学中。经过多年的发展,这种分析方法已广泛应用于电学、力学、量子物理学等众多的科学与技术领域中,如今傅里叶分析方法已经成为信号分析与系统设计不可或缺的重要工具。

本章介绍信号及系统的傅里叶分析,在介绍周期信号的傅里叶级数和信号频谱概念的基础上,讨论傅里叶变换及其性质,以及傅里叶分析方法在连续时间信号与系统分析中的应用。



图3-1 法国数学家傅里叶

### 3.2 周期信号的傅里叶级数

周期信号是一种周而复始、无始无终的信号。其表达式为

$$f(t) = f(t + T) \quad (3-1)$$

式中, $T$ 是满足式(3-1)的最小的非零正值,称为信号 $f(t)$ 的基波周期,其倒数 $f_0 = 1/T$ 是信号的基波频率。

#### 3.2.1 周期信号的傅里叶级数

按高等数学的知识我们知道,任何周期为 $T$ 的周期函数 $f(t)$ ,若满足狄里赫利条件:

(1) 在一个周期内,函数 $f(t)$ 连续或只含有有限个第一类间断点;



傅里叶级数

- (2) 在一个周期内,函数  $f(t)$  的极值点为有限个;  
 (3) 在一个周期内,函数  $f(t)$  是绝对可积的,即满足

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty \quad (3-2)$$

则周期函数  $f(t)$  可以展开为三角函数的线性组合

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3-3)$$

式中,  $a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

其中,  $\omega_0 = 2\pi/T$  是周期函数  $f(t)$  的基波角频率,有时也简称为基波频率。一般可取  $t_0 = -T/2$ 。

式(3-3)称为周期函数  $f(t)$  的三角形式的傅里叶级数展开式。

若将式(3-3)中相同的频率项合并,还可以将一般三角形式的傅里叶级数展开式化为如下标准三角形式的傅里叶级数展开式。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[ \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_0 t \right] \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos \varphi_n \cos n\omega_0 t - \sin \varphi_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \end{aligned} \quad (3-4)$$

这两种三角形式傅里叶级数展开式系数的关系为

$$\begin{cases} c_0 = a_0, c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \\ \sin \varphi_n = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, & \cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ a_n = c_n \cos \varphi_n, & b_n = -c_n \sin \varphi_n \end{cases}$$

利用欧拉公式,可以将三角形式的傅里叶级数表示为复指数形式的傅里叶级数。欧拉公式如下

$$\begin{cases} \cos n\omega_0 = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}) \\ \sin n\omega_0 = \frac{1}{j2} (e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}) \end{cases} \quad (3-5)$$

$$e^{\pm jn\omega_0} = \cos n\omega_0 \pm j \sin n\omega_0$$

将式(3-5)代入式(3-4),得到如下复指数形式的傅里叶级数展开式

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \\
 &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} [e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)}] \\
 &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} e^{-j\varphi_n} \\
 &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{c_{-n}}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\varphi_{-n}} \\
 &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n}
 \end{aligned} \tag{3-6}$$

令  $F_n = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n}$ , 得到周期函数  $f(t)$  的复指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \tag{3-7}$$

其中系数

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} c_n (\cos\varphi_n + j\sin\varphi_n) \tag{3-8}$$

$F_n$  通常是复数,可以表示成模和幅角的形式

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

三角函数标准形式中  $c_n$  是第  $n$  次谐波分量的振幅,但在指数形式中,  $F_n$  要与相对应的  $F_{-n}$  合并,构成第  $n$  次谐波分量的振幅和相位。

指数形式与三角形形式系数之间的关系为

$$\begin{cases}
 F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{c_0}{2} \\
 F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{j\varphi_n} \\
 F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{-j\varphi_n} \\
 \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \\
 F_n + F_{-n} = 2\text{Re}[F_n] = a_n \\
 j(F_n - F_{-n}) = j2\text{Im}[F_n] = -b_n
 \end{cases} \tag{3-9}$$

### 3.2.2 周期信号的频谱

通过傅里叶级数展开,我们把周期函数  $f(t)$  表示为三角函数的线性组合。而三角函数表达的是一种单一频率的信号,因此将周期函数表达成傅里叶级数展开式,可以从频率的角度来描述信号。

一个周期信号与另一个周期信号的区别,在时域中表现为波形不同;而在频域中则表现为  $F_n$  不同,即振幅和相位的不同。因而振幅和相位是在频域中研究信号  $f(t)$  的关键。

振幅及相位随  $\omega$  变化的曲线称为信号的频谱图。利用频谱图可方便、直观地表示一个信号中包含有哪些频率分量,以及各频率分量所占的比重。

前面已述,周期信号的复振幅  $F_n$  一般为  $n\omega_0$  的复函数,因而描述其特点的频谱图一般有两个:一个称为振幅频谱,简称幅度谱,它是以为  $\omega$  为横坐标、振幅为纵坐标所画的谱线图;另一个称为相位频谱,简称相位谱,它是以为  $\omega$  为横坐标、相位为纵坐标所画的谱线图。

在信号的复振幅  $F_n$  为  $\omega$  的实函数的特殊情况下,其复振幅与变量( $\omega$ )的关系也可以用一个图绘出。

信号的时域波形与频谱都是实际存在的,例如,我们可以通过示波器来观察信号的时域波形,通过频谱分析仪观察信号的频谱。声波有频谱,图像也有频谱,频谱与时域波形一样具有实际意义。

**【例 3-1】** 已知周期信号  $f(t)$  的表达式如下,试画出其频谱图。

$$f(t) = 1 + \sqrt{2} \cos \omega_0 t - \cos \left( 2\omega_0 t + \frac{5\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 3\omega_0 t$$

解: 将  $f(t)$  整理为标准形式

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + 2\cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( 2\omega_0 t + \frac{5\pi}{4} - \pi \right) + \frac{1}{2} \cos \left( 3\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1 + 2\cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( 2\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos \left( 3\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

则  $f(t)$  的幅度谱与相位谱如图 3-2 所示。

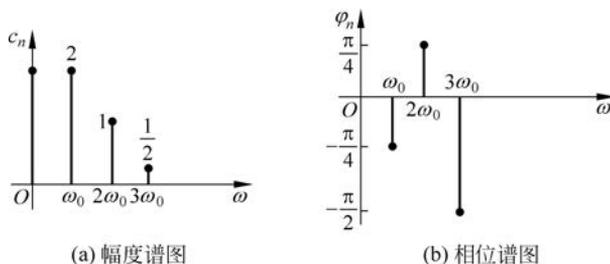


图 3-2 例 3-1 的频谱图

其指数形式频谱图(双边谱)如图 3-3 所示。

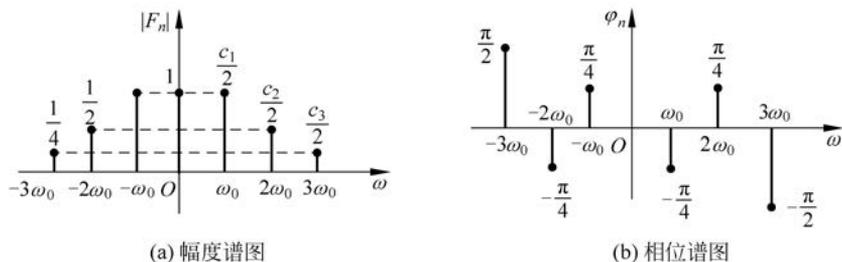


图 3-3 例 3-1 的频谱图(双边谱)

下面给出用 MATLAB 画周期信号频谱图示例。

**【例 3-2】** 试画出周期信号  $f(t) = -1 + 2\sin(0.2\pi t) - 3\cos\pi t$  的幅度频谱。

解：MATLAB 程序如下：

```
clear;
N = 5000; T = 0.1; n = 1: N;
D = 2 * pi / (N * T);
f = -1 + 2 * sin(0.2 * pi * n * T) - 3 * cos(pi * n * T);
F = T * fftshift(fft(f));
k = floor(-(N-1)/2:N/2);
subplot(2, 1, 1);
plot(n * T, f);
axis([-1, 50, -6.1, 4.1]);
ylabel('f(t)');
line([-1, 50], [0, 0]);
line([0, 0], [-6.1, 4.1]);
subplot(2, 1, 2);
plot(k * D, abs(F));
ylabel('幅频');
axis([-6, 6, -0.1, 800]);
```

波形如图 3-4 所示。

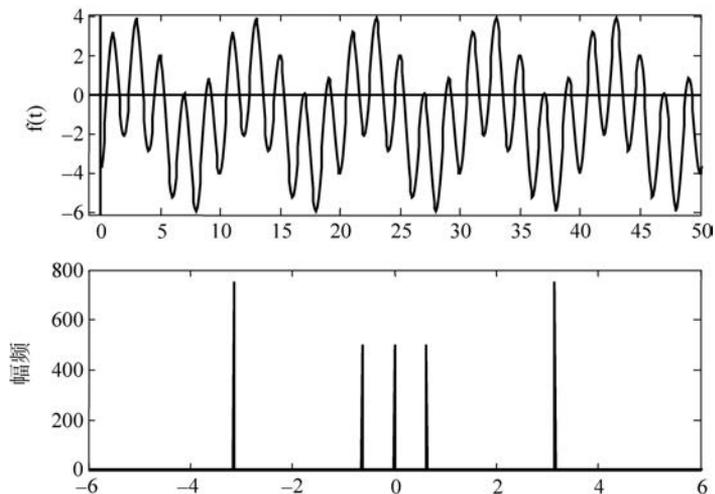


图 3-4 例 3-2 非正弦周期信号频谱

周期矩形脉冲是典型的周期信号，其频谱函数具有周期信号频谱的基本特点。下面通过对周期矩形脉冲频谱的分析，来了解周期信号频谱的一般规律。

**【例 3-3】** 周期矩形脉冲  $f(t)$  的时域波形如图 3-5 所示，求周期矩形脉冲频谱。

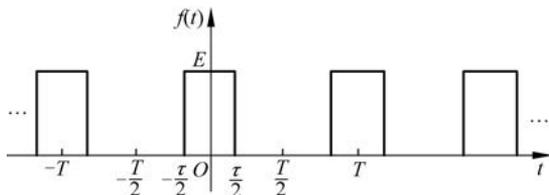


图 3-5 周期矩形脉冲  $f(t)$

解: 周期矩形脉冲  $f(t)$  在  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  上的时域表达式为  $f(t) = \begin{cases} E, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$

其中,  $\omega_0 = 2\pi/T$ 。将  $f(t)$  展开成指数形式傅里叶级数, 由式(3-8)可得

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{E}{T} \cdot \frac{1}{n\omega_0} \frac{2}{2j} \left( e^{j\frac{n\omega_0\tau}{2}} - e^{-j\frac{n\omega_0\tau}{2}} \right) \\ &= \frac{E}{T} \cdot \frac{2}{n\omega_0} \sin \frac{n\omega_0\tau}{2} \\ &= \frac{E\tau}{T} \cdot \text{Sa} \frac{n\omega_0\tau}{2} \end{aligned}$$

得到周期信号  $f(t)$  的指数形式的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \text{Sa} \frac{n\omega_0\tau}{2} e^{jn\omega_0 t}$$

其中幅度谱为

$$|F_n| = \frac{E\tau}{T} \left| \text{Sa} \frac{n\omega_0\tau}{2} \right|$$

使  $\text{Sa} \frac{n\omega_0\tau}{2} = 0$  的  $\omega$  是  $F_n$  的零点, 由此可解出  $F_n$  的零点为

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2m\pi}{\tau} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ |F_n| &= \frac{E\tau}{T} \left| \text{Sa} \frac{n\omega_0\tau}{2} \right| \\ \varphi_n &= \begin{cases} 0, & \frac{4k\pi}{\tau} < \omega < \frac{2(2k+1)\pi}{\tau} \\ -\pi, & \frac{2(2k+1)\pi}{\tau} < \omega < \frac{4(2k+1)\pi}{\tau} \end{cases}, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

其三角形式的傅里叶级数, 由式(3-9)可得

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{E\tau}{T} \\ |F_n| &= \frac{E\tau}{T} \left| \text{Sa} \frac{n\omega_0\tau}{2} \right| \\ f(t) &= \frac{E\tau}{T} + \frac{2E\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa} \frac{n\omega_0\tau}{2} \cos n\omega_0 t \end{aligned}$$

若设  $T=5\tau, E=1, \tau=\frac{T}{5}$ , 代入上式, 得:  $|F_n| = \frac{1}{5} \left| \text{Sa} \frac{n\pi}{5} \right|$ , 其零点为

$$\frac{2m\pi}{\tau} = \frac{2m\pi}{T/5} = 5m \cdot \frac{2\pi}{T} = 5m\omega_0, \text{ 即 } 5\omega_0, 10\omega_0, \dots \text{ 为过零点。}$$

当  $T=5\tau$  时, 周期矩形脉冲  $f(t)$  的幅度谱、相位谱如图 3-6 所示。

使用 MATLAB 将周期矩形脉冲  $f(t)$  展开为傅里叶级数的程序如下。

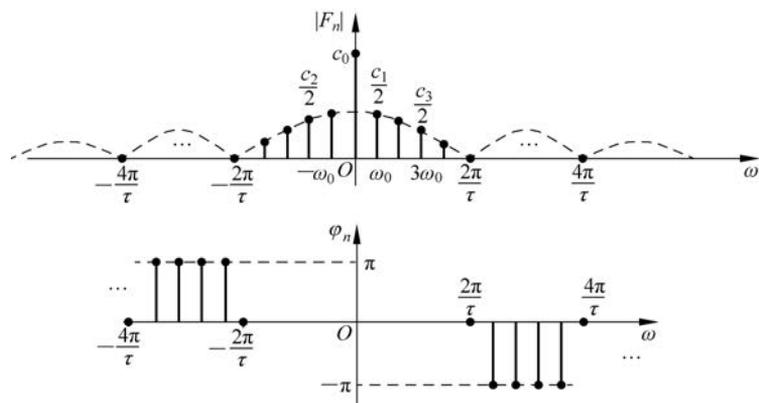


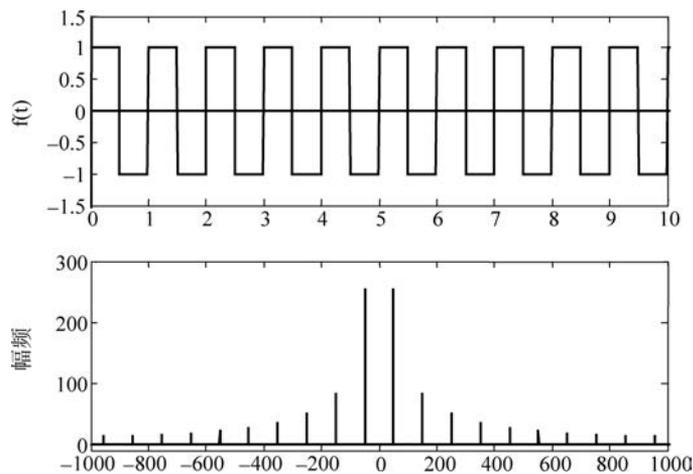
图 3-6 周期矩形信号的复振幅频谱

**【例 3-4】** 将基频为 50Hz 的方波展开为傅里叶级数。

**解：** MATLAB 程序如下：

```
clear
N = 5000; T = 0.01; n = 1: 8 * N;
D = 2 * pi / (N * T);
f = square(2 * pi * n * T);           % 产生方波
F = T * fftshift(fft(f));
k = floor(- (8 * N - 1) / 2 : 8 * N / 2);
subplot(2, 1, 1);
plot(n * T, f);
axis([0, 10, -1.5, 1.5]);
ylabel('f(t)');
line([-1, 50], [0, 0]);
line([0, 0], [-6.1, 4.1]);
subplot(2, 1, 2);
plot(k * D, abs(F));
ylabel('幅频');
axis([-1000, 1000, -10, 300]);
```

程序运行结果如图 3-7 所示。

图 3-7 例 3-4 的  $f(t)$  与其傅里叶级数幅频特性

**【例 3-5】** 利用 MATLAB 分析周期矩形脉冲  $f(t)$  的周期  $T$  及脉冲宽度  $\tau$  的变化对频谱发生的影响,并以此结果来分析周期信号频谱的特性。

**解:** 首先定义一个抽样函数(Sa.m):

```
Sa.m
% 抽样函数(连续或离散)
% 高度为 1,
% 调用: y = Sa(t) 函数幅度为 1,第一个过零点为 pi
function f = Sa(t)
f = sinc(t./pi);
```

(1) 周期矩形脉冲  $\tau$  不变、 $T$  变化时频谱改变的 MATLAB 程序如下:

```
clear all
tau = 0.5;t = [2 5 10];
tau_T = tau./t; % 占空比
omega_0 = 2 * pi./t
n0 = 0;n1 = 50;
N = length(t);
for k = 1:N
n = [n0:omega_0(k):n1];
F_n = tau_T(k) * Sa(tau * n/2)
Fn_max = max(F_n);
Fn_min = min(F_n);
subplot(N,1,k),stem(n,F_n,'. ');
axis([n0 n1 Fn_min - 0.01 Fn_max + 0.01]);
line([n0 n1],[0 0], 'color','r'); % 画直线,表示横轴,线为红色
title(strcat('幅度频谱: 脉冲宽度 = 0.5,周期 = ',num2str(t(k)))); % 在图上写标题
end
```

结果如图 3-8 所示。

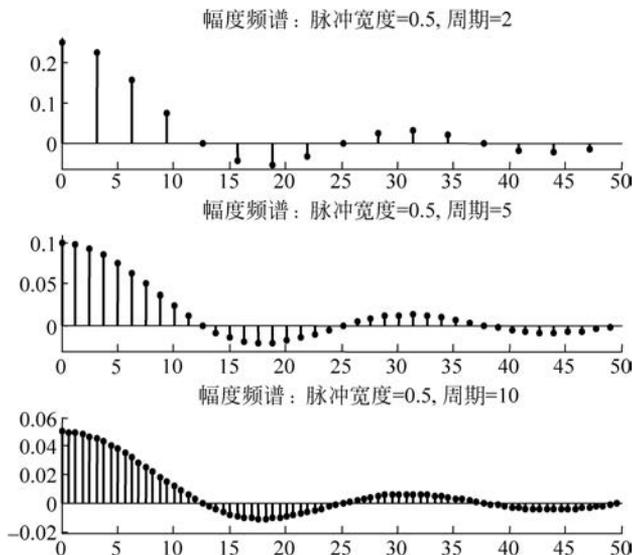


图 3-8 周期矩形脉冲  $\tau$  不变、 $T$  变化时频谱的改变

(2) 周期矩形脉冲  $T$  不变、 $\tau$  变化时频谱改变的 MATLAB 程序如下:

```
clear all
tau = [0.2 0.5 1];t = 5;
```

```

tau_T = tau./t; % 占空比
omega_0 = 2 * pi/t
n0 = 0;n1 = 50;N = length(tau);
n = [n0:omega_0:n1];
for k = 1:N
F_n = tau_T(k) * Sa(tau(k) * n/2);
Fn_max = max(F_n);
Fn_min = min(F_n);
subplot(N,1,k),stem(n,F_n,'. '); % 画幅度频谱
axis([n0 n1 Fn_min - 0.01 Fn_max + 0.01]);
line([n0 n1],[0 0],'color','r'); % 画直线,表示横轴,线为红色
title(strcat('幅度频谱:周期=5,脉冲宽度=',num2str(tau(k)))); % 在图上写标题
end

```

结果如图 3-9 所示。

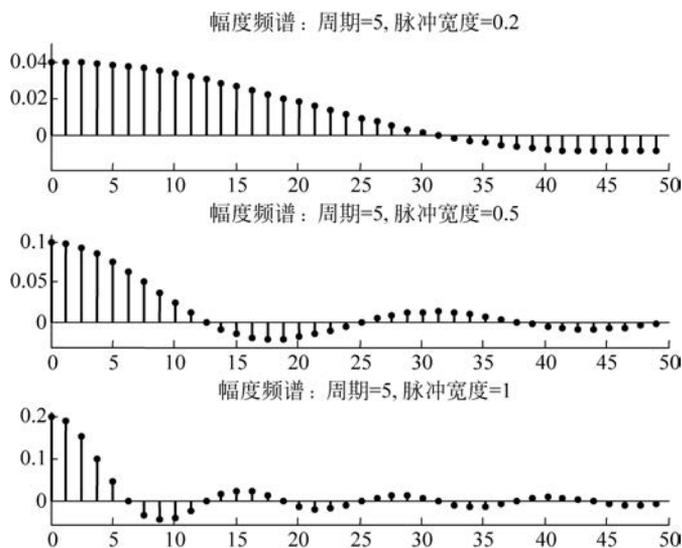


图 3-9 周期矩形脉冲  $T$  不变、 $\tau$  变化时频谱的改变

从例 3-5 仿真结果图可以看到,周期矩形脉冲  $f(t)$  的频谱具有如下特点:

(1) 周期矩形脉冲  $f(t)$  的频谱图是离散的,频率间隔  $\omega_0 = 2\pi/T$ 。特别是随着周期  $T$  的增加,离散谱线的间隔  $\omega_0$  减小;若  $T \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0, |F_n| \rightarrow 0$ , 离散谱将变为连续谱。

(2) 直流、基波及各次谐波分量的大小正比于脉冲幅度  $E$  及脉冲宽度  $\tau$ ,反比于周期  $T$ 。各谐波幅度随  $\text{Sa}(n\omega_0\tau/2)$  的包络而变化,  $\omega = 2m\pi/\tau$  为零点 ( $m=1,2,\dots$ )。若  $\tau \rightarrow 0$ , 第一个零点  $\omega = 2\pi/\tau \rightarrow \infty$ 。

(3) 频谱图中有无穷多根谱线,但主要能量集中在第一个零点  $\omega = 2\pi/\tau$  之内。实际应用时,通常把  $0 \sim 2\pi/\tau$  的频率范围称为矩形信号的频带宽度,记为  $B$ ,于是矩形信号的频带宽度可表示为

$$\begin{cases} B_w = \frac{2\pi}{\tau} \\ B_f = \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad (3-10)$$

式(3-10)中,  $B_w$  的单位是弧度/秒(rad/s),  $B_f$  的单位是赫兹(Hz)。

以上虽然是对周期矩形信号的频谱分析,但其基本特性对所有周期信号都适用,由此给出周期信号频谱的一般特性。

一般周期信号的频谱具有以下三个特点:

(1) 离散性: 谱线沿频率轴离散分布。谱线仅在  $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots$  基波的倍频(离散的)频率点上出现。

(2) 谐波性: 各谱线等距分布,相邻谱线的距离等于基波频率。周期信号没有基波频率整数倍以外的频率分量。

(3) 收敛性: 随着  $n \rightarrow \infty, |F_n| \rightarrow 0$ 。

### 3.2.3 周期信号的功率

周期信号随着时间的延续,信号的幅度周期性变化着,因此周期信号的能量无限。而平均功率是有限的,所以周期信号是功率信号。

周期信号的功率定义为周期信号在  $1\Omega$  电阻上消耗的平均功率。因而,对于周期为  $T$  的周期信号  $f(t)$ ,其平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \quad (3-11)$$

已知周期信号  $f(t)$  可展开为傅里叶级数展开式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

将其代入式(3-11),得到

$$P = |F_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 \quad (3-12)$$

式(3-12)说明周期信号的功率等于信号直流分量的功率与信号的各次谐波分量功率之和,这就是帕塞瓦尔恒等式,即能量守恒定理。



傅里叶变换

## 3.3 非周期信号的傅里叶变换

从本质上讲,傅里叶级数展开就类似于一个三棱镜,它把一个信号函数分解为众多的频率分量,而利用这些频率分量又可以重构原来的信号函数。这种信号的分解是可逆的且保持能量不变。傅里叶棱镜与自然棱镜的原理一样,不过自然棱镜是将自然光分解为多种颜色的光,而傅里叶棱镜将复合信号分解为多个频率。这两种棱镜的比较如图 3-10 所示。

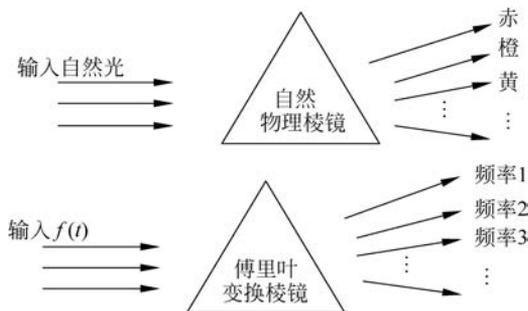


图 3-10 两种棱镜的比较

### 3.3.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

若将非周期信号看作周期信号  $T \rightarrow \infty$  的极限情况,非周期信号就可以表示为

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t)$$

以周期矩形脉冲为例,当  $T \rightarrow \infty$  时,周期信号就变成非周期的单脉冲信号。由 3.2 节的分析可知,随着  $T$  的增大,离散谱线间隔  $\omega_0$  就变窄;当  $T \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0, |F_n| \rightarrow 0$  时,离散谱就变成了连续谱。虽然  $|F_n| \rightarrow 0$ ,但其频谱分布规律依然存在,它们之间的相对值仍有差别。为了表明这种振幅、相位随频率变化的相对关系,我们引入频谱密度函数。

已知周期函数的傅里叶级数为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

式中,

$$F_n = F(jn\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3-13)$$

对式(3-13)两边取极限,并乘以  $T$  使  $TF_n$  不趋于 0,得到

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TF_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

当  $T \rightarrow \infty$  时,谱线间隔  $\omega_0 \rightarrow 0$ ,离散频率  $n\omega_0$  变成连续频率  $\omega$ ,令  $\lim_{T \rightarrow \infty} TF_n = F(j\omega)$ ,则

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-14)$$

由傅里叶级数可得

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

当  $T \rightarrow \infty$  时,  $f_T(t) \rightarrow f(t)$ ,  $n\omega_0 \rightarrow \omega$ ,  $\omega_0 \rightarrow d\omega$ ,求和变成求积分,则有

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega$$

即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-15)$$

一般把式(3-14)与式(3-15)叫作傅里叶变换对,其中式(3-14)为傅里叶变换,式(3-15)为傅里叶逆变换,而傅里叶级数是傅里叶变换的特殊表示形式。

傅里叶变换对的关系也常用下述符号表示

$$\begin{cases} F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] \end{cases} \quad (3-16)$$

或记为

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

式(3-16)表示  $F(j\omega)$  与  $f(t)$  具有一一对应关系,  $F(j\omega)$  是  $f(t)$  的频谱密度函数, 而  $f(t)$  是  $F(j\omega)$  的原函数。

傅里叶变换简称傅氏变换, 用英文缩写 FT 表示; 傅里叶逆变换用英文缩写 IFT 表示。若  $f(t)$  为因果信号, 则傅里叶变换式为

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

其逆变换与式(3-15)相同。

由傅里叶逆变换式, 可以得到任意信号在不同频率时的幅度和相位值, 特别当频率和观察时间为零时, 有

$$\begin{cases} F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \\ f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \end{cases} \quad (3-17)$$

式(3-17)表明信号的直流分量可以由傅里叶变换在  $\omega$  为零时的值来确定, 而  $t$  为零时的信号取值与  $f(t)$  的频谱密度函数的净面积成比例。

由傅里叶变换的推导过程可以看出, 信号进行傅里叶变换存在的条件与傅里叶级数存在的条件基本相同, 不同之处是时间范围由一个周期变为无限区间。

傅里叶变换存在的充分条件是信号  $f(t)$  在无限区间内绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3-18)$$

信号的时间函数  $f(t)$  和它的傅里叶变换即频谱  $F(j\omega)$  是同一信号的两种不同表现形式。 $f(t)$  显示了时间信息而隐藏了频率信息,  $F(j\omega)$  则显示了频率信息而隐藏了时间信息。

### 3.3.2 非周期信号的频谱函数

由非周期信号的傅里叶变换可知

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

频谱函数  $F(j\omega)$  一般是复函数, 记为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-19)$$

式中,  $|F(j\omega)|$  是幅度谱密度函数, 简称幅度谱;  $\varphi(\omega)$  是相位谱密度函数, 简称相位谱。它们都是  $\omega$  的连续函数。

利用欧拉公式, 非周期信号的傅里叶变换表示式也可改写成三角函数形式

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \end{aligned}$$

即非周期信号  $f(t)$  也可以分解为许多不同频率的正弦分量。

由于基波频率趋于无穷小量, 因此非周期信号  $f(t)$  包含了所有的频率分量, 即非周期

信号的频谱为连续谱。由于各频率成分的振幅趋于无穷小,因此非周期信号  $f(t)$  的频谱只能用密度函数  $|F(j\omega)|$  来表述各分量的相对大小。

### 3.3.3 典型信号的傅里叶变换

#### 1. 单边指数函数

##### 1) 单边因果指数函数

$$f(t) = e^{-at}\varepsilon(t), \quad a > 0$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\varepsilon(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$= \frac{-e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{-j\arctan\frac{\omega}{a}}$$

即

$$F(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \quad (3-20)$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{a} \end{cases}$$

单边因果指数函数的时域波形  $f(t)$ 、幅度谱  $|F(j\omega)|$ 、相位谱  $\varphi(\omega)$  如图 3-11 所示。

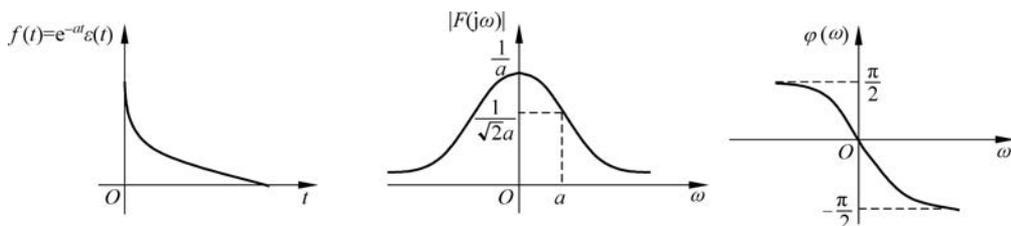


图 3-11 单边指数函数的波形,幅度谱和相位谱

**【例 3-6】** 编写单边因果指数函数  $f(t) = e^{-at}\varepsilon(t)$  傅里叶变换  $F(j\omega)$  的 MATLAB 程序,并画出波形。

**解:** MATLAB 程序为:

```
clear;
N = 500; T = 0.1; n = 1: N;
D = 2 * pi / (N * T);
f = exp(-0.1 * n * T); subplot(3, 1, 1);
plot(n * T, f); axis([-1, 50, -0.1, 1.2]);
ylabel('f(t)');
line([-1, 50], [0, 0]);
line([0, 0], [-0.1, 1.2]);
F = T * fftshift(fft(f));
k = floor(-(N-1)/2 : N/2);
subplot(3, 1, 2);
plot(k * D, abs(F));
ylabel('幅频');
axis([-2, 2, -0.1, 10]);
```

```
subplot(3, 1, 3);
plot(k * D, angle(F));
ylabel('相频');
axis([-2, 2, -2, 2]);
```

程序运行结果如图 3-12 所示。

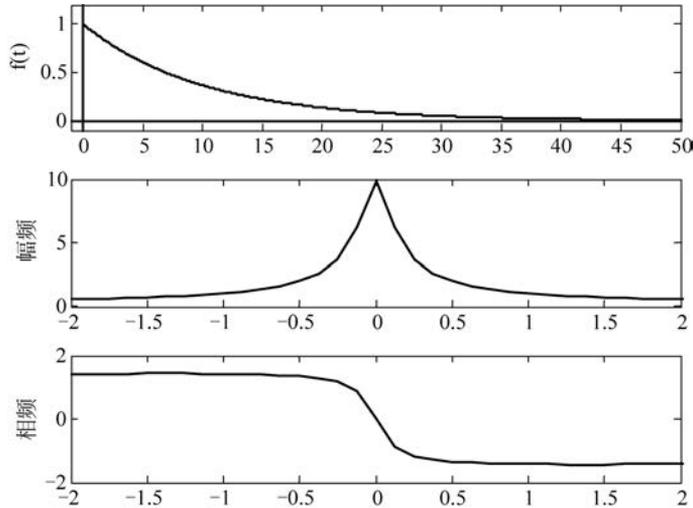


图 3-12 例 3-6 单边因果指数函数及其傅里叶变换

## 2) 单边反因果指数函数

$$f(t) = e^{at}\epsilon(-t), \quad a > 0$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}\epsilon(-t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{j\arctan \frac{\omega}{a}} \end{aligned}$$

即

$$F(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} \quad (3-21)$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{a} \end{cases}$$

单边反因果指数函数的时域波形  $f(t)$ 、幅度谱  $|F(j\omega)|$ 、相位谱  $\varphi(\omega)$  如图 3-13 所示。

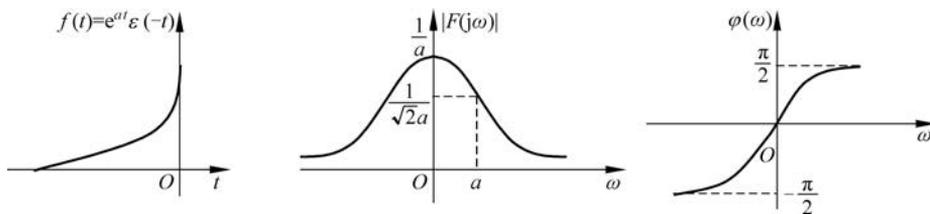


图 3-13  $e^{at}\epsilon(-t)$  波形及其幅度谱、相位谱

**【例 3-7】** 编写求单边反因果指数函数  $f_2(t) = Ae^{at}\epsilon(-t)$  (令  $A=2, a=3$ ) 傅里叶变换  $F(j\omega)$  的 MATLAB 程序, 并画出波形。

解: MATLAB 程序为:

```
clear;
N = -500; T = 0.1; n = -1: -1: N;
D = 2 * pi / (N * T);
f = exp(0.1 * n * T);
subplot(3, 1, 1);
plot(n * T, f);
axis([-50, 1, -0.1, 1.2]);
ylabel('f(t)');
line([-50, 1], [0, 0]);
line([0, 0], [-0.1, 1.2]);
F = T * fftshift(fft(f));
k = floor(-(-N-1)/2: -N/2);
subplot(3, 1, 2);
plot(k * D, abs(F));
ylabel('幅频');
axis([-2, 2, -0.1, 10]);
subplot(3, 1, 3);
plot(k * D, angle(F));
ylabel('相频');
axis([-2, 2, -2, 2]);
```

程序运行结果如图 3-14 所示。

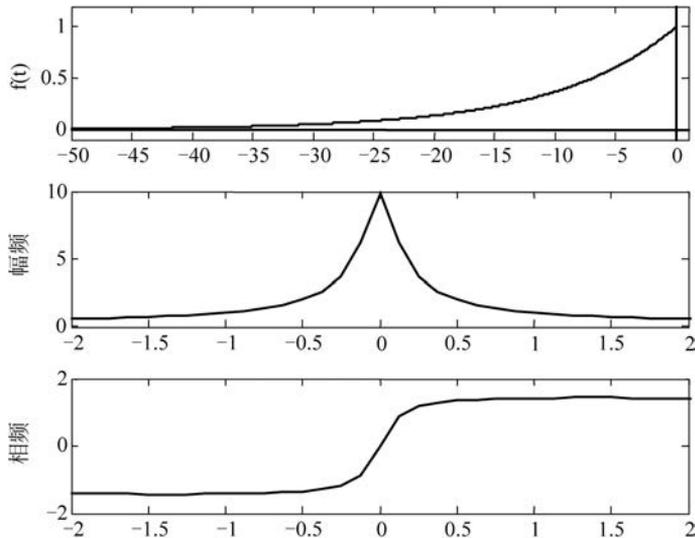


图 3-14 例 3-7 单边非因果指数函数及其傅里叶变换

## 2. 双边指数函数

双边指数函数  $f(t) = e^{-a|t|}$ , 其中  $-\infty < t < \infty, a > 0$

或

$$f(t) = e^{at}\epsilon(-t) + e^{-at}\epsilon(t)$$

利用以上单边指数函数傅里叶变换的结果, 有

$$F(j\omega) = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (3-22)$$

即

$$\left. \begin{aligned} |F(j\omega)| &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

双边指数函数的时域波形  $f(t)$ 、频谱  $F(j\omega)$  如图 3-15 所示。

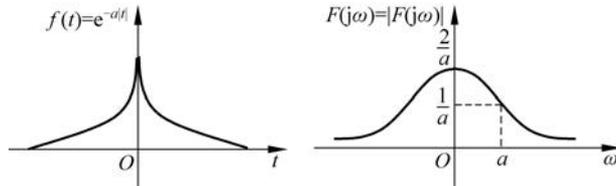


图 3-15 双边指数函数的时域波形和频谱

**【例 3-8】** 写出双边指数函数  $e^{-2|t|}$  傅里叶变换的 MATLAB 程序, 并画出波形。

解: MATLAB 程序为:

```
clear;
syms t v;
F = fourier(exp(-2 * abs(t)));
subplot(2, 1, 1);
ezplot(exp(-2 * abs(t)));
subplot(2, 1, 2);
ezplot(F);
```

波形如图 3-16 所示。

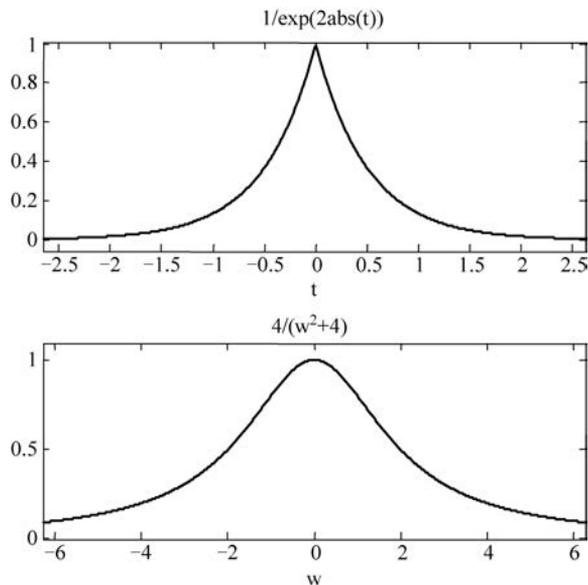


图 3-16 例 3-8 双边指数函数及其傅里叶函数

### 3. 符号函数

符号函数也称正负函数, 记为  $\text{sgn}(t)$ , 其表达式为

$$\operatorname{sgn}(t) = -\varepsilon(-t) + \varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

显然, 这个函数不满足绝对可积条件, 不能用式(3-14)直接来求, 但我们可用以下极限形式表示  $\operatorname{sgn}(t)$  函数

$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}\varepsilon(t) - e^{at}\varepsilon(-t)]$$

上式是两个单边指数函数的组合, 利用前面两个例子的结果, 并取极限可得

$$F(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \begin{cases} \frac{2}{j\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases} \quad (3-23)$$

符号函数的幅度谱和相位谱为

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} \pi/2, & \omega < 0 \\ -\pi/2, & \omega > 0 \end{cases} \end{cases}$$

符号函数的时域波形  $f(t)$ 、幅度谱  $|F(j\omega)|$  和相位谱  $\varphi(\omega)$  如图 3-17 所示。

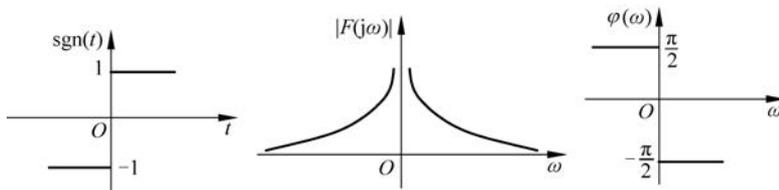


图 3-17 符号函数的波形及其幅度谱和相位谱

#### 4. 矩形脉冲信号 $g_\tau(t)$

矩形脉冲信号  $g_\tau(t)$  是宽度为  $\tau$ , 幅度为 1 的偶函数, 常常称之为门函数, 其表示式为

$$f(t) = \left[ \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = g_\tau(t)$$

门函数的频谱函数为

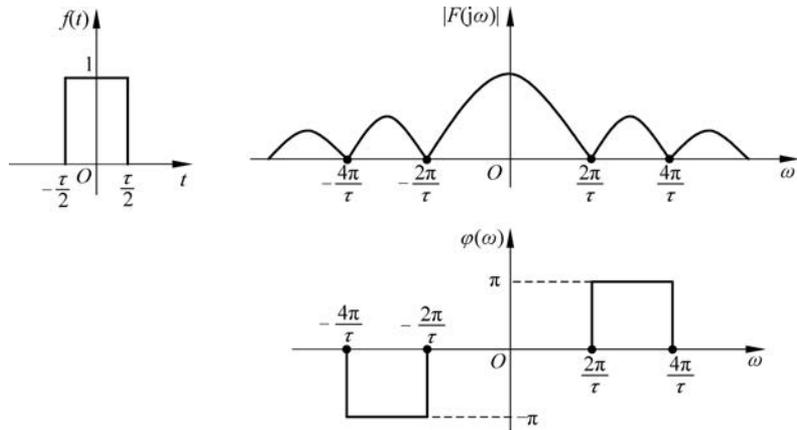
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\tau(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = \tau \cdot \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned} \quad (3-24)$$

因此, 门函数的幅度谱和相位谱分别为

$$\begin{aligned} |F(j\omega)| &= \tau \left| \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{4(n+1)\pi}{\tau} \end{cases}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

门函数的波形  $f(t)$ 、幅度谱  $|F(j\omega)|$ 、相位谱  $\varphi(\omega)$  如图 3-18 所示。

**【例 3-9】** 写出门函数  $f(t) = g_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$  傅里叶变换的 MATLAB 程序并画出波形。

图 3-18  $g_{\tau}(t)$  的波形及幅度谱和相位谱

解：MATLAB 程序为：

```
clear;
T=0.02; t=-10:T:10; N=200;
W=4*pi; k=-N:N; w=k*W/N;
f1=stepfun(t,-1)-stepfun(t,1); % f(t)
F=T*f1*exp(-j*t'*w); % f(t)的傅里叶变换
F1=abs(F); P1=angle(F);
subplot(3,1,1); plot(t,f1);
axis([-3,3,-0.1,1.2]); ylabel('f(t)');
xlabel('t'); title('f(t)'); grid;
subplot(3,1,2); plot(w,F1);
axis([-3*pi,3*pi,-0.01,2.1]);
grid; ylabel('振幅');
subplot(3,1,3); plot(w,P1*180/pi);
grid; axis([-3*pi,3*pi,-180,180]);
xlabel('w'); ylabel('相位(度)');
```

波形如图 3-19 所示。

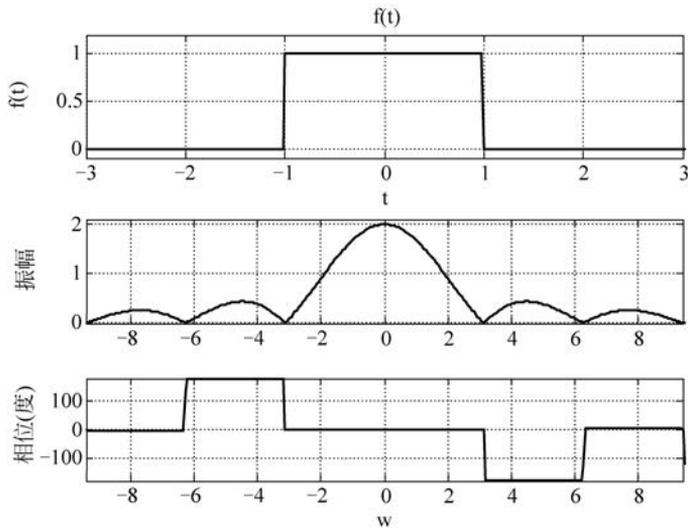


图 3-19 例 3-9 门函数及其傅里叶变换

由于  $F(j\omega)$  是实函数, 其相位谱只有  $0, \pi$  两种情况, 反映在  $F(j\omega)$  上则是正、负的变化, 因此其幅度谱、相位谱可合并在一个图上来表示, 如图 3-20 所示。

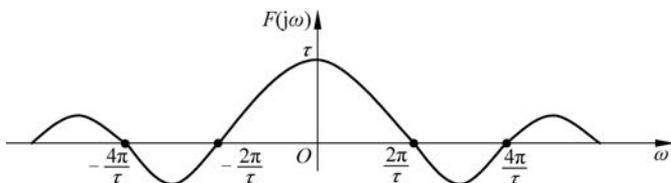


图 3-20  $g_\tau(t)$  的频谱函数

由图 3-20 可见, 门函数在时域中是持续时间有限的信号, 而它的频谱是按  $\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$  规律变化的, 是无限频宽的频谱。但是因为门函数信号的主要能量集中在频谱函数的第一个零点之内, 所以通常定义门函数的频带宽度为  $B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$  (rad/s), 或  $B_f = \frac{1}{\tau}$  (Hz)。

### 5. 冲激函数

时域冲激函数  $\delta(t)$  的傅里叶变换可由定义直接得到, 即

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3-25)$$

由式(3-25)可知, 时域冲激函数  $\delta(t)$  频谱的所有频率分量均匀分布(为常数 1), 这样的频谱也称为白频谱。冲激函数  $\delta(t)$  及其频谱函数如图 3-21 所示。

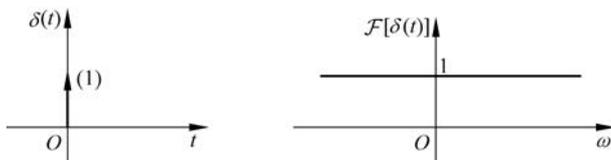


图 3-21 冲激函数及其频谱

频域冲激  $\delta(\omega)$  的原函数也可由定义直接得到, 即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad (3-26)$$

由式(3-26)可知, 频域冲激  $\delta(\omega)$  的逆变换是常数(直流分量)。

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \delta(\omega) \\ 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \end{cases} \quad (3-27)$$

频域冲激函数  $\delta(\omega)$  及其原函数如图 3-22 所示。

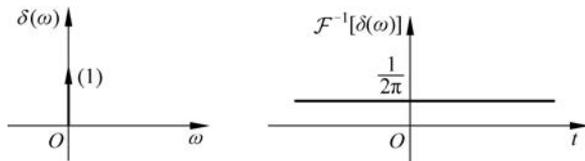


图 3-22 频域冲激函数  $\delta(\omega)$  及其原函数

### 6. 阶跃函数 $\varepsilon(t)$

阶跃函数虽不满足绝对可积条件, 但  $\varepsilon(t)$  可以表示为

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

对上式两边同时进行傅里叶变换,有

$$\mathcal{F}[\varepsilon(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\omega} \quad (3-28)$$

阶跃函数的时域波形、幅度谱  $|F(j\omega)|$  和相位谱  $\varphi(\omega)$  如图 3-23 所示。

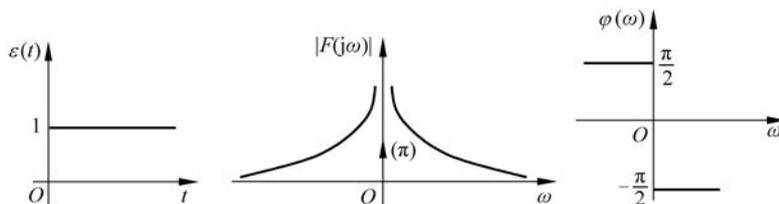


图 3-23 阶跃函数的波形以及幅度谱和相位谱

由以上常用信号的傅里叶变换可见,在引入奇异(冲激)函数之后,许多不满足绝对可积条件,即式(3-18)的函数,如阶跃函数等,都可以有确切的频谱函数表示式。

表 3-1 列出了常用信号的频谱函数。

表 3-1 常用信号的频谱函数

编 号	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$g_\tau(t)$	$\tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
2	$\tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right)$	$2\pi g_\tau(\omega)$
3	$e^{-\alpha t} \varepsilon(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
4	$t e^{-\alpha t} \varepsilon(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$
5	$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
6	$\delta(t)$	1
7	1	$2\pi\delta(\omega)$
8	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
9	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
10	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
11	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
12	$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}, F(0) = 0$
13	$\frac{1}{\pi t}$	$-j \operatorname{sgn}(\omega)$
14	$\delta_T(t)$	$\omega_0 \hat{\delta}\omega_0(\omega)$
15	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$
16	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \varepsilon(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^n}$

### 3.3.4 傅里叶变换的性质

傅里叶变换的性质揭示了信号的时域特性和频域特性之间的内在联系。讨论傅里叶变换的性质,目的在于:

- (1) 进一步了解时频特性的内在联系;
- (2) 利用傅里叶变换的性质,基于常用信号的傅里叶变换求一般信号的  $F(j\omega)$ ;
- (3) 了解傅里叶变换在通信系统领域中的应用。

#### 1. 线性性质

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$ , 则

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega) \quad (3-29)$$

式中,  $a$ 、 $b$  为任意常数。

证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-j\omega t} dt &= a \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega) \end{aligned}$$

利用傅里叶变换的线性性质,可以将待求信号分解为若干基本信号之和,如在 3.3.3 节我们将阶跃信号分解为直流信号与符号函数之和,使得求解信号的傅里叶变换变得简单。

同时,线性性质是对信号与系统进行频域分析的基础,具有重要的应用价值。

#### 2. 时延(时移、移位)性质

若  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则

$$f_1(t) = f(t - t_0) \leftrightarrow F_1(j\omega) = F(j\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (3-30)$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx \\ &= F(j\omega)e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

**【例 3-10】** 求如图 3-24 所示信号  $f_1(t)$  的频谱函数  $F_1(j\omega)$ , 并作频谱图。

解:  $f_1(t)$  与门函数  $g_\tau(t)$  的关系为  $f_1(t) = Eg_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$

由 3.3.3 节门函数的傅里叶变换,得

$$g_\tau(t) \leftrightarrow F(j\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

再由线性性质与时移性质,得到

$$F_1(j\omega) = EF(j\omega)e^{-j\omega t_0} \Big|_{t_0=\tau/2} = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

$$|F_1(j\omega)| = E |F(j\omega)| = E\tau \left| \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2} \right|$$

$$\varphi_1(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{\omega\tau}{2}$$

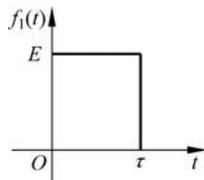


图 3-24 例 3-10 信号的波形图

因此,  $f_1(t)$  的幅度、相位频谱函数  $|F_1(j\omega)|$ 、 $\varphi_1(\omega)$  如图 3-25 所示。

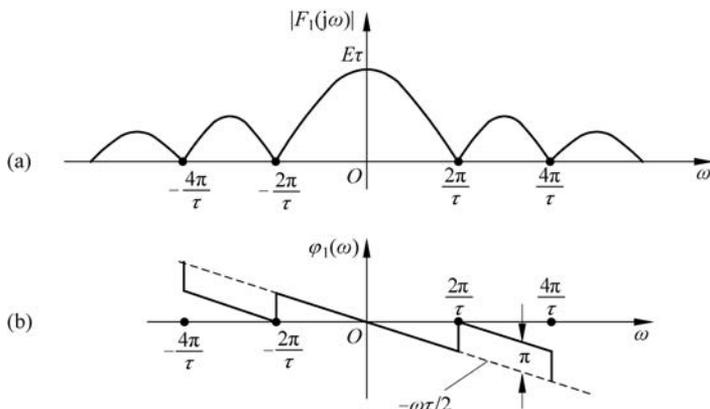


图 3-25 例 3-10 的幅度、相位频谱

**【例 3-11】** 编写  $f_1(t) = g_2(t-1) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$  的傅里叶变换 MATLAB 程序, 并画出波形。

**解:** MATLAB 程序为:

```
clear;
T = 0.02; t = -10: T: 10; N = 200;
W = 4 * pi; k = -N: N; w = k * W/N;
f1 = stepfun(t, 0) - stepfun(t, 2);           % f(t)的波形
F = T * f1 * exp(-j * t' * w);              % f(t)的傅里叶变换
F1 = abs(F); P1 = angle(F);
subplot(3, 1, 1); plot(t, f1);
axis([-2, 2, -0.1, 1.2]);
ylabel('f(t)');
xlabel('t'); title('f(t)'); grid;
subplot(3, 1, 2); plot(w, F1);
axis([-3 * pi, 3 * pi, -0.01, 2.1]);
grid; ylabel('振幅');
subplot(3, 1, 3);
plot(w, P1 * 180/pi);
grid; axis([-3 * pi, 3 * pi, -180, 180]);
xlabel('w'); ylabel('相位(度)');
```

波形如图 3-26 所示。

### 3. 频移性质

若  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(j(\omega - \omega_0)) \quad (3-31)$$

**证明:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(j(\omega - \omega_0))$$

频移特性表明信号在时域中与复因子  $e^{j\omega_0 t}$  相乘, 则在频域中将使整个频谱搬移  $\omega_0$ 。

在通信系统中, 对信号进行调制与解调, 就是通过将信号  $f(t)$  乘以载波信号  $\cos\omega_0 t$  (或  $\sin\omega_0 t$ ) 来实现的。

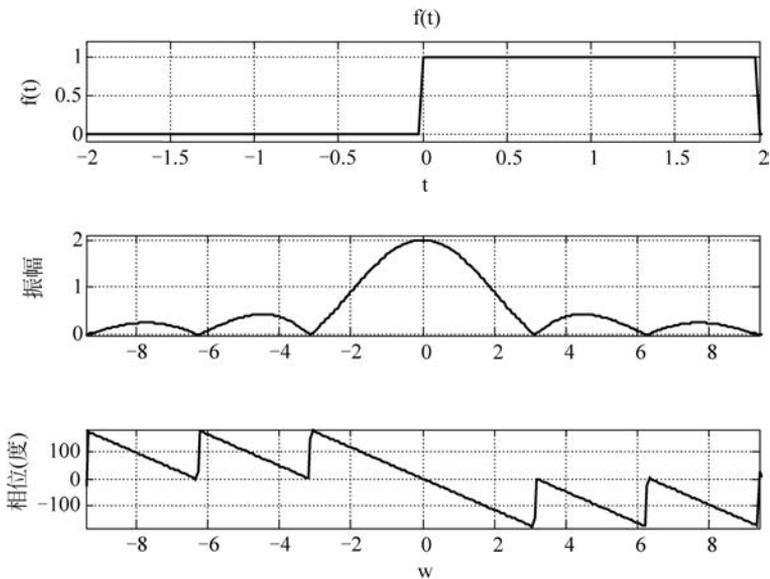


图 3-26 例 3-10 门函数时延的频谱

实际调制、解调的载波(本振)信号是正/余弦信号,借助欧拉公式,正、余弦信号可以分别表示为

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \quad \sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{j2}$$

这样,若有  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则有

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{j2}[F(j(\omega - \omega_0)) - F(j(\omega + \omega_0))]$$

**【例 3-12】** 求  $f(t) = \cos\omega_0 t \varepsilon(t)$  的频谱函数。

解: 已知

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

利用频移特性,有

$$\begin{aligned} \cos\omega_0 t \varepsilon(t) &\leftrightarrow \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2j(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{2j(\omega - \omega_0)} \\ &= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

$f(t)$  的波形以及频谱如图 3-27 所示。

同理可得

$$\sin\omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j2}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

**【例 3-13】** 求如图 3-28 所示  $f(t)$  的  $F(j\omega)$  并作图。

解: 令  $f_1(t) = A g_\tau(t)$ , 则  $F_1(j\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

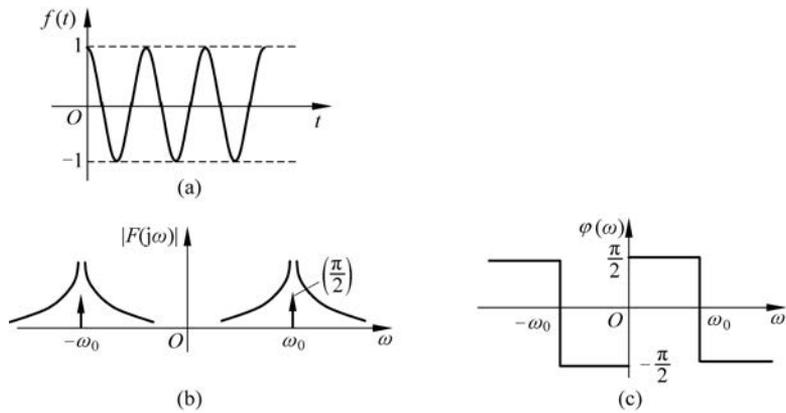


图 3-27 例 3-12 的波形及幅度、相位频谱

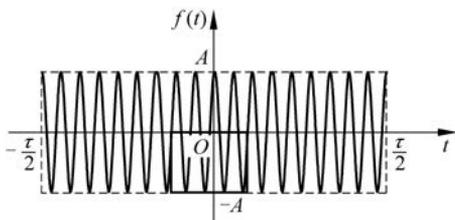


图 3-28 例 3-13  $f(t)$  的波形

而

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f_1(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow F(j\omega) \\
 &= \frac{1}{2} [F_1(j(\omega - \omega_0)) + F_1(j(\omega + \omega_0))] \\
 &= \frac{A\tau}{2} \left[ \text{Sa} \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} \tau \right) + \text{Sa} \left( \frac{\omega + \omega_0}{2} \tau \right) \right]
 \end{aligned}$$

如果  $\omega_0 \gg 2\pi/\tau$ , 则  $F_1(j\omega)$  以及  $F(j\omega)$  如图 3-29 所示。

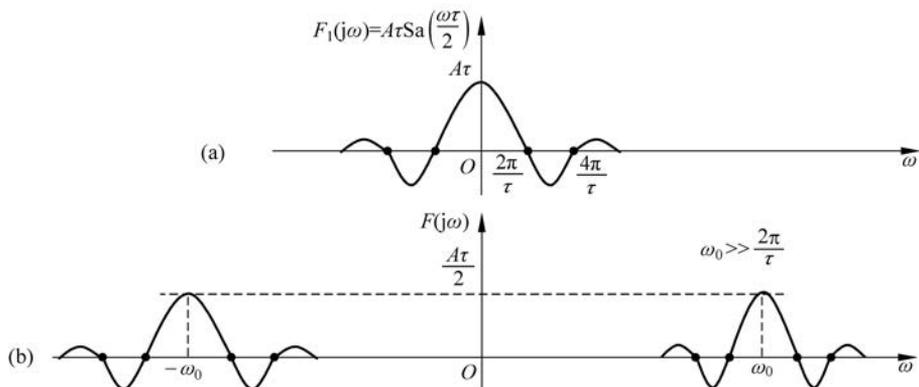


图 3-29 例 3-13 的  $F_1(j\omega)$  以及  $F(j\omega)$

**【例 3-14】** 写出  $f(t) = g_4(t) \cos \omega_0 t = [\epsilon(t+2) - \epsilon(t-2)] \cos \omega_0 t$  傅里叶变换的 MATLAB 程序, 并画出波形。

解: MATLAB 程序为:

```

clear;
T=0.02; t=-10:T:10;
N=200; W=4*pi; k=-N:N; w=k*W/N;
f1=(stepfun(t,-2)-stepfun(t,2)).*cos(2*pi*t); % f(t)
F=T*f1*exp(-j*t'*w); % f(t)的傅里叶变换
F1=abs(F);
subplot(2,1,1); plot(t,f1); axis([-4,4,-1.2,1.2]);
ylabel('f(t)');
xlabel('t'); title('f(t)'); grid;
    
```

```
subplot(2, 1, 2); plot(w, F1);
axis([-3 * pi, 3 * pi, -0.01, 2.1]);
grid; ylabel('振幅');
```

波形如图 3-30 所示。

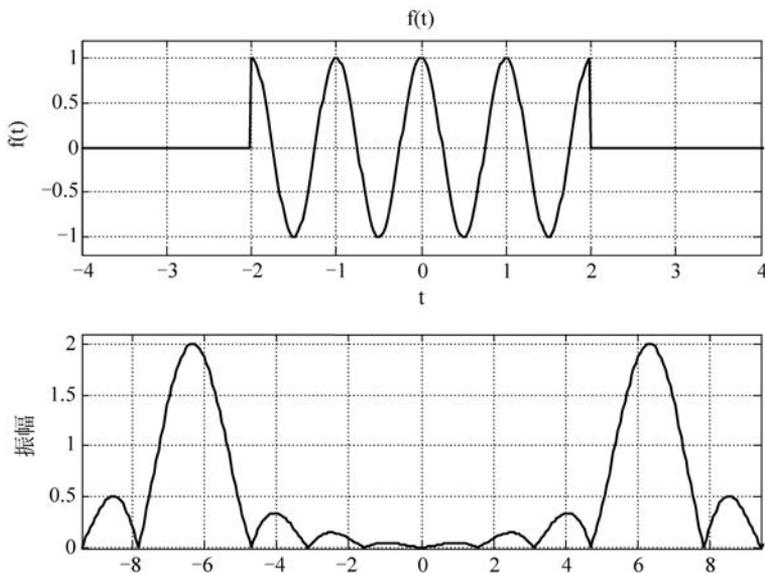


图 3-30 例 3-14 门函数调制的频谱

#### 4. 尺度变换性质

若  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0 \quad (3-32)$$

证明:  $\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$

当  $a > 0$  时, 令  $at = x$ , 则  $dt = \frac{1}{a} dx$ ,  $t = \frac{x}{a}$ , 代入上式有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j \frac{\omega}{a} x} dx = \frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

当  $a < 0$  时, 令  $at = x$ , 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j \frac{\omega}{a} x} dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \frac{\omega}{a} t} dt = -\frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

综合  $a > 0$ 、 $a < 0$  两种情况, 尺度变换特性表示为

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

特别当  $a = -1$  时, 得到  $f(t)$  的时域翻转函数  $f(-t)$ , 其频谱同样为原频谱的翻转, 即

$$f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

尺度变换性质说明, 信号在时域中压缩, 频域中就扩展; 反之, 信号在时域中扩展, 在频

域中就压缩,即信号的脉宽与频宽成反比。

一般时宽有限的信号,其频宽无限,反之亦然。由于信号在时域压缩(扩展)时,其能量成比例地减少(增加),因此其频谱幅度要相应乘以系数  $1/|a|$ 。也可以理解为信号波形压缩(扩展) $a$  倍,信号随时间变化加快(慢) $a$  倍,所以信号所包含的频率分量增加(减少) $a$  倍,频谱展宽(压缩) $a$  倍。又因能量守恒原理,各频率分量的大小减小(增加) $a$  倍。图 3-31 表示了矩形脉冲及频谱的扩展和压缩情况。

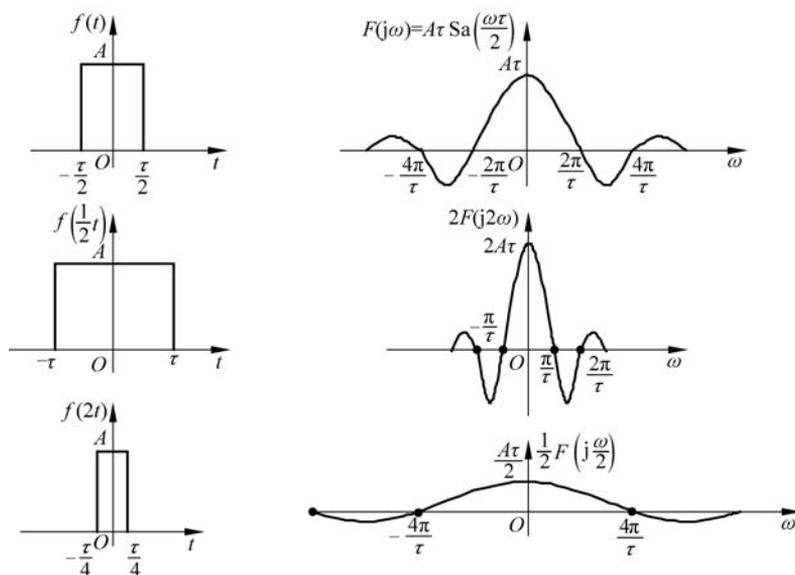


图 3-31 矩形脉冲及频谱的扩展和压缩

**【例 3-15】** 画出尺度变换后的门函数的频谱图,  $f_1(t) = \epsilon(t + 1/2) - \epsilon(t - 1/2)$  与  $f_2(t) = \epsilon(t + 2) - \epsilon(t - 2)$ , 写出对应的傅里叶变换的 MATLAB 程序及程序运行结果。

**解:**  $f_1(t)$  傅里叶变换的 MATLAB 程序为:

```
clear;
T = 0.02; t = -10: T: 10; N = 200; W = 4 * pi; k = -N: N; w = k * W/N;
f1 = stepfun(t, -0.5) - stepfun(t, 0.5);           % f1(t)
F = T * f1 * exp(-j * t' * w);                    % f1(t)的傅里叶变换
F1 = abs(F); P1 = angle(F); subplot(3, 1, 1); plot(t, f1);
axis([-3, 3, -0.1, 1.2]); ylabel('f(t)'); xlabel('t');
title('f(t)'); grid;
subplot(3, 1, 2); plot(w, F1); axis([-3 * pi, 3 * pi, -0.01, 1.1]);
grid; ylabel('振幅');
subplot(3, 1, 3); plot(w, P1 * 180/pi); grid;
axis([-3 * pi, 3 * pi, -180, 180]);
xlabel('w'); ylabel('相位(度)');
```

$f_2(t)$  傅里叶变换的 MATLAB 程序为:

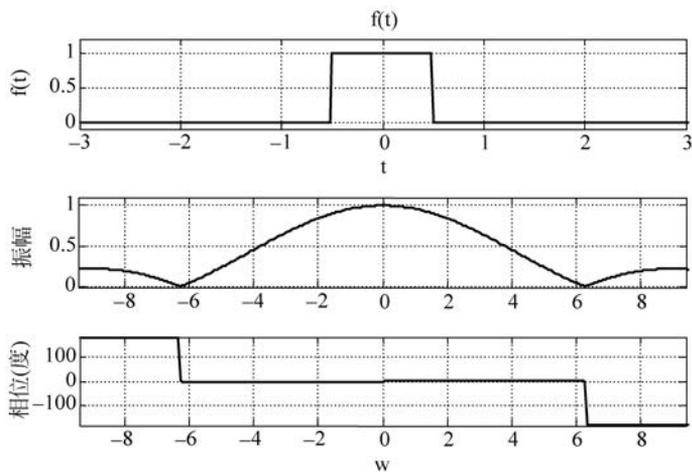
```
clear;
T = 0.02; t = -10: T: 10; N = 200; W = 4 * pi; k = -N: N; w = k * W/N;
f1 = stepfun(t, -2) - stepfun(t, 2);             % f2(t)
F = T * f1 * exp(-j * t' * w);                    % f2(t)的傅里叶变换
F1 = abs(F); P1 = angle(F);
```

```

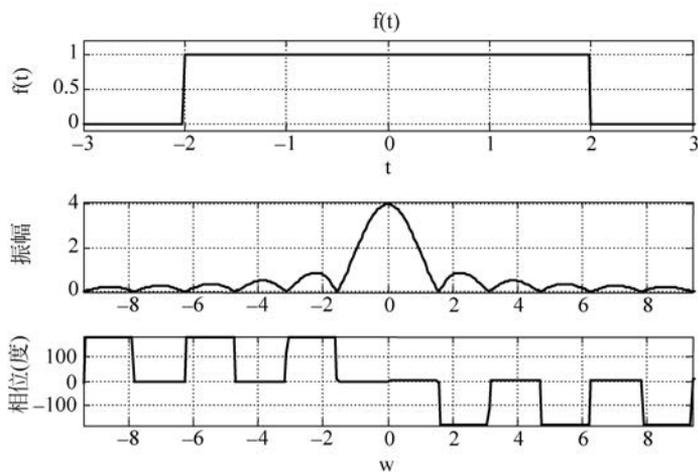
subplot(3, 1, 1); plot(t, f1);
axis([-3, 3, -0.1, 1.2]); ylabel('f(t)');
xlabel('t'); title('f(t)'); grid;
subplot(3, 1, 2); plot(w, F1);
axis([-3 * pi, 3 * pi, -0.01, 4.1]);
grid; ylabel('振幅');
subplot(3, 1, 3); plot(w, P1 * 180/pi); grid;
axis([-3 * pi, 3 * pi, -180, 180]);
xlabel('w'); ylabel('相位(度)');

```

波形如图 3-32 所示。



(a)  $f_1(t)$  傅里叶变换 MATLAB 程序运行结果



(b)  $f_2(t)$  傅里叶变换 MATLAB 程序运行结果

图 3-32 例 3-15 门函数压缩的频谱

### 5. 时域微分性质

若  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega) \quad (3-33)$$

证明: 由傅里叶变换的定义式得  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{交换微分、积分次序}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left( \frac{d}{dt} e^{j\omega t} \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

所以, 与傅里叶变换的定义式比较, 可知

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

同理, 性质可推广到高阶导数的傅里叶变换:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (3-34)$$

式中,  $j\omega$  是微分因子。

## 6. 时域积分性质

若  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow Y(j\omega) = \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega) \quad (3-35)$$

特别, 当  $F(0) = 0$  时

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) \quad (3-36)$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

令  $x = t - \tau$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi f(\tau) \delta(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= \pi \delta(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau + \frac{1}{j\omega} F(j\omega) \\ &= \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega) \end{aligned}$$

显然, 若  $F(0) = 0$ , 有  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$

从时域上看, 如果  $y(t)$  在无限区间内可积, 即  $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt < \infty$ , 说明无直流分量, 则

$F(0) = 0$ 。

利用积分特性可以简化由折线组成的信号频谱的求解。

**【例 3-16】** 求如图 3-33(a)所示  $f(t)$  的频谱函数  $F(j\omega)$ 。

解：

$$f(t) = \begin{cases} E\left(1 - \frac{2}{\tau} |t|\right), & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$f_1(t) = f'(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau}, & -\frac{\tau}{2} < t < 0 \\ -\frac{2E}{\tau}, & 0 < t < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$f'(t)$  如图 3-33(b)所示。

$$f_2(t) = f''(t) = \frac{2E}{\tau} \left[ \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$f''(t)$  如图 3-33(c)所示。

$$\begin{aligned} F_2(j\omega) &= \frac{2E}{\tau} \left( e^{j\frac{\omega\tau}{2}} + e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} - 2 \right) = \frac{2E}{\tau} \left( 2\cos \frac{\omega\tau}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{4E}{\tau} \left( \cos \frac{\omega\tau}{2} - 1 \right) = -\frac{8E}{\tau} \sin^2 \left( \frac{\omega\tau}{4} \right) \end{aligned}$$

本例中,  $F_1(0) = F_2(0) = 0$ 。

所以,最后可得:

$$F(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} F_2(j\omega) = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{8E}{\tau} \sin^2 \left( \frac{\omega\tau}{4} \right) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2 \left( \frac{\omega\tau}{4} \right)$$

### 7. 频域微分性质

若  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则

$$\frac{dF(j\omega)}{d\omega} \leftrightarrow (-jt)f(t) \quad (3-37)$$

一般频域微分特性的实用形式为

$$j \frac{dF(j\omega)}{d\omega} \leftrightarrow tf(t) \quad (3-38)$$

证明:

$$\begin{aligned} \frac{dF(j\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega t} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -jt f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

所以

$$\frac{dF(j\omega)}{d\omega} \leftrightarrow (-jt)f(t) \quad \text{或} \quad j \frac{dF(j\omega)}{d\omega} \leftrightarrow tf(t)$$

同理可证,定理可推广到对频谱函数求高阶导数,即

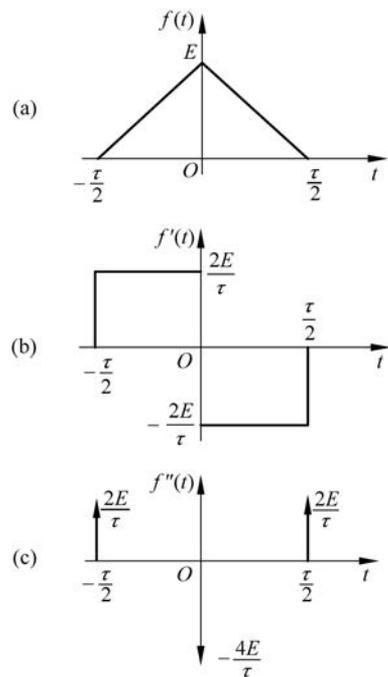


图 3-33 例 3-16  $f(t)$ 、 $f'(t)$  和  $f''(t)$  的波形

$$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} \leftrightarrow (-jt)^n f(t) \quad (3-39)$$

**【例 3-17】** 求  $f(t) = te^{-at}\varepsilon(t)$  的频谱函数  $F(j\omega)$ 。

解: 已知  $e^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$ , 则有

$$te^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow F(j\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{a+j\omega} \right) = j \frac{-j}{(a+j\omega)^2} = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

### 8. 对称(偶)性质

若  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3-40)$$

或

$$\frac{1}{2\pi} F(t) \leftrightarrow f(-\omega)$$

证明:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

则

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将变量  $t$  与  $\omega$  互换, 得

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

所以有

$$2\pi f(-\omega) \leftrightarrow F(t)$$

特别是, 当  $f(t)$  为  $t$  的偶函数时, 则有

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = 2\pi f(\omega)$$

即

$$f(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(t)$$

**【例 3-18】** 已知  $F_1(j\omega)$  如图 3-34 所示, 利用对称性求  $f_1(t)$ 。

$$F_1(j\omega) = \begin{cases} E \left( 1 - \frac{|\omega|}{\omega_1} \right), & |\omega| < \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$

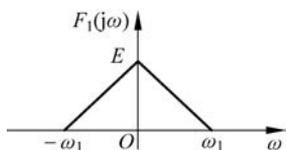


图 3-34 例 3-18  $F_1(j\omega)$  图

解: 已知例 3-16 中  $f(t)$  的波形是与本题  $F_1(\omega)$  相似的对称三角波, 而例 3-16 的  $f(t)$  为

$$f(t) = \begin{cases} E \left( 1 - \frac{2}{\tau} |t| \right), & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

其对应的  $F(j\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$ 。因而, 本题  $F_1(j\omega)$  对应的  $f_1(t)$  为  $(\omega \rightarrow t, \tau/2 \rightarrow \omega_1)$ , 即

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}F(t) = \frac{1}{2\pi}E\omega_1 \text{Sa}^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)$$

**【例 3-19】** 已知  $F_1(j\omega) = E[\varepsilon(\omega + \omega_0) - \varepsilon(\omega - \omega_0)]$ , 利用对称性求  $f_1(t)$ 。

**解:**  $F_1(j\omega)$  的波形如图 3-35 所示, 且已知

$$\begin{aligned} f(t) &= E[\varepsilon(t + \tau) - \varepsilon(t - \tau)] \leftrightarrow F(j\omega) \\ &= 2E\tau \text{Sa}(\omega\tau) \end{aligned}$$

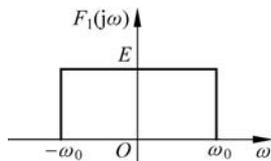


图 3-35 例 3-19 的  $F_1(j\omega)$  波形

因此

$$F_1(j\omega) = E[\varepsilon(\omega + \omega_0) - \varepsilon(\omega - \omega_0)] \leftrightarrow f_1(t) = \frac{1}{2\pi}F(t), (\omega \rightarrow t, \tau \rightarrow \omega_0)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}2E\omega_0 \cdot \text{Sa}(\omega_0 t) = \frac{E\omega_0}{\pi} \text{Sa}(\omega_0 t)$$

**【例 3-20】** 设  $f(t) = \text{Sa}(t)$ , 已知信号  $f(t)$  的傅里叶变换为  $F(j\omega) = \pi g_2(\omega)$ , 用 MATLAB 求  $f_1(t) = \pi g_2(t)$  的傅里叶变换  $F_1(j\omega)$ , 并验证对称性。

**解:** MATLAB 程序为:

```

Clear all;
syms t
T = 0.01; j = sqrt(-1);
t = -15:T:15; N = 500;
f = sin(t)./t; % f(t)
f1 = pi * (Heaviside(t+1) - Heaviside(t-1)); % f1(t)
W = 5 * pi;
k = -N:N; w = k * W/N;
F = T * sinc(t/pi) * exp(-j * t' * w); % f(t) 的傅里叶变换
F1 = T * f1 * exp(-j * t' * w); % f1(t) 的傅里叶变换
subplot(2,2,1); plot(t,f);
xlabel('t'); ylabel('f(t)'); % grid;
subplot(2,2,2); plot(w,F);
axis([-2 2 -1 4]);
xlabel('w'); ylabel('F(w)'); % grid;
subplot(2,2,3); plot(t,f1);
axis([-2 2 -1 4]);
xlabel('t'); ylabel('f1(t)'); % grid;
subplot(2,2,4); plot(w,F1);
axis([-20 20 -3 7]);
xlabel('w'); ylabel('F1(w)'); % grid;

```

程序运行结果如图 3-36 所示。

**【例 3-21】** 求  $e^{j\omega_0 t}$  的傅里叶变换。

**解:** 由时延特性, 得

$$\delta(t + t_0) \leftrightarrow e^{j\omega t_0}$$

利用对称性, 将上式中的  $t$  变换成  $-\omega$ ,  $t_0$  变换成  $\omega_0$ , 并乘以系数  $2\pi$ , 得到相应的变换对

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega + \omega_0) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

利用这一结果, 可以推导出正弦周期函数、余弦周期函数的傅里叶变换为

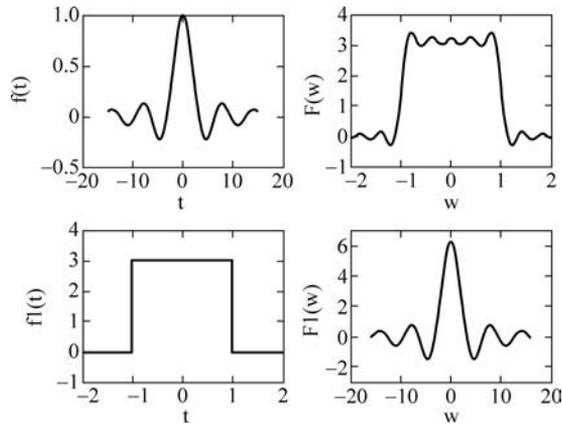


图 3-36  $\text{Sa}(t)$  的傅里叶变换以及对称性的验证

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{j2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$\cos\omega_0 t$ 、 $\sin\omega_0 t$  的时域波形与频谱如图 3-37 所示。

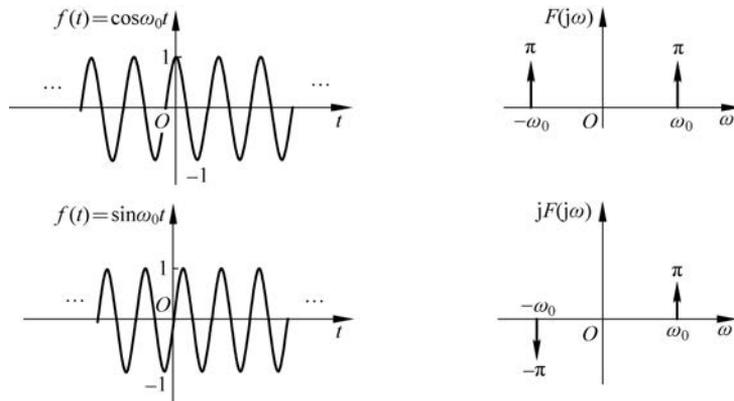


图 3-37 正、余弦信号及其频谱

### 9. 时域卷积定理

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$ , 则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega) \quad (3-41)$$

证明:

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt && \text{(交换积分次序)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] F_2(j\omega) \end{aligned}$$

$$= F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

### 10. 频域卷积定理

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$ , 则

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \quad (3-42)$$

证明:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * F_2(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u) du \\ &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u) du \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega - u) e^{j\omega t} d\omega \right] du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) f_2(t) e^{ju t} du = f_1(t) f_2(t) \end{aligned}$$

**【例 3-22】** 若已知  $f(t)$  的频谱  $F(j\omega)$  如图 3-38 所示, 试粗略画出  $f_1(t) = f^2(t)$ ,  $f_2(t) = f^3(t)$  的频谱图(不必精确画出, 只需指出频谱的范围, 说明频谱展宽情况)。

解:

$$f_1(t) = f^2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) = F(j\omega) * F(j\omega)$$

频谱展宽为原来的 2 倍。

$$f_2(t) = f^3(t) \leftrightarrow F_2(j\omega) = F_1(j\omega) * F(j\omega) = F(j\omega) * F(j\omega) * F(j\omega)$$

则频谱展宽为原来的 3 倍, 结果如图 3-39 所示。

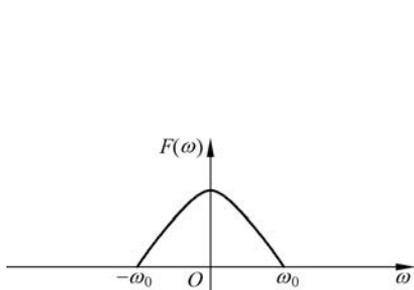


图 3-38 例 3-22 的频谱函数

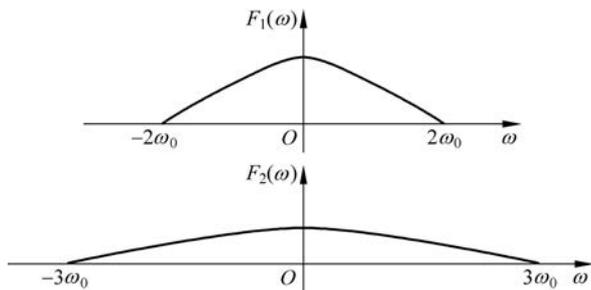


图 3-39 例 3-22 中  $f_1(t), f_2(t)$  的频谱函数

### 11. 帕塞瓦尔定理

若  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F^*(j\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

帕塞瓦尔定理表明:对非周期信号,在时域中求得的信号能量与频域中求得的信号能量相等。

表 3-2 对傅里叶变换的性质作了归纳。

表 3-2 傅里叶变换的性质

序 号	性 质	时域 $f(t)$	频域 $F(j\omega)$
1	线性性质	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$
2	时延性质	$f(t - t_0)$	$F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
3	频移性质	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F[j(\omega - \omega_0)]$
4	尺度变换性质	$f(at), a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$
5	时域微分性质	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
6	时域积分性质	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$
7	频域微分性质	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$
8	对称(偶)性质	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
9	时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$
10	频域卷积定理	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$
11	帕塞瓦尔定理	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  F(j\omega) ^2 d\omega$

### 3.3.5 周期信号的傅里叶变换

#### 1. 傅里叶系数 $F_n$ 与频谱函数 $F(j\omega)$ 的关系

若  $f(t)$  是从  $-T/2 \sim T/2$  截取周期信号  $f_T(t)$  的一个周期得到的,则

$$F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-43)$$

而对应的周期信号  $f_T(t)$  傅里叶级数的系数计算公式为

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3-44)$$

比较式(3-43)和式(3-44),可见除了差一个系数  $1/T$  及指数项  $n\omega_0$  与  $\omega$  不同之外,其余部分均相同,即有

$$F_n = \frac{1}{T} F(j\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0} \quad (3-45)$$

式(3-45)说明周期信号傅里叶级数的系数  $F_n$  等于其一个周期的傅里叶变换  $F(j\omega)$  在  $n\omega_0$  频率点的值乘以  $1/T$ , 我们可以利用这个关系, 即用式(3-45)来求周期信号的傅里叶级数系数。

**【例 3-23】** 求如图 3-40(a)所示周期矩形脉冲  $f_T(t)$  的傅里叶级数。

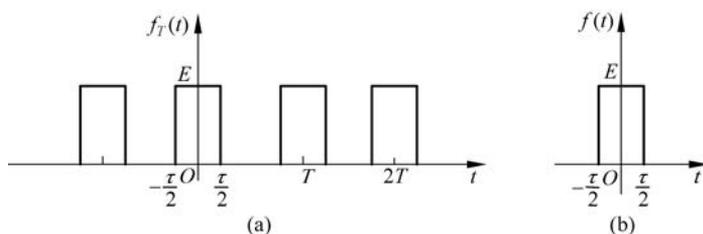


图 3-40 周期矩形脉冲  $f_T(t)$  和矩形脉冲  $f(t)$

**解:** 截取  $f_T(t)$  从  $-\frac{\tau}{2} \sim \frac{\tau}{2}$  的一段, 正是矩形脉冲信号  $f(t)$ , 如图 3-40(b)所示, 则有

$$f(t) = E \left[ \epsilon \left( t + \frac{\tau}{2} \right) - \epsilon \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

对应的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = E\tau \text{Sa} \left( \frac{\omega\tau}{2} \right)$$

由式(3-45)得

$$F_n = \frac{1}{T} F(j\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0} = \frac{E\tau}{T} \text{Sa} \left( \frac{n\omega_0\tau}{2} \right)$$

最终得  $f_T(t)$  的傅里叶级数为

$$f_T(t) = \frac{E\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa} \left( \frac{n\omega_0\tau}{2} \right) e^{jn\omega_0 t}$$

## 2. 由傅里叶系数 $F_n$ 求周期函数 $f_T(t)$ 的频谱函数

由  $e^{jn\omega_0 t}$  的傅里叶变换, 可以推导出任意周期函数  $f_T(t)$  的频谱函数为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3-46)$$

**证明:**

$$\mathcal{F}[f_T(t)] = \mathcal{F} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

**【例 3-24】** 求周期单位冲激序列  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  的傅里叶变换。

**解:** 先将周期单位冲激序列展开成傅里叶级数

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

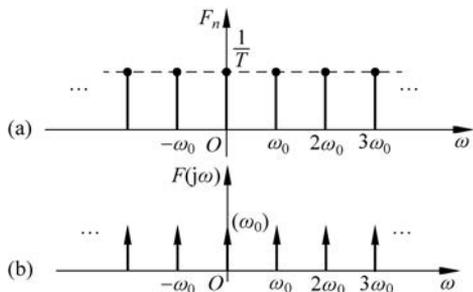
其中,  $\omega_0 = 2\pi/T$ ,  $F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$ 。

$F_n$  如图 3-41(a)所示, 即

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

再根据式(3-46),求这个级数的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}\right] = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$



$\delta_T(t)$ 的频谱函数如图 3-41(b)所示。

本例说明,周期冲激序列的傅里叶变换仍为周期冲激序列,其冲激强度为  $\omega_0$ 。

由上例可归纳出求周期信号傅里叶变换(频谱函数)的一般步骤为:

- (1) 将周期函数展开为傅里叶级数;
- (2) 对该傅里叶级数求傅里叶变换(频谱函数),或按式(3-46)求傅里叶变换。

图 3-41  $\delta_T(t)$ 的傅里叶级数系数及其频谱函数

### 3. 频谱函数的奇偶性和虚实性

$f(t)$ 为实函数时, $F(j\omega)$ 的模与幅角、实部与虚部的表示形式为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \\ &= R(\omega) + jX(\omega) = |F(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt = R(-\omega) \\ X(\omega) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = -X(-\omega) \\ |F(j\omega)| &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = -\varphi(-\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3-47)$$

在一般情况下,若  $f(t)$ 为实函数,则由式(3-47)可知, $R(\omega)$ 、 $|F(j\omega)|$ 是  $\omega$ 的偶函数; $X(\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$ 是  $\omega$ 的奇函数。

特别是,当  $f(t)$ 为实偶函数时,有

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = 0 \\ F(j\omega) &= R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (3-48)$$

由式(3-48)可知,若  $f(t)$ 是  $t$ 的实偶函数,则  $F(j\omega)$ 必为  $\omega$ 的实偶函数。若  $f(t)$ 为实奇函数,有

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt = 0 \\ F(j\omega) &= jX(\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (3-49)$$

由式(3-49)可知,若  $f(t)$ 是  $t$ 的实奇函数,则  $F(j\omega)$ 必为  $\omega$ 的虚奇函数。

利用这一特性,可判断所求的傅里叶变换对是否正确。

例如  $\text{sgn}(t)$  是实奇函数, 其傅里叶变换  $2/j\omega$  为虚奇函数; 而  $g_r(t)$  是实偶函数, 其傅里叶变换  $\tau\text{Sa}(\omega\tau/2)$  为实偶函数;  $\varepsilon(t)$  是非奇、非偶函数, 其傅里叶变换  $\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$  既不是奇或偶函数, 也不是实或虚函数。

### 3.4 LTI 连续系统的频域分析

#### 3.4.1 系统的频率响应函数

设系统的激励是  $f(t)$ , 系统的单位冲激响应为  $h(t)$ , 若系统的初始状态为零, 则系统的响应为

$$y(t) = y_{zs}(t) = f(t) * h(t) \quad (3-50)$$

对式(3-50)两边取傅里叶变换, 由卷积定理可得

$$Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) \quad (3-51)$$

其中,  $H(j\omega)$  是系统单位冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换。

系统单位冲激响应  $h(t)$  表征的是系统的时域特性, 而  $H(j\omega)$  表征的是系统频域特性, 所以称  $H(j\omega)$  为系统频率响应函数, 简称频响函数或系统函数。

式(3-51)还可以表示为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-52)$$

式中,  $|H(j\omega)|$  是系统的幅频特性,  $\varphi(\omega)$  是系统的相频特性。式(3-52)表明,  $H(j\omega)$  除了可由系统单位冲激响应  $h(t)$  求取, 还可以由系统输出(零状态)的傅里叶变换与输入的傅里叶变换来求取。在实际应用中, 稳定系统的频率响应函数才有意义。

#### 3.4.2 系统函数 $H(j\omega)$ 的求取

由于系统不同的表示形式, 可以用不同的方法来得到系统函数。

##### 1. 用微分方程求系统函数

已知  $n$  阶 LTI 系统的微分方程的一般表示为

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (3-53)$$

对式(3-53)两边取傅里叶变换, 得到

$$\begin{aligned} & [(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0]Y(j\omega) \\ & = [b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0]F(j\omega) \end{aligned}$$

从而可得到系统的频响函数为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (3-54)$$

式(3-54)表明  $H(j\omega)$  只与系统本身有关, 与激励无关。

**【例 3-25】** 已知某系统的微分方程为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{df(t)}{dt} + 3f(t)$ , 求系统函数  $H(j\omega)$ 。

解: 对微分方程两边同时取傅里叶变换, 得到

$$[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2]Y(j\omega) = [(j\omega) + 3]F(j\omega)$$

因此系统函数为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{(j\omega) + 3}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

## 2. 用转移算子求系统函数

已知稳定系统的转移算子, 将其中的  $p$  用  $j\omega$  替代, 可以得到系统函数

$$H(j\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} \quad (3-55)$$

**【例 3-26】** 已知某稳定系统的转移算子  $H(p) = \frac{3p}{p^2 + 3p + 2}$ , 求系统函数。

解: 将系统的转移算子中的  $p$  用  $j\omega$  替代, 得到系统函数

$$H(j\omega) = \frac{3p}{p^2 + 3p + 2} \Big|_{p=j\omega} = \frac{3j\omega}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

## 3. 用系统的冲激响应 $h(t)$ 求系统函数

先求出系统的冲激响应  $h(t)$ , 然后对冲激响应  $h(t)$  求傅里叶变换得到系统函数。

**【例 3-27】** 已知系统的单位冲激响应  $h(t) = 5[\epsilon(t) - \epsilon(t-2)]$ , 求系统函数。

解:

$$H(j\omega) = 5 \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \left( \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) e^{-j2\omega} \right] = \frac{5}{j\omega} (1 - e^{-j2\omega})$$

**【例 3-28】** 求图 3-42 零阶保持电路的系统函数  $H(j\omega)$ 。

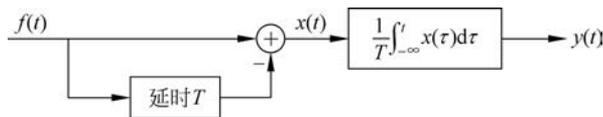


图 3-42 例 3-28 的零阶保持电路

解: (方法一) 先求系统的单位响应  $h(t)$ , 当零阶保持电路的  $f(t) = \delta(t)$  时, 则有

$$x(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$$

则 
$$y(t) = h(t) = \frac{1}{T} [\epsilon(t) - \epsilon(t - T)]$$

对上式求傅里叶变换, 得

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{T} [\epsilon(t) - \epsilon(t - T)] \right\} = \frac{1}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}) = \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

(方法二) 利用系统各部分的傅里叶变换, 第一部分是加法器, 输出为

$$X(j\omega) = F(j\omega)(1 - e^{-j\omega T})$$

第二部分是积分器, 由上式  $X(j0) = 0$ , 输出  $Y(j\omega)$  为

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega T} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}) F(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}) = \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

得到与方法一相同的结果。

$h(t)$ 与 $|H(j\omega)|$ 如图 3-43 所示。

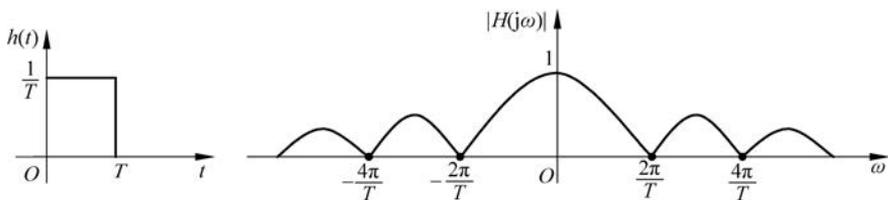


图 3-43 例 3-28 系统的  $h(t)$ 与 $|H(j\omega)|$

#### 4. 用频域电路求系统函数

该方法与时域分析时的算子法相似,利用频域电路简化运算。

无初始储能的动态元件时域与频域的电压和电流关系分别为

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \leftrightarrow V_L(j\omega) = j\omega L \cdot I_L(j\omega)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \leftrightarrow V_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} I_C(j\omega)$$

**【例 3-29】** 如图 3-44(a)所示电路,输入是激励电压  $f(t)$ ,输出是电容电压  $y(t)$ ,求系统函数  $H(j\omega)$ 。

解: 频域电路如图 3-44(b)所示,可列出方程

$$I(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{R + j\omega L + 1/j\omega C}$$

$$Y(j\omega) = I(j\omega) \frac{1}{j\omega C}$$

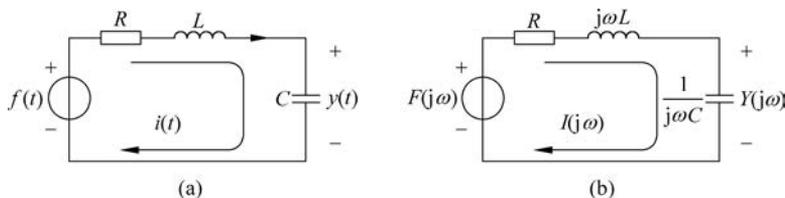


图 3-44 例 3-29 电路

将  $I(j\omega)$ 代入式  $Y(j\omega)$ ,得

$$Y(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} F(j\omega)$$

从而得到系统函数

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}$$

### 3.4.3 系统的频域分析

由卷积定理我们可以得到频域分析法的基本方法,如图 3-45 所示。

即用频域分析法求系统零状态响应的步骤如下:

- (1) 求输入信号  $f(t)$ 的傅里叶变换  $F(j\omega)$ ;
- (2) 求系统函数  $H(j\omega)$ ;

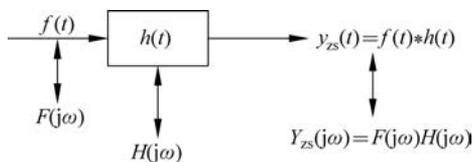


图 3-45 频域分析法基本框图

(3) 求零状态响应  $y_{zs}(t)$  的傅里叶变换, 得

$$Y_{zs}(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega);$$

(4) 求  $Y_{zs}(j\omega)$  的傅里叶逆变换, 得  $y_{zs}(t)$ 。

### 1. 系统对周期正弦信号的响应

设系统的激励信号为  $f(t) = \sin\omega_0 t$ , 其傅里叶变换为  $F(j\omega) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$  当系统的冲激响应  $h(t)$  为实函数时, 则

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$H(-j\omega) = |H(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$$

所以系统响应的象函数为

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= F(j\omega)H(j\omega) \\ &= j\pi H(j\omega)[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= j\pi[H(-j\omega_0)\delta(\omega + \omega_0) - H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

即系统对周期正弦信号的响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{j}{2} |H(j\omega_0)| [e^{-j\varphi(\omega_0)} e^{-j\omega_0 t} - e^{j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega_0 t}] \\ &= |H(j\omega_0)| \frac{1}{j2} [e^{j(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))} - e^{-j(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))}] \\ &= |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \end{aligned}$$

**【例 3-30】** 已知某 LTI 系统的系统函数为  $H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$ , 求系统对激励  $f(t) = \sin\omega_0 t$  的响应。

解:

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{a + j\omega_0} = |H(j\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} e^{-j\arctan \frac{\omega_0}{a}}$$

所以, 系统对激励信号的响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \sin\left(\omega_0 t - \arctan \frac{\omega_0}{a}\right) \end{aligned}$$

由例 3-30 可见, 周期正弦信号的响应仍是同频率的周期正弦信号, 仅幅度、相位有所改变。这种响应是稳态响应, 可以利用正弦稳态分析法来进行计算。

若正弦激励信号  $f(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , 通过系统函数为  $|H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$  的系统后, 其响应可以直接表示为

$$y(t) = A |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0) + \varphi] \quad (3-56)$$

### 2. 系统对非正弦周期信号的响应

将非正弦周期信号展开为傅里叶级数, 取傅里叶变换后, 处理方法与正弦周期信号的响应求解方法相同, 即

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \leftrightarrow F_T(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\begin{aligned}
 Y_T(j\omega) &= F_T(j\omega)H(j\omega) = 2\pi \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \right] H(j\omega) \\
 &= 2\pi \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \right] \\
 y_T(t) &= \mathcal{F}^{-1} [Y_T(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (3-57)
 \end{aligned}$$

综上所述,求解非正弦周期信号通过线性系统响应的计算步骤为:

- (1) 将激励  $f_T(t)$  分解为无穷多个正弦分量之和,即将激励信号展开为傅里叶级数;
- (2) 求出系统函数  $H(j\omega) = \{H(0), H(j\omega_0), H(j2\omega_0), \dots\}$ ;
- (3) 利用正弦稳态分析法计算第  $n$  次谐波的响应为

$$y_n(t) = F_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

- (4) 将各谐波分量的响应值相加,得到非正弦周期信号通过线性系统的响应

$$\begin{aligned}
 y_T(t) &= y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t) + \dots \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

在实际处理时,可以根据  $f_T(t)$  的收敛情况、系统的带宽等因素,从步骤(2)就只取有限项。

**【例 3-31】** 若系统频率特性  $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$ , 激励信号  $f(t) = \cos t + \cos 3t$ , 试求系统的响应  $y(t)$ 。

解:

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) \Big|_{\omega=1} &= \frac{1}{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \\
 H(j\omega) \Big|_{\omega=3} &= \frac{1}{j3+1} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-j71.6^\circ}
 \end{aligned}$$

所以系统的响应为

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - 45^\circ) + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos(3t - 71.6^\circ)$$

### 3. 系统对非周期信号的响应

计算非周期信号通过线性系统的响应可以利用卷积定理:先求输入信号的傅里叶变换及系统的频响,再将两者相乘得到输出的傅里叶变换,最后经傅里叶逆变换得到时域响应。

**【例 3-32】** 已知系统函数  $H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$ , 激励  $f(t) = e^{-3t} \epsilon(t)$ , 求响应  $y(t)$ 。

解: 激励信号的傅里叶变换为

$$f(t) = e^{-3t} \epsilon(t) \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

响应的频谱函数为

$$Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

因此,系统的零状态响应为

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] = (e^{-t} - e^{-2t})\epsilon(t)$$

由例 3-32 我们看到利用频域分析法可以求解系统的零状态响应。频域分析法的优点是时域的卷积运算变为频域的乘法运算,代价是要求正、反两次傅里叶变换。另外,与周期信号的稳态响应不同,这里一般求的是由非周期信号产生的响应,所以必有瞬态响应。

### 3.4.4 无失真传输

在信号传输过程中,为了不丢失信息,系统应该不失真地传输信号。

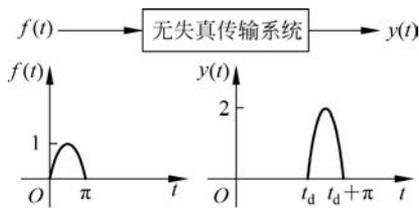


图 3-46 无失真传输系统

所谓失真,是信号通过系统时,其输出波形发生了畸变,与原输入信号波形不一样。但是,如果信号通过系统时,只引起时间延迟及幅度增减,而形状不变,则称不失真。能够不失真地传输信号的系统被称为无失真传输系统,人们也称无失真传输系统为理想传输系统。无失真传输系统如图 3-46 所示。

若系统发生失真,通常有两种:线性失真和非线性失真。

线性失真为信号通过线性系统所产生的失真,如图 3-47 所示,它包括两个方面:一是振幅失真,系统对信号中各频率分量的幅度产生不同程度的衰减(或放大),使各频率分量之间的相对幅度关系发生了变化;二是相位失真,系统对信号中各频率分量产生的相移与频率不成正比,使各频率分量在时间轴上的相对位置发生了变化。这两种失真都不会使信号产生新的频率分量。因此线性失真的特点是在响应  $y(t)$  中不会产生新频率,即组成响应  $y(t)$  的各频率分量在激励信号  $f(t)$  中都含有,只不过各频率分量的幅度、相位不同而已。

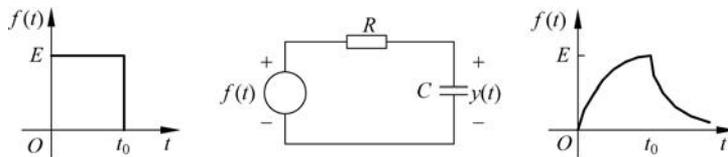


图 3-47 线性失真传输

另一类是非线性失真,如图 3-48 所示,这类失真是由信号通过非线性系统产生的,特点是信号通过系统后产生了新的频率分量。

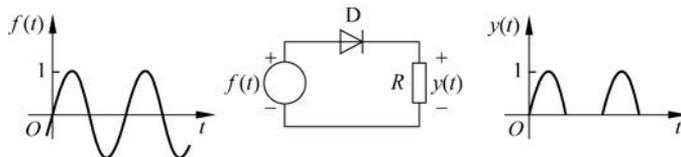


图 3-48 非线性失真传输

工程设计中针对不同的实际应用,对系统有不同的要求。对传输系统一般要求不失真,但对信号进行处理时失真往往是必要的。在通信、电子技术中失真的应用也十分广泛,如各类调制技术就是利用非线性系统,产生所需要的频率分量;而滤波则是提取所需要的频率分量,衰减其余部分。

本节从时域、频域两个方面来讨论线性系统所引起的失真,即振幅、相位失真的情况。

设激励信号为  $f(t)$ , 响应为  $y(t)$ , 则系统无失真时, 输出信号应为

$$y(t) = kf(t - t_0) \quad (3-58)$$

其中,  $k$  是系统的增益,  $t_0$  是延迟时间,  $k$  与  $t_0$  均为常数。

由式(3-58)得到理想传输系统的时域不失真条件: 一是幅度乘以  $k$  倍; 二是波形滞后  $t_0$ 。对线性时不变系统来说, 因为  $y(t) = f(t) * h(t)$ , 则式(3-58)可表示为

$$y(t) = f(t) * k\delta(t - t_0) \quad (3-59)$$

所以无失真传输系统的单位冲激响应为

$$h(t) = k\delta(t - t_0) \quad (3-60)$$

对式(3-60)两边取傅里叶变换, 可得

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} \quad (3-61)$$

对应的幅频及相频特性如图 3-49 所示。

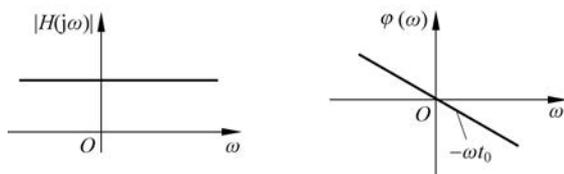


图 3-49 无失真传输系统的幅频及相频特性

式(3-61)是理想传输系统的频域不失真条件。它要求系统具有无限宽的均匀带宽, 幅频特性在全频域内为常数; 相移与频率成正比, 即相频特性是通过原点的直线。

图 3-50 是无失真传输与有相位失真波形的比较。

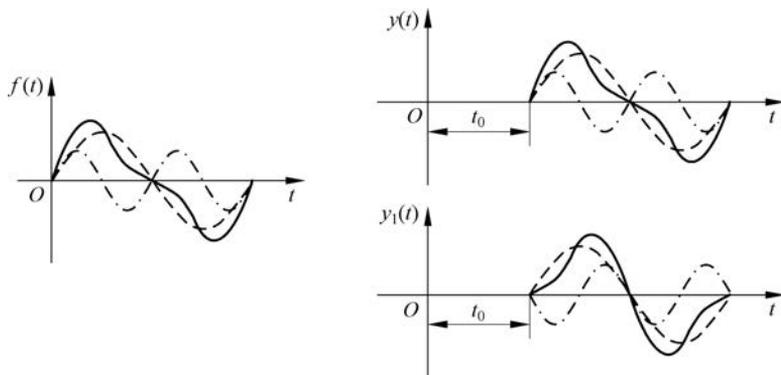


图 3-50 无失真传输与有相位失真的波形

由图 3-50 可见, 信号通过无失真传输系统的延迟时间  $t_0$  是相位特性的斜率。实际应用中相频特性也常用“群时延”表示, 群时延定义为

$$\tau = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (3-62)$$

由式(3-61)与式(3-62)不难推得信号传输不产生相位失真的条件是群时延为常数。

**【例 3-33】** 已知某系统的振幅、相位特性如图 3-51 所示, 输入为  $x(t)$ , 输出为  $y(t)$ 。求:

(1) 给定输入  $x_1(t) = 2\cos 10\pi t + \sin 12\pi t$  及  $x_2(t) = 2\cos 10\pi t + \sin 26\pi t$  时的输出

$y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ ;

(2)  $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 有无失真? 若有, 指出为何种失真。

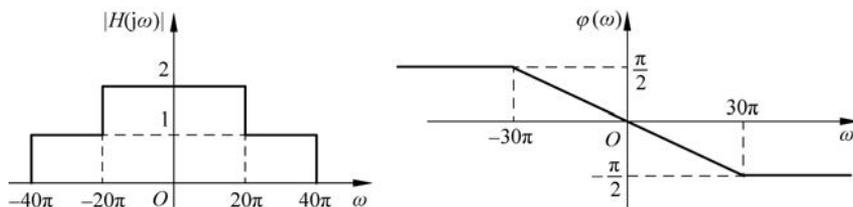


图 3-51 例 3-33 传输系统的幅频及相频特性

解: 由图 3-51 可知该系统的振幅、相位函数为

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 2, & |\omega| < 20\pi \\ 1, & 20\pi < |\omega| < 40\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 30\pi \\ -\frac{\omega}{60}, & |\omega| < 30\pi \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < -30\pi \end{cases}$$

由振幅、相位函数可知:

- (1) 信号频率为  $|\omega| \leq 20\pi$ , 系统增益为  $k=2$ ;
- (2) 信号频率为  $20\pi \leq |\omega| \leq 40\pi$ , 系统增益为  $k=1$ ;
- (3) 信号频率为  $|\omega| > 40\pi$ , 系统增益为  $k=0$ ;
- (4) 信号频率为  $|\omega| \leq 30\pi$ , 系统相移与频率成正比, 其时延为  $t_0 = 1/60$ ;
- (5) 信号频率为  $\omega < -30\pi$ , 系统相移与频率不成正比, 相位为  $\pi/2$ ;
- (6) 信号频率为  $\omega > 30\pi$ , 系统相移与频率不成正比, 相位为  $-\pi/2$ 。

由无失真传输条件, 可得输入信号为  $|\omega| \leq 20\pi$  或  $20\pi \leq |\omega| \leq 30\pi$  时, 输出信号无失真。利用频域分析方法可得激励为  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  时的响应为

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2[2\cos 10\pi(t-t_0) + \sin 12\pi(t-t_0)] \\ &= 2\left[2\cos\left(10\pi t - \frac{10\pi}{60}\right) + \sin\left(12\pi t - \frac{12\pi}{60}\right)\right] \\ &= 4\cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(12\pi t - \frac{\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

输入信号  $|\omega| \leq 20\pi$ , 输出信号  $y_1(t)$  无失真。

$$y_2(t) = 4\cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(26\pi t - \frac{13\pi}{30}\right) \neq kx(t-t_0)$$

输入信号  $|\omega| \leq 30\pi$ , 输出信号  $y_2(t)$  有幅度失真。

从这个例题我们看到, 在实际应用时, 虽然系统不满足全频域无失真传输的要求, 但在一定的条件及范围内可以为无失真传输。这表明系统可以具有分段无失真或线性性质, 这种性质在工程中经常用到。

## 习题

3-1 证明如图 3-52 所示矩形函数  $f(t)$  与  $\{\cos nt \mid n \text{ 为整数}\}$  在区间  $(0, 2\pi)$  上正交。

3-2 试求如图 3-53 所示信号的三角形傅里叶级数展开式, 并画出频谱图。

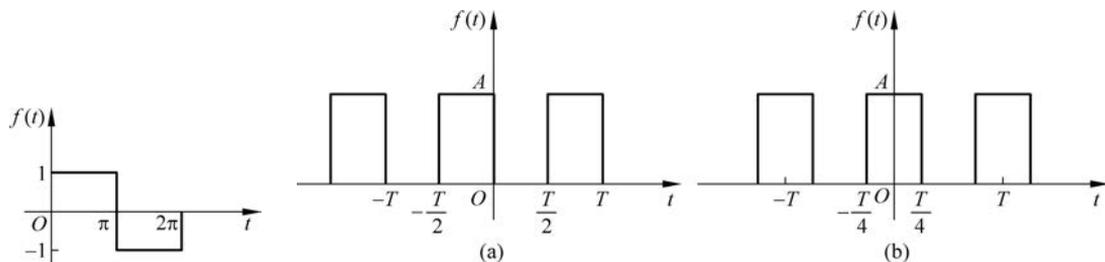


图 3-52 习题 3-1 图

图 3-53 习题 3-2 图

3-3 试求如图 3-54 所示周期信号的指数型傅里叶级数系数  $F_n$ , 并画出其幅度谱。

3-4 求如图 3-55 所示信号的傅里叶变换。

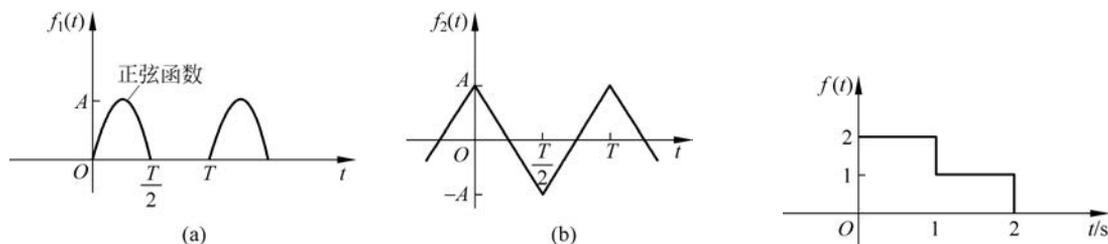


图 3-54 习题 3-3 图

图 3-55 习题 3-4 图

3-5 求如图 3-56 所示锯齿脉冲与单周正弦脉冲的傅里叶变换。

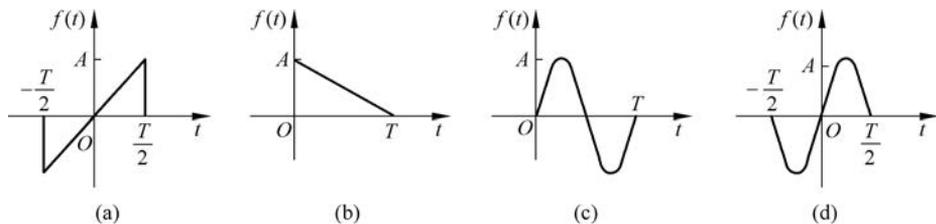


图 3-56 习题 3-5 图

3-6 试用  $f(t)$  的傅里叶变换  $F(j\omega)$  表示如下函数的傅里叶变换:

(1)  $tf(2t)$ ; (2)  $(t-2)f(t)$ ; (3)  $(t-2)f(-2t)$ ; (4)  $t \frac{df(t)}{dt}$ ; (5)  $(1-t)f(1-t)$ 。

3-7 利用傅里叶变换证明如下等式:

(1)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ ; (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a \omega}{a \omega} d\omega = \frac{\pi}{|a|}$ 。

3-8 据傅里叶变换的定义及性质, 利用三种以上的方法计算如图 3-57 所示各信号的傅里叶变换。

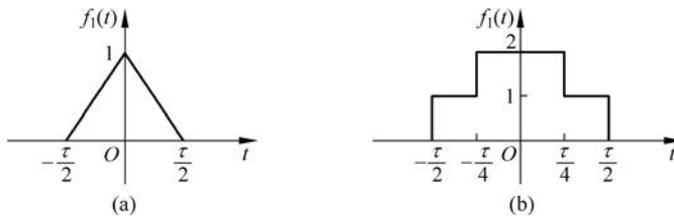


图 3-57 习题 3-8 图

3-9 求如图 3-58(a)、(b)所示  $F(j\omega)$  的傅里叶逆变换  $f(t)$ 。

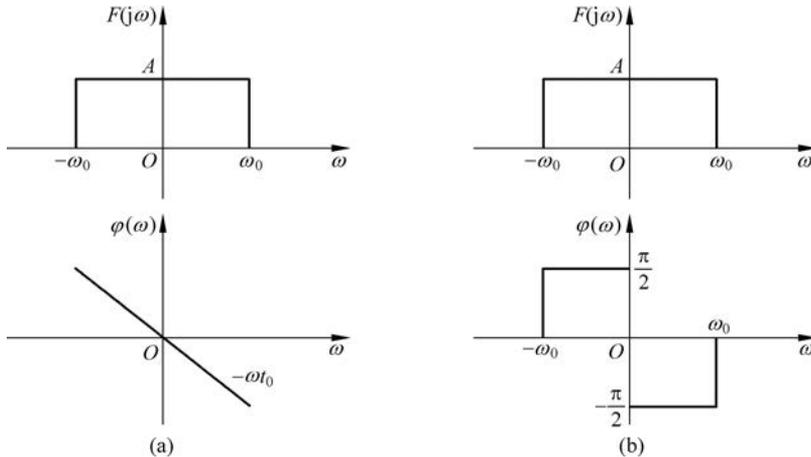


图 3-58 习题 3-9 图

3-10 已知  $f(t) * f'(t) = (1-t)e^{-t}\epsilon(t)$ , 求信号  $f(t)$ 。

3-11 试求如图 3-59 所示各周期信号的频谱函数。

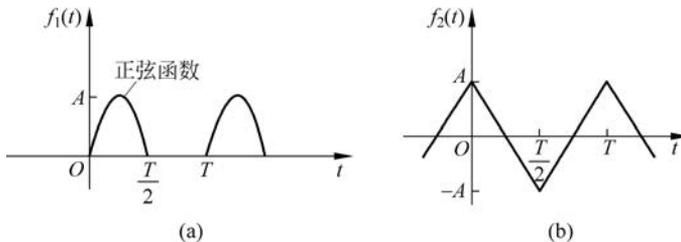


图 3-59 习题 3-11 图

3-12 已知一线性时不变系统的方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{df(t)}{dt} + 2f(t)$$

求其系统函数  $H(j\omega)$  和冲激响应  $h(t)$ 。

3-13 已知  $f(t) = 2\cos 997t \cdot \frac{\sin 5t}{\pi t}$ ,  $h(t) = 2\cos 1000t \cdot \frac{\sin 4t}{\pi t}$ , 试用傅里叶变换法求  $f(t) * h(t)$ 。

3-14 已知  $f(t) = \text{Sa}(\omega_c t)$ ,  $s(t) = \cos \omega_o t$ , 且  $\omega_o \gg \omega_c$ 。求如图 3-60 所示系统的输出  $y(t)$ 。

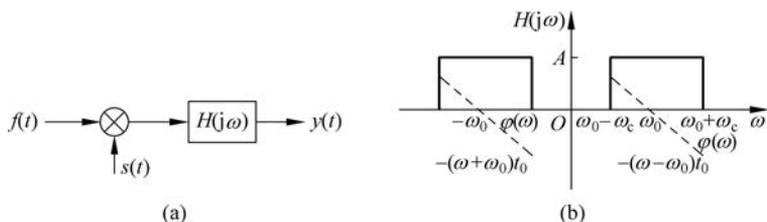


图 3-60 习题 3-14 图

3-15 已知系统如图 3-61 所示,其中:  $f(t) = 8\cos 100t \cdot \cos 500t$ ,  $s(t) = \cos 500t$ ,理想低通滤波器的系统函数  $H(j\omega) = \varepsilon(\omega + 120) - \varepsilon(\omega - 120)$ ,试求系统响应  $y(t)$ 。

3-16 试证明如图 3-62 所示电路在  $R_1 L_2 = R_2 L_1$  条件下为一无失真系统。

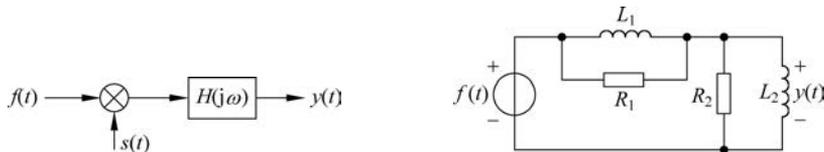


图 3-61 习题 3-15 图

图 3-62 习题 3-16 图

3-17 图 3-63(a) 为一频谱压缩系统,已知周期信号  $f(t) = \sum_{n=-2}^2 F_n e^{jn\Omega t}$ ,  $\delta_{T_s}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s)$ ,式中,  $\omega_s = 2\pi/T_s = \Omega/10.025$ ,  $H(j\omega)$  如图 3-63(b) 所示。求证该系统的输出  $y(t) = f(at)$ ,并确定压缩比  $a$  的值。

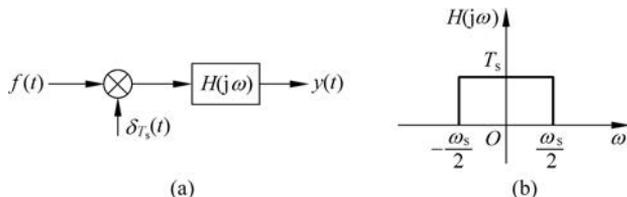


图 3-63 习题 3-17 图

3-18 试用 MATLAB 绘制习题 3-3 所示周期信号的幅度谱。

3-19 试用 MATLAB 绘制习题 3-5 所示各函数的时域波形及幅度谱。

3-20 试用 MATLAB 绘制习题 3-12 所示系统的幅频响应及相频响应。