

第5章

离散时间信号与系统的 z 域分析

考点1 z变换及其反变换

本节考点：主要考查z变换定义、收敛域及其性质理解，以及z变换和z反变换的求解。

……知识点链接……

1. z变换定义(又称双边z变换)

$$X(z) = z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

式中, $z = |z|e^{j\Omega}$ 或 $z = re^{j\Omega}$ 。

2. z变换收敛域

使 $X(z)$ 存在的 z 的范围(即 z 的模 $|z|$ 或 r 的范围)称为 z 变换收敛域(ROC)。

离散信号(序列) $x(n)$ 与其 z 变换存在的收敛域存在以下关系。

(1) 有限长离散时间信号 $x(n)$, z 变换是有限项幂级数求和, 其收敛域是全平面收敛(但 $|z|=0$ 和 $|z|=\infty$ 处不一定收敛)。进一步地, 如果 $x(n)$ 是因果的有限长序列, 其收敛域为 $0 < |z| \leq \infty$ 。如果 $x(n)$ 是反因果的有限长序列, 收敛域为 $0 \leq |z| < \infty$ 。

(2) 对于无限长离散时间信号 $x(n)$ 的收敛域, 有如下结论:

- 右边序列 $x(n)u(n+m)$, $m \neq 0$ 的收敛域为圆外收敛, 当为因果序列 $x(n)u(n)$ 时, 收敛域包含 $|z|=\infty$ 。
- 左边序列 $x(n)u(-n+m)$, $m \neq 0$ 的收敛域为圆内收敛, 当为反因果序列 $x(n)u(-n-1)$ 时, 收敛域包含 $|z|=0$ 。
- 双边序列 $x(n)u(n) + x(n)u(-n-1)$ 的收敛域存在, 为环状区域。

3. 单边z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

单边 z 变换的收敛域只有全平面收敛和圆外收敛(且包含 $|z|=\infty$)两种情况。

【题 5-1-1】 选择题

下列序列中, z 变换的收敛域为 $2 < |z| < 5$ 的是()。

- A. $(2)^n u(n) + (5)^n u(n)$ B. $(2)^n u(-n-1) + (5)^n u(-n-1)$
C. $(2)^n u(n) + (5)^n u(-n-1)$ D. $(2)^n u(-n-1) + (5)^n u(n)$

【分析】 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 其为序列级数求和, 只有 $|z|$ 在一定的范围内该序列才收敛。通常因果序列的收敛域在圆外, 反因果序列的收敛域在圆内, 而双边序列的收敛域为圆环状。

【解答】 C。

【题 5-1-2】 选择题

已知 $x(n)$ 是一个绝对可和的序列, 且其 z 变换 $X(z)$ 是有理函数, 如果已知 $X(z)$ 在 $z=1/5$ 有一个极点, 则 $x(n)$ 不可能为()。

- A. 无限长序列 B. 双边序列 C. 右边序列 D. 左边序列

【分析】 由于序列绝对可和, 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 其收敛域包含单位圆。又因为 $X(z)$ 在单位圆内有一个极点, 收敛域应该在某个圆外收敛且包含单位圆, 因此该序列不可能为反因果序列。

【解答】 D。

【题 5-1-3】 填空题

序列 $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$ 的 z 变换为 _____, 其收敛域为 _____。

【分析】 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 可知, 该序列的 z 变换为等比数列求和, 而且为一个有限长的因果序列, 收敛域在单位圆之外。

【解答】 $\frac{1 - (2z)^{-10}}{1 - (2z)^{-1}}$; $|z| > 0$ 。

【题 5-1-4】 选择题

下列序列中, z 变换的收敛域为 $|z| > \frac{1}{2}$ 的是()。

- A. $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$
C. $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$

【分析】 通常因果序列的收敛域在圆外, 反因果序列的收敛域在圆内, 而双边序列的收敛域为圆环状。当多个序列线性叠加时, 其收敛域为不同序列收敛域的交集。

【解答】 A。

【题 5-1-5】 判断题

双边离散信号若其 z 变换存在, 其收敛域为某个圆环内。()

【分析】 双边序列的收敛域为圆环状。

【解答】 正确。

【题 5-1-6】 计算题

序列 $x(n]$ 的 z 变换为 $X(z)$, $x_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 求 $x_1(n)$ 的 z 变换。

【分析】 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 进行合理的变量替换, 最终转换为 z 变换定义形式即可。

【解答】

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right) z^{-n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-2k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) (z^2)^k = X(z^2)\end{aligned}$$

【题 5-1-7】 选择题

离散时间信号的 z 变换的收敛域()。

- A. 基本的形状是带状 B. 基本的形状是圆环状
C. 与 $|z|$ 无关 D. 以上都不对

【分析】 z 变换的收敛域要么在某个圆外, 要么在某个圆内, 要么为圆环状, 因此其基本形状为圆环状。

【解答】 B。

【题 5-1-8】 填空题

序列 $x(n)=u(n)-u(n-2)$ 的单边 z 变换为 _____, 收敛域为 _____。

【分析】该序列为有限长因果序列,因此根据 z 变换的定义式不难得到其 z 变换结果,收敛域为除原点外的所有区域。

【解答】 $1+z^{-1}; |z|>0。$

【题 5-1-9】 判断题

对于单边 z 变换, 序列与 z 变换一一对应。()

【分析】若时域序列及其变换域结果满足一一对应关系,两者可以相互转换。

【解答】 正确。

【题 5-1-10】 计算题

求 $x(n)=a^n u(n-4)$ 的 z 变换,并写出收敛域。

【分析】 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 对原始序列进行合理的变量替换即可完成计算, 鉴于这是一个因果序列, 其收敛域在圆外。

【解答】 $x(n] = a^n u(n-4) = a^4 a^{n-4} u(n-4)$

所以, $a^n u(n)$ 的 z 变换为 $\frac{z}{z-a}$, $a^4 a^{n-4} u(n-4)$ 的 z 变换为 $a^4 \frac{z}{z-a} \frac{1}{z^4}$, $\frac{a^4}{z^3(z-a)}$

收敛域为 $|z| > a$ 。

【题 5-1-11】 判断题

若 $x(n)=a^{|n|}$ 的 z 变换不存在, 则一定有 $|a| \geq 1$ 。()

【分析】 原始序列 $x(n)=a^{|n|}=a^n u(n)+a^{-n-1} u(-n-1)$ 为双边序列, 因此其收敛域 $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$ 。又因该序列的 z 变换不存在, 即没有收敛域, 所以 $|a| \geq 1$ 。

【解答】 正确。

【题 5-1-12】 计算题

若 $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z)$, 收敛域为 $R_1 < |z| < R_2$, 求 $a^n x(n)$ 的 z 变换及收敛域。

【分析】 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 不难求得 $X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$ 。 z 域的尺度扩展将导致收敛域的压缩。

【解答】 $X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$
故收敛域为 $|a|R_1 < |z| < |a|R_2$ 。

【题 5-1-13】 计算题

已知 $x(n)$ 满足下列条件: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$; 其 z 变换 $X(z)$ 是一个有理函数;
 $X(z)$ 的一个极点为 $z = \frac{1}{3}$ 。试分析并说明理由。

(1) $x(n)$ 的长度是有限长, 还是无限长?

(2) $x(n)$ 可能是一个左边序列吗?

【分析】 由序列绝对可和条件可知存在 z 变换, 且收敛域包括单位圆。又因其存在一个单位圆内极点, 所以其收敛域必定为圆环形, 而且存在因果序列成分 $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$, 所以其长度为无限长且不可能为左边序列。

【解答】 (1) 因为 $x(n)$ 存在极点, 所以 $X(z)$ 必然存在收敛域。

又因为存在一个单位圆内极点 $z = \frac{1}{3}$, 所以其收敛域为圆环形, 且存在因果序列成分 $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$, 因此 $x(n)$ 的长度为无限长。

(2) 因为存在因果序列成分 $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$, 所以不可能为左边序列。

【题 5-1-14】 填空题

离散时间信号 $x(n] = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \delta(n-m)$ 的 z 变换 $X(z) =$ _____。

【分析】 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 序列 $x(n)$ 的 z 变换为无限长的等比数列求和, 比值为 $-z^{-1}$ 。

【解答】 $\frac{z}{z+1}$ 。

【题 5-1-15】 填空题

序列 $x(n)$ 满足条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, 其 z 变换的收敛域为 $R_1 < |z| < R_2$, 则 R_1, R_2 应满足的条件为 _____。

【分析】 由序列 $x(n)$ 绝对可积条件可知 z 变换存在, 且收敛域包含单位圆。所以

其圆环状收敛域应包含单位圆。

【解答】 $R_1 < 1, R_2 > 1$ 。

【题 5-1-16】 填空题

序列 $x(n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 的收敛域为 $|z| \leq 2$, 则 $X(z)$ 的极点的模应满足的条件为_____。

【分析】 z 变换的极点应都在收敛域外, 收敛域内不包含任何极点。

【解答】 大于 2。

【题 5-1-17】 选择题

序列 $x(n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 的收敛域为 $3 \leq |z| \leq \infty$, 则 $X(z)$ 的极点的模()。

A. > 3

B. ≥ 3

C. < 3

D. ≤ 3

【分析】 根据收敛域不能包含极点, 而且收敛域不包含极点所处的边界, 所以其极点的模一定小于 3。

【解答】 C。

【题 5-1-18】 计算题

$x(n]$ 如图 5-1-1 所示, 试求 $X(z)$ 。

【分析】 有限长序列的 z 变换可由 z 变换的定义

式 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 直接写出。

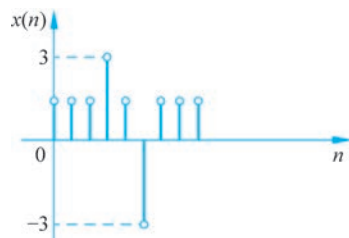


图 5-1-1

【解答】 $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4} - 3z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} + z^{-8}$

【题 5-1-19】 选择题

已知序列 $x(n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 仅有一个极点 $z = \frac{1}{4}$, 且 $\frac{1}{2^n}x(n]$ 绝对可和, $\frac{1}{8^n}x(n]$ 不是绝对可和的, $x(n]$ 为()序列。

A. 右边

B. 左边

C. 双边

D. 有限长

【分析】 由题干中有且只有一个极点可排除双边序列, 再由 $\frac{1}{2^n}x(n]$ 绝对可和,

$\frac{1}{8^n}x(n]$ 不是绝对可和的条件, 排除左边序列, 因此 $x(n]$ 为右边序列。

【解答】 A。

……知识点链接……

1. 常用 z 变换性质

(1) 线性。

若

$$x(n) \leftrightarrow X(z), \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}, \quad y(n) \leftrightarrow Y(z), \quad r_{y-} < |z| < r_{y+}$$

则

$$ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX(z) + bY(z), \quad r_- < |z| < r_+$$

(2) 时移。

① 双边 z 变换的时移特性。

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), r_1 < |z| < r_2$, 则 $x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0} X(z), n_0$ 为整数, $r_1 < |z| < r_2$ 。

② 单边 z 变换的时移特性。

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), |z| > r$, 当 m 为大于零的整数时, 则

$$x(n+m) \leftrightarrow z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right]$$

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-k} \right]$$

(3) 频移性质。

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), r_1 < |z| < r_2$, 则

$$e^{j\Omega_0 n} x(n) \leftrightarrow X(e^{-j\Omega_0} z), \quad r_1 < |z| < r_2$$

推广有

$$z_0^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad |z_0| r_1 < |z| < r_2 |z_0|$$

(4) z 域微分(序列线性加权)。

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), r_1 < |z| < r_2$, 则

$$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z), \quad r_1 < |z| < r_2$$

(5) 时域卷积定理。

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), r_{x-} < |z| < r_{x+}, h(n) \leftrightarrow H(z), r_{h-} < |z| < r_{h+}$, 则

$$x(n) * h(n) \leftrightarrow X(z) H(z), \quad r_- < |z| < r_+$$

(6) 初值定理。

对于因果序列 $x(n)$, 若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, 则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

(7) 终值定理。

若因果序列 $x(n) \leftrightarrow X(z)$, 且 $X(z)$ 除在 $z=1$ 处可以有一阶极点外, 全部其他极点都在单位圆 $|z|=1$ 以内, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

2. 常用 z 变换对

$$(1) \delta(n) \leftrightarrow 1, \quad 0 \leq |z| \leq \infty$$

$$(2) \delta(n+1) \leftrightarrow z, \quad 0 \leq |z| < \infty$$

$$(3) \delta(n-1) \leftrightarrow z^{-1}, \quad 0 < |z| \leq \infty$$

$$(4) a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$(5) -a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$$

$$(6) na^n u(n) \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$$(7) -na^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| < |a|$$

$$(8) a^n \cos(\beta n) u(n) \leftrightarrow \frac{z(z-a\cos\beta)}{z^2-2az\cos\beta+a^2}, \quad |z| > |a|$$

$$(9) a^n \sin(\beta n) u(n) \leftrightarrow \frac{az\sin\beta}{z^2-2az\cos\beta+a^2}, \quad |z| > |a|$$

$$(10) a^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) u(n) \leftrightarrow \frac{z^2}{z^2-a^2}, \quad |z| > |a|$$

$$(11) a^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) u(n) \leftrightarrow \frac{az}{z^2+a^2}, \quad |z| > |a|$$

【题 5-1-20】 证明题

设 $x(n)$ 为 N 点长序列, 且当 $n \leq -1$ 或 $n \geq N$ 时, $x(n) = 0$ 。 $y(n) = x(n) - x(n-N)$,

$$\tilde{y}(n) = \sum_{l=0}^{\infty} y(n-2Nl)。$$

证明: $\tilde{y}(n)$ 的 z 变换为 $\tilde{Y}(z) = \frac{1}{1+z^{-N}}X(z)$ 。

【分析】 由题意可知, $x(n)$ 为有限长因果序列, $y(n)$ 与 $x(n)$ 相等, $\tilde{y}(n)$ 为 $y(n)$ 的周期延拓, 延拓周期等于 $2N$ 。然后根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 进行合理的变量替换即可得证。

【证明】 $\tilde{y}(n)$ 为 $y(n)$ 的周期延拓, 周期为 $2N$

$$\begin{aligned}\tilde{y}(n) &= y(n) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-2k) \\ &= [x(n) - x(n-N)] * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-2Nk) \\ \tilde{Y}(z) &= [X(z) - X(z)z^{-N}](1 + z^{2N} + z^{4N} + \dots) \\ &= X(z)(1 - z^{-N}) \frac{1}{1 - z^{2N}}\end{aligned}$$

所以

$$\tilde{Y}(z) = \frac{1}{1+z^{-N}}X(z)$$

【题 5-1-21】 计算及画图题

已知 $x(n) = a^{|n|}$, $a > 0$, 求出 $X(z)$, 并画出零极点图以及 $a > 1$ 和 $a < 1$ 的收敛域。

【分析】 根据 z 变换定义式 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 计算。序列 $x(n)$ 中存在绝对值时先将 $x(n)$ 中包含的绝对值符号消去再做变换,并求出对应 a 取值时的收敛域。

【解答】 方法一: 根据定义求解。

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-\frac{1}{a}} = \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)z}{(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right)} \end{aligned}$$

零极点图如图 5-1-2 所示。

当 $a < 1$ 时 $X(z)$ 存在, 收敛域为 $|a| < |z| < \left|\frac{1}{a}\right|$ 。

当 $a > 1$ 时 $X(z)$ 不存在。

方法二: 利用性质求解。

利用 z 变换的时域翻转性质, 假设 $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z)$, 则 $x(-n)$ 的 z 变换为 $X(z^{-1})$, 据此不难得出与方法一相同的结果。

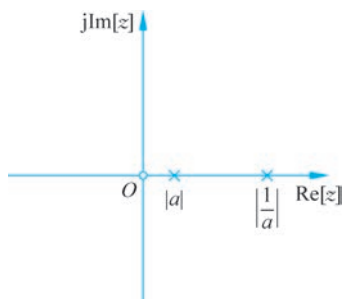


图 5-1-2

【题 5-1-22】 填空题

序列 $x(n) = a^{-n}u(-n)$ 的双边 z 变换为 _____, 收敛域为 _____。

【分析】 思路一, 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 a^{-n}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1-az}$, 收敛域为等比数列公比的模小于 1; 思路二, 根据 $-\left(\frac{1}{a}\right)^n u(-n-1)$ 的双边 z 变换为 $\frac{1}{1-\left(\frac{z}{a}\right)^{-1}}$, 利用 z 变换的线性性质, 不难得到 $a^{-n}u(-n) = \left(\frac{1}{a}\right)^n u(-n-1) + \delta(n)$ 的变换结果。

【解答】 $\frac{1}{1-az}; |z| \leq \frac{1}{|a|}$ 。

【题 5-1-23】 计算题

已知序列 $x(n) = a^n u(n)$, $g(n) = x(n) - x(n-1)$ 。

(1) 求 $g(n)$ 的 z 变换。

(2) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n g(k)$, 求 $y(n)$ 及 $y(n)$ 的 z 变换 $Y(z)$ 。

【分析】 常见序列 $x(n) = a^n u(n)$ 的 z 变换为 $\frac{1}{1-az^{-1}}$; $\delta(n)$ 和 $\delta(n-1)$ 的 z 变换为 1 和 z^{-1} 。由卷积和的性质可知, $g(n) = x(n) * [\delta(n) - \delta(n-1)]$, $y(n) = g(n) * u(n)$ 。

利用卷积定理,不难得出 $g(n)$ 和 $y(n)$ 的 z 变换结果。

$$\text{【解答】 (1)} \quad G(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-a} z^{-1} = \frac{z-1}{z-a}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y(n) &= \sum_{k=-\infty}^n g(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) u(n-k) \\ &= g(n) * u(n) \\ &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} u(n) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{z-a} \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{z^2}{(z-a)(z-1)} \end{aligned}$$

【题 5-1-24】 填空题

已知离散时间信号 $x(n]$ 的单边 z 变换为 $X(z)$, $x(1)=1, x(0)=0.5$, 则 $x(n+2)$ 的单边 z 变换为_____。

【分析】 根据时域平移性质 $x(n+n_0)\varepsilon(n) \leftrightarrow z^{n_0} \left[X(z) + \sum_{k=0}^{n_0-1} x(k)z^{-k} \right]$ 。

【解答】 $z^2 X(z) - z - 0.5z^2$ 。

【题 5-1-25】 填空题

若因果序列 $x(n]$ 的 z 变换为 $X(z) = \frac{z+3}{(z-0.6)(z^2-0.5z+0.06)}$, 求

$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) =$ _____。

【分析】 根据终值定理 $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$, 该定理要求极点都在单位圆内。

【解答】 0。

【题 5-1-26】 填空题

已知 $x(n)u(n)$ 的 z 变换为 $X(z)$, 则 $y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)$ 的 z 变换 $Y(z)$ 为_____。

【分析】 根据卷积的计算公式, 序列 $y(n)$ 相当于 $x(n)u(n)$ 与序列 $u(n)$ 卷积。再由 z 变换的序列卷积性质可得序列 $y(n)$ 的 z 变换 $Y(z)$ 。

【解答】 $\frac{z}{z-1} X(z)$ 。

【题 5-1-27】 计算题

已知 $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$, 求其 z 变换, 并画出零极点图。

【分析】 由 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 可知, 该序列的 z 变换为等比数列求和, 且为一个有限长的因果序列。根据 z 变换得到的结果画出零极点图。

【解答】
$$X(z) = \frac{z - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} z^{-9}}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z^{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{z^9 \left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

零极点图如图 5-1-3 所示。

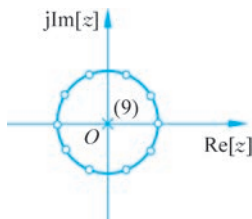


图 5-1-3

【题 5-1-28】 证明题

设 $x(n)$ 的单边 z 变换为 $X(z)$, 证明: $x(n+2)$ 的单边 z 变换为 $z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$ 。

【分析】 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 对原始序列进行合理的变量替换即可实现证明。该题实际上是单边 z 变换的时域平移性质证明的特例。

【证明】

$$x(n+2) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-n}$$

令 $n+2=k$, 得

$$x(n+2) \leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} x(k)z^{2-k} = z^2 \sum_{k=2}^{\infty} x(k)z^{-k} = z^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^1 x(k)z^{-k} \right]$$

所以

$$x(n+2) \leftrightarrow z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

【题 5-1-29】 证明题

已知 $x(n)=x(-n)$, 试证明其 z 变换满足 $X(z)=X(z^{-1})$ 。

【分析】 根据 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 进行合理的变量替换即可完成证明。

【证明】 $x(-n)$ 的 z 变换为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^n = X(z^{-1})$$

所以

$$X(z) = X(1/z)$$

【题 5-1-30】 选择题

已知因果序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z) = \frac{1+2z^{-2}}{(1-z^{-1})\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}\right)}$, 则序列 $x(n)$ 的初值

$x(0)$ 和终值 $x(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ 分别为()。

A. $x(0)=1, \quad x(\infty)=0$

B. $x(0)=1, \quad x(\infty)$ 不存在

C. $x(0)=1, \quad x(\infty)=-6$

D. $x(0)=-6, \quad x(\infty)=1$

【分析】根据 z 变换的初值定理 $x(0)=\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ 和终值定理 $x(\infty)=\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

进行计算可得到结果。但要注意该序列 z 变换的其中一个极点 $z=\frac{3}{2}$ 不在单位圆内,不满足终值定理。

【解答】B。

【题 5-1-31】证明题

已知 $x(n) \xleftrightarrow{z\text{变换}} X(z)$, 证明: $\sum_{m=-\infty}^n x(m) \xleftrightarrow{z\text{变换}} \frac{z}{z-1} X(z)$ 。

【分析】根据卷积的计算公式, $\sum_{m=-\infty}^n x(m)$ 相当于 $x(n)$ 和 $u(n)$ 进行卷积运算。

再根据序列卷积性质, 可得到对应的 z 变换结果。

$$\begin{aligned} \text{【证明】} \quad \sum_{m=-\infty}^n x(m) &= x(n) * u(n) \\ x(n) * u(n) &\leftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z) \end{aligned}$$

……知识点链接……

z 反变换的求解方法通常有以下几种。

(1) 留数法。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_i \text{Res}[X(z) z^{n-1}] \big|_{c \text{ 内所有极点 } z_i}$$

式中, c 为包围全部极点的闭合积分路径, z_i 为 $[X(z) z^{n-1}]$ 的极点, Res 表示级数的留数。 z_i 点的留数为

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}] = [X(z) z^{n-1}] (z - z_i) \big|_{z=z_i}$$

(2) 幂级数展开法。

将 $X(z)$ 展开为 z 的负幂 z^{-n} 级数, 则其系数就是 $x(n)$ 的相应项。

(3) 部分分式展开法。

若 $\frac{X(z)}{z}$ 为有理真分式, 则可将 $\frac{X(z)}{z}$ 展开为部分分式, 然后乘以 z 得到 $X(z)$, 再利用

常用 z 变换对进行 z 反变换, 从而求得 $x(n)$ 。

【题 5-1-32】计算题

已知 $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z) = \frac{z}{z^2 + 1.5z - 1}$, $\frac{1}{2} < |z| < 2$, 求信号 $x(n)$ 。

【分析】离散时间信号与系统 z 域分析中的反变换方法通常包括定义法、常用变换对法、部分分式展开法等。本题可灵活运用部分分式展开法和常用变换对法求解反变换, 其中应特别注意收敛域中的左边界确定了因果序列, 右边界确定了反因果序列。

【解答】 $X(z) = \frac{2}{3} \left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1/2} \right)$

所以

$$x(n) = -\frac{2}{3}(2)^n u(-n-1) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n)$$

【题 5-1-33】 填空题

已知离散时间信号 $x(n]$ 和 $x_1(n]$ 的 z 变换为分别为 $x(n] \leftrightarrow X(z), x_1(n] \leftrightarrow X_1(z)$, 且 $X_1(z) = X(-z)$, 则 $x(n]$ 和 $x_1(n]$ 的关系为_____。

【分析】 思路一, 由 z 变换定义 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 可知

$$X_1(z) = X(-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-z)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(n)z^{-n}$$

思路二, 根据题意 $X_1(-z) = X(z)$, 再利用 z 变换的频移性质 $z_0^n x(n] \leftrightarrow X_1\left(\frac{z}{z_0}\right)$ 可知, $z_0 = -1$ 。

【解答】 $x_1(n) = (-1)^n x(n)$ 。

【题 5-1-34】 选择题

已知 $x(n]$ 的 z 变换 $X(z) = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.25)}$, 则 $x(n]$ 可以是()不同的信号。

- A. 1 种 B. 2 种 C. 3 种 D. 不能确定

【分析】 利用部分分式展开法和常用变换对法可求解 $X(z)$ 的反变换, 通过假设收敛域左右边界可确定可能的原信号。可能的情况有: 原信号为因果信号, 收敛域为圆外区域; 原信号为非因果信号, 收敛域为圆内区域; 原信号同时包含因果信号和非因果信号, 收敛域为圆环区域(可能不存在)。

【解答】 C。

【题 5-1-35】 填空题

已知 $X(z) = \frac{5z^2}{(z+2)(z-3)}$ 的收敛域为 $2 < |z| < 3$, 则其原序列 $x(n]$ 等于_____。

【分析】 本题可利用部分分式展开法和常用变换对法求解 $X(z)$ 的反变换, 并根据收敛域左右边界分别确定原信号的因果序列和非因果序列。

【解答】 $2(-2)^n u(n) - 3(3)^n u(-n-1)$ 。

【题 5-1-36】 计算题

$x(n]$ 是因果信号, 其 z 变换为 $X(z) = z^5 / (z^5 - a)$, 求 $x(n]$ 。

【分析】 出现 z^n 时考虑常见变换对 $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-5k) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-5}}$ 。该变换对由原序列周期延拓得到。对原变换做变形即可求得 $x(n]$ 。

【解答】 $x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(n-5k)。$

【题 5-1-37】 计算题

已知 z 变换 $X(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, 根据其可能存在的收敛域, 分别求出对应的反变换序列。

【分析】 极点分别为 $z=1$ 和 $z=2$, 题目中没有给出系统的性质, 可能得到的反变换序列一般为 3 种, 分别对应左边序列、右边序列和双边序列。

【解答】 由题意可知, $z=1$ 和 $z=2$ 为其两个极点, 所以收敛域可能为 $|z|>2$ 、 $1<|z|<2$ 或 $|z|<1$ 。

当 $|z|>2$ 时, $x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - u(n) + \frac{1}{2} \cdot 2^n u(n)。$

当 $1<|z|<2$ 时, $x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - u(n) - 2^{n-1}u(-n-1)。$

当 $|z|<1$ 时, $x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + u(-n-1) - 2^{n-1}u(-n-1)。$

……知识点链接……

- z 变换与拉普拉斯变换的关系。

$$X_s(s) \Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = X(z)$$

$$X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = X_s(s)$$

- z 变换与 DTFT 的关系。

$$\text{DTFT}[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

【题 5-1-38】 证明题

已知 $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-nT)$, $x_s(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X_s(s)$, $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z)$, 证明: $X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = X_s(s)。$

【分析】 根据 z 变换定义式 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 及拉普拉斯变换定义式 $X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ 可以证明。

【证明】
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

所以

$$X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-nsT}$$

【题 5-1-39】 简答题

试分析傅里叶变换与拉普拉斯变换之间的关系、DTFT 与 z 变换之间的关系。

【分析】 拉普拉斯变换 $X(s)$ 是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换, 当 $\sigma=0$ 时, 拉普拉斯变换与傅里叶变换等价。DTFT 与 z 变换之间的关系为 $X(\Omega)=X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$, 只有当收敛域包含单位圆时才成立。

【解答】 方法一: 傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系。

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-js} dt$$

$x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换, 而傅里叶变换是 $\sigma=0$ 时的拉普拉斯变换。

方法二: DTFT 与 z 变换的关系。

$x(n)$ 的 z 变换是 $x(n)r^{-n}$ 的离散时间傅里叶变换。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\Omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\Omega n}$$

离散时间傅里叶变换是单位圆上的 z 变换。

$$X(\Omega) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

要求: z 变换的收敛域包含单位圆。

考点 2 离散时间系统的系统函数

本节考点: 主要考查利用 z 变换求解系统函数和系统特性分析。

……知识点链接……

1. 系统函数

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{\text{零状态响应的 } z \text{ 变换}}{\text{输入信号的 } z \text{ 变换}}$$

2. 系统函数与单位冲激响应关系

$$\mathcal{Z}[h(n)] = H(z)$$

3. 系统函数常用求解方法

(1) $H(z) = \mathcal{Z}[h(n)]$ 。

(2) 对描述系统的差分方程进行单边变换求解 $H(z)$ 。

$$\begin{aligned} & y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1y(n+1) + a_0y(n) \\ &= b_mx(n+m) + b_{m-1}x(n+m-1) + \cdots + b_1x(n+1) + b_0x(n) \end{aligned}$$

对差分方程进行单边变换, 得

$$\sum_{i=0}^k a_i z^i Y_{zs}(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^j X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

其中,

$$A(z) = \sum_{i=0}^k a_i z^i, B(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^j$$

- (3) 根据系统的模拟框图求解 $H(z)$ 。
- (4) 由信号流图,根据梅森公式求解 $H(z)$ 。
- (5) 根据 $H(z)$ 的零极点图求解 $H(z)$ 。

【题 5-2-1】 计算题

某因果离散系统的差分方程为

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

求系统函数和单位样值响应。

【分析】 对差分方程两边求 z 变换并可由 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 得到系统函数,再根据题干系统因果条件,利用部分分式展开和常用变换对法进行反变换得到单位样值响应。

【解答】 两边同时进行 z 变换,可得

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = -\frac{7}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{10}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

由于系统因果,所以

$$h(n) = -\frac{7}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

【题 5-2-2】 填空题

已知一稳定时不变系统的系统函数为 $H(z) = \frac{9.5z}{(z-0.5)(10-z)}$,该系统的单位样值响应 $h(n)$ 为_____。

【分析】 利用部分分式展开和常用变换对法可求出系统函数 $H(z)$ 的反变换,再根据给定的条件系统稳定写出单位样值响应 $h(n)$ 。

【解答】 $(0.5)^n u(n) + 10^n u(-n-1)$ 。

【题 5-2-3】 填空题

已知某因果离散时间线性时不变系统函数 $H(z)$ 的全部极点均位于 z 平面单位圆内,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n)$ 的值为_____。

【分析】 极点都在单位圆内的因果离散时间线性时不变系统,其收敛域一定包含单

位圆,是稳定系统。故单位样值响应终值为0。由终值定理 $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$ 也可得出。

【解答】 0。

【题 5-2-4】 填空题

已知非因果离散系统的系统函数为 $H(z) = \frac{(z+1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{3}{4}\right)(z-2)}$ 且存在系统频

率响应 $H(e^{j\Omega})$, 则系统函数 $H(z)$ 的收敛域为 $\frac{1}{2} < |z| < 2$ 。

【分析】 频率响应存在,则系统稳定,收敛域应包含单位圆,再结合系统的3个极点 $z = \frac{1}{2}, z = -\frac{3}{4}, z = 2$ 及题干中指出的非因果性,即可对系统收敛域进行判断。

【解答】 $\frac{1}{2} < |z| < 2$ 。

【题 5-2-5】 证明题

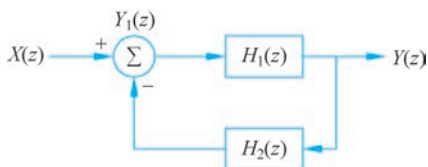


图 5-2-1

某离散时间系统框图如图 5-2-1 所示,试

证明:

$$Y(z) = \frac{H_1(z)X(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

【分析】 本题主要考查如何从系统框图得到系统函数。

【证明】 由图 5-2-1 可得

$$[-Y(z)H_2(z) + X(z)]H_1(z) = Y(z)$$

所以

$$Y(z) = \frac{X(z)H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

【题 5-2-6】 计算题

对于下列差分方程描述的离散时间线性时不变系统:

$$y(n] + y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) = x(n-1)$$

- (1) 求该系统的系统函数 $H(z)$, 并求系统单位样值响应 $h(n)$ 的所有可能选择;
- (2) 对(1)中的每种 $h(n)$, 讨论系统是否具有稳定性, 是否具有因果性;
- (3) 求该系统的频率响应, 并粗略画出其幅频特性图。

【分析】 对差分方程两边进行 z 变换求解得到系统函数。在没有说明系统因果性和稳定性的情况下, 可能的收敛域有多个, 分别可能对应右边序列、左边序列和双边序列, 其因果性和稳定性也各有差异。单位圆上的系统函数 $|H(e^{j\Omega})|$ 即对应系统频率响应, 通过计算频率在 $0 \sim \pi$ 的几个特殊点(如 $\Omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 等)可以对幅频特性进行一个大

致的描绘。

【解答】(1) 两边同时进行 z 变换, 得

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) - \frac{3}{4}z^{-2}Y(z) = z^{-1}X(z)$$

所以

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z + \frac{3}{2}} \right)$$

存在两个极点 $z = \frac{1}{2}$ 和 $z = -\frac{3}{2}$,

$$\textcircled{1} \quad h(n) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(-n-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^n u(-n-1)$$

$$\textcircled{2} \quad h(n) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(-n-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^n u(-n-1)$$

$$\textcircled{3} \quad h(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^n u(-n-1)$$

(2) 对于①, $h(n) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(-n-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^n u(-n-1)$, 收敛域为 $|z| < \frac{1}{2}$, 不包含单位圆, 系统不稳定, 不具有因果性。

对于②, $h(n) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(-n-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^n u(-n-1)$, 收敛域为 $|z| > \frac{3}{2}$, 不包含单位圆, 系统不稳定, 具有因果性。

对于③, $h(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^n u(-n-1)$, 收敛域为 $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$, 包含单位圆, 系统稳定, 不具有因果性。

$$(3) \quad |H(e^{j\Omega})| = \left| \frac{e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega} - \frac{3}{4}e^{-2j\Omega}} \right|$$

幅频特性如图 5-2-2 所示。

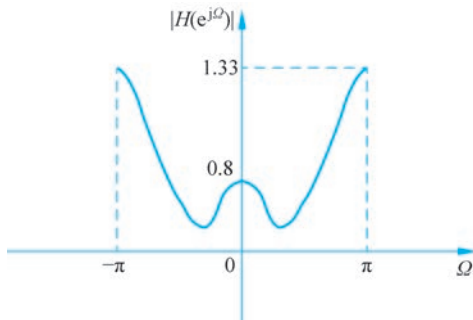


图 5-2-2

……知识点链接……

离散系统的 z 域求解方法

(1) 建立描述系统的常系数差分方程:

$$\sum_{i=0}^k a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^m b_j x(n-j), \quad m \leq k$$

(2) 求已知输入信号 $x(n]$ 的单边 z 变换 $X(z)$ 。

(3) 对常系数差分方程等号两边求单边 z 变换, 得到 z 域代数方程:

$$\sum_{i=0}^k a_i z^{-i} Y(z) - \sum_{i=0}^k [a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}] = \sum_{j=0}^m b_j z^j X(z)$$

(4) 由(3)所得代数方程, 得响应的 z 域解:

$$Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$$

$$Y_{zi}(z) = \frac{\sum_{i=0}^k [a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}]}{\sum_{i=0}^k a_i z^{-i}}, \quad Y_{zs}(z) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^j X(z)}{\sum_{i=0}^k a_i z^{-i}}$$

(5) 对(4)所求得的 z 域解进行 z 反变换, 从而得到响应的时域解。

【题 5-2-7】 计算题

某二阶因果时不变系统, 输入为 $x(n)=u(n)$ 时零状态响应为 $y(n)=(2^n+3 \times 5^n+10)u(n)$ 。

(1) 求表示该系统的差分方程;

(2) 在初始状态为 $y(-1)=1, y(-2)=2$ 时的零输入响应;

(3) 在初始状态为 $y(-1)=2, y(-2)=4$, 输入为 $x(n)=3[u(n)-u(n-5)]$ 时的全响应。

【分析】 在已知输入和零状态响应的条件下, 差分方程可由系统函数反推得到。在已知输入和初始状态的条件下, 可以求得系统全响应。

【解答】 (1) $y(n)=(2^n+3 \cdot 5^n+10)u(n)$

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{3z}{z-5} + \frac{10z}{z-1}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

所以

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{10z}{z-1} + \frac{3z}{z-5} + \frac{z}{z-2}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{14z^2 + 85z + 111}{z^2 - 7z + 10}$$

$$y(n) - 7y(n-1) + 10y(n-2) = 14x(n) - 85x(n-1) + 111x(n-2)$$

(2) $y_{zi}(n) = 12 \cdot 2^n u(n) - 25 \cdot 5^n u(n), n \geq 0$

$$(3) y(n) = 3(2^n u(n) + 3 \times 5^n u(n) + 10u(n)) - 3(2^{n-5} u(n-5) + 3 \cdot 5^{n-5} u(n-5) + 10u(n-5)) + 2 \cdot 12 \cdot 2^n u(n) - 50 \cdot 5^n u(n)$$

【题 5-2-8】 计算题

因果系统的差分方程为

$$y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = x(n+1)$$

(1) 求该系统的单位样值响应;

(2) 输入信号 $x(n] = (2)^n u(n)$, 初始条件 $y(0) = 3, y(1) = -6$, 试求系统的全响应、零输入响应、零状态响应。

【分析】 系统函数是单位脉冲响应的 z 变换, 单位圆上的系统函数就是系统的频率响应。系统函数的计算可由系统零状态响应的 z 变换与激励的 z 变换的比值得到。在已知输入和初始状态下对差分方程求解得到输出, 再进行 z 变换可以计算系统的全响应、零输入响应、零状态响应。

【解答】 (1) 两边同时进行 z 变换, 得

$$z^2 Y(z) + 3zY(z) + 2Y(z) = zX(z)$$

所以

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

由于系统具有因果性, 所以

$$h(n) = (-1)^n u(n) - (-2)^n u(n)$$

$$(2) z^2 Y(z) - zy(1) - z^2 y(0) + 3zY(z) - 3zy(0) + 2Y(z) = zX(z)$$

$$Y(z) = \frac{zX(z)}{(z+1)(z+2)} + \frac{3z(z-1)}{(z+1)(z+2)}$$

零输入响应的 z 变换为

$$Y_{zi}(z) = \frac{3z(z-1)}{(z+1)(z+2)} = \frac{-6z}{z+1} + \frac{9z}{z+2}$$

由于系统具有因果性, 所以

$$y_{zi}(n) = -6(-1)^n u(n) + 9(-2)^n u(n)$$

零状态响应的 z 变换为

$$Y_{zs}(z) = \frac{zX(z)}{(z+1)(z+2)} = \frac{z^2}{(z+1)(z+2)(z-2)} = \frac{\frac{1}{3}z}{z+1} - \frac{\frac{1}{2}z}{z+2} + \frac{\frac{1}{6}z}{z-2}$$

因为系统具有因果性, 所以

$$y_{zs}(n) = \frac{1}{3}(-1)^n u(n) - \frac{1}{2}(-2)^n u(n) + \frac{1}{6}2^n u(n)$$

系统全响应为

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

$$y(n) = -\frac{17}{3}(-1)^n u(n) + \frac{17}{2}(-2)^n u(n) + \frac{1}{6}2^n u(n)$$

【题 5-2-9】 计算题

设因果的离散时间系统 $y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$, 输入信号 $x(n) = (2)^n u(n)$ 。初始条件 $y(0) = 0, y(1) = 2$, 试求其系统的全响应、零输入响应、零状态响应、自然响应和强迫响应。

【分析】 在已知输入和初始状态下对差分方程求解得到输出, 再进行 z 变换可以计算系统的全响应、零输入响应、零状态响应。强迫响应对应激励信号, 剩余响应即为自然响应, 与激励无关。

【解答】 $y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = x(n+2)$

所以

$$z^2 Y(z) - zy(1) - z^2 y(0) + 3zY(z) - 3zy(0) + 2Y(z) = z^2 X(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z+2)(z-2)} + \frac{3z}{(z+1)(z+2)}$$

零输入响应:

$$y_{zi}(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n u(n) + (-2)^n u(n) - \frac{1}{3} \cdot 2^n u(n)$$

零状态响应:

$$y_{zs}(n) = 2(-1)^n u(n) - 2(-2)^n u(n)$$

全响应:

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) = \frac{5}{3}(-1)^n u(n) - (-2)^n u(n) - \frac{1}{3}2^n u(n)$$

自然响应:

$$y_n(n) = \frac{5}{3}(-1)^n u(n) - (-2)^n u(n)$$

强迫响应:

$$y_f(n) = -\frac{1}{3}2^n u(n)$$

【题 5-2-10】 填空题

已知因果的离散时间 LTI 系统 $H(z) = \frac{z}{z+0.5}$, 输入 $x(n)$ 时的零状态响应为 $y(n) = 2^n u(n) + (-0.3)^n u(n)$, 则 $x(n) =$ _____。

【分析】 $X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$, 由已知的零状态响应和系统函数可以求得输入 $x(n)$ 的 z 变换, 做反变换即可得到 $x(n)$ 。

【解答】 $2^{n+1}u(n) - \frac{3}{2}2^{n-1}u(n-1)$ 。

【题 5-2-11】 计算题

求离散时间信号 $y(n)$ 的 z 变换, 给出收敛域, 并画图表示之。

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$h(n) = a^n u(n)$$

$$x(n) = \beta^n u(n)$$

【分析】 根据 z 变换时域卷积性质, 通过计算 $h(n)$ 和 $x(n)$ 二者 z 变换乘积可以得到输出信号 $y(n)$ 的 z 变换, 收敛域根据极点位置取值。

【解答】 $y(n) = h(n) * x(n)$

所以

$$Y(z) = \frac{z}{z-\alpha} \frac{z}{z-\beta} = \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

收敛域为 $|z| > \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, 如图 5-2-3 所示。

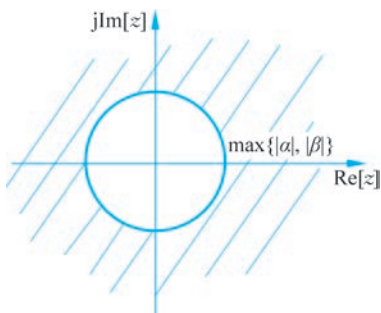


图 5-2-3

……知识点链接……

1. 系统的因果性

若为因果系统, 则 $H(z)$ 收敛域满足 $r < |z| < \infty$ (其中 r 表示 $H(z)$ 最外面的极点对应的圆半径), 或 $h(n) = 0 (n < 0)$ 。

2. 系统的稳定性

若为稳定系统, 则 $H(z)$ 收敛域包含单位圆, 或 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ 。

3. 梅森公式

梅森公式中, T 是流图的总增益, 也是系统函数。

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n T_k \Delta_k$$

式中, T 为流图的总增益; $\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$ 为流图的特征式, 其中 $\sum L_a$ 是所有回路增益之和; $\sum L_b L_c$ 是在所有互不接触的回路中, 每次取其中两个回路的回路增益的乘积之和; $\sum L_d L_e L_f$ 是在所有互不接触的回路中, 每次取其中三个回路的回路增益之和; n 是前向通路总数; T_k 是第 k 条前向通路总增益; Δ_k 是流图因子式, 它等于流图特征式中除去第 k 条前向通路相接触的回路增益项 (包括回路增益的乘积项) 以后的余子式。

$$z = -3, \quad z = \frac{1}{2}$$

根据极点的分布可以得到3种样值响应 $h(n)$ 。

(1) 当 $|z| > 3$ 时,

$$H(z) = \frac{-\frac{2}{7}z}{z+3} + \frac{\frac{4}{7}z}{2z-1} = \frac{-\frac{2}{7}z}{z+3} + \frac{\frac{2}{7}z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$h(n) = -\frac{2}{7}(-3)^n u(n) + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

此时收敛域不包含单位圆,所以系统不稳定;收敛域包含正无穷,所以为因果系统。

(2) 当 $\frac{1}{2} < |z| < 3$ 时, $h(n) = \frac{2}{7}(-3)^n u(-n-1) + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, 系统非因果, 稳定。

(3) 当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时, $h(n) = \frac{2}{7}(-3)^n u(-n-1) + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$, 系统非因果, 非稳定。

【题 5-2-16】 计算题

已知因果的离散时间 LTI 系统框图如图 5-2-4 所示。

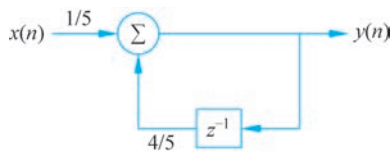


图 5-2-4

(1) 求系统的系统函数 $H(z)$ 及收敛域;

(2) 求系统的单位样值响应 $h(n)$;

(3) 求当激励为 $x(n) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + \cos(\pi n)$ 时的稳态响应。

【分析】 该题考查由信号流图得到系统函数 $H(z)$ 的方法, 系统函数 $H(z)$ 的反变换就是单位样值响应 $h(n)$, 可以使用定义法、常用变换对法、部分分式展开法等进行计算。系统的频率响应 $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 对应单位圆上的系统函数, 稳态响应为随着时间不断增大仍然不趋于零的响应中的项。

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad H(z) = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{4}{5}z^{-1}} = \frac{1}{5} \frac{z}{z - \frac{4}{5}}$$

由于为因果系统, 所以 $|z| > \frac{4}{5}$ 。

(2) 因为

$$H(z) = \frac{1}{5} \frac{z}{z - \frac{4}{5}}$$

所以

$$h(n) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^n u(n)$$

(3) 因为极点为 $z = \frac{4}{5}$, 位于单位圆内, 收敛域包含单位圆, 所以系统稳定,

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{5} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - \frac{4}{5}}$$

所以

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{\frac{1}{5}e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{5}} = \frac{4}{\sqrt{41}}e^{j(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{5}{4})}$$

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1}{5} \frac{e^{j\pi}}{e^{j\pi} - \frac{4}{5}} = -\frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} y(n] &= H(e^{j\frac{\pi}{2}})\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + H(e^{j\pi})\cos(\pi n) \\ &= \frac{4}{\sqrt{41}}\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2}\arctan \frac{5}{4}\right) + \frac{1}{9}\cos(\pi n) \end{aligned}$$

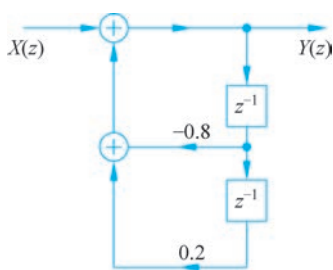


图 5-2-5

【题 5-2-17】 计算题

已知如图 5-2-5 所示的因果系统, (1) 该系统的系统函数 $H(z)$, 判断系统的稳定性并说明理由;

(2) 试求系统的单位样值响应;

(3) 若输入信号为 $x(n] = u(n)$, 零输入响应的初始条件为 $y_0(0) = 1, y_0(1) = 2$, 试求系统的全响应。

【分析】 该题首先要求由信号流图得出系统函数, 并由极点判断其稳定性。单位样值响应通过运用定义法、常用变换对法、部分分式展开法等对系统函数 $H(z)$ 进行反变换得到。系统全响应可以先通过 z 域求解得到全响应的 z 域表示, 再经过反变换得到系统的全响应 $y(n)$ 。

【解答】 (1) 由图 5-2-5 可得

$$X(z) - 0.8z^{-1}Y(z) + 0.2z^{-2}Y(z) = Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0.8z^{-1} - 0.2z^{-2}} = \frac{z^2}{(z - 0.2)(z + 1)}$$

因为极点为 $z = 0.2$ 和 $z = -1$, 位于单位圆内, 所以系统稳定。

$$(2) H(z) = \frac{z^2}{(z - 0.2)(z + 1)} = \frac{\frac{1}{6}z}{z - 0.2} + \frac{\frac{5}{6}z}{z + 1}$$

因为是因果系统, 所以 $h(n) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n) + \frac{5}{6}(-1)^n u(n)$

(3) 因果系统

$$y(n] + 0.8y(n - 1) - 0.2y(n - 2) = x(n)$$

因为 $y(1)+0.8y(0)-0.2y(-1)=x(1)$, 所以 $y(-1)=9$ 。

因为 $y(0)+0.8y(-1)-0.2y(-2)=x(0)$, 所以 $y(-2)=36$ 。

$$Y(z)+0.8(z^{-1}Y(z)+y(-1))-0.2(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2))=X(z)$$

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1+0.8z^{-1}-0.2z^{-2}}-\frac{1.8z^{-1}}{1+0.8z^{-1}-0.2z^{-2}}$$

$$Y(z)=\frac{z^3}{(z-1)(z-0.2)(z+1)}-\frac{1.8z}{(z-0.2)(z+1)}$$

$$Y(z)=z\left(\frac{\frac{5}{12}}{z+1}-\frac{\frac{1}{24}}{z-\frac{1}{5}}+\frac{\frac{5}{8}}{z-1}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{5}}-\frac{z}{z+1}\right)$$

所以

$$y(n)=\left[\frac{5}{8}+(-1)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]u(n)+\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n-\frac{3}{2}(-1)^n\right]u(n)$$

【题 5-2-18】 计算题

一离散系统的差分方程为

$$y(n+2)+0.1y(n+1)-0.2y(n)=x(n+2)+1.2x(n+1)+0.2x(n)$$

初始值 $y(0)=-1, y(1)=2$, 激励 $x(n)=u(n)$ 。

(1) 求系统的传输函数 $H(z)$ 。

(2) 判定该系统是否稳定。

(3) 求系统的全响应 $y(n)$ 。

【分析】 系统传输函数通过对差分方程进行 z 变换后 z 域求解得到, 根据系统函数极点位置判断系统稳定性。系统的全响应可以先用 z 域求解, 根据收敛域的不同, 做反变换得到的全响应 $y(n)$ 也有所区别, 注意区分情况讨论。

$$\text{【解答】 (1) } H(z)=\frac{10z^2+12z+2}{10z^2+z-2}。$$

$$(2) H(z)=\frac{2(z+1)(5z+1)}{(2z+1)(5z-2)}。$$

极点为 $z=-\frac{1}{2}$ 和 $z=\frac{2}{5}$, 收敛域包含单位圆, 系统稳定。有 3 种情况:

① 收敛域为 $|z|>\frac{1}{2}$, 系统稳定。

② 收敛域为 $|z|<\frac{2}{5}$, 系统不稳定。

③ 收敛域为 $\frac{2}{5}<|z|<\frac{1}{2}$, 系统稳定。

$$(3) z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)+0.1zY(z)-0.1zy(0)-0.2Y(z)=z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+1.2zX(z)-1.2zx(0)+0.2X(z)$$

所以

$$Y(z) = \frac{(z^2 + 1.2z + 0.2)X(z)}{z^2 + 0.1z - 0.2} - \frac{2z^2 + 0.3z}{z^2 + 0.1z - 0.2}$$

$$Y(z) = z \frac{z^2 + 1.2z + 0.2}{(z + 0.5)(z - 0.4)(z - 1)} - \frac{2z^2 + 0.3}{(z + 0.5)(z - 0.4)}$$

$$Y(z) = z \left(\frac{-\frac{1}{9}}{z + 0.5} + \frac{-\frac{14}{9}}{z - 0.4} + \frac{\frac{8}{3}}{z - 1} \right) - \left(\frac{\frac{7}{9}z}{z + 0.5} + \frac{\frac{11}{9}z}{z - 0.4} \right)$$

① 当收敛域为 $|z| > \frac{1}{2}$ 时

$$y(n) = \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{9}(-0.5)^n - \frac{14}{9}(0.4)^n \right] u(n) - \left[\frac{7}{9}(-0.5)^n + \frac{11}{9}(0.4)^n \right] u(n)$$

② 当收敛域为 $|z| < \frac{2}{5}$ 时

$$y(n) = \frac{8}{3}u(n) + \left[\frac{1}{9}(-0.5)^n + \frac{14}{9}(0.4)^n \right] u(-n-1) +$$

$$\left[\frac{7}{9}(-0.5)^n + \frac{11}{9}(0.4)^n \right] u(-n-1)$$

③ 当收敛域为 $\frac{2}{5} < |z| < \frac{1}{2}$ 时

$$y(n) = \frac{8}{3}u(n) + \frac{1}{9}(-0.5)^n u(-n-1) - \frac{14}{9}(0.4)^n u(n) +$$

$$\frac{7}{9}(-0.5)^n u(-n-1) - \frac{11}{9}(0.4)^n u(n)$$

【题 5-2-19】 计算题

已知一个离散因果线性时不变系统,初值 $y(-1)=0, y(-2)=\frac{25}{6}$, 输入 $x(n)=u(n)$ 时,系统的响应为

$$y(n) = [1 - (0.4)^n - (0.6)^n]u(n)$$

(1) 求该系统的差分方程。

(2) 求该系统的单位样值响应 $h(n)$, 说明该系统的稳定性。

(3) 若输入信号为 $x(n)=u(n)-u(n-2)$, 求输出响应 $y(n)$ 。

【分析】 观察输入/输出响应形式, 可知系统存在 $z_1=0.4, z_2=0.6$ 两个极点, 从而计算得到差分方程。由题干已知该系统为因果系统, 利用部分分式展开法和常用变换对法做系统函数反变换得到单位样值响应, 系统的稳定性由极点位置判定。输出响应 $y(n)$ 可由 z 域求解。

【解答】 (1) 因为是因果 LTI 系统, 且存在两个极点 $z_1=0.4, z_2=0.6$, 所以差分方程为

$$y(n) - y(n-1) + 0.24y(n-2) = ax(n) + bx(n-1) + cx(n-2)$$

$$(2) Y(z) - z^{-1}Y(z) - y(-1) + 0.24z^{-2}Y(z) + 0.24z^{-1}y(-1) + 0.24y(-2) = aX(z) + bz^{-1}X(z) + cz^{-2}X(z)$$

所以

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{a + bz^{-1} + cz^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}} \frac{z}{z-1} - \frac{0.24y(-2) - y(-1)}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}} \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.4} - \frac{z}{z-0.6} \end{aligned}$$

解出

$$a=0, \quad b=1, \quad c=-0.76$$

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.76z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}} = \frac{5z}{z-0.6} - \frac{5z}{z-0.4} - 3.8z^{-1} \left(\frac{z}{z-0.6} - \frac{z}{z-0.4} \right)$$

因此

$$\begin{aligned} h(n) &= 5(0.6)^n u(n) - 5(0.4)^n u(n) - 3.8(0.6)^{n-1} u(n-1) + 3.8(0.4)^{n-1} u(n-1) \\ &= \frac{34}{3}(0.6)^n u(n) + \frac{9}{2}(0.4)^n u(n) - \frac{19}{6}\delta(n) \end{aligned}$$

由于为因果系统,收敛域 $|z|>0.6$ 包含单位圆,所以系统稳定。

$$\begin{aligned} (3) \quad y(n) &= x(n) * h(n) = [u(n) + u(n-1)] * h(n) \\ &= \frac{341 - (0.6)^{n+1}}{3 \cdot 1 - 0.6} u(n) + \frac{9}{2} \frac{1 - (0.4)^{n+1}}{1 - 0.4} u(n) - \frac{19}{6} [u(n) - u(n-1)] \end{aligned}$$

【题 5-2-20】 计算题

已知 $H(z)$ 的系统方框图如图 5-2-6 所示。在 $H(z)$ 的基础上搭建一个因果的离散时间反馈系统,如图 5-2-7 所示。

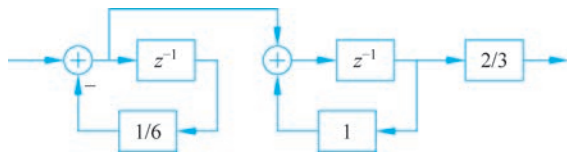


图 5-2-6

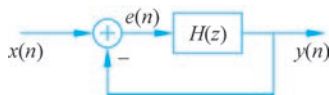


图 5-2-7

(1) 求该离散时间反馈系统的系统函数 $\hat{H}(z)$, 并判断该系统是否为稳定系统。

(2) 求该离散时间反馈系统的单位冲激响应 $\hat{h}(n)$ 。

(3) 当 $x(n) = u(n)$ 时,试求离散时间反馈系统输出端的响应 $y(n)$ 。

【分析】 根据系统框图写出系统函数。

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}z^{-1}} \frac{\frac{2}{3}z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{\frac{2}{3}z}{\left(z + \frac{1}{6}\right)(z-1)}$$

又因为

$$\begin{aligned}
 H'(z) &= \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{\frac{\frac{2}{3}z}{\left(z+\frac{1}{6}\right)(z-1)}}{1+\frac{\frac{2}{3}z}{\left(z+\frac{1}{6}\right)(z-1)}} = \frac{\frac{2}{3}z}{z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}} \\
 &= \frac{\frac{2}{3}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{5}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-\frac{4}{5}z}{z+\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

且 $H'(z)$ 是因果的, 所以 $|z| > \frac{1}{2}$, 为稳定系统。

$$(2) \hat{h}(n) = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)。$$

$$\begin{aligned}
 (3) y(n) &= x(n) * \hat{h}(n) \\
 &= \hat{h}(n) * u(n) \\
 &= \frac{4}{5} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1^{n+1}}{\frac{1}{2} - 1} u(n) - \frac{4}{5} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1^{n+1}}{\left(-\frac{1}{3}\right) - 1} u(n) \\
 &= -\frac{8}{5} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1^{n+1}\right] u(n) + \frac{3}{5} \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1^{n+1}\right] u(n)
 \end{aligned}$$

【题 5-2-21】 画图题

已知离散时间系统单位样值响应 $h(n) = 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + 0.5\delta(n-3)$, 则系统函数 $H(z) = 2z^{-1} + z^{-2} + 0.5z^{-3}$, 画出其零极点图。

【分析】 将原系统函数变形为 $H(z) = \frac{2z^2 + z + 0.5}{z^3}$, 从而计算出零点为 $z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{4}$, 极点为 $z = 0$ 。

【解答】 零极点图如图 5-2-8 所示。

【题 5-2-22】 计算题

已知某离散时间系统的单位样值响应 $h(n) = a^{|n|}$, a 为实常数, 求系统函数 $H(z)$, 写出收敛域, 并判断系统的稳定性。

【分析】 单位样值响应 $h(n) = a^{|n|}$, 包含绝对值的序列不方便计算, 考虑消去绝对值表示, 计算系统函数 $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$, 从而得到系统

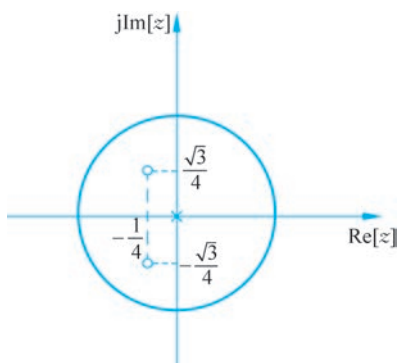


图 5-2-8

对应的极点和收敛域,系统稳定性由收敛域是否包含单位圆判断。

$$\begin{aligned} \text{【解答】 } H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-\frac{1}{a}} = \frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} \end{aligned}$$

收敛域为 $|a| < |z| < \left|\frac{1}{a}\right|$ 。

当 $-1 \leq a \leq 1$ 时存在系统函数,当 $a > 1$ 时不存在系统函数。

当 $-1 < a < 1$ 时系统稳定。

【题 5-2-23】 计算题

已知一个离散线性时不变因果系统如图 5-2-9 所示。

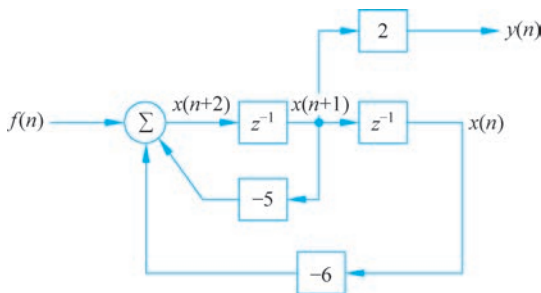


图 5-2-9

- (1) 求该系统的系统函数。
- (2) 指出该系统函数的收敛域和零极点。
- (3) 求该系统的单位样值响应。
- (4) 若 $f(n) = (-1)^n$, 求该系统的零状态响应 $y(n)$ 。
- (5) 指出该系统是否稳定。

【分析】 先由系统框图写出系统函数 $H(z)$, 并由题干中已知系统因果的条件得到该系统函数的收敛域和零极点。利用部分分式分解和常用变换对法作反变换得到系统单位样值响应, 由于系统因果, 故只有一种可能。输入 $f(n) = (-1)^n$ 相当于直流分量, 输出即为系统对应的 $H(-1)$ 与输入相乘得到。系统的稳定性由收敛域是否包含单位圆判断。

$$\text{【解答】 (1) } H(z) = \frac{2z^{-1}}{1+5z^{-1}+6z^{-2}} = \frac{2z}{z^2+5z+6}$$

$$(2) H(z) = \frac{2z}{(z+2)(z+3)}$$

所以极点为 $z = -2$ 和 $z = -3$, 零点为 $z = 0$ 。

因为系统为因果系统, 所以 $H(z)$ 的收敛域为 $|z| > 3$ 。

$$(3) H(z) = \frac{2z}{(z+2)(z+3)} = \frac{2z}{(z+2)} - \frac{2z}{(z+3)}$$

$$h(n) = -(-2)^{n+1}u(n) - 2 \cdot (-3)^n u(n)$$

$$(4) y(n] = H(-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$$

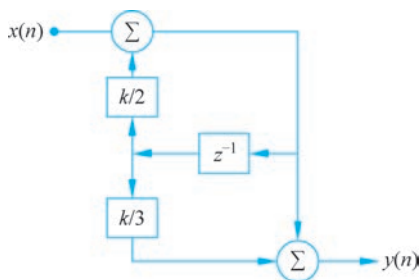


图 5-2-10

(5) 因为收敛域为 $|z| > 3$, 不包含单位圆, 所以系统不稳定。

【题 5-2-24】 选择题

如图 5-2-10 所示的离散系统, k 为何值时可使系统稳定。()

A. $|k| > \frac{1}{2}$

B. $|k| < \frac{1}{2}$

C. $|k| > 2$

D. $|k| < 2$

【分析】 首先根据系统框图确定该系统为因果系统并写出系统函数 $H(z) =$

$$\frac{1 + \frac{k}{3}z^{-1}}{1 + \frac{k}{2}z^{-1}}, \text{ 可得到极点 } z = -\frac{k}{2}. \text{ 再由系统稳定时收敛域包含单位圆即可确定 } k \text{ 的取值范围。}$$

【解答】 D。

考点 3 离散时间系统的复频域(z 域)分析

本节考点: 主要考查利用 z 变换求解系统响应, 分析系统多种特性。

【题 5-3-1】 简答题

因果离散时间系统的差分方程如下所示(其中 a 为实数):

$$y(n] - ay(n-1) = x(n]$$

(1) 求该系统的系统函数 $H(z)$, 并绘出其信号流图。

(2) 试讨论 a 的取值与系统稳定性的关系。

(3) 在系统稳定的情况下, 试讨论 a 的取值与系统滤波特性的关系。

(4) 输入信号为 $x(n] = \delta(n] - a^4 \delta(n-4)$, 求零状态响应。该响应中是否含有完整的自然响应分量? 试简要分析其原因。

【分析】 利用求解差分方程可得到目标系统函数 $H(z)$, 常用的方法有时域经典法、时域卷积和求解和 z 域求解。由系统极点分布决定系统稳定性, 稳定系统的收敛域包含单位圆。系统频率特性由决定零极点分布。零状态响应与系统初始状态无关, 仅由激励信号引起, 其中的自然响应分量由系统极点决定, 当输入信号与系统响应之间存在零极点相消时会消去对应的自然响应分量。

【解答】 (1) $H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$ 。

(2) 当 $|a| < 1$ 时系统稳定。

(3) 当 $0 < a < 1$ 时为低通滤波器, 当 $-1 < a < 0$ 时为高通滤波器, $|a|$ 越大, 通带越窄, 当 $a = 0$ 时为全通系统。

$$(4) y(n) = a^n \cdot [u(n) - u(n-4)] = \{1, a, a^2, a^3\}.$$

系统的特征模式为 $h(n) = a^n u(n)$, 由于输入信号 $X(z) = 1 - (az)^{-4}$ 的零点与系统的极点相消, 因此输出中不含有完整的自然响应分量。

【题 5-3-2】 计算及画图题

滑动平均是一种用于滤除噪声的简单数据处理方法, 差分方程 $y(n) = \frac{1}{4}[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$ 描述的是一种滑动平均系统, 当接收到输入数据 $x(n)$ 后, 将本次输入与前 3 次的输入数据进行平均。

(1) 求该系统的系统函数 $H(z)$ 和单位样值响应 $h(n)$ 。

(2) 画出其零极点图。

(3) 求系统的频率响应 $H(\Omega)$, 并定性画出其幅频特性曲线(要求表明关键阶段的数值)。

【分析】 本题已知差分方程, 对差分方程进行 z 变换得到系统函数 $H(z)$, 再利用部分分式展开法和常用变换对求反变换得到单位样值响应 $h(n)$ 。系统的频率响应对应单位圆上的系统函数, 关键点可能为接近系统零极点及常见的 $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 频率的位置。

【解答】 (1) 两边同时进行 z 变换, 得

$$Y(z) = \frac{1}{4}[X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + z^{-3}X(z)]$$

所以

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{4}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$$

$$h(n) = \frac{1}{4}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{4}\delta(n-2) + \frac{1}{4}\delta(n-3)$$

$$(2) H(z) = \frac{\frac{1}{4}(z^2 + 1)(z + 1)}{z^3}$$

零极点图如图 5-3-1 所示。

$$\begin{aligned} (3) H(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j3\Omega} \end{aligned}$$

幅频特性曲线如图 5-3-2 所示。

【题 5-3-3】 计算及画图题

已知某因果线性时不变系统的差分方程为

$$y(n) - \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) = x(n) - 2x(n-1)$$

(1) 该系统的系统函数 $H(z)$, 画出其零极点图, 指明其收敛域。

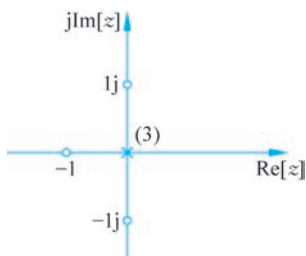


图 5-3-1

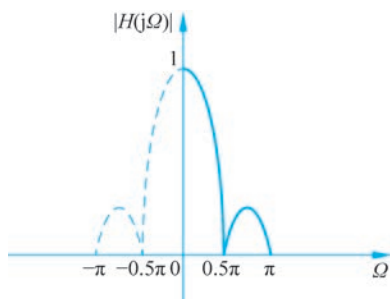


图 5-3-2

(2) 该系统是否为稳定系统? 若稳定, 则粗略画出其幅频响应 $|H(e^{j\Omega})|$ 图, 并指明其为何种类型滤波器(低通、高通、带通、全通等)。

(3) 当输入信号为 $x(n) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ 时, 求系统输出 $y(n)$ 。

【分析】 由题干可知, 该系统为因果线性时不变系统, 系统函数 $H(z)$ 通过对差分方程进行 z 域求解, 收敛域为圆外区域, 并根据收敛域是否包含单位圆判断稳定性, 系统的频率响应 $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 对应单位圆上的系统函数。

【解答】 (1)
$$H(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}} = \frac{z(z-2)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

零极点图如图 5-3-3 所示。

(2) 由于收敛域包含单位圆, 所以系统稳定。

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| \frac{1 - e^{-j2\Omega}}{1 - \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-2j\Omega}} \right|$$

频率响应特性曲线如图 5-3-4 所示, 为高通滤波器。

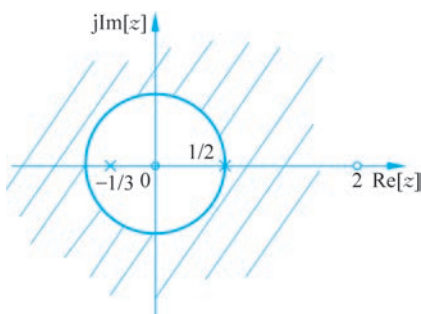


图 5-3-3

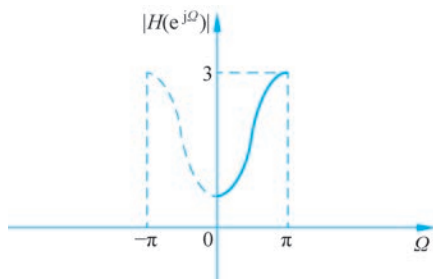


图 5-3-4

$$\begin{aligned} (3) \quad y(n) &= 1 \cdot |H(j0)| + 1 \cdot \left| H\left(j\frac{\pi}{2}\right) \right| \cos\left[\frac{\pi}{2}n + \angle H\left(j\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{6\sqrt{2}}{5} \cos\left[\frac{\pi}{2}n + 172^\circ\right] \end{aligned}$$

【题 5-3-4】 计算及画图题

某因果离散系统的差分方程为

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

- (1) 求系统函数和单位样值响应。
- (2) 讨论此因果系统的收敛域和稳定性。
- (3) 画出系统的零极点分布图。
- (4) 定性画出 $[0, 2\pi]$ 范围内的幅频响应特性曲线。

【分析】 系统函数 $H(z)$ 通过对差分方程进行 z 域求解, 由题干中因果系统的条件可以进行反变换得到单位样值响应。收敛域为圆外区域, 并根据收敛域是否包含单位圆判断稳定性, 系统的频率响应 $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 对应单位圆上的系统函数, 基于频率响应在频率为 $0 \sim \pi$ 时与各极点的距离判断系统的滤波特性。

【解答】 (1) 两边同时进行 z 变换, 可得

$$-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

所以

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{24z^2 + 8z}{24z^2 + 18z + 3} = z \frac{24z + 8}{(4z - 1)(6z - 3)} \\ &= \frac{-\frac{28}{3}z}{4z - 1} + \frac{20z}{(6z - 3)} \\ &= -\frac{7}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{10}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \\ h(n) &= -\frac{7}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \end{aligned}$$

(2) 因为系统是因果的, 极点为 $z = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2}$, 所以收敛域为 $|z| > \frac{1}{2}$ 。因为极点在单位圆内, 收敛域包含单位圆, 所以系统稳定。

(3) 其零极点图如图 5-3-5 所示。

(4) $|H(j\Omega)|$ 在 Ω 为 $0 \sim \pi$ 时, 两个极点的距离越来越大, 而到 $z = -\frac{1}{3}$ 极点处的距离越来越小, 所以这是一个低通滤波器。

$$|H(j0)| = \frac{32}{9}, \quad |H(j\pi)| = \frac{16}{45}$$

频率响应特性曲线如图 5-3-6 所示。

【题 5-3-5】 计算题

某离散时间系统的方框图如图 5-3-7 所示。

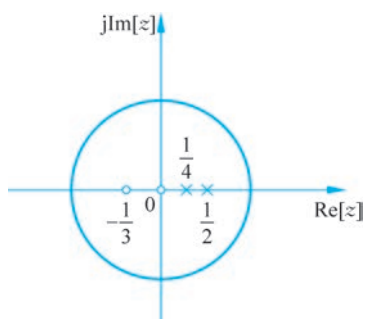


图 5-3-5

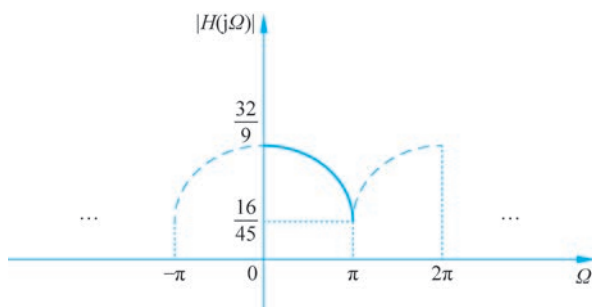


图 5-3-6

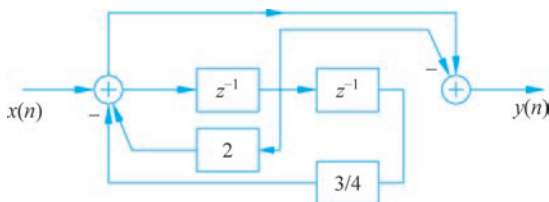


图 5-3-7

- (1) 求该系统的系统函数 $H(z)$ 。
- (2) 描述该系统的差分方程。
- (3) 分析该系统的因果性、稳定性,并指明其收敛域。
- (4) 求系统稳定时的单位样值响应 $h(n)$ 。

【分析】 本题首先要根据给出的系统方框图写出系统函数 $H(z)$,并得到系统的差分方程。系统的因果性和稳定性靠收敛域判断,如果题中未明确给出条件,要对各种情况进行假设。

【解答】 (1) $x(n) - \frac{4}{3}x(n-2) + 2x(n-1) - x(n-1) = y(n)$

$$H(z) = 1 + z^{-1} - \frac{4}{3}z^{-2}$$

(2) $x(n) - \frac{4}{3}x(n-2) + x(n-1) = y(n)$ 。

(3) 极点为 $z=0$,若收敛域为 $|z|>0$,则系统具有因果性,为稳定系统。

(4) $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) - \frac{4}{3}\delta(n-2)$ 。

【题 5-3-6】 计算及画图题

滑动平均滤波器可用如下差分方程描述,其中 b 为待定的常数。

$$y(n) = b[0.5x(n) + x(n-1) + 0.5x(n-2)]$$

- (1) 推导该系统的单位冲激响应 $h(n)$ 和系统函数 $H(z)$,并指出其收敛域。
- (2) 若要求该系统的直流增益为 1,则参数 b 应如何取值?
- (3) 若取 $b=1$,试绘制系统的幅频和相频特性曲线,并指出该系统实现的滤波器

类型。

(4) 若取 $b=1$, 输入为 $x(n]=(-1)^n$, 求系统的输出 $y(n)$ 。

【分析】 首先对差分方程进行 z 变换求解, 得到系统函数 $H(z)$ 和单位冲激响应 $h(n)$, 注意, 因果系统对应的收敛域为圆外区域。直流增益的计算为零频点对应系统函数的数值 $|H(e^{j0})|$ 。单位圆上的系统函数 $|H(e^{j\Omega})|$ 即对应系统频率响应, 观测频率响应在频率为 $0\sim\pi$ 时与各极点的距离, 可以判断系统的滤波特性。

【解答】 (1) $Y(z)=0.5bX(z)+bz^{-1}X(z)+0.5bz^{-2}X(z)$

所以

$$H(z)=0.5b+bz^{-1}+0.5bz^{-2}$$

$$h(n)=0.5b\delta(n)+b\delta(n-1)+0.5b\delta(n-2), |z|>0$$

$$(2) H(e^{j\Omega})=0.5b+be^{-j\Omega}+0.5be^{-j2\Omega}$$

$$|H(e^{j0})|=0.5b+b+0.5b=2b=1$$

所以 $b=0.5$ 。

$$(3) H(z)=\frac{z^2+2z+1}{2z^2}=\frac{(z+1)^2}{2z^2}$$

$|H(e^{j\Omega})|$ 在 Ω 为 $0\sim\pi$ 时, 幅频和相频特性曲线如图 5-3-8 所示。

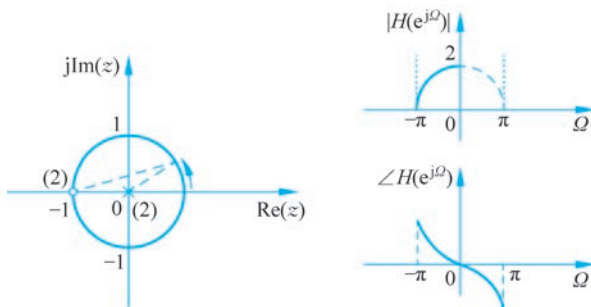


图 5-3-8

$$(4) y(n)=0.5x(n)+x(n-1)+0.5x(n-2)=(-1)^n+(-1)^{n-1}=0$$

【题 5-3-7】 计算及画图题

已知某因果线性时不变系统的差分方程为

$$y(n)-\frac{1}{4}y(n-2)=x(n)-2x(n-1)$$

(1) 该系统的系统函数 $H(z)$, 画出其零极点图, 指明其收敛域。

(2) 该系统是否为稳定系统? 若稳定, 则粗略画出其幅频响应 $|H(e^{j\Omega})|$ 或 $|H(\Omega)|$ 图, 并指明其为何种类型滤波器(低通、高通、带通、全通等)。

(3) 画出其用离散时间 3 种基本单元(延时器、加法器和乘法器)构成的级联实现结构的方框图或信号流图。

【分析】 对系统差分方程做 z 变换并计算系统函数和零极点。题干中给出系统为因果线性时不变系统, 故收敛域圆外收敛。系统稳定性由收敛域是否包含单位圆判断。

单位圆上的系统函数 $|H(e^{j\omega})|$ 即对应系统频率响应, 基于频率响应在频率为 $0 \sim \pi$ 时与各极点的距离可判断系统的滤波特性。信号流图可参照系统函数绘制。

【解答】 (1) $Y(z) - \frac{1}{4}z^{-2}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{z(z-2)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

零极点图如图 5-3-9 所示。

(2) 收敛域包含单位圆, 系统稳定。收敛域如图 5-3-10 所示。

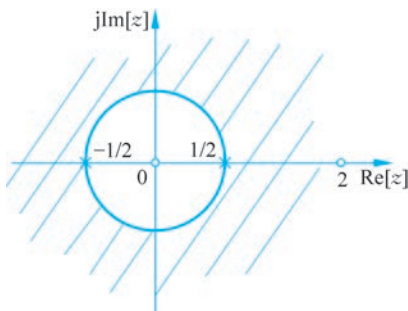


图 5-3-9

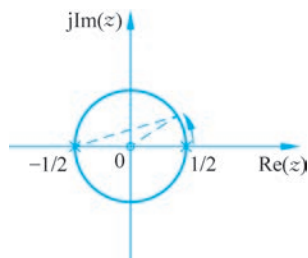


图 5-3-10

所以 $|H(j\Omega)|$ 图如图 5-3-11 所示。

(3) $H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, 信号流图如图 5-3-12 所示。

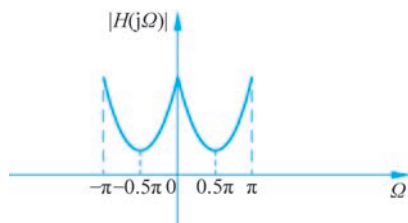


图 5-3-11

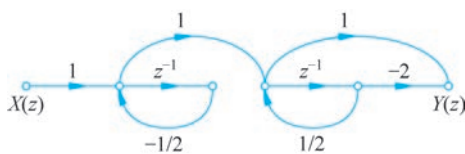


图 5-3-12

【题 5-3-8】 计算及画图题

已知某因果线性时不变系统的差分方程为

$$y(n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

(1) 求该系统的系统函数 $H(z)$, 画出其零极点图, 指明其收敛域。

(2) 该系统是否为稳定系统? 若稳定, 则粗略画出其幅频响应 $|H(e^{j\Omega})|$ 或 $|H(\Omega)|$ 图, 并指明它是何种类型滤波器(低通、高通、带通、全通等)。

【分析】 对差分方程两边进行 z 变换求解得到系统函数。题中已经给出系统具有

因果性,故其收敛域位于单位圆外。由于两个极点 $z = \frac{1}{2}$ 、 $z = -\frac{1}{2}$ 都位于单位圆内,故系统稳定,单位圆上的系统函数 $|H(e^{j\Omega})|$ 即对应系统频率响应,通过对 $0 \sim \pi$ 的频率响应求解可判断系统的滤波特性。

【解答】 (1) 两边同时进行 z 变换,得

$$Y(z) - \frac{1}{4}z^{-2}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

所以

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{z(z - 2)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

由于系统具有因果性,所以其零极点图及收敛域如图 5-3-13 所示。

(2) 收敛域包含单位圆,系统稳定。

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| \frac{1 - 2e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-2j\Omega}} \right|$$

$|H(e^{j\Omega})|$ 图如图 5-3-14 所示。

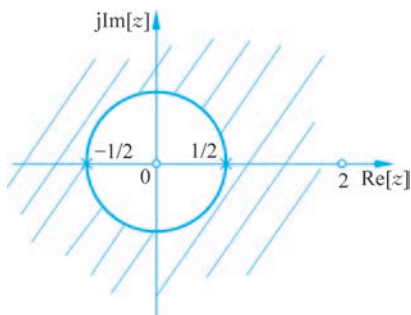


图 5-3-13

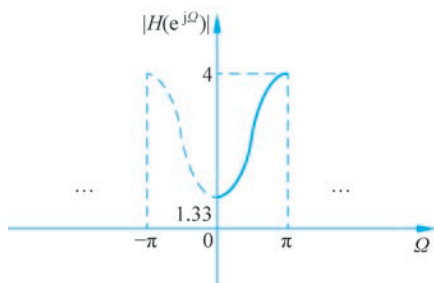


图 5-3-14

【题 5-3-9】 计算题

离散因果系统框图如图 5-3-15 所示,若 $x(n] = [1 + 2\cos(n\pi/2) + 3\cos(n\pi)]u(n)$,求系统的稳态响应。

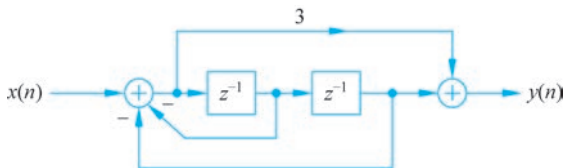


图 5-3-15

【分析】 由系统框图可求出系统函数以及该系统的幅频响应,对照输入信号可计算系统的响应,其中稳态响应为响应中不随时间衰减到零的部分。

【解答】 $X_1(z) = X(z) - X_1(z)z^{-1} - X_1(z)z^{-2}$

$$Y(z) = 3X_1(z) + X_1(z)z^{-2}$$

联立方程,有

$$X_1(z) = \frac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}X(z)$$

$$Y(z) = \frac{3+z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}}X(z)$$

若

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} + 2 \frac{1 - \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)z^{-1}}{1 - \left(2\cos \frac{\pi}{2}\right)z^{-1} + z^{-2}} + 3 \frac{1 - (\cos \pi)z^{-1}}{1 - (2\cos \pi)z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} + 2 \frac{1}{1+z^{-2}} + 3 \frac{1+z^{-1}}{1+2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{6+4z^{-1}-2z^{-4}}{(1-z^{-1})(1+z^{-2})(1+z^{-1})^2} \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{6+4z^{-1}-2z^{-4}}{(1-z^{-1})(1+z^{-2})(1+z^{-1})^2} \frac{3+z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}} \\ &= \frac{6-2z^{-1}+2z^{-2}-2z^{-3}}{1-z^{-4}} \frac{3+z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}} \end{aligned}$$

【题 5-3-10】 计算及画图题

已知某离散时间系统的差分方程为

$$y(n+2) - \frac{5}{2}y(n+1) + y(n) = x(n)$$

(1) 求系统函数 $H(z)$, 并画出零极点图。

(2) 讨论系统的因果性和稳定性, 并说明原因。

(3) 假设系统为因果系统, 初始状态为 $y(0) = -1, y(1) = 1$, 输入 $x(n) = u(n)$, 求系统的零输入响应和零状态响应。

【分析】 对差分方程两边进行 z 变换并由 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 得到系统函数和零极点。

当系统收敛域圆外收敛时该系统为因果系统, 收敛域圆内收敛时为非因果系统。系统收敛域包含单位圆时该系统为稳定系统, 反之不稳定。题目中未直接指出系统的因果稳定性, 故需分情况进行讨论。求解已知输入的响应时一般运用 z 域求解得到输出全响应的 z 变换, 再由其得到零输入响应和零状态响应 z 变换, 该问中已给出系统因果的条件,

故进行反变换时无须再分类讨论。

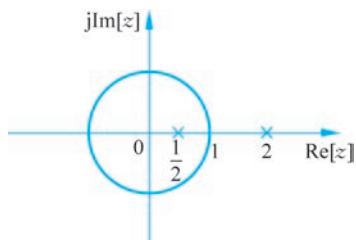


图 5-3-16

【解答】 (1)
$$H(z) = \frac{3}{(z-2)(2z-1)} = 1 + \frac{\frac{1}{3}z}{z-2} - \frac{\frac{8}{3}z}{2z-1}$$

零极点图如图 5-3-16 所示。

(2) $|z| > 2$ 时系统因果, 不稳定。因为收敛域包含无穷大, 不包含单位圆; $\frac{1}{2} < |z| < 2$ 时系统稳定, 非因果。因为收敛域包含单位圆, 不包含无穷大。

(3) 两边进行 z 变换:

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - \frac{5}{2} z Y(z) + \frac{5}{2} zy(0) + Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{\frac{7}{2}z - z^2}{(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{X(z)}{(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

零输入响应 z 域表达式为

$$Y_{zi}(z) = \frac{\frac{7}{2}z - z^2}{(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{z}{z-2} - \frac{2z}{z - \frac{1}{2}}$$

因为系统具有因果性, 所以

$$y_{zi}(n) = 2^n u(n) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

零状态响应 z 域表达式为

$$Y_{zs}(z) = \frac{X(z)}{(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{z}{(z-1)(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{-2z}{z-1} + \frac{2}{3} \frac{z}{z-2} + \frac{4}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

因为系统具有因果性, 所以

$$y_{zs}(n) = -2u(n) + \frac{2}{3}2^n u(n) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

【题 5-3-11】 计算及画图题

已知一滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

(1) 求因果系统的单位样值响应, 并判断该系统是否为稳定系统。

(2) 求其频率响应, 并画出幅度频谱图, 该滤波器为何种类型滤波器(低通、高通、带通、带阻或全通)。

(3) 若滤波器的单位样值响应为 $g(n) = (-1)^n h(n)$, 画出其幅度频谱图, 该滤波器为何种类型滤波器(低通、高通、带通、带阻或全通)。

【分析】 已知系统为因果系统, 利用部分分式分解和常用变换对法对系统函数进行

反变换即可得到系统单位样值响应,再由收敛域是否包含单位圆内确定稳定性。单位圆上的系统函数 $|H(e^{j\Omega})|$ 即对应系统频率响应。对 $g(n)=(-1)^n h(n)$ 进行 z 变换即可得到新滤波器的特性。

【解答】 (1) $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$

因为系统具有因果性,所以 $|z|>0.5$,为稳定系统。

(2) $H(e^{j\Omega}) = \frac{1+e^{-j\Omega}}{1-0.5e^{-j\Omega}}$

系统为低通滤波器,幅度频谱图如图 5-3-17 所示。

(3) 系统为低通滤波器

$$G(z) = H(-z)$$

$$G(e^{j\Omega}) = \frac{1+e^{j\Omega}}{1-0.5e^{j\Omega}}$$

幅度频谱图如图 5-3-18 所示。

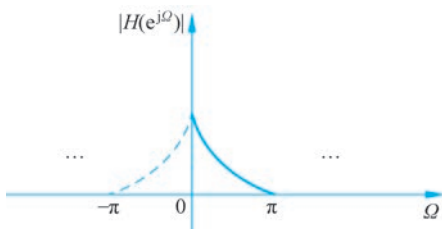


图 5-3-17

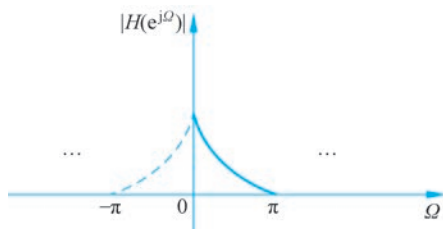


图 5-3-18

【题 5-3-12】 计算及画图题

已知因果离散系统差分方程为

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) - 2x(n-1)$$

输入信号 $x(n]=2^n u(n)$, $y(0)=2$, $y(1)=3/2$, 试求:

(1) 该系统的全响应 $y(n)$, 自然响应 $y_n(n)$, 强迫响应 $y_f(n)$ 。

(2) 系统函数 $H(z)$, 并画出系统的零极点图。

(3) 该系统是否存在频率响应? 若存在, 则粗略画出系统幅频响应特性曲线; 若不存在, 则说明理由。

(4) 画系统的方框图或结构图或信号流图。

【分析】 先根据已知系统初始状态 $y(0)=2$, $y(1)=\frac{3}{2}$ 求出其他系统初始状态 $y(-1)=0$, $y(-2)=-8$ 。对系统差分方程进行 z 变换并求出全响应, 注意题干中已经给出了系统因果的条件。系统函数和零极点同样由差分方程的 z 变换得到。系统是否存在频率

响应等价于系统是否具有稳定性,通过收敛域是否包含单位圆可以判断,系统频率响应即对应 z 域单位圆上的系统函数 $|H(e^{j\omega})|$ 。信号流图可根据差分方程或系统函数绘制。

【解答】 (1) 由 $y(1) - \frac{3}{4}y(0) + \frac{1}{8}y(-1) = 0$, 得

$$y(-1) = 0$$

由 $y(0) - \frac{3}{4}y(-1) + \frac{1}{8}y(-2) = 1$, 得

$$y(-2) = -8$$

对差分方程两边进行 z 变换, 得

$$Y(z) - \frac{3}{4}\{z^{-1}Y(z) + y(-1)\} + \frac{1}{8}\{z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\} = (1 - 2z^{-1})X(z)$$

$$Y(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})X(z)}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} + \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

因为

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

所以

$$Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{4z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{2z}{z - \frac{1}{4}}$$

由于系统具有因果性, 所以全响应为

$$y(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

自然响应为

$$y_n(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

强迫响应为

$$y_f(n) = 0$$

$$(2) H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z(z-2)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

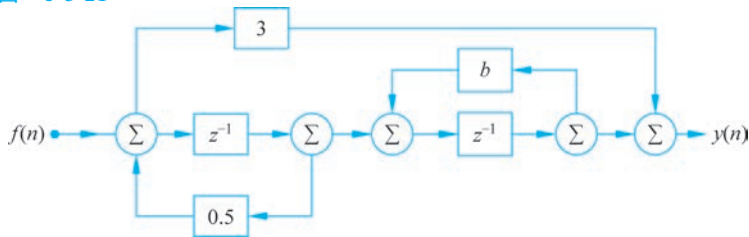
零极点图如图 5-3-19 所示。

(3) 由于收敛域包含单位圆, 所以系统稳定, 频率响应存在。

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1 - 2e^{-j\Omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

幅频响应特性曲线如图 5-3-20 所示。

(2) 若要使系统稳定,试确定常量 b 的大小。


$$\begin{cases} \dot{x}_1 = bx_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5x_2 + f(n) \end{cases}$$
$$y(n) - (b + 0.5)y(n - 1) + 0.5by(n - 2) = 4x(n) - 3(b + 0.5)x(n - 1) + 1.5bx(n - 2)$$

(2) 由于系统具有因果性,所以 $|z|>0.5$ 且 $|z|>|b|$ 。

若系统稳定,则要求 $|b|<1$ 。

【题 5-3-14】 计算题

已知一因果离散时间系统的方框图如图 5-3-23 所示,当输入 $f(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n, -\infty < n < \infty$ 时,输出响应 $y(n) = 0$ 。

(1) 求系统函数 $H(z)$,并写出系统的差分方程。

(2) 选延时器的输出作为状态变量,试建立该系统的状态方程和输出方程(用矩阵方式表示)。

(3) 求系统的单位阶跃响应 $s(n)$ 。

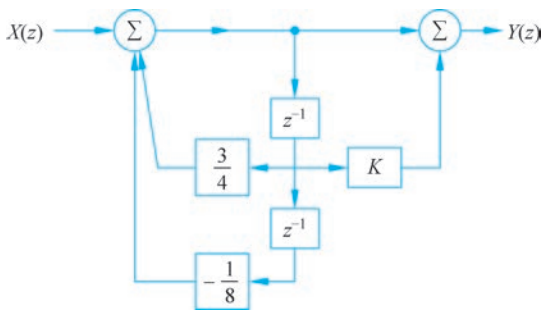


图 5-3-23

【分析】 首先根据方框图写出系统函数和差分方程。

【解答】 (1)
$$H(z) = \frac{1 + kz^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

所以

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + kx(n-1)$$

又因为 $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 时

$$y(n) = 0$$

所以必定存在零点 $z = \frac{1}{3}$, 所以 $k = -\frac{1}{3}$ 。于是有

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{3}x(n-1)$$

(2) 系统为二阶系统,因此有两个状态变量,取两个积分器后的输出作为两个状态变量,可得到以下状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = X(z) - \frac{1}{8}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} X(z)$$

输出方程为

$$Y(z) = Kx_2 + \dot{x}_2$$

$$Y(z) = [K \quad 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

方框图如图 5-3-24 所示。

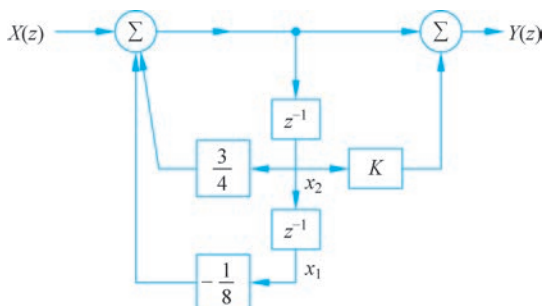


图 5-3-24

$$(3) h(n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n u(n)$$

所以

$$\begin{aligned} s(n) = h(n) * u(n) &= \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} u(n) + \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} u(n) \\ &= -\frac{4}{3} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] u(n) - \frac{4}{9} \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} - 1 \right] u(n) \end{aligned}$$

考点 4 离散时间信号及系统的频域分析

本节考点：主要考查离散时间信号的 DTFT 定义及求解，以及利用 DTFT 分析离散线性时不变系统，重点是系统的滤波特性。

……知识点链接……

1. DTFT 定义和存在条件

$$\text{DTFT: } X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \text{DTFT}[x(n)]$$

$$\text{IDTFT: } x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \text{IDTFT}[X(\Omega)]$$

存在条件：离散信号 $x(n)$ 是绝对可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ 。

2. DFS 定义和存在条件

$$\text{DFS: } \tilde{X}(k) = \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \text{DFS}[\tilde{x}(n)]$$

$$\text{IDFS: } \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)]$$

存在条件：离散信号 $\tilde{x}(n)$ 是绝对可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| < \infty$ 。

3. CTFT、DTFT、DFS 之间的关系

CTFT 与 DTFT 的关系：

$$X(\Omega) = X_s(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T_s}} = X_s\left(j\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

其中， $X_s(j\omega)$ 对连续时间信号 $X_a(t)$ 以时间间隔 T_s 进行理想抽样后的 CTFT。

DTFT 与 DFS 的关系：

$$\tilde{X}(k) = X(\Omega) \Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

或

$$\tilde{X}(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

4. 常用 DTFT 性质

(1) 周期性。

离散时间傅里叶变换对 Ω 来说，总是周期的，其周期为 2π 。

(2) 线性。

$$ax_1(n) + bx_2(n) \longleftrightarrow aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$$

(3) 对称性。

$$x^*(n) \longleftrightarrow X^*(-\Omega)$$

对实信号 $x(n)$ ，幅度谱 $|X(\Omega)|$ 是 Ω 的偶函数，相位谱 $\angle X(\Omega)$ 是 Ω 的奇函数。

(4) 时移和频移性质。

$$x(n - n_0) \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 n} x(n) \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

(5) 时间和频率尺度特性。

$$x_{(k)}(n) \longleftrightarrow X(k\Omega), \quad k \text{ 为 } 1 \text{ 的整数}$$

特例：

$$x(-n) \longleftrightarrow X(-\Omega)$$

(6) 频域微分。

$$nx(n) \longleftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

(7) 帕塞瓦尔定理。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

(8) 卷积性质。

$$x(n) * h(n) \longleftrightarrow X(\Omega)H(\Omega)$$

5. 常用 DTFT 变换对

$$(1) \delta(n) \longleftrightarrow 1$$

$$(2) u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$$

$$(3) a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}, |a| < 1$$

$$(4) n a^n u(n), |a| < 1 \longleftrightarrow \frac{a e^{-j\Omega}}{(1 - a e^{-j\Omega})^2} = \frac{a e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega} - a)^2}$$

$$(5) 1 \longleftrightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$$

$$(6) e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)$$

$$(7) \cos \Omega_0 n \longleftrightarrow \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)]$$

$$(8) \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}(\Omega_c n) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_{2\Omega_c}(\Omega - 2\pi l)$$

【题 5-4-1】多选题

序列 $x(n)$ 的 DTFT 为 $X(\Omega)$, 则以下正确的有()。

$$A. X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi) \quad B. x(-n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(-\Omega)$$

$$C. x(2n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega/2) \quad D. nx(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

【分析】由 DTFT 定义可知, $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$, 所以

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\Omega+2\pi)n} = X(\Omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j(-\Omega)(-n)} = X(-\Omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [x(n) + (-1)^n x(n)] e^{-j(2\Omega)(\frac{n}{2})} = \frac{1}{2} [X(e^{j\Omega/2}) + X(e^{j(\Omega-2\pi)/2})]$$

故选项 C 错误。

$$nx(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

故选项 D 错误。

【解答】 A、B。

【题 5-4-2】 计算题

求序列 $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n+4) - u(n-2)]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(\Omega)$ 。

【分析】 该题可等价于求序列的 z 变换,再取 $z = e^{j\Omega}$ 就能得到离散时间傅里叶变换 $X(\Omega)$ 。

【解答】 因为序列是有限长序列,必然可以进行 z 变换,所以 z 变换为

$$\frac{1 - (2z)^6}{z(1 - 2z)} = \frac{1 + 2z + \cdots + (2z)^5}{z}$$

$$X(\Omega) = \frac{1 + 2e^{j\Omega} + \cdots + (2e^{j\Omega})^5}{e^{j\Omega}}$$

【题 5-4-3】 填空题

已知 $x(n]$ 的 DTFT 为 $X(\Omega)$,则 $x(-n]$ 的 DTFT 为_____。

【分析】 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-j(-\Omega)(-n)} = X(-\Omega)$

【解答】 $X(-\Omega)$ 。

【题 5-4-4】 填空题

$x(n]$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(\Omega)$,则 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 的离散时间傅里叶变换为_____。

【分析】 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j(2\Omega)\left(\frac{n}{2}\right)} = X(2\Omega)$

【解答】 $X(2\Omega)$ 。

【题 5-4-5】 多选题

已知 $x(n]$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(\Omega)$,则下列 $x(n]$ 中一定满足 $X(\Omega)|_{\Omega=0} = X(0) = 0$ 的有()。

A. $x(n]$ 奇对称

B. $x(n]$ 偶对称

C. $x(0) = 0$

D. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 0$

【分析】 $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$ $X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$,故当 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 0$ 或序列 $x(n]$ 奇对称时一定有 $X(\Omega)|_{\Omega=0} = X(0) = 0$ 。

【解答】 A、D。

【题 5-4-6】 多选题

离散时间周期信号的频谱具有的特点是()。

A. 离散的 B. 收敛的 C. 周期的 D. 连续的

【分析】 离散信号对应的频谱是周期的,周期信号对应的频谱是离散的。

【解答】 A、C。

【题 5-4-7】 填空题

已知信号 $x(n]$ 如图 5-4-1 所示,其离散时间傅里叶变换(DTFT)为 $X(\Omega)$,则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = \underline{\hspace{2cm}}。$$

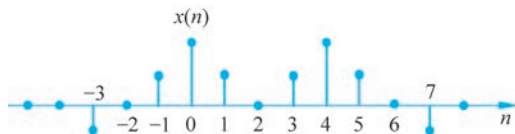


图 5-4-1

【分析】 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$, 故 $\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = 2\pi x(0) = 4\pi$ 。

【解答】 4π 。

【题 5-4-8】 多选题

序列 $x(n]$ 的离散时间傅里叶变换(DTFT)为 $X(\Omega)$,则下列说法正确的有()。

A. $X(\Omega)$ 一定是连续的 B. $X(\Omega)$ 一定是周期的

C. $x(-n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(-\Omega)$

D. $x(n/2) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(2\Omega)$

E. $x(2n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega/2)$

【分析】 周期信号对应的频谱是离散的,排除选项 A。离散信号的频谱一定是周期

的,故选项 B 正确。 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-j(-\Omega)(-n)} = X(-\Omega)$, 故选项 C 正确。

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j(2\Omega)\left(\frac{n}{2}\right)} = X(2\Omega)$, 故选项 D 正确。 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n) e^{-j\Omega n} =$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [x(n) + (-1)^n x(n)] e^{-j(2\Omega)\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{2} [X(e^{j\frac{\Omega}{2}}) + X(e^{j\frac{\Omega-2\pi}{2}})]$, 因为序列 $x(2n)$ 没有

使用 $x(n)$ 的奇数项,所以不能与 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 使用相同的方法,排除选项 E。

【解答】 B、C、D。

【题 5-4-9】 多选题

序列 $x(n]$ 的 DTFT 为 $X(\Omega)$,满足 $X(0)=0$ 的条件有()。

A. $x(n)$ 奇对称

B. $x(n)$ 偶对称

C. $x(n)=0$

D. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 0$

【分析】 $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$ $X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$, 故当 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 0$ 或序列 $x(n)$ 奇对称时一定有 $X(\Omega)|_{\Omega=0} = X(0) = 0$ 。当序列 $x(n) = 0$ 时也满足上述条件。

【解答】 A、C、D。

【题 5-4-10】 填空题

已知一周期信号 $x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, 其周期应该为_____。

【分析】 序列 $x(n)$ 包含的正弦序列的周期分别为 8、16、4。取其最小公倍数即为答案。

【解答】 16。

……知识点链接……

1. 系统的频率响应

系统的单位样值响应为 $h(n)$ 的傅里叶变换 $H(\Omega)$ 称为系统的频率响应, 简称频响。

2. 系统的频率响应特性

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n}$$

$H(\Omega)$ 可以表示为 $H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\angle H(\Omega)}$, 则 $|H(\Omega)|$ 称为系统的“幅频特性”, 它反映了系统对输入信号各频率分量相对大小的改变; $\angle H(\Omega)$ 称为系统的“相频特性”, 它反映了系统对输入信号各频率分量相位大小的改变。与连续时间系统频率响应 $H(j\omega)$ 显著不同的是, $H(\Omega)$ 是 Ω 的周期函数, 且周期为 2π 。

3. 系统的频率响应与输入/输出信号的关系

$$H(\Omega) = \frac{Y_{zs}(\Omega)}{X(\Omega)}$$

【题 5-4-11】 计算题

离散时间理想低通的频率响应为(只写出了 $|\Omega| < \pi$ 范围内)

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega\tau}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

(1) 求单位样值响应 $h(n)$;

(2) 若 $h_1(n) = \begin{cases} h(n), & n \text{ 为偶数} \\ -h(n), & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 求 $H_1(\Omega)$, 写出 $|\Omega| < \pi$ 范围内的表达式。

【分析】 系统函数为一理想滤波器, 可以写作 $H(\Omega) = e^{-j\Omega\tau} \otimes [u(\Omega - \Omega_c) - u(\Omega + \Omega_c)]$,

进行反变换得到 $h(n) = \frac{\sin(n - \tau)\Omega_c}{\pi(n - \tau)}$ 。

$$h_1(n) = (-1)^n h(n)$$

所以

$$H_1(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)(-z)^{-n} = \begin{cases} e^{-j(n-\pi)\tau}, & -\pi < \Omega < \Omega_c - \pi, \pi - \Omega_c < \Omega < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【解答】 (1) $h(n) = \frac{\sin(n-\tau)\Omega_c}{\pi(n-\tau)}$

(2) $H_1(\Omega) = \begin{cases} e^{-j(n-\pi)\tau}, & -\pi < \Omega < \Omega_c - \pi, \pi - \Omega_c < \Omega < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

【题 5-4-12】 填空题

已知某离散时间系统的频率响应为 $H(j\Omega) = \begin{cases} e^{-j3\Omega}, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$, 则其单位样值

响应 $h(n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【分析】 $H(j\Omega) = e^{-j3\Omega} \otimes [u(\Omega - \Omega_c) - u(\Omega + \Omega_c)]$ 将卷积的两部分分别进行反变换并相乘就可以得到单位样值响应 $h(n)$ 。

【解答】 $\frac{1}{(3-n)\pi} \sin(3-n)\Omega_c$ 。

【题 5-4-13】 填空题

已知某离散时间系统的频率响应如图 5-4-2 所示, 则其单位样值响应 $h(n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

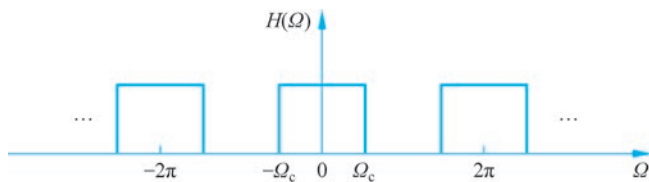


图 5-4-2

【分析】 写出频率响应的表达式 $H(\Omega) = e^{-j\Omega n} \otimes [u(\Omega - \Omega_c) - u(\Omega + \Omega_c)]$, 再对其进行反变换得到单位样值响应 $h(n)$ 。

【解答】 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{\pi n} \sin \Omega_c n$ 。

【题 5-4-14】 简答及画图题

已知信号 $x(n)$ 为离散时间序列, 其中 $x_1(n)$ 傅里叶变换 $X_1(\Omega)$ 如图 5-4-3 所示, 该

信号通过如图 5-4-4 所示系统 (其中 $h(n) = \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}$) 后恢复出的信号为 $y(n)$, 假设信号

$x_2(n)$ 有 3 种情况: ① $x_2(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n)$; ② $x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - 2k)$; ③ $x_2(n) =$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - 4k)$ 。

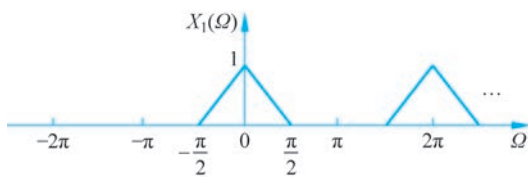


图 5-4-3

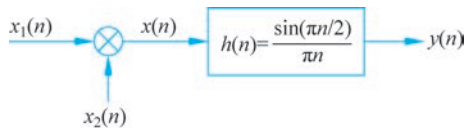


图 5-4-4

(1) 请画出 $x_2(n)$ 在 3 种情况下, 信号 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(\Omega)$, 画频谱图 $Y(\Omega)$ 。

(2) 对于信号 $x_1(n)$ 来说, 图 5-4-4 所示系统是无失真传输系统吗? 请针对 $x_2(n)$ 的 3 种情况分别分析: 如果是, 解释原因并写出 $y(n)$ 的时域表达式; 如果不是, 只需说明原因。

【分析】 信号 $x_1(n)$ 与信号 $x_2(n)$ 二者卷积, 相当于频域相乘, 理解两信号的频域表达式及频谱图是解题的关键。后续的 $h(n) = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$ 在频域相当于一个 $\Omega_c = \pi/2$ 的低通滤波器, 所以只要滤除 $\Omega_c = \pi/2$ 之外的信号就能得到 $Y(\Omega)$, 如果输入滤波器的信号原本拥有 $\Omega_c = \pi/2$ 之外的成分, 则会造成失真。

【解答】 (1) 因为

$$x(n) = x_1(n)x_2(n)$$

所以

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\theta}) X_1(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

① 当 $x_2(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ 时

$$X_2(e^{j\Omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) \right]$$

所以

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{-\pi}^{\pi} \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) X_1(e^{j(\Omega-\theta)}) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} [X_1(e^{j(\Omega-\frac{\pi}{2})}) + X_1(e^{j(\Omega+\frac{\pi}{2})})] \end{aligned}$$

因此, 其频谱图如图 5-4-5 所示。

② 当 $x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-2k)$ 时

$$\begin{aligned} X_2(e^{j\Omega}) &= \frac{2\pi}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi l}{N}\right) \\ &= \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - l\pi) \end{aligned}$$

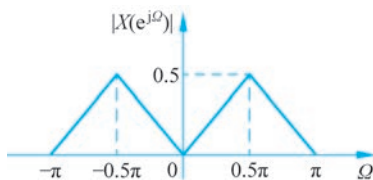


图 5-4-5

所以

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} [X_1(e^{j(\Omega+\pi)}) + X_1(e^{j(\Omega-\pi)})]$$

其频谱图如图 5-4-6 所示。

④ 当 $x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-4k)$ 时, 同理得

$$X(e^{j\Omega}) = X_1(e^{j(\Omega+2\pi)}) + X_1(e^{j(\Omega-2\pi)}) = 2X_1(e^{j\Omega})$$

其频谱图如图 5-4-7 所示。

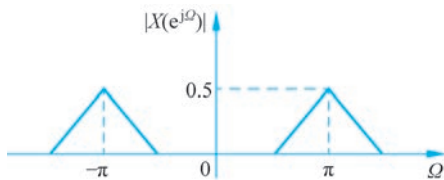


图 5-4-6

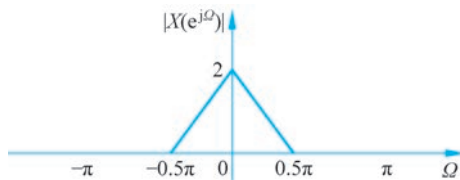


图 5-4-7

(2) 因为

$$h(n) = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

所以

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

因此, $x_2(n)$ 在第①种和第②种情况时为失真系统。

为第③种情况时, 为无失真系统, $y(n) = 2x(n)$ 。

【题 5-4-15】 填空题

已知离散时间系统 $H(\Omega)$ 是高通滤波器, $H_1(\Omega) = H(\pi - \Omega)$, 则 $H_1(\Omega)$ 是 _____ 滤波器。

【分析】 $H_1(\Omega) = H(\pi - \Omega)$ 相当于关于 $\Omega = \frac{\pi}{2}$ 作了一次对称, 原来位于 $\Omega = 0$ 附近的低频分量转移到了 $\Omega = \pi$ 附近; 同理, 原高频分量转移到了低频分量处, 故新系统为低通滤波器。

【解答】 低通。