

第5章

选 填 综 合

综合1 双纽线

例题1 曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 所围成的区域的面积为 $f(a)$, 当 $a \rightarrow 0^+$ 时, 与 $f(a)$ 等价的无穷小为().

A. $-2\ln(\cos a)$

B. $\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a} - 2$

C. $(1+a)^{\frac{1}{a}} - e$

D. $\int_0^{a^2} \sin \sqrt{x} dx$

答案 A

解 区域边界的极坐标方程为 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. 由 $\cos 2\theta \geq 0$, 得 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$. $f(a) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2$, 故选 A.

选项 B 等价于 $-\frac{a^2}{4}$, 选项 C 等价于 $-\frac{ea}{2}$, 选项 D 等价于 $\frac{2a^3}{3}$.

综合2 导函数的极值与拐点

例题1 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(\frac{x+t}{x-t} \right)^x$, 则 $f'(t)$ 的极值为_____, 拐点为_____.

答案 $-\frac{1}{e^2}, \left(-\frac{3}{2}, -\frac{2}{e^3}\right)$

解 将函数式变形, 有 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(\frac{x+t}{x-t} \right)^x = t \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2t}{x-t} \right)^{\frac{x-t}{2t} \cdot \frac{2tx}{x-t}} = te^{2t}$, 故 $g = f'(t) = e^{2t}(2t+1)$, $g' = f'' = e^{2t}(4t+4)$, $g'' = f''' = 4e^{2t}(2t+3)$, 驻点为 $t = -1$, $f'(t)$ 的极值为 $-\frac{1}{e^2}$, 拐点为 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{2}{e^3}\right)$.

综合3 导数定义

例题1 设 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 的邻域内一阶导连续, 且 $f(0)=1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2xf(x)}{x^2} = 0$,

$f'(0)=f'(1)$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[(3+2\sin x)^x] - f(3^x)}{\tan^2 x} =$ _____.

答案 $-\frac{2}{3}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2xf(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x - 2x[f(x) - f(0)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} - 2 \frac{f(x) - f(0)}{x} \right] = 0$,

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} \stackrel{t=2x}{=} 4 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = 4 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t} - 1}{2t} = -2$, 所以 $f'(0) =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$.

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) [(3+2\sin x)^x - 3^x]}{\tan^2 x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+2\sin x)^x - 3^x}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} 3^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{2}{3} \sin x\right)^x - 1}{x^2} =$

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1 + \frac{2}{3} \sin x)} - 1}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + \frac{2}{3} \sin x)}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} \sin x}{x} = -\frac{2}{3}.$$

综合4 无界量与无穷大

例题1 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 \sin \frac{x}{n}}{n^2 + 1} + \frac{2x^2 \sin \frac{2x}{n}}{n^2 + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{nx^2 \sin x}{n^2 + \frac{1}{n}} \right)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 为()

- A. 无穷小量 B. 无穷大量 C. 无界量 D. 有界量

答案 C

解 根据定积分定义, 有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 \sin \frac{x}{n}}{n^2 + 1} + \frac{2x^2 \sin \frac{2x}{n}}{n^2 + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{nx^2 \sin x}{n^2 + \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{ix}{n} \sin \frac{ix}{n}}{1 + \frac{1}{n^2 i}} \cdot \frac{x}{n} \quad (\text{定积分定义} + \text{夹逼定理})$$

$$= \int_0^x t \sin t \, dt = -x \cos x + \sin x, \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } -\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \text{ 是无界量. 故选 C.}$$

综合5 高阶导数

例题1 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 x^a 是同阶无穷小, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -2 \\ 1-b & -1 & b-1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$,

可相似于对角矩阵, 设 $g(x) = \arctan x - \frac{x}{1+cx^2}$, $g'''(0) = b$, 则 $c = ()$ 。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. 1

答案 A

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 为三阶无穷小, 所以 $a = 3$ 。矩阵 A 的特征方程为 $|A - \lambda E| =$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 1-b & -1-\lambda & b-1 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^2. \text{ 考查重根时特征向量的个数, } A + E =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1-b & 0 & b-1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1-b & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 当 } b=1 \text{ 时, 有 } r(A+E)=1, \text{ 此时矩阵 } A \text{ 能对角化, 否则不能}$$

对角化。所以, $g'''(0) = 1$ 。 $g(x) = \arctan x - \frac{x}{1+cx^2} = \left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right) - x(1 - cx^2 + \cdots) = \left(c - \frac{1}{3}\right)x^3 + \cdots$ 。

由高阶导数与系数的关系可得 $c - \frac{1}{3} = \frac{g'''(0)}{3!} = \frac{1}{6} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ 。 故选 A。

综合6 常系数解的有界性与周期性

例题1 设二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + by' + ay = 0$ 。

(1) 若 $a=1$, 且方程的每一个解 $y(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有界, 则 b 的范围是()。

A. $[0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-\infty, 4]$ D. $(-\infty, +\infty)$

(2) 若方程的每一个解 $y(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 为周期函数, 则 a, b 应满足()。

A. $a>0, b=0$ B. $a<0, b>0$ C. $a>0, b>0$ D. $a=0, b>0$

(3) 若 a, b 非零, 且方程的每一个解 $y=f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有界, $f(0)=m, f'(0)=n$, 则反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx =$ _____。

答案 (1) A (2) A (3) $\frac{bm+n}{a}$

解 (1) 特征方程为 $\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$, 判别式为 $\Delta = b^2 - 4$, 特征根为 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$ 。

① 当 $b^2 - 4 > 0$, 即 $b > 2$ 或 $b < -2$ 时, $y(x) = C_1 e^{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}x}$, 要使 $y(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 只需要 $-b \pm \sqrt{b^2 - 4} < 0$, 即 $b > 2$ 。

② 当 $b^2 - 4 < 0$, 即 $-2 < b < 2$ 时, 要使 $y(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 只需要 $-b \pm \sqrt{b^2 - 4}$ 的实部小于或等于 0, 即 $-b \leq 0 \Rightarrow b \geq 0$, 此时 $0 \leq b < 2$ 。

③ 当 $b=2$ 时, $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有界。

④ 当 $b=-2$ 时, $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上无界。

综上所述, 当且仅当 $b \geq 0$ 时, $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 故选 A。

(2) 微分方程对应的特征方程为 $r^2 + br + a = 0$, 由题意可知, 方程的特征根为虚根, 所以 $a > 0, b = 0$ 。故选 A。

(3) 设对应的特征方程为 $r^2 + br + a = 0$, 特征根为 r_1, r_2 。题干中要求 a, b 非零, 所以特征根 $r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2} \neq 0$, 故函数 $y(x)$ 不可能为常数或一次函数。同时, 特征根也不可能为纯虚数 ($r = \pm \beta i$), 因为此时要求特征根 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$ 中的 $b = 0$, 与题干矛盾。故函数形式不可能为 $y(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$ 。

所以函数 $y(x)$ 的形式只能如下:

① 若特征根为非零实数, 且 $r_1 \neq r_2$, 则 $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$,

② 若特征根为非零实数, 且 $r_1 = r_2 = r$, 则 $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$,

③ 若特征根为复数且实部不为零, 即 $r = \alpha \pm \beta i (\alpha \neq 0)$, 则 $y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ 。

综上, $y(x)$ 中必含指数部分 e^{rx} 或 $e^{\alpha x}$ 。又因为 $y(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有界, 则必有 $y(x)$ 指数部分 e^{rx} 或 $e^{\alpha x}$ 中 $r < 0$ 或 $\alpha < 0$ 。此时必有 $y(+\infty) = 0$, 也易知 $y'(+\infty) = 0$ 。

所以, $\int_0^{+\infty} y dx = -\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} by' + y'' dx = -\frac{1}{a} (by + y') \Big|_0^{+\infty} = \frac{-1}{a} [by(+\infty) + y'(+\infty)] - \frac{-1}{a} [by(0) + y'(0)] = \frac{1}{a} [by(0) + y'(0)] = \frac{bm+n}{a}$ 。

综合7 定积分包装

孝哥说明: 此类考题以定积分为外形, 融合了其他知识点考法。

例题 1 设函数 $f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$, 则函数 $f(a, b)$ 在 $a^2 + b^2 = 1$ 围成的封闭区域内的最大值与最小值之和为 _____。

答案 $\frac{4}{3}\pi^3 + 2\pi$

解 $f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3 + \pi(a^2 + b^2) - 4\pi b$, $f'_1(a, b) = 2a\pi = 0$, $f'_2(a, b) = 2b\pi - 4\pi = 0 \Rightarrow a = 0, b = 2$, 但该点不在区域内。将 $b^2 + a^2 = 1$ 代入函数得边界上的最值分别为 $f_{\max} = \frac{2}{3}\pi^3 + 5\pi$, $f_{\min} = \frac{2}{3}\pi^3 - 3\pi$, 全部区域内 $f_{\max} + f_{\min} = \frac{4}{3}\pi^3 + 2\pi$ 。

补充: $f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x - 2ax \cos x - 2bx \sin x + 2ab \cos x \sin x) dx$, 其中 $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2\pi$ 。所以 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3 + \pi(a^2 + b^2) - 4\pi b$ 。

综合 8 极限函数的性质

例题 1 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right]$, 则 $f^{(n)}(0) = (\quad)$ 。

A. $\frac{n(n-1)}{2}$

B. $-\frac{n(n-1)}{2}$

C. $n(n-1)$

D. $-n(n-1)$

答案 B

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n (e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})} - e^x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n (e^{n(\frac{x}{n} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} - e^x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n (e^{x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{n} + o(\frac{1}{n})} - e^x) = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} n (e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{n} + o(\frac{1}{n})} - 1) = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = -\frac{1}{2} x^2 e^x$ 。函数 $f(x) = -\frac{1}{2} x^2 e^x = -\frac{1}{2} x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots \right) = -\frac{1}{2} \left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-2)!} + \dots \right)$, 又因为 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots$, 由泰勒公式可知 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n-2)!} \Rightarrow f^{(n)}(0) = -\frac{n(n-1)}{2}$ 。故选 B。

综合 9 极坐标函数法线

例题 1 设 $f(t) = \iint_D \sqrt{\frac{4t^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中 D 由 $x^2 + y^2 + 2ty = 0 (t > 0)$ 与 $y \geq -x$ 围成,

若函数 $y = f(t)$ 在点 $(t_0, f(t_0))$ 处的法线与 y 轴的交点为 $(0, 1)$, 则 t_0 的值为 $(\quad)$ 。

A. $\frac{\pi}{8 + \pi^2}$

B. $\frac{4\pi}{\sqrt{8 + \pi^2}}$

C. 1

D. $\frac{4\pi}{8 + \pi^2}$

答案 D

解 $\iint_D \sqrt{\frac{4t^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2t \sin \theta} \sqrt{4t^2 - r^2} dr \xrightarrow{r = 2t \sin u} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-\theta} 4t^2 \cos^2 u du = 2t^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-\theta} (1 + \cos 2u) du = 2t^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(-\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta = \frac{1}{16} t^2 (\pi^2 + 8)$ 。

法线方程为 $y(t) - y(t_0) = \frac{-1}{y'(t_0)}(t - t_0)$, 令 $t = 0, y(t) = 1$ 得 $1 - y(t_0) = \frac{t_0}{y'(t_0)}$,

解方程 $1 - \frac{1}{16}t_0^2(\pi^2 + 8) = \frac{t_0}{\frac{t_0}{8}(\pi^2 + 8)}$ 可得 $t_0 = \frac{4\pi}{8 + \pi^2}$, 故选 D。

综合 10 周期函数的平均值

例题 1 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 1

解 设 $t = u + \pi$, 则有 $f(x + \pi) = \int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi} |\sin t| dt = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin(u + \pi)| du = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| du = f(x)$,

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数。故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \frac{A}{T}$, 其中 A 为周期函数在一个周期内的积分值, T 为函数的周期。

当 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \sin x + \cos x$ 。当 $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ 时, $f(x) = \int_x^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}} (-\sin t) dt = 2 - \sin x + \cos x$ 。所以 $A = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx = \pi$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ 。

补充: 周期函数平均值的重要结论: 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \frac{A}{T}$, 其中 A 为周期函数在一个周期内的积分值。

证明如下:

设 $nT \leq x < (n+1)T$, 不妨设 $A > 0$, 则有 $\frac{nA}{(n+1)T} = \frac{\int_0^{nT} f(t) dt}{(n+1)T} \leq \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} \leq \frac{\int_0^{(n+1)T} f(t) dt}{nT} = \frac{(n+1)A}{nT}$, 其中使用了 $\int_0^{nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt$ 。又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nA}{(n+1)T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)A}{nT} = \frac{A}{T}$, 由夹逼定理可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \frac{A}{T}$ 。特别说明: $\frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 表示周期函数 $f(x)$ 在区间 $[0, x]$ 上的平均值。

综合 11 洛必达法则与夹逼定理

例题 1 关于极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$ 的说法正确的为 ()。

- A. 可使用洛必达法则
C. 极限存在, 且为 0

- B. 极限不存在
D. 极限存在, 且不为 0

答案 D

解 设 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$, 则 $\frac{2n}{(n+1)\pi} = \frac{\int_0^{n\pi} |\sin t| dt}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{n\pi} = \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}$, 所以由夹逼定理可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} = \frac{2}{\pi}$. 故选 D.

补充: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$ 不可以使用洛必达法则, 因为 $\frac{(\int_0^x |\sin t| dt)'}{(x)'} = |\sin x|$ 的极限不存在.

综合 12 由解反求微分方程

例题 1 设 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$.

(1) 若 $f(x)$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则().

A. $a = -3, b = 2, c = -1$

B. $a = 3, b = 2, c = -1$

C. $a = -3, b = 2, c = 1$

D. $a = 3, b = 2, c = 1$

(2) 若 $f(x)$ 是某高阶常系数齐次线性微分方程的一个特解, 则最低阶微分方程为_____.

(3) 微分方程 $y'' - 4y' + 3y = f(x)$ 的特解形式可设为().

A. $y^* = ae^{2x} + (bx + c)e^x$

B. $y^* = axe^{2x} + (bx^2 + cx)e^x$

C. $y^* = ae^{2x} + (bx^2 + cx + d)e^x$

D. $y^* = ae^{2x} + (bx^2 + cx)e^x$

答案 (1) A (2) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$ (3) D

解 (1) 由题意可知, $\frac{1}{2}e^{2x}, -\frac{1}{3}e^x$ 为二阶常系数齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解, 所以 2, 1 为特征方程 $r^2 + ar + b = 0$ 的根, 从而 $a = -(1+2) = -3, b = 1 \times 2 = 2$, 从而原方程变为 $y'' - 3y' + 2y = ce^x$, 再将特解 $y = xe^x$ 代入得 $c = -1$, 故选 A.

(2) 因为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 为某高阶常系数齐次线性微分方程的一个特解, 所以有如下结论:

① 从 e^{2x} 中可以看出必有特征根 $\lambda = 2$.

② 从 $(x - \frac{1}{3})e^x$ 可以看出必有特征根 $\lambda = 1$, 且至少为二重根, 故至少含有特征根 1, 1, 2. 此时特征方程为 $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$, 微分方程为 $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

(3) 齐次方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$, $f_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ 对应的特解可设为 $y_1^*(x) = ae^{2x}$, $f_2(x) = (x - \frac{1}{3})e^x$ 对应的特解可设为 $y_2^*(x) = x(bx + c)e^x$. 所以 $f(x)$ 对应的特解可设为 $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x) = ae^{2x} + (bx^2 + cx)e^x$, 故选 D.

综合 13 变限函数平均值

例题 1 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续非负函数, 且 $f(x) \cdot \int_0^x f(x-t)dt = \sin^4 x$. 则 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的平均值为_____.

答案 $\frac{\sqrt{3\pi}}{2\pi}$

解 令 $x-t=u$, 则 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x f(u)du$, 记 $F(x) = \int_0^x f(u)du$, 则 $F'(x)F(x) = \sin^4 x$, 两端积分, 得 $\frac{1}{2}F^2(x)|_0^\pi = \int_0^\pi \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{8}$, 即 $F(\pi) = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}$, 从而 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的平均值为 $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)dx = \frac{\sqrt{3\pi}}{2\pi}$.

补充: $\int_0^\pi \sin^4 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$.

综合 14 旋转体体积

例题 1 若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 曲线 $p(x)$ 与其渐近线所围成的无界图形为 D , 则 D 绕 x 轴旋转一周所形成立体区域的体积为_____.

答案 $\frac{\pi^2}{2}$

解 $y_1 - y_2 = -2\sqrt{1+x^2}$ 是一阶齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的解, 代入得 $-2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + p(x)(-2\sqrt{1+x^2}) = 0$, 所以 $p(x) = -\frac{x}{1+x^2}$. 渐近线为 x 轴, 旋转体体积为 $2 \int_0^{+\infty} \pi p^2(x) dx = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 t}{\sec^4 t} \sec^2 t dt \stackrel{\text{令 } x = \tan t}{=} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi^2}{2}$.

综合 15 级数审敛法(仅数学一、数学三)

例题 1 下列选项正确的是().

- A. 若 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散
- B. 若 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 均发散
- C. 若常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 条件收敛
- D. 若常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 收敛性与 λ 有关

答案 A

解 先看选项 A 和选项 B. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 的敛散性, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 是交错级数, 显然 $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 单调下降且趋于零, 由莱布尼茨判别法知, 该级数收敛. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ 中, } \ln^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}.$$

根据正项级数的比较判别法以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散, 故选 A.

再看选项 C 和选项 D. 考查取绝对值后的级数. $\left| \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right| \leq \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 + \lambda} < \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2n^2}$ (第一个不等式是由 $a \geq 0, b \geq 0, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 得到的). 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛 (此为

p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散), 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法得

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right|$ 收敛. 故原级数绝对收敛.

综合 16 余子式之和

例题 1 设 $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ 为四阶方阵, A_{ij} 为代数余子式, 若 A 的每行元素之和均为 3, 且 $|A| = 3$, 则

所有代数余子式之和 $\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 A_{ij} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 4

解 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以矩阵 A 有特征值 $\lambda = 3$, 对应的特征向量为 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 考虑到代数余子式与伴随

矩阵有关, 由题意可知矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda} = 1$, 对应的特征向量为 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 对于 $A^* =$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}, \text{ 有 } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 A_{ij} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

综合 17 隐含特征值

例题 1 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$, 方程 $Ax = x + \beta$ 的通解为 $\frac{1}{5}\beta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$, c_1, c_2 为任意常数, β, ξ_1, ξ_2 均为非零列向量, 且 $r[(A - 2E)^*] = 1$, 则此二次型经过正交变换后得到的标准形为().

A. $\frac{6}{5}y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$

B. $6y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$

C. $\frac{1}{5}y_1^2 + 2y_2^2$

D. $4y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$

答案 B

解 方程 $Ax = x + \beta$ 的通解为 $\frac{1}{5}\beta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$, 即方程 $(A-E)x = \beta$ 的通解为 $\frac{1}{5}\beta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$, 所以有如下结论:

① $(A-E)\xi_1 = 0, (A-E)\xi_2 = 0$, 即 0 是矩阵 $A-E$ 的二重特征值。

② $(A-E)\frac{1}{5}\beta = \beta \Rightarrow (A-E)\beta = 5\beta$, 即 5 是矩阵 $A-E$ 的特征值。所以 A 有特征值 6, 1, 1。

$(A-2E)$ 伴随矩阵的秩 $r[(A-2E)^*] = 1$, 所以 $r(A-2E) = 3$, 即 0 是矩阵 $A-2E$ 的特征值。所以 A 有特征值 2。

综上, A 有特征值 6, 2, 1, 1。

所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T Ax$ 经过正交变换后得到的标准形为 $6y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ 。

故选 B。

综合 18 线性表示方程二次型

例题 1 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$, 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ 不能由矩阵 A 的列

向量组线性表示, 且 $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则二次型经正交变换化为的标准形为_____。

答案 $y_1^2 - y_2^2$

解 矩阵的列向量不能线性表示向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, 则说明矩阵的秩必不为 3, 所以

$|A| = 0$, 0 是矩阵的特征值, $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 说明矩阵有特征值 -1, 1。所以, 标准形为

$y_1^2 - y_2^2$ 。

综合 19 方程组的解

例题 1 设三阶实对称矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 且 $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_3, A^*$ 是 A 的伴随矩阵。

(1) 方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____。

(2) 方程组 $A^*x = 0$ 的通解为_____。

答案 (1) $k[1, 2, -1]^T$ (k 为任意常数) (2) $k_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T$ (k_1, k_2 为任意常数)

解 (1) $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_3$, 知 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, 故 $\lambda_3 = 0$ 是 A 的特征值, $\beta_3 =$

$(1, 2, -1)^T$ 是其对应的特征向量, 所以方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $k[1, 2, -1]^T$ (k 为任意常数)。

(2) A 矩阵的列向量为方程组 $A^*x = 0$ 的解。下面求解矩阵 A 。

令 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$ 。由 A 为实对称矩阵, 知 $\beta^T \beta_3 = 0$, 即 $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, 解得 $\beta_1 = (-2, 1, 0)^T, \beta_2 = (1, 0, 1)^T$, 为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量。对 β_1, β_2 正交化,

得 $\eta_1 = \beta_1 = (-2, 1, 0)^T$, $\eta_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{5}(1, 2, 5)^T$ 。

对其单位化, 得 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T$, $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 5)^T$, $\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)^T$ 。

令 $Q = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$, 则 Q 为正交矩阵, $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}。$$

由于 $A^*A = |A|E = O$, A 的列向量中线性无关的 α_1, α_2 是 $A^*x = 0$ 的两个基础解。故所求通解为 $k_1\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)^T + k_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$ (k_1, k_2 为任意常数)。

综合 20 伴随矩阵的性质

例题 1 设 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 为三阶实对称矩阵, 且满足 $a_{ij} = A_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式), $a_{33} = -1$, $|A| = 1$, 则方程 $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解为_____。

答案 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

解 由 $a_{ij} = A_{ij}$ 有 $A^T = A^*$, 于是 $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} A^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ -1 \end{bmatrix}$ 。又 $|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + 1 = 1$, 有 $a_{31} = a_{32} = 0$, 故 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。

综合 21 列行矩阵(秩为 1 的矩阵)

例题 1 设矩阵 $A = \alpha\beta^T$, 其中 $\alpha = [1, -1, 1]^T$, $\beta = [1, 1, 1]^T$, 若非零三阶方阵 C 使得 $AC = C$, 则矩阵 C 为_____。

答案

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 不同时为零})$$

解

$(A-E)C=0$, 解 $(A-E)x=0$, 有 $A-E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 所以 $(A-E)x=0$ 的通

解为 $k[1, -1, 1]^T$ (其中 k 为任意常数), 所以有 $C = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ (其中 k_1, k_2, k_3 不同时为零,

C 为非零方阵)。

注意: 行向量乘列向量, 得到数, 也就是行列式。但列向量乘行向量, 得到矩阵, 编者称其为列行矩阵。列行矩阵是秩为 1 的矩阵, 相关试题较为常见。

综合 22 线性方程组的解

例题 1

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c, d 为互异的实数, 则下述结论必成立的是()。

A. $Ax=0$ 只有零解B. $A^T x=0$ 有非零解C. $A^T Ax=0$ 有非零解D. $AA^T x=0$ 有非零解

答案 C

解

因 A 是 3×4 矩阵, 故 $Ax=0$ 是方程个数小于未知量个数的齐次线性方程组, 所以必有非零解, 故选项 A 不成立。因为 $Ax=0$ 的解必是 $A^T(Ax)=0$ 的解, 故选项 C 成立。注意到 A 为 3×4 矩阵, 且其三阶子行列式含元素互异的三阶范德蒙行列式, 故 $\text{秩}(A) = \text{秩}(A^T) = \text{秩}(AA^T) = 3$, 而 A^T 为 4×3 矩阵, 故 $A^T x=0$ 及 $AA^T x=0$ 只有零解, 这表明选项 B 和 D 不成立。故选 C。

综合 23 克拉默法则

例题 1

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 $a_i \neq a_j (i \neq j, i, j = 1,$

$2, \dots, n)$, 则线性方程组 $A^T x = \beta$ 的解是 $x =$ _____。

答案

$(1, 0, \dots, 0)^T$

解

$|A|$ 为 n 阶范德蒙行列式, 由题设有 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$, 则 $|A| = |A^T| \neq 0$, 由克拉默法则, 方程组

$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \beta$ 有唯一解, 下面求出该唯一解。因 $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$, $|\mathbf{A}^T| =$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, \text{ 则 } D_1 = |\mathbf{A}^T|, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & 1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0. \text{ 同理, 可求得 } D_3 = \cdots = D_n = 0, \text{ 故其解为 } x_1 = \frac{D_1}{|\mathbf{A}^T|} = \frac{D_1}{D_1} = 1, x_2 = \frac{D_2}{|\mathbf{A}^T|} = \frac{0}{|\mathbf{A}^T|} = 0, \cdots, x_n = \frac{D_n}{|\mathbf{A}^T|} = \frac{0}{|\mathbf{A}^T|} = 0,$$

即 $\mathbf{x} = (1, 0, \cdots, 0)^T$ 为所求的唯一解。

补充: 克拉默法则。若线性方程组的系数矩阵可逆(非奇异), 即系数行列式 $D \neq 0$, 则线性方程组有唯一解, 其解为 $x_j = \frac{D_j}{D} (j=1, 2, \cdots, n)$, 其中 D_j 是将 D 中的第 j 列元素对应地换成常数项而其余各列保持不变所得到的行列式。

综合 24 相似对角化

例题 1 在矩阵① $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, ② $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, ③ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, ④ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 中, 能相似对角化的矩阵共有()。

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

答案 C

解 ① 中的矩阵是实对称矩阵, 必可相似对角化。

② 中的矩阵是下三角矩阵, 主对角线上的元素就是矩阵的特征值, 因为矩阵有 3 个不同的特征值, 其必可相似对角化。

③ 中的矩阵的秩为 1。由 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda^3 - 4\lambda^2$ 知, 其特征值是 4, 0, 0。对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 有 $k_2 = 2 = n - \text{秩}(0\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 3 - \text{秩}(\mathbf{A}) = 3 - 1 = 2$ 。

或由 $(0\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系有 $3 - 1 = 2$ 个线性无关的解向量, 即 $\lambda = 0$ 有两个线性无关的特征向量, 矩阵可相似对角化。

④ 中的矩阵是上三角矩阵, 主对角线上的元素 1, 1, -1 就是其特征值。对于二重特征值, 有 $k_1 = 2 \neq n - \text{秩}(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 3 - \text{秩} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$ 。

或由 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有 $3 - 2 = 1$ 个线性无关的特征向量知, 矩阵不能相似对角化。

故选 C。

综合 25 高等数学、线性代数与概率(仅数学一、数学三)

例题 1 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 x^a 是同阶无穷小, 变量 X 服从参数为 1 的泊松分

布,则矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 2 & -2 \\ -X & -1 & X \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 不能相似于对角矩阵的概率为()。

A. $1 - e^{-1}$ B. e^{-1}

C. 0

D. $\frac{e^{-2}}{2}$

答案 A

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 为三阶无穷小, 所以 $a = 3$ 。 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -X & -1 & X \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 。矩阵的

特征方程为 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -X & -1-\lambda & X \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^2$, 考查重根时特征向量的个数,

$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -X & 0 & X \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -X & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 当 $X=0$ 时, 有 $r(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = 1$, 此时矩阵 $\mathbf{A}$ 能对角化, 否

则不能对角化。所以矩阵 $\mathbf{A}$ 不能对角化的概率为 $P(X \neq 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1}$ 。故选 A。