第3章

静定梁与静定刚架

学习指导

【本章知识结构】

知识模块	主要知识点	掌握程度
静定梁	单跨静定梁的内力计算及内力图	掌握
	多跨静定梁的受力分析	理解
	平面刚架的内力图	掌握
	快速准确绘制弯矩图	掌握

【本章能力训练要点】

能力训练要点	应用方向
单跨静定梁的内力计算及内力图	多跨梁和刚架分析的基础，强度计算，超静定计算
多跨静定梁的内力分析及内力图	影响线分析，可解决实际工程中多跨静定梁的结构设计
刚架的内力计算及内力图的绘制	杆件的强度、位移和超静定结构动力学计算

3.1 静 定 梁

(1) 单跨静定梁的结构形式：水平梁、斜梁及曲梁、简支梁、悬臂梁及伸臂梁。

(2) 平面结构的内力及其正负号规定。

① 轴力：受拉为正，如图 3.1(a)所示。

② 剪力：顺时针为正，如图 3.1(b)所示。

③ 弯矩：下部纤维受拉为正，如图 3.1(c)所示。

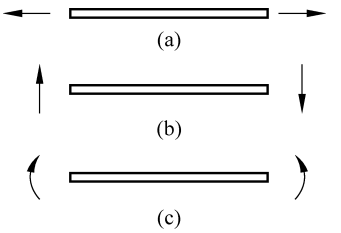

图 3.1

(3) 求内力图的步骤。

① 求支座反力。

② 求杆件控制截面内力。

提示：对于初学者一定要掌握控制截面的选取原则，控制截面一般取为杆端(集中荷载集中力矩作用点)或支座处(分布荷载的起点和终点)。

③ 绘制内力图。

④ 校核。根据内力图特征来校核；根据静力平衡条件来校核。

(4) 多跨静定梁的受力分析。

① 从几何组成来看{基本部分 / 附属部分} →层次图。

② 从受力来看{当荷载作用于基本部分 / 当荷载作用于附属部分} →力的传递路径。

③ 解题顺序：先附属部分，再基本部分。

由以上内容可知：多跨静定梁可分成若干单跨梁分别计算。

3.2 静定平面刚架

3.2.1 刚架的组成及分类

刚架是由若干直杆(梁和柱)部分或全部用刚结点连接而成的一种结构。

1. 静定刚架(图 3.2)

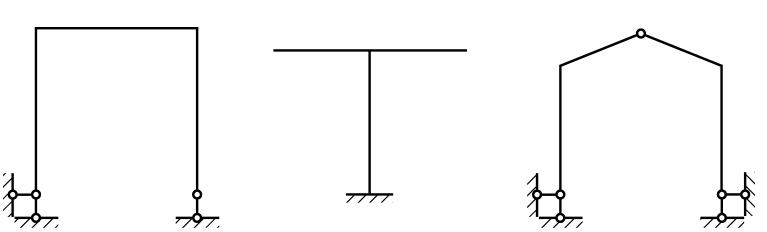
(a) 简支刚架　(b) 悬挂刚架　(c) 三角刚架

图 3.2

2. 超静定刚架(图 3.3)

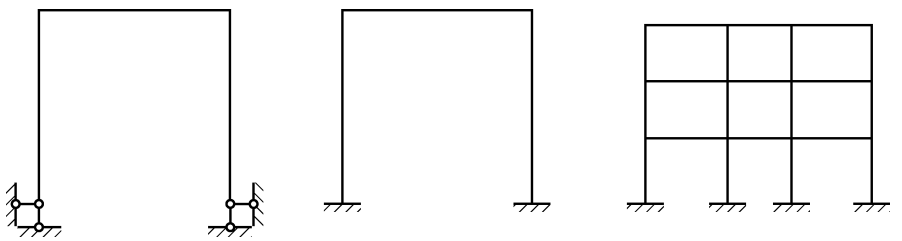

图　3.3

实际工程中采用的刚架大多是超静定刚架。

3.2.2 刚架的特征

(1) 刚结点处,各杆端不能产生相对移动和转动,各杆夹角不变。

(2) 刚结点能够承受和传递弯矩,使结构弯矩分布相对比较均匀,节省材料。

(3) 两铰、三铰刚架和四铰体系变为结构加斜杆,组成几何不变体系所需的杆件数目较少,且多为直杆,故净空较大,施工方便。

(4) 梁柱形成一个刚性整体,增大了结构刚度并使内力分布比较均匀,节省材料,可以获得较大净空。

3.2.3 静定平面刚架的内力分析

1. 求支座反力

求刚架的支座反力时,不同类型刚架的求解方式不一样,例如,简支刚架的求解过程与梁相同,悬臂刚架可不求支座反力。对三铰刚架,求支座反力的过程如下(图 3.4)。

先取整体为研究对象:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{P}{4}(\uparrow)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{3}{4}P(\uparrow)$$

再取 CB 部分为隔离体:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow X_B = \frac{P}{4}(\leftarrow)$$

再取整体为研究对象:

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_A = \frac{P}{4}(\rightarrow)$$

2. 用截面法求内力(杆端内力)

(1) 内力的表达,此时需要用两个下标才能表达清楚刚架的截面内力,如图 3.5 所示。结点 D 三个方向的杆端弯矩分别表示为:M_{DA}、M_{DB}、M_{DC}。

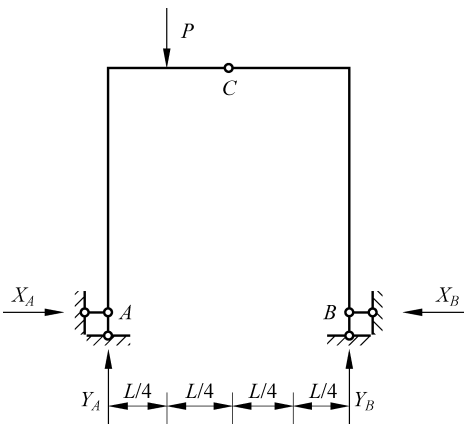

图 3.4

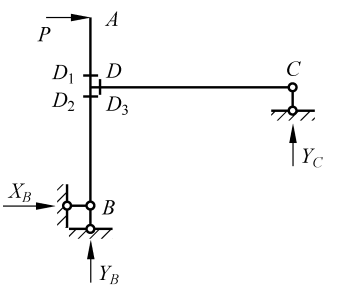

图 3.5

(2) 正确选取隔离体。

(3) 内力的正负规定:轴力和剪力与梁的规定一样,弯矩以梁的下侧纤维受拉为正。

3. 作内力图

(1) 将刚架拆成杆件。

(2) 采用分段叠加法做复杂弯矩图。

(3) 各杆件内力图合在一起是刚架内力图。

3.3 快速准确绘制弯矩图的规律

(1) 利用 q、F_S、M 之间的微分关系以及一些推论。

① 无荷载区段,M 为直线。

② 受均布荷载 q 作用时,M 为抛物线,且凸向与 q 方向一致。

③ 受集中荷载 P 作用时,M 为折线,折点在集中力作用点处,且凸向与 P 方向一致。

④ 受集中力偶 m 作用时,在 m 作用点处 M 有跳跃(突变),跳跃量为 m,且左右直线均平行。

（2）铰处弯矩为零，刚结点处力平衡。

（3）外力与杆轴重合时不产生弯矩。

（4）作弯矩图的区段叠加法。

（5）对称性的利用。

3.4　静定结构的特性

（1）静力解答的唯一性。

（2）静定结构的内力：与杆件的刚度（EI、EA、GA）无关，也与支座沉降和温度改变无关，与材料收缩、制造误差亦无关。

（3）平衡力系的影响：由平衡力系组成的荷载作用在静定结构某一自身几何不变的部分时，只有该部分受力，其余部分不受力。

（4）荷载等效的影响：在结构某一自身几何不变的部分变换时，仅该部分内力发生变化，剩余部分的内力保持不变。

3.5　例题详解

【例 3-1】　求图 3.6 所示单跨静定梁的内力图。

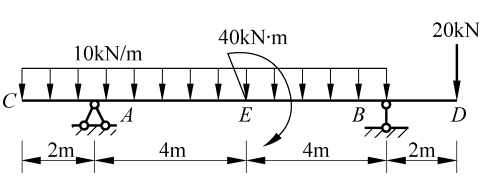

图　3.6

解：（1）求支座反力，取全梁为隔离体。

$$\sum M_A = 0$$

$-10\text{kN/m}\times 2\text{m}+10\text{kN/m}\times 8\text{m}\times 4\text{m}+40\text{kN}\cdot\text{m}-F_{By}\times 8\text{m}+20\text{kN}\times 10\text{m}=0$

得 $F_{By}=67.5\text{kN}$

$\sum F_y=0$

$F_{Ay}-10\text{kN/m}\times 10\text{m}+67.5\text{kN}-20\text{kN}=0$

$F_{Ay}=52.5\text{kN}$

(2) 绘制弯矩图(图 3.7),用截面法计算出各控制点的弯矩值。

$M_A=10\text{kN/m}\times 2\text{m}\times 1\text{m}=20\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_B=20\text{kN}\times 2\text{m}=40\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{E左}=-52.5\text{kN}\times 4\text{m}+10\text{kN/m}\times 6\text{m}\times 3\text{m}=-30\text{kN}\cdot\text{m}$

(3) 绘制剪力图(图 3.8),用截面法计算各控制点的弯矩值。

$F_{A左}=-10\text{kN/m}\times 2\text{m}=-20\text{kN}$

$F_{A右}=52.5\text{kN}-20\text{kN}=32.5\text{kN}$

$F_{B右}=20\text{kN}$

$F_{B左}=20\text{kN}-67.5\text{kN}=-47.5\text{kN}$

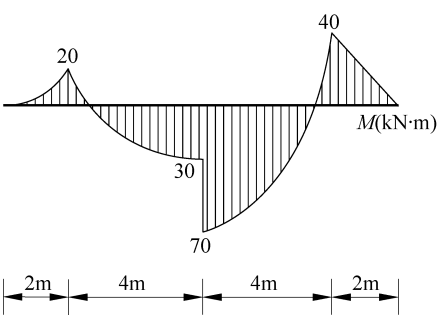

图 3.7

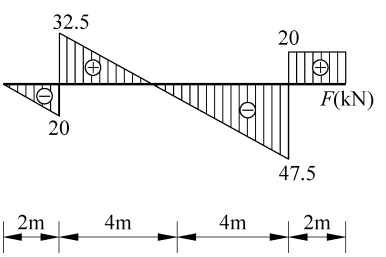

图 3.8

【例 3-2】 作出图 3.9 所示多跨静定梁的内力图。

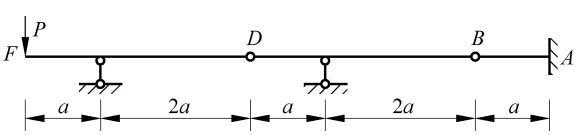

图 3.9

解:(1) 层次图见图 3.10。

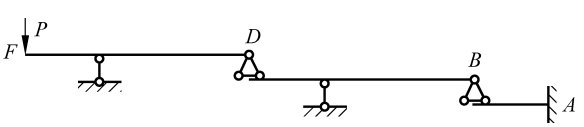

图 3.10

(2) 根据荷载的传递关系(图 3.11),即可知本题的求解顺序:$FD\rightarrow BD\rightarrow AB$。

(3) 此时即可分段画出内力图,合在一起就是整个结构的内力图(图 3.12)。

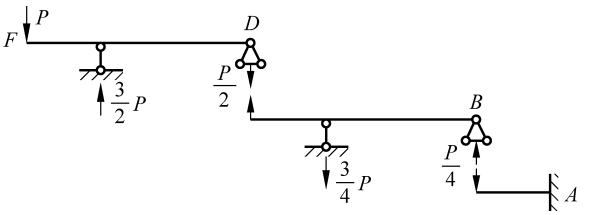

图　3.11

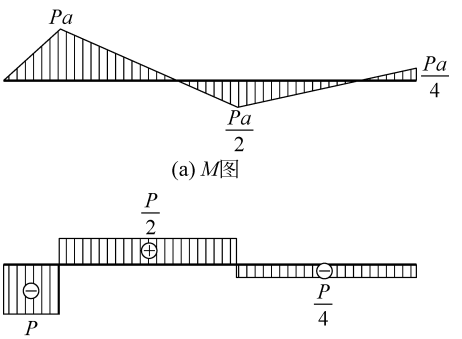

图　3.12

【例 3-3】　快速绘制弯矩图(图 3.13)。

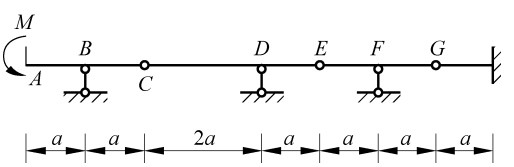

图　3.13

解：AB 段的弯矩图与 M 相同，C 点弯矩为 0，BD 之间无外力作用，故其弯矩图为一直线。同样 E、G 两点弯矩为 0，故 DF 之间和 FG 之间为一直线(图 3.14)。

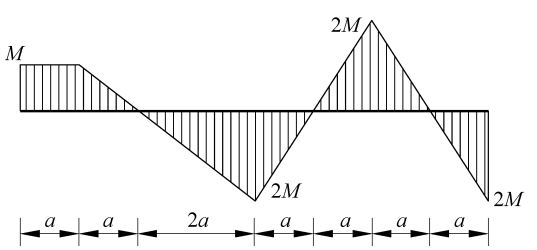

图 3.14　M 图

【例 3-4】　试作图 3.15 所示刚架的 M 图。

解：$M_{DC}=10\text{kN}\times 4\text{m}=40\text{kN}\cdot\text{m}$

由 $\sum M_A=0\Rightarrow F_B\times 4\text{m}+10\text{kN}\times 4\text{m}-4\text{m}\times 20\text{kN/m}\times 2\text{m}=0\Rightarrow F_B=30\text{kN}$

$M_{DB}=30\text{kN}\times 4\text{m}=120\text{kN}\cdot\text{m}$

故 $M_{DA}=M_{DC}+M_{DB}=160\text{kN}\cdot\text{m}$

A 点弯矩为 0，AD 之间弯矩由叠加法可算出。弯矩图如图 3.16 所示。

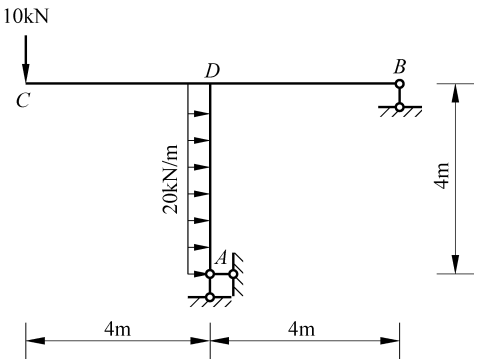

图 3.15

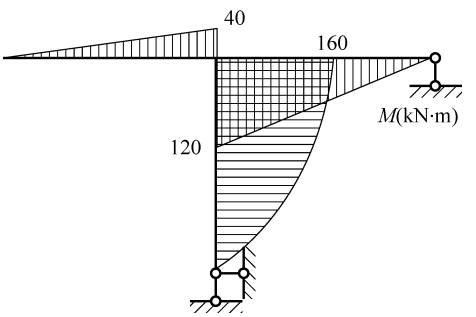

图 3.16

【例 3-5】 试作图 3.17 所示刚架的 M 图。

解：

由 $\sum M_A=0\Rightarrow F_{By}=0$

由 $\sum F_y=0\Rightarrow F_{Ay}=0$

由 $\sum M_C=0\Rightarrow F_{Bx}\times h=M\Rightarrow F_{Bx}=\dfrac{M}{h}$

故 $M_{DB}=F_{Bx}\times h=M$，同理可得 $M_{EA}=M$。

受力分析如图 3.18 所示，弯矩图如图 3.19 所示。

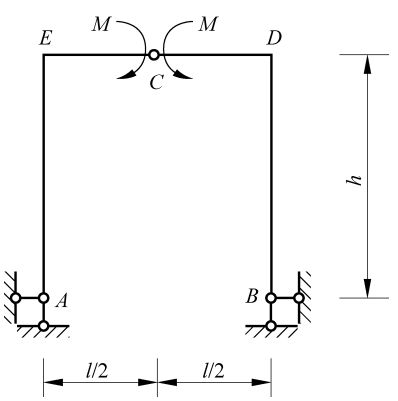

图 3.17

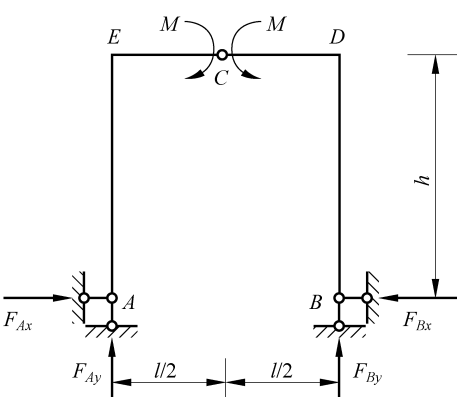

图 3.18

【例 3-6】 试作图 3.20 所示刚架的 M 图。

解：

由 $\sum F_y=0$ 可知，$F_C=20\text{kN}+10\text{kN/m}\times 4\text{m}=60\text{kN}$

$M_{CF}=20\text{kN}\times 2\text{m}=40\text{kN}\cdot\text{m}$

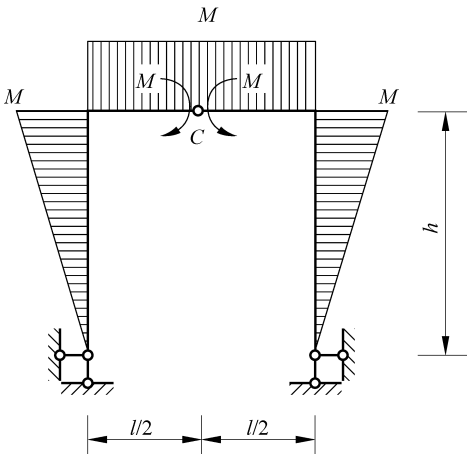

图 3.19

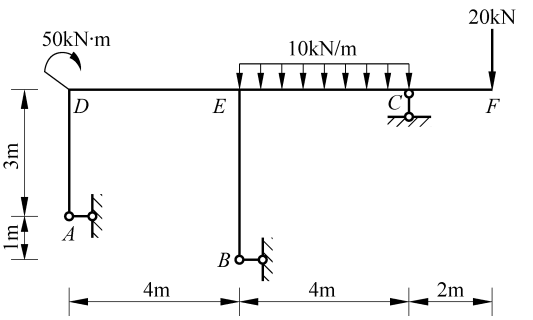

图　3.20

$M_{EC}=20\text{kN}\times 6\text{m}-60\text{kN}\times 4\text{m}+10\text{kN/m}\times 4\text{m}\times 2\text{m}=-40\text{kN}\cdot\text{m}$

$\sum M_A=0\Rightarrow F_B\times 1\text{m}+F_C\times 8\text{m}-20\text{kN}\times 10\text{m}-10\text{kN/m}\times 4\text{m}\times 6\text{m}-50\text{kN}\cdot\text{m}=0\Rightarrow F_B=10\text{kN}$

$M_{EB}=10\text{kN}\times 4\text{m}=40\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{ED}=M_{EB}+M_{EC}=40\text{kN}\cdot\text{m}+40\text{kN}\cdot\text{m}=80\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{DA}=80\text{kN}\cdot\text{m}-50\text{kN}\cdot\text{m}=30\text{kN}\cdot\text{m}$

最后绘制弯矩图，如图 3.21 所示。

【例 3-7】　试作图 3.22 所示刚架的 M 图。

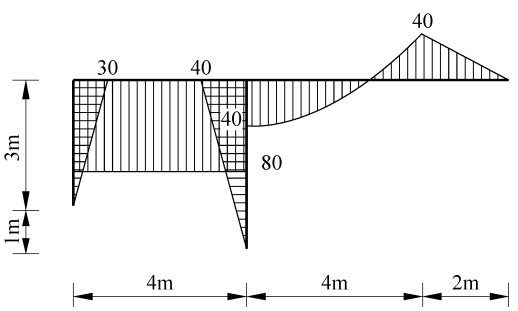

图　3.21

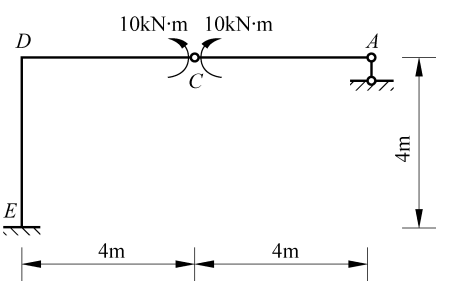

图　3.22

解：

$\sum M_C=0\Rightarrow F_A\times 4\text{m}-10\text{kN}\cdot\text{m}=0\Rightarrow F_A=2.5\text{kN}$

$M_D=F_A\times 8\text{m}=20\text{kN}\cdot\text{m}$

由于 DE 段无外力作用，故弯矩为 20kN·m。

受力分析如图 3.23 所示，弯矩图如图 3.24 所示。

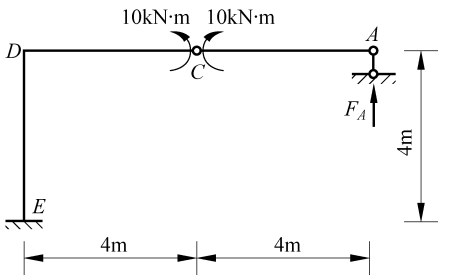

图 3.23

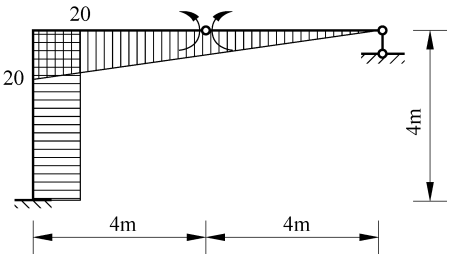

图 3.24

专业词汇

静定结构(statically determinate structure)；梁(beam)；梁式结构(beam-type structure)；跨度(span)；简支梁(simple supported beam)；悬臂梁(cantilever beam)；外伸梁(overhanging beam)；斜梁(skew beam)；内力(internal force)；剪力(shear force)；弯矩(bending moment)；内力图(internal force diagram)；叠加法(superposition method)；静定多跨梁(statically determinate multi-span beam)；基本部分(basic portion)；附属部分(accessory part)；层次图(laminar superposition diagram)；刚节点(rigid joint)；刚架(frame)；静定平面刚架(statically determinate plane frame)；简支刚架(simple supported frame)；悬臂刚架(cantilever frame)；三铰刚架(three-hinged frame)。

专项训练

一、填空题(每题 5 分,共计 25 分)

1. 静定结构的静力特征是：可用_____求出全部反力和内力；几何特征是：结构为不变体系；且无_____联系。

2. 图 3.25 所示梁中,BC 段的剪力为_____,DE 段的弯矩为_____。