第 3 章　树

3.1　树的有关定义

给定一个图 $G=(V，E)$，如果它不含任何回路，我们就称它是林；如果 G 又是连通的，即这个林只有一个连通支，就称它是树。树是图论中最重要的概念之一，在自然科学和社会科学的许多领域都有广泛的应用。

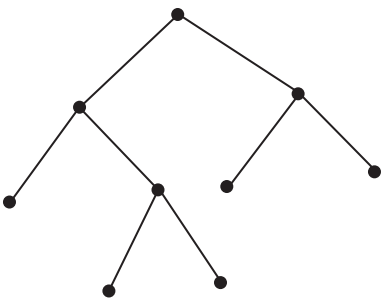


图　3.1

例 3.1.1　网球单打比赛前，当抽签之后为说明各选手间的相遇情况，往往画一张图，如图 3.1所示。它是一棵树。

例 3.1.2　中子轰击原子核时产生的裂变过程，也可以形象地用图 3.2 示意，它也是一棵树。

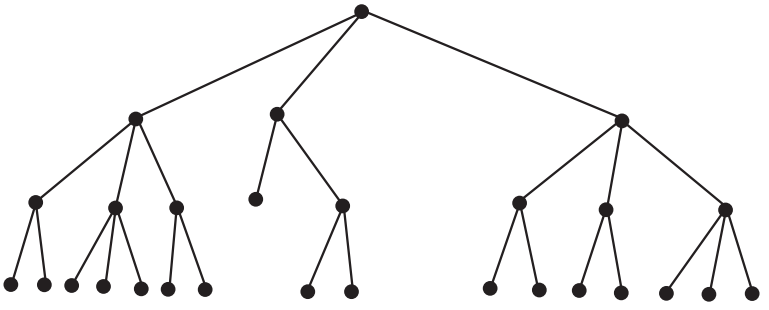


图　3.2

定义 3.1.1　一个不含任何回路的连通图称为**树**，用 T 表示。T 中的边称为**树枝**，度为 1 的顶点称为**树叶**。

对于树，如果去掉一条边，该边原来所在的图就会被分成不连通的两部分，所以树的每条边都是割边。

定理 3.1.1　$e=(u，v)$ 是割边，当且仅当 e 不属于 G 的任何回路。

证明：先证明必要性，再证明充分性，采用反证法进行证明。

若 $e=(u，v)$ 属于 G 的某个回路，则 $G'=G-e$ 中仍存在 u 到 v 的道路，故顶点 u 和 v 属于同一连通支，e 不是割边；反之，若 e 不是割边，则 G' 与 G 的连通支数一样。于是 u 和 v 仍属于同一连通支，故 G' 中存在道路 $P(u，v)$，$P(u，v)+e$ 就是 G 的一个回路。

下面给出树的等价定义。

定理 3.1.2 设 T 是顶点数为 $n \geqslant 2$ 的树，则下列性质等价。

(1) T 连通且无回路。

(2) T 连通且每条边都是割边。

(3) T 连通且有 $n-1$ 条边。

(4) T 有 $n-1$ 条边且无回路。

(5) T 的任意两顶点间有唯一道路。

(6) T 无回路，但在任两顶点间加上一条边后恰有一个回路。

证明：

(1) → (2)　T 无回路，即 T 的任意边 e 都不属于回路，由定理 3.1.1，e 是割边。

(2) → (3)　对顶点数 n 进行归纳。令 $n(T)$、$m(T)$ 分别表示树 T 的顶点数与边数。当 $n=2$ 时命题成立，设 $n \leqslant k$ 时，$m(T)=n(T)-1$ 成立。则 $n=k+1$ 时，由于任一边 e 都是割边，故 $G'=G-e$ 有两个连通支 T_1 和 T_2。由于 $n(T_i) \leqslant k$，$i=1$，2，故 $m(T_i)=n(T_i)-1$。所以 $m(T)=n(T)-1$ 也成立。

(3) → (4)　假定 T 有回路，设 C 是其中一条含有 $k(<n)$ 个顶点的初级回路。因为 T 连通，所以 $V(T)-V(C)$ 中一定有顶点 u 与 C 上某点 v 相邻，即存在边 $(u, v) \in E(T)$，以此类推，最终 $V(T)-V(C)$ 中的 $n-k$ 个顶点需要 $n-k$ 条边才可能保持 T 连通，但 $|E(T)-E(C)|=n-1-k<n-k$。矛盾。

(4) → (5)　设 u、v 是 T 的任意两顶点，先证道路 $P(u, v)$ 的存在性：如果不存在 $P(u, v)$，则 u、v 属于不同连通支 T_1 和 T_2。由 $m(T)=n-1$，则至少有一个支，例如 T_1，使 $n(T_1) \leqslant m(T_1)$ 成立。这样 T_1 则有回路，亦即 T 中有回路。反之，若 T 无回路，则因为各连通支都有 $m(T_i) \leqslant n(T_i)-1$，从而使 $m(T)<n-1$。均产生矛盾，因此 $P(u, v)$ 一定存在。再证唯一性：若存在两条不同的道路 $P(u, v)$ 和 $P'(u, v)$，则其对称差 $P(u, v) \oplus P'(u, v)$ 至少含有一个回路。故而得证。

(5) → (6)，(6) → (1)　均显然。因此等价定理得证。

定理 3.1.2 对判断和构造树 T 将带来很大方便。

> ☞**启发与思考**
>
> 在这 6 条树的性质中，最常用的 3 条性质是连通、无回路、$n-1$ 条边（顶数比边数多 1）。若图 T 满足其中任意两条，就可以判定 T 是树（定理中的等价条件 (1)、(3)、(4)）。

定理 3.1.3 树 T 中一定存在树叶顶点。

证明：（反证法）

由于 T 是连通图，所以任一顶点 $v_i \in V(T)$，都有 $d(v_i) \geqslant 1$。若无树叶，则 $d(v_i) \geqslant 2$。根据树的性质 (3)，T 连通且有 $n-1$ 条边，这样 $n-1=m=\dfrac{1}{2}\sum d(v_i) \geqslant n$。矛盾。

定义 3.1.2　如果 T 是图 G 的支撑子图，而且又是一棵树，则称 T 是 G 的一棵支撑树，或称生成树，又简称为 G 的树。

例如图 3.3 的粗线边构成了 G 的一棵支撑树 T。显然 G 有支撑树的充要条件为 G 是连通图，而且如果连通图 G 本身不是树，那么它的支撑树不唯一，例如图 3.3 中还有许多不同的支撑树。给定图 G 的一棵树 T，我们称 $G-T$，即 G 删去 T 中各边后的子图为 T 的余树，用 $\overline{T}$ 表示。例如在图 3.3 中，$E(\overline{T})=\{e_2,\ e_6,\ e_8,\ e_9,\ e_{10}\}$。一般情况下，余树不是一棵树。

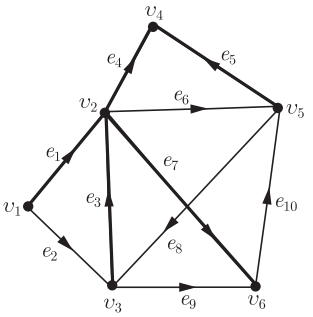


图　3.3

3.2　基本关联矩阵及其性质

本节讨论的对象是有向连通图 G。

定义 3.2.1　在有向连通图 $G=(V,\ E)$ 的关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中划去任意顶点 v_k 所对应的行，得到一个 $(n-1)\times m$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}_k$，$\boldsymbol{B}_k$ 称为 G 的一个基本关联矩阵。

例如图 3.3 中顶点 v_6 所对应的基本关联矩阵是

$$\boldsymbol{B}_6=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10}\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{array}$$

基本关联矩阵与 G 的支撑树之间有密切联系。我们首先分析关联矩阵的性质。

定理 3.2.1　有向图 $G=(V,\ E)$ 关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}<n$。

证明：由于 $\boldsymbol{B}$ 中每列都只有 1 和 -1 两个非零元素，故 $\boldsymbol{B}$ 的任意 $n-1$ 行加到第 n 行上后，第 n 行为全零，即 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个行向量线性相关，故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}<n$。

> ☞**启发与思考**
>
> 有向连通图 G 的关联矩阵删去一行不会造成关联矩阵信息的丢失，为什么？

定理 3.2.2　设 $\boldsymbol{B}_0$ 是有向图 G 关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的任意一 k 阶子方阵，则 $\det(\boldsymbol{B}_0)$ 为 0、1 或 -1。

证明：因为 $\boldsymbol{B}_0$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的某一 k 阶子阵，显然 $\boldsymbol{B}_0$ 每列最多只有 2 个非零元。若其中某列全为零元，则 $\det(\boldsymbol{B}_0)=0$；若 $\boldsymbol{B}_0$ 每列都有 2 个非零元，显然也有 $\det(\boldsymbol{B}_0)=0$；否则 $\boldsymbol{B}_0$ 中存在只有 1 个非零元的列，按该列展开得到 $\det(\boldsymbol{B}_1)=\{\pm\det(\boldsymbol{B}_0)\}$，但 $\boldsymbol{B}_1$ 的阶为 $k-1$。以此类推，可知最终 $\det(\boldsymbol{B}_0)$ 或为 0，或为 1，或为 -1。

定理 3.2.3 设 $\boldsymbol{B}$ 是有向连通图 G 的关联矩阵，则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=n-1$。

证明：由定理 3.2.1 知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}<n$，现只需要证明 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\geqslant n-1$。不失一般性，设 $\boldsymbol{B}$ 中最少的线性相关的行数为 l，显然 $l\leqslant n$，而且这 l 行分别与顶点 $v(i_1)$，$v(i_2)$，$\cdots$，$v(i_l)$ 相对应，因此有

$$k_1b(i_1)+k_2b(i_2)+\cdots+k_lb(i_l)=0\quad k_j\neq 0,\ j=1,2,\cdots,l \tag{3-1}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 每列只有 2 个非零元，所以在这 l 个行向量 $b(i_j)$ 中，其第 $t(t=1,2,\cdots,m)$ 个分量最多只有 2 个非零元。当然也可能全为 0。但是可以断言：不可能只有 1 个非零元。否则，由于 $k_i\neq 0$，式 (3-1) 不会成立。这样可以对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别进行行、列交换，使前 l 行是线性相关的诸行；这在 l 行中每列都有 2 个非零元换到前 r 列，其余 $m-r$ 列全都是零元。这样矩阵 $\boldsymbol{B}$ 变换为

$$\boldsymbol{B}'=\begin{matrix}\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}\\ r\quad m-r\end{matrix}\begin{matrix}l\\ n-l\end{matrix}$$

但 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}'=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，而且 $\boldsymbol{B}'$ 依然是 G 的一个关联矩阵，与 $\boldsymbol{B}$ 相比只是顶点与边的编号不同而已。若 $n-l>0$，由 $\boldsymbol{B}'$ 可见，G 至少分为 2 个连通支：其中 r 条边只与 l 个顶点相关，而其余 $m-r$ 条边只与另外 $n-l$ 个顶点相关。这与 G 是连通图矛盾。因此，一定有 $n-l=0$，即 $l=n$，也就是说 $\boldsymbol{B}$ 中最少需要 n 行才能线性相关，而任何 $n-1$ 行都将线性无关，因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\geqslant n-1$。

由此，我们立刻得到定理 3.2.4。

定理 3.2.4 连通图 G 基本关联矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 的秩 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}_k=n-1$。

推论 3.2.1 n 个顶点树 T 的基本关联矩阵的秩是 $n-1$。

树是包含边数最少的连通图。对于连通图 G，显然满足 $m\geqslant n-1$。既然连通图基本关联矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 的秩是 $n-1$，那么 $\boldsymbol{B}_k$ 中一定存在 $n-1$ 个线性无关的列，究竟哪些列会是线性无关的，哪些列又必定线性相关呢?

定理 3.2.5 设 $\boldsymbol{B}_k$ 是连通图 G 的基本关联矩阵，C 是 G 中的一个回路，则 C 中各边所对应 $\boldsymbol{B}_k$ 的各列线性相关。

证明：只需要针对 C 是初级回路进行讨论，设 C 包含了 G 的 l 个顶点和 l 条边 (不妨 $l<n$)，这 l 条边对应关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 l 列，它们构成 $\boldsymbol{B}$ 的子阵 $\boldsymbol{B}(G_c)$。由于 C 本身也是连通图，所以 $\boldsymbol{B}(C)$ 是 l 阶方阵，而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}(C)=l-1$，故 $\boldsymbol{B}(C)$ 的 l 列线性相关，但它又是 $\boldsymbol{B}(G_c)$ 的子阵。由于 $\boldsymbol{B}(G_c)$ 对应的各边只经过回路 C 的顶点，因此 $\boldsymbol{B}(G_c)$ 中其余顶点所对应的行元素全为零。这样，$\boldsymbol{B}(G_c)$ 的 l 列仍是线性相关，显然 $\boldsymbol{B}_k(G_c)$ 的各列也线性相关。

推论 3.2.2 设 H 是连通图 G 的子图，如果 H 含有回路，则 H 的各边对应的 G 的基本关联矩阵各列线性相关。

定理 3.2.6 令 $\boldsymbol{B}_k$ 是有向连通图 G 的基本关联矩阵，那么 $\boldsymbol{B}_k$ 的任意 $n-1$ 阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成 G 的一棵支撑树。

证明：必要性。如果某个 $n-1$ 阶子阵 $\boldsymbol{B}_k\,(G_T)$ 的行列式非零。则由推论 3.2.2，T 中不含回路，它包含 n 个顶点和 $n-1$ 条边，根据定理 3.1.2 的等价定义 (4)，T 是 G 的一棵树。充分性。设 T 是 G 的一棵树，子图 T 的基本关联矩阵 $\boldsymbol{B}_k(T)$ 是 $n-1$ 阶的方阵，其行列式非零，它又恰好对应 $\boldsymbol{B}_k$ 的某个 $n-1$ 阶子阵，即 $\boldsymbol{B}_k$ 所对应的该 $n-1$ 阶行列式非零。

定理 3.2.6 说明图 G 基本关联矩阵中行列式非零的 $n-1$ 阶子阵的数目与 G 不同的支撑树数目之间存在一种对应关系。

3.3　支撑树的计数

本节讨论连通图 G 中支撑树的数目以及根树的数目。

定理 3.3.1（Binet-Cauchy 定理）　已知两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$，满足 $m\leqslant n$，则 $\det(\boldsymbol{AB})=\sum\limits_i A_iB_i$，其中 A_i、B_i 都是 m 阶行列式，A_i 是从 $\boldsymbol{A}$ 中取不同的 m 列所成的行列式，B_i 是从 $\boldsymbol{B}$ 中取相应的 m 行构成的行列式，然后再对全部组合求和。

定理的证明从略。现举一例进行说明和验证。

例 3.3.1　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 1\\ 0 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

求 $\det(\boldsymbol{AB})$。

解：由矩阵乘法

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 28 & 17\\ 2 & 16\end{bmatrix}$$

所以 $\det(\boldsymbol{AB})$=414。由比内-柯西定理计算，

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{AB})&=\sum_i A_iB_i\\ &=\begin{vmatrix} 4 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}\\ &=414\end{aligned}$$

从例中显然可见，用比内-柯西定理计算乘积矩阵的行列式比通常的方法复杂，但该定理揭示了乘积矩阵的行列式与各矩阵的子阵行列式之间的关系，连通图 G 不同支撑树的计数恰好利用了这种关系，从而使计数问题很容易地得到解决。下面针对不同的对象分别讨论树的计数。

3.3.1 有向连通图的树计数

定理 3.3.2 设 $\boldsymbol{B}_k$ 是有向连通图 $G=(V,\ E)$ 的某一基本关联矩阵，则 G 的不同树的数目是 $\det\left(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)$。

证明：设 $\boldsymbol{B}_k=(b_{ij})_{(n-1)\times m}$，由于 G 是连通图，故 $n-1\leqslant m$，由比内–柯西定理

$$\det\left(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)=\sum_i|B_i|\left|B_i^{\mathrm{T}}\right| \tag{3-2}$$

其中 $|B_i|$ 是 $\boldsymbol{B}_k$ 的某一 $n-1$ 阶子阵的行列式，$\left|B_i^{\mathrm{T}}\right|$ 是对应的 $\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}$ 的 $n-1$ 阶子阵的行列式，由于 $\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}_k$ 的转置矩阵，所以 $\left|B_i^{\mathrm{T}}\right|$ 的第 j 行正好是 $|B_i|$ 的第 j 列，亦即 $|B_i|=\left|B_i^{\mathrm{T}}\right|$，式 (3-2) 可写成

$$\det\left(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)=\sum_i|B_i|^2 \tag{3-3}$$

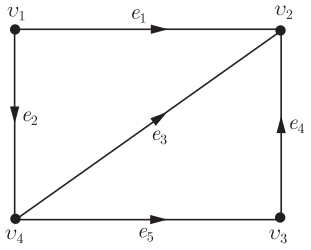


图 3.4

由定理 3.2.6，如果 $|B_i|\neq 0$，则其所对应的边构成 G 的一棵树，由定理 3.2.2，此时 $|B_i|=1$ 或 -1，因此 $|B_i|^2=1$。这说明如果 B_i 的各列所对应的边构成 G 的一棵树，则对 $\det\left(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)$ 中的贡献为 1。而式 (3-3) 是对 $|B_i|^2$ 的全部组合求和。因此 $\det\left(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)$ 恰是 G 中不同树的数目。

例 3.3.2 求图 3.4 的树的数目。

解：任取一个基本关联矩阵，例如 $\boldsymbol{B}_4$，

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\-1&0&-1&-1&0\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

所以

$$\det\left(\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{B}_4^{\mathrm{T}}\right)=\det\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&3&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}=8$$

有时根据需要，还要计算 G 中不含或必含某特定边 $e=(u,\ v)$ 的树的数目。如果不含边 e，则 $G'=G-e$ 的树就与之一一对应，因此只需计算 G' 的支撑树数目。如果必含 $e=(u,\ v)$。可以将顶点 u 和 v 收缩成一个顶点，记为 uv，得到 $n-1$ 个顶点的新图 G'，原图 G 中某点 t 如果与 u(或 v) 相邻，则在 G' 中与顶点 uv 仍相邻，且方向不变。如果 t 与 u、v 都相邻，则 G' 里 t 与 uv 之间存在 2 条有向边。这样，G' 的树就与 G 中必含 e 的树一一对应。

例 3.3.3 求图 3.4 中不含 e_4 的树数目。

解：做 $G-e_4$，得到图 3.5。

$$\det\left(\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{B}_4^{\mathrm{T}}\right)=\det\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=3$$

故 G 中不含 e_4 的树有 3 棵。

例 3.3.4　求图 3.4中必含 e_3 的树数目。

解：将顶点 v_2、v_4 收缩为 $v_{2,\,4}$，得到图 3.6。

$$\det\left(\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{B}_3^{\mathrm{T}}\right)=\det\begin{bmatrix}2&-2\\-2&4\end{bmatrix}=4$$

故 G 中必含 e_3 的树有 4 棵。

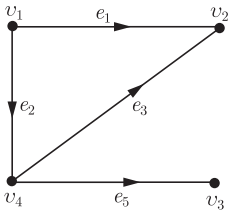


图　3.5

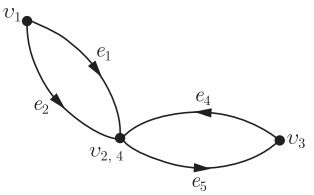


图　3.6

这 4 棵树显然分别由 $\{e_1,\ e_4\}$、$\{e_1,\ e_5\}$、$\{e_2,\ e_4\}$、$\{e_2,\ e_5\}$ 构成。返回到图 G，再分别加入 e_3 就是 G 的树。

通过上述计算不难发现，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}$ 的元素 c_{ij} 十分易求，若 $i=j$，则 $c_{ij}=d(v_i)$，即 $\boldsymbol{B}_k$ 里 v_i 所对应行中的非零元数目；若 $i\neq j$，则 $-c_{ij}$ 是图 G 中 $(v_i,\ v_j)$ 或 $(v_j,\ v_i)$ 形式的边数目。这对计算那些较难写出关联矩阵的图的树计数问题会带来方便。

3.3.2　无向连通图的树计数

无向连通图同样有其支撑树，但是它的关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中不存在 -1 元素，因此不能直接采用比内-柯西定理的方法进行树计算。对无向连通图 G 的每边任给一方向，便得到相应的有向连通图 G'，显然 G' 的树一定与 G 的树一一对应，这样无向连通图 G 的树计数问题便迎刃而解了。

例 3.3.5　求完全图 k_n 中不同树的数目。

解：对 k_n 各边任给一方向，得到有向完全图 G，设 G 中顶点 v_k 所对应的基本关联矩阵是 $\boldsymbol{B}_k$。于是可以得到

$$\det\left(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)=\det\begin{bmatrix}n-1&-1&\cdots&-1\\-1&n-1&\cdots&-1\\-1&-1&\cdots&n-1\end{bmatrix}=n^{n-2}$$

3.3.3 有向连通图 G 根树的计数

定义 3.3.1 T 是有向树，若 T 中存在某顶点 v_0 的负度为 0，其余顶点的负度为 1，则称 T 是以 v_0 为根的外向树，或称根树，用 $\vec{T}$ 表示。

例如图 3.7 就是一棵根树。树根 v_0 所对应的基本关联矩阵是

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 v_0 的负度为 0，其余顶点的负度为 1，因此任何以 v_0 为根的根树的基本关联矩阵 $\boldsymbol{B}_0$ 中一定是每行每列都只有一个 -1 元素。如果对根树的顶点和边序号重新编号，使得每条边 $e=(v_i, v_j)$ 都满足 v_i 的编号小于 v_j 的编号，同时边 $e=(v_i, v_j)$ 的编号为 e_j。例如图 3.7 的重新编号可以是图 3.8。

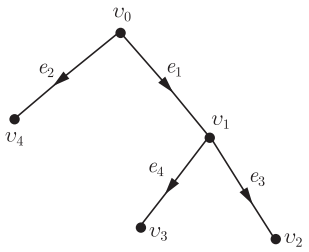


图 3.7

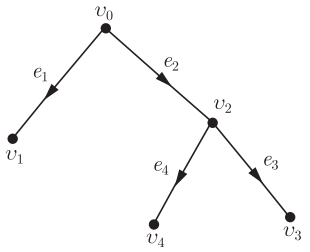


图 3.8

它的基本关联矩阵是

$$\boldsymbol{B}_0' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

事实上它只是对 $\boldsymbol{B}_0$ 的行、列分别进行若干次初等变换的结果。它们的行列式是相等的。但从 $\boldsymbol{B}_0'$ 看出，它是一个上三角方阵，-1 元全是对角元。如果把矩阵中的 1 元改为 0，它的行列式也不变。这正是根树的特征。如果 T 不是根树，它的基本关联矩阵绝不会有 $\boldsymbol{B}_0'$ 的形式。因此，如果把其中 1 元素改为 0，它的行列式将是 0。

令 $\vec{\boldsymbol{B}}_k$ 表示有向连通图 G 的基本关联矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 中将全部 1 元素改为 0 之后的矩阵。我们有定理 3.3.3。

定理 3.3.3 有向连通图 G 中以 v_k 为根的根树数目是 $\det\left(\vec{\boldsymbol{B}}_k \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)$。

证明：由比内–柯西定理

$$\det\left(\vec{\boldsymbol{B}}_k \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right) = \sum_i \left|\vec{B}_i\right| \left|B_i^{\mathrm{T}}\right|$$

若 $\left|B_i^{\mathrm{T}}\right| \neq 0$，说明这 $n-1$ 条边构成 G 的一棵树，此时如果 $\left|\vec{B}_i\right| \neq 0$，说明这棵树是以 v_k 为根的根树。这时 $\left|\vec{B}_i\right| = \left|B_i^{\mathrm{T}}\right|$，因此它们在 $\det\left(\vec{\boldsymbol{B}}_k \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)$ 中的贡献为 1，由于遍历了所有 $n-1$ 条边的组合，所以 v_k 为根的根树数目是 $\det\left(\vec{\boldsymbol{B}}_k \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\right)$。

例 3.3.6　计算图 3.9 中以 v_1 为根的根树数目。

解：v_1 所对应的基本关联矩阵是

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_1 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

所以　　$\det\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\right) = 6$

例 3.3.7　求图 3.9 以 v_1 为根不含边 e_5 的根树数目。

解：做 $G' = G - e$，则 G' 的以 v_1 为根的根树数目正是所求，于是

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4$$

计算 G 中以 v_0 为根必含某特定边 $e = (u, v)$ 的根树数目，可以先计算以 v_0 为根的根树数，再计算不含 e 的根树数，其差即是。这里再介绍另一种计算方法。由于根树的特征是任意一个非根的顶点 v_i，其负度都是 1。如果要求根树必含 $e = (u, v)$，即 $\vec{T}$ 中顶点 v 的进入边已定，因而任何其他 (t, v) 形式的边都不会在根树中出现。所以可作 $G' = G - \{(t, v) \mid t \neq u\}$，$G'$ 中以 v_0 为根的根树数目即为所求。

注意：由于无法确定被收缩边的方向，故不能使用缩点的方法。

例 3.3.8　求图 3.9 以 v_1 为根必含 e_5 的根树数目。

解：做 $G'=G-e_3-e_6$，得图 3.10。

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\right)=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}=2$$

即 G 中有 2 棵以 v_1 为根必含 e_5 的根树。

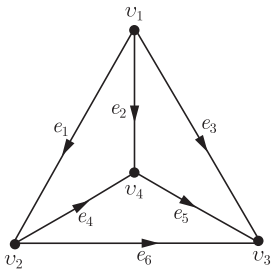


图　3.9

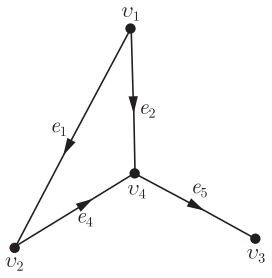


图　3.10

3.4　回路矩阵与割集矩阵

有向连通图 $G=(V,\ E)$ 的回路矩阵与割集矩阵都与 G 的支撑树有密切关系，同时在网络，特别是电路网络中有广泛的应用。

3.4.1　回路矩阵及其性质

设 T 是有向连通图 $G=(V,\ E)$ 的一棵支撑树，对任意的边 $e\in E(G)-E(T)$，$T+e$ 都构成了 G 的一个唯一回路 C，如果给回路 C 确定一个参考方向，那么该回路的边，如果其方向与回路方向一致，就称它是正向边，否则称为反向边。

定义 3.4.1　有向连通图 G 的全部初级回路构成的矩阵，称为 G 的**完全回路矩阵**，记为 $\boldsymbol{C}_e$，它的元素是

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j\in C_i \text{ 且与回路 } C_i \text{ 方向一致}\\ -1, & e_j\in C_i \text{ 且与回路 } C_i \text{ 方向相反}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 3.4.1　图 3.11的完全回路矩阵是

$$\boldsymbol{C}_e=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $k(1 \leqslant k \leqslant m-n+1)$ 条余树枝可能与 T 构成一个初级回路，因此完全回路矩阵 $\boldsymbol{C}_e$ 中最多可能包含 $2^{m-n+1}-1$ 个不同的初级回路。但是这些回路不一定都是独立的。例如例 3.4.1 中 $C_1 \oplus C_3 = C_7$。那么哪些回路是独立的呢?

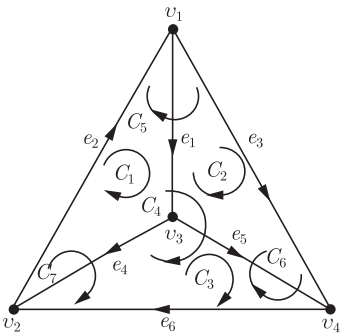


图　3.11

定义 3.4.2　当有向图 $G=(V,\ E)$ 的树 T 确定以后，每条余树边 e 所对应的回路称为**基本回路**，该回路的方向与 e 的方向一致。由全部基本回路构成的矩阵称为 G 的**基本回路矩阵**，记为 $\boldsymbol{C}_f$。

例 3.4.2　给定图 3.11的一棵树 $T=\{e_1,\ e_5,\ e_6\}$，则其基本回路矩阵是

$$\boldsymbol{C}_f=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6$$

显然基本回路矩阵中每个回路都是独立的，因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{C}_f = m-n+1$。进而，如果将 $\boldsymbol{C}_f$ 的行、列分别进行一下交换，使树枝边放在后，余树边放在前且次序与它所构成的回路一致，就可以写成分块矩阵形式，比如上例

$$\boldsymbol{C}_f=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_1 \quad e_5 \quad e_6$$

亦即

$$\boldsymbol{C}_f=\begin{pmatrix} I & \boldsymbol{C}_{f_{12}} \end{pmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{C}_{f_{12}}$ 是树枝边所对应的子阵。

定理 3.4.1　有向连通图 $G=(V,\ E)$ 的关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和完全回路矩阵 $\boldsymbol{C}_e$ 的边次序一致时，恒有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_e^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$$

证明：设 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_e^{\mathrm{T}}$，$d_{ij}=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}\cdot c_{jk}$；其中 b_{ik} 是顶点 v_i 与边 e_k 的关联状况，c_{jk} 是回路 C_j 与边 e_k 的相关情况。回路 C_j 与顶点 v_i 的相处只有两种可能。

(1) C_j 不经过 v_i，如图 3.12(a) 所示，则与 v_i 关联的任一边都不是 C_j 中的边，所以 $d_{ij}=0$。

(2) C_j 经过 v_i，如图 3.12(b) 所示，则必定经过与 v_i 关联的 2 条边 e_p 和 e_q，若 e_p 和 e_q 在 C_j 中方向一致，则对 v_i 来说它们是一进一出，因此 $d_{ij}=0$；如果 e_p 和 e_q 在 C_j 中方向相反，对 v_i 它们却是同进同出，同样 $d_{ij}=0$。

由于 d_{ij} 的任意性，故定理得证。

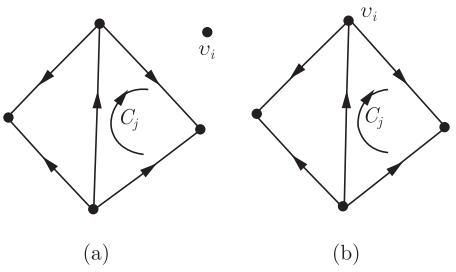


图　3.12

定理 3.4.2　有向连通图 $G=(V,\ E)$ 完全回路矩阵 $\boldsymbol{C}_e$ 的秩是 $m-n+1$。

证明：由于 $\boldsymbol{C}_f$ 是 $\boldsymbol{C}_e$ 的子阵且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{C}_f=m-n+1$，故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{C}_e\geqslant m-n+1$。现证 $\operatorname{rank}\boldsymbol{C}_e\leqslant m-n+1$，Sylvester 定理指出，两个矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times s}$ 和 $\boldsymbol{B}_{s\times m}$，如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\leqslant s$。因此，由定理 3.4.1，得到 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}+\operatorname{rank}\boldsymbol{C}_e\leqslant m$，即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{C}_e\leqslant m-n+1$。

定义 3.4.3　由连通图 G 中 $m-n+1$ 个互相独立的回路组成的矩阵，称为 G 的**回路矩阵**。记为 $\boldsymbol{C}$。

也就是说，只用 $m-n+1$ 个相互独立的回路就足以表示所有初级回路。回路矩阵在完全回路矩阵的基础上只保留其中一小部分，但仍然可以通过回路矩阵中各行的组合得到所有回路，这大大减少了完全回路矩阵的冗余信息。

> ☞ **提示**
>
> 在计算机存储与处理过程中，信息冗余是需要付出的必要成本代价，也是提升系统鲁棒性的手段。

回路矩阵 $\boldsymbol{C}$ 有以下 3 个简单性质。

(1) 基本回路矩阵 $\boldsymbol{C}_f$ 是回路矩阵。

(2) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$（其中 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的边次序一致）。

(3) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_f$，其中 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的方阵，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{C}_f$ 的边次序一致。

定理 3.4.3　连通图 G 的回路矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的任一 $m-n+1$ 阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于 G 的某一棵余树。

证明：充分性。设已知 G 的某一棵余树 $\overline{T}$，则可构造基本回路矩阵 $\boldsymbol{C}_f=(I\quad \boldsymbol{C}_{f_{12}})$，对给定的回路矩阵 $\boldsymbol{C}$ 进行列交换，使其与 $\boldsymbol{C}_f$ 的边次序一致，这样可写成块矩阵形式 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{11}\quad \boldsymbol{C}_{12})$，其中 $\boldsymbol{C}_{11}$ 对应 $\overline{T}$。由性质 (3)，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_f$，即 $(\boldsymbol{C}_{11}\quad \boldsymbol{C}_{12})=\boldsymbol{P}(I\quad \boldsymbol{C}_{f_{12}})=(\boldsymbol{P}$

$\boldsymbol{PC}_{f_{12}}$)，因此 $\boldsymbol{C}_{11}=\boldsymbol{P}$ 是非奇异的，即其行列式非零。再证必要性。将 $\boldsymbol{C}$ 的这 $m-n+1$ 列换到前面，成 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{11}\quad \boldsymbol{C}_{12})$。现只需证 $\boldsymbol{C}_{12}$ 对应 G 的一棵树。假设 $\boldsymbol{C}_{12}$ 对应的不是树，则一定含有回路，这种回路只由 $\boldsymbol{C}_{12}$ 中的某些边构成。这样经过行变换可得

$$\boldsymbol{C}'=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}'_{11} & \boldsymbol{C}'_{12}\\ 0 & \boldsymbol{C}''_{12}\end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{C}''_{12}\neq 0$。于是

$$\det(\boldsymbol{C}_{11})=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}'_{11}\\ 0\end{bmatrix}=0$$

与 $\det\boldsymbol{C}_{11}\neq 0$ 矛盾。

该定理揭示了 G 的余树与其回路矩阵之间的关系。

定理 3.4.4　若有向连通图 $G=(V,\ E)$ 的基本关联矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 和基本回路矩阵 $\boldsymbol{C}_f$ 的边次序一致，并设 $\boldsymbol{C}_f=(I\quad \boldsymbol{C}_{f12})$，$\boldsymbol{B}_k=(\boldsymbol{B}_{11}\quad \boldsymbol{B}_{12})$，则

$$\boldsymbol{C}_{f_{12}}=-\boldsymbol{B}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{12}^{-\mathrm{T}}$$

证明：由定理 3.4.1 即得 $\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{C}_f^{\mathrm{T}}=0$，写成块矩阵形式，有

$$(\boldsymbol{B}_{11}\quad \boldsymbol{B}_{12})\begin{bmatrix}I\\ \boldsymbol{C}_{f_{12}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=0$$

$$\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{C}_{f_{12}}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}_{11}$$

由于 $\boldsymbol{B}_{12}$ 对应的边构成 G 的一棵树。根据定理 3.2.6，$\boldsymbol{B}_{12}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{B}_{12}^{-1}$。由此定理得证。

本定理说明如果 $\boldsymbol{B}_k$ 已知，而且确定了一棵树，则可以直接经过计算求得 G 的基本回路矩阵 $\boldsymbol{C}_f$。

例 3.4.3　已知图 3.11 基本关联矩阵

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{matrix}$$

其中，e_1、e_5、e_6 所对应的子阵行列式非零，求 $\boldsymbol{C}_f$。

解：由 e_1、e_5、e_6 可构成 G 的一棵树。对 $\boldsymbol{B}_4$ 进行列交换，得到

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix}e_2 & e_3 & e_4 & e_1 & e_5 & e_6\end{matrix}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_{12}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{C}_{f_{12}}=-\boldsymbol{B}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{12}^{-\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{C}_f=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_1 & e_5 & e_6\end{matrix}$$

3.4.2 割集矩阵及其性质

定义 3.4.4 设 S 是有向图 $G=(V,\ E)$ 的边子集，若

(1) $G'=(V,\ E-S)$ 比 G 的连通支数多 1。

(2) 对任意 $S'\subset S$，G 与 $G''=(V,\ E-S')$ 的连通支数相同。则称 S 是 G 的一个**割集**。

一般给割集 S 确定一个方向，称它是**有向割集**。这样 S 中的每条边 e，或者与 S 方向一致，或者方向相反。

例 3.4.4 图 3.13 中，$S_1=\{e_2,\ e_3,\ e_4\}$，$S_2=\{e_4,\ e_5\}$ 是割集，而 $S_3=\{e_6,\ e_7\}$ 不是割集。在 S_1 中，e_2 与 S_1 方向相同，而 e_3 与 e_4 方向相反。

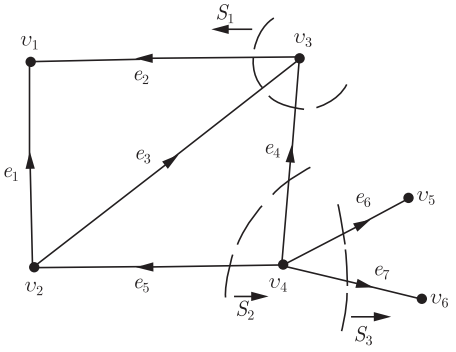


图 3.13

定义 3.4.5 有向连通图 G 的全部割集组成的矩阵，称为**完全割集矩阵**，记作 $\boldsymbol{S}_e$。其元素

$$S_{ij}=\begin{cases}1, & e_j \text{ 在}S_i \text{ 中且方向一致}\\ -1, & e_j \text{ 在}S_i \text{ 中且方向相反}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 3.4.5　图 3.14 的完全割集矩阵是

$$\boldsymbol{S}_e=\begin{bmatrix}1&-1&1&0&0&0\\-1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&-1&0&-1&-1\\-1&1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\\\\\\\\ e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\end{matrix}$$

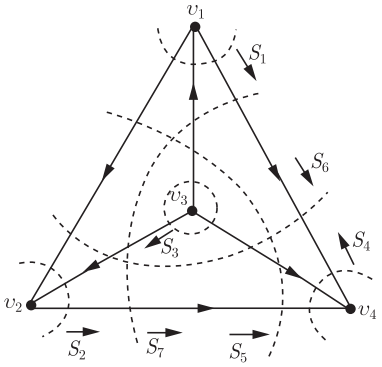


图　3.14

由于割集将连通图的顶点划分成连通的两部分，其顶点数分别为 i，$n-i$，$1\leqslant i\leqslant n-1$。因此 G 最多有 $\dfrac{1}{2}(2^n-2)=2^{n-1}-1$ 个不同的割集。但这些割集不一定都是独立的，例如上例中 $S_7=S_1\oplus S_2$。

定义 3.4.6　设 T 是连通图 G 的一棵树，e_i 是一个树枝。对应 e_i 存在 G 的割集 S_i，S_i 只包括一条树枝边 e_i 及某些余树枝，且与 e_i 的方向一致。这时称 S_i 为 G 的对应树 T 的一个基本割集。

定义 3.4.7　给定有向连通图 G 的一棵树 T，则由全部基本割集组成的矩阵称为**基本割集矩阵**。记为 $\boldsymbol{S}_f$。

例 3.4.6　$T=\{e_2,\ e_3,\ e_4\}$ 是图 3.14的一棵树，其基本割集矩阵是

$$\boldsymbol{S}_f=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1\\1&0&0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\ e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\end{matrix}$$

在基本割集矩阵中如果把余树边对应的列放在前，树枝边对应的列放在后且与割集次序一致，例如上例中

$$\boldsymbol{S}_f=\begin{bmatrix}-1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&-1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\ e_1&e_5&e_6&e_2&e_3&e_4\end{matrix}$$

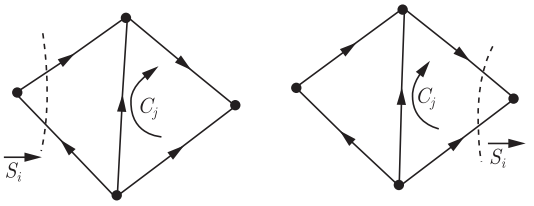
则基本割集矩阵可写成分块矩阵形式 $\boldsymbol{S}_f = (\boldsymbol{S}_{f_{11}} \quad I)$，其中单位矩阵对应一棵树。显然 $\operatorname{rank} \boldsymbol{S}_f = n-1$。

定理 3.4.5 当有向连通图 G 的完全回路矩阵 $\boldsymbol{C}_e$ 和完全割集矩阵 $\boldsymbol{S}_e$ 的边次序一致时，有 $\boldsymbol{S}_e\boldsymbol{C}_e^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$。

证明：设 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}_e\boldsymbol{C}_e^{\mathrm{T}}$，$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} s_{ik} \cdot c_{jk}$。其中，$s_{ik}$ 是第 i 个割集的第 k 条边，c_{jk} 是第 j 个回路的第 k 条边。割集 S_i 与回路 C_j 的相处只有两种。

(1) S_i 与 C_j 不相交，即 C_j 中的边在 S_i 中不出现，自然 $d_{ij} = 0$。

(2) S_i 与 C_j 相交，显然它们有偶数条共同的边，如图 3.15(b) 所示，其中相邻两条边 e_p 和 e_q 组成一对，如果它们在 S_i 中方向一致，则在 C_j 中方向相反，反之亦然。因此，$d_{ij} = 0$。



(a) (b)

图 3.15

由 d_{ij} 的任意性，定理得证。

定理 3.4.6 连通图 G 的完全割集矩阵 $\boldsymbol{S}_e$ 的秩是 $n-1$。

证明：由于 $\boldsymbol{S}_f$ 是 $\boldsymbol{S}_e$ 的子矩阵，而 $\operatorname{rank} \boldsymbol{S}_f = n-1$，因此 $\operatorname{rank} \boldsymbol{S}_e \geqslant n-1$。又由定理 3.4.5，$\boldsymbol{S}_e\boldsymbol{C}_e^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$，根据 Sylvester 定理，$\operatorname{rank} \boldsymbol{S}_e + \operatorname{rank} \boldsymbol{C}_e \leqslant m$，故 $\operatorname{rank} \boldsymbol{S}_e \leqslant n-1$。因此，$\operatorname{rank} \boldsymbol{S}_e = n-1$。

定义 3.4.8 连通图 G 的 $n-1$ 个互相独立的割集构成的矩阵称为 G 的**割集矩阵**。记为 $\boldsymbol{S}$。

割集矩阵 $\boldsymbol{S}$ 有以下简单性质。

(1) 基本割集矩阵 $\boldsymbol{S}_f$ 是割集矩阵。

(2) $\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的边次序一致。

(3) $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_f$，其中 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异方阵，$\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{S}_f$ 的边次序一致。

定理 3.4.7 连通图 $G = (V, E)$ 的割集矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的任一 $n-1$ 阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于 G 的某棵树。

证明：充分性。设已知 G 的某棵树 T，则可构造基本割集矩阵 $\boldsymbol{S}_f = (\boldsymbol{S}_{f_{11}} \quad I)$。对给定的割集矩阵 $\boldsymbol{S}$ 进行列交换，使其与 $\boldsymbol{S}_f$ 的边次序一致，于是可写成分块矩阵形式 $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{S}_{11} \quad \boldsymbol{S}_{12})$，其中 $\boldsymbol{S}_{12}$ 对应树 T。由性质 (3)，$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_f$，即 $(\boldsymbol{S}_{11} \quad \boldsymbol{S}_{12}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_{f_{11}} \quad \boldsymbol{I}) = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_{f_{11}} \quad \boldsymbol{P})$。因此，$\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{P}$，是非奇异的，即其行列式非零。必要性。调整 $\boldsymbol{S}$ 的这 $n-1$

列构成 $\boldsymbol{S}_{12}$，使 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_{11}\ \ \boldsymbol{S}_{12})$。假定 $\boldsymbol{S}_{12}$ 的各列对应的不是树，则一定含有 $l(<n)$ 条边的初级回路 $\boldsymbol{C}$。由于 $\boldsymbol{C}$ 是 G 的连通子图，因此 $\boldsymbol{C}$ 的割集矩阵的秩是 $l-1$，亦即 $\boldsymbol{S}_{12}$ 对应的这 l 列线性相关，故 $|\boldsymbol{S}_{12}|=0$，矛盾。

定理 3.4.8　设 $\boldsymbol{S}_f$ 和 $\boldsymbol{C}_f$ 分别是连通图 G 中关于某棵树 T 的基本割集矩阵和基本回路矩阵，且边次序一致。并设 $\boldsymbol{S}_f=(\boldsymbol{S}_{f_{11}}\ \ \boldsymbol{I})$，$\boldsymbol{C}_f=(\boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{C}_{f_{12}})$，则 $\boldsymbol{S}_{f_{11}}=-\boldsymbol{C}_{f_{12}}^{\mathrm{T}}$。

证明：由定理 3.4.5，有

$$\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{C}_f^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{S}_{f_{11}}\quad I)\begin{bmatrix} I \\ \boldsymbol{C}_{f_{12}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

故得证。

推论 3.4.1　当连通图 G 的基本割集矩阵与基本关联矩阵的边次序一致时，有

$$\boldsymbol{S}_{f_{11}}=\boldsymbol{B}_{12}^{-1}\boldsymbol{B}_{11}$$

例 3.4.7　已知图 3.15的基本关联矩阵

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$e_1\quad e_2\quad e_3\quad e_4\quad e_5\quad e_6$$

其中，$\{e_2,\ e_3,\ e_4\}$ 构成 G 的树，求对应的基本割集矩阵。

解：对 $\boldsymbol{B}_1$ 的列重新调整如下：

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$e_1\quad e_5\quad e_6\quad e_2\quad e_3\quad e_4$$

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_{12}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{S}_f=(\boldsymbol{B}_{12}^{-1}\boldsymbol{B}_{11}\quad I)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$e_1\quad e_5\quad e_6\quad e_2\quad e_3\quad e_4$$

3.5 Huffman 树

首先介绍最优二叉树。

定义 3.5.1 除树叶外，其余顶点的正度最多为 2 的外向树称为**二叉树**。如果它们的正度都是 2，称为**完全二叉树**。

例如图 3.16 是一棵完全二叉树，v_0 是根，每条有向边的方向都是朝下的。如果二叉树 T 的每个树叶顶点 v_i 都分别赋以一个正实数 w_i，则称 T 是赋权二叉树。从根到树叶 v_i 的路径 $P(v_0, v_i)$ 所包含的边数计为该路径的长度 l_i，这样二叉树 T 带权的路径总长是

$$\mathrm{WPL} = \sum_i l_i w_i，\ v_i\text{是树叶}$$

反过来，如果给定了树叶数目以及它们的权值，可以构造许多不同的赋权二叉树。在这些赋权二叉树中，必定存在路径总长最小的二叉树，这样的树称为最优二叉树。

例 3.5.1 已知英文字符串 adacatedecade。试用二进制字符串代替某个字母，并保证该英文字符串与二进制串构成一一对应。

解：该字符串中有字母 a、d、e、c、t，它们分别出现 4、3、3、2、1 次。令每个字母对应二叉树的一个树叶，根到树叶的路径是唯一的，而且这条路径绝不会是根到另一个树叶路径的一部分。这样根到树叶的路径与该字母构成一一对应。如果在树 T 中令向左的边为 0，向右的边为 1。那么这些路径又与二进制串构成了一一对应。

例如令 d、a、e、c、t 分别对应图 3.16中的 v_3、v_5、v_6、v_7、v_8，则 d ← 00，a ← 010，e ← 011，c ← 10，t ← 11。该英文字符串对应 01000010100101101100011100100011。

如果字母与树叶的对应情况如图 3.17所示，即 a ← 00，t ← 010，c ← 011，e ← 10，d ← 11，则对应字符串是 00110001100010101110011001110。这两种情况下字符串的总长分别是 33 和 29。

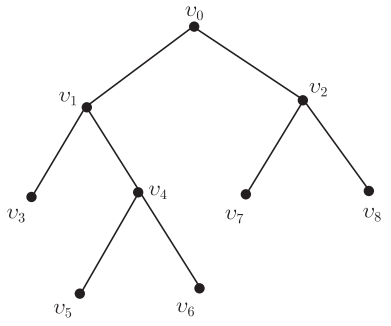


图 3.16

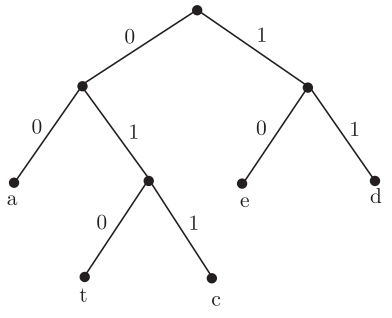


图 3.17

给定了 n 个树叶的权值，如何构造带权路径总长最短的最优二叉树呢？哈夫曼给出了一个算法。由该算法得到的二叉树称为 Huffman 树。

算法描述如下。

a. 对 $n(\geqslant 2)$ 个权值进行排序，满足

$$w_{i_1} \leqslant w_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant w_{i_n}$$

b. 计算 $w_i = w_{i_1} + w_{i_2}$ 作为中间顶点 v_i 的权，v_i 的左儿子是 v_{i_1}，右儿子是 v_{i_2}。在权序列中删去 w_{i_1} 和 w_{i_2}，加入 w_i，$n \leftarrow n-1$。若 $n=1$，结束；否则转 a。

例 3.5.2　权序列为 (4，3，3，2，1) 的 Huffman 树的构造过程如图 3.18所示。

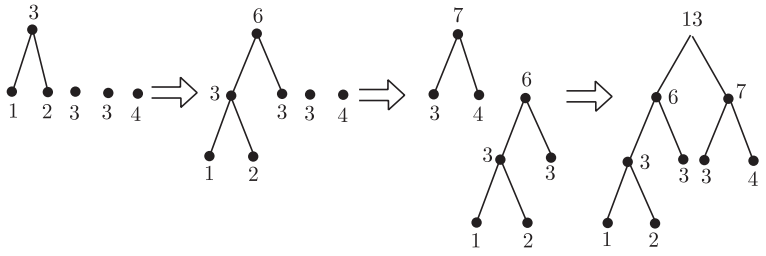


图　3.18

算法的计算复杂性主要取决于步骤 a，而且是 n 个权值的第一次排序，它一般需进行 $n\log n$ 次比较。之后每当产生 w_i 时，只需在新序列中进行插入运算，其复杂性是 $\log n$，由于总共只进行 $n-2$ 次迭代，因此整个算法的计算复杂性是 $O(n\log n)$。

定理 3.5.1　由 Huffman 算法得到的二叉树是最优二叉树。

证明：假定 $n \geqslant 3$，$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_n$，并设 T 是最优树，则一定有 $l_1 = \max\limits_i \{l_i\}$；否则，若 $w_k > w_1$ 而 $l_k < l_1$。那么将 w_k 与 w_1 对调得到 T'。有 $\mathrm{WPL}(T') - \mathrm{WPL}(T) < 0$，与 T 最优矛盾。于是可得到结论：只要 T 是最优树，w_1 就一定离根最远。同时立即可知，w_1 必有兄弟。否则让 w_1 赋值给该树叶的父亲顶点，就可得到路径总长更小的树。由于 w_2 是序列中次最小的权，故可令 w_1 的兄弟是 w_2。因此，分枝 w_1+w_2 (见图 3.19) 可以是最优树 T 的子图。

设 T_n 是 n 个树叶的最优树，收缩分枝 w_1+w_2 后是对应的 $n-1$ 个树叶的 T'_{n-1}，如图 3.20 所示。

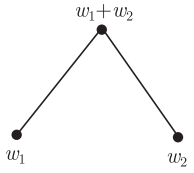


图　3.19

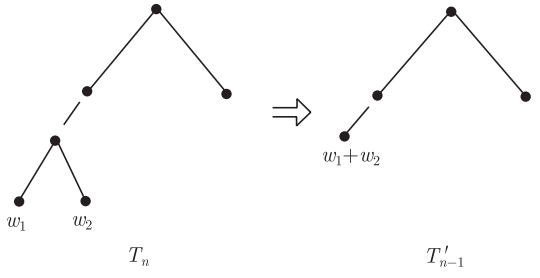


图　3.20

在 $n-1$ 个权 (其中之一是 w_1+w_2) 时，亦有其最优二叉树 T_{n-1}，然后将 w_1+w_2 分枝展开后又得到有 n 个权的二叉树 T'_n，如图 3.21所示。

因为 T_n 和 T_{n-1} 分别是最优树，所以 $\mathrm{WPL}(T_n) \leqslant \mathrm{WPL}(T'_n)$，$\mathrm{WPL}(T_{n-1}) \leqslant \mathrm{WPL}(T'_{n-1})$。由于

$$\mathrm{WPL}(T'_{n-1}) = \mathrm{WPL}(T_n) - (w_1 + w_2)$$

$$\mathrm{WPL}(T_{n-1}) = \mathrm{WPL}(T'_n) - (w_1 + w_2)$$

可得 $\mathrm{WPL}(T'_{n-1}) \leqslant \mathrm{WPL}(T_{n-1})$。亦即 T'_{n-1} 和 T'_n 都是最优树。

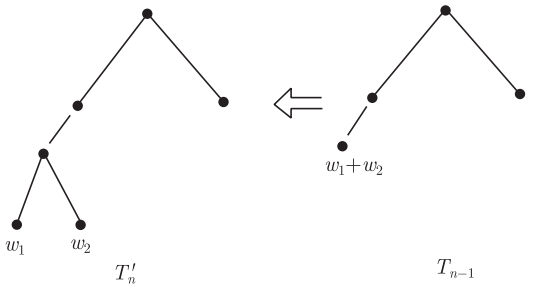


图　3.21

当算法执行到 $n = 2$ 时，自然是一棵最优树。再与分枝收缩的过程相反进行展开，最后得到的 T'_n 一定是最优二叉树。

3.6　最　短　树

在赋权连通图中，有时需要计算其总长最小或最大的支撑树。这就是最短树和最长树问题。例如要在若干加油站之间铺设输油管道，已知任意两个加油站之间输油管道的铺设费用，如果让每个站都能保证油的供应，那么最少的建造费用就应该是计算它的最短树。

以下介绍关于赋权连通图 G 最短树的两个好算法：Kruskal 算法和 Prim 算法。

3.6.1　Kruskal 算法

Kruskal 算法的描述如下。

1. $T \leftarrow \Phi$
2. while $|T| \leqslant n-1$ 且 $E \neq \Phi$ do
   begin
3. 　　$e \leftarrow E$ 中最短边
4. 　　$E \leftarrow E - e$
5. 　　若 $T + e$ 无回路，则 $T \leftarrow T + e$
   end
6. 若 $|T| < n-1$ 打印“非连通”，否则输出最短树

该算法的思路是不断往 T 中加入当前的最短边 e，如果增加这条边会构成回路，则无法构成树，删之，直至最后达到 $n-1$ 条边为止。这时 T 中不包含任何回路，因此是树。