第5章 传输线理论

传输线是能够引导电磁波沿一定方向传输的导体、介质或由它们共同组成的导波系统。对传输线的分析表明，电磁波也能沿导体或介质的边界传播，产生由这些导体或介质的边界所导引的波，从而将信号源的电磁能量以被导引波的形式传送至某一系统或负载中。

5.1 引言

5.1.1 传输线的分类

图 5.1.1 表示常用的传输线，包括平行双线、同轴线、矩形波导、圆波导、介质波导、带状线、微带线等。

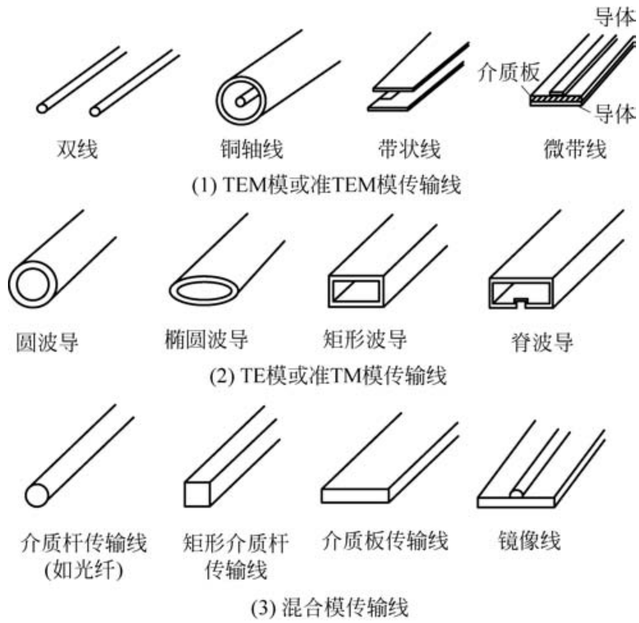


图 5.1.1 各种类型的传输线

按照电磁波沿传输方向是否存在电场或磁场的纵向分量，从电磁波的场结构和导波模式角度，将传输线分为 TEM 模（横电磁波）传输线、TE 模（横电波）传输线、TM 模（横磁波）传输线和 EH 模或 HE 模（混合模）四类。

1. TEM 模传输线

电场和磁场都只有一个分量，且相互正交，并且均与波的传播方向正交。也就是说，电场和磁场的纵向分量均为 0。这类传输线有平行双线、同轴线、带状线、微带线等，属于双导体传输系统。

2. TE 模传输线

波的传播方向上没有电场分量，即电场的纵向分量为 0，而磁场的纵向分量不为 0。

3. TM 模传输线

波的传播方向上没有磁场分量，即磁场的纵向分量为 0，而电场的纵向分量不为 0。TE 模和 TM 模传输线有矩形波导、圆波导、椭圆波导、脊波导等，属于单导体传输系统。

4. EH 模或 HE 模

电磁波聚集在传输线内部及其表面附近，沿轴向传播，一般传播的是混合型波，它们是 TE 模和 TM 模的线性叠加。其纵向电场和纵向磁场都不为 0，但某一横向场分量可以为 0。纵向电场占优势的模式称为 EH 模，纵向磁场占优势的模式称为 HE 模。这类传输线有介质波导、光纤等。

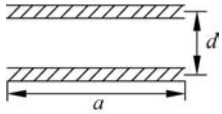
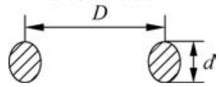
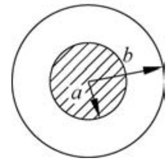
按照几何长度和工作波长的比较关系，传输线又可以划分为长线和短线两类。几何长度与工作波长可比拟的传输线，称为长线。几何长度与工作波长相比可以忽略的传输线，称为短线。从上述概念可知，不能简单地以几何长度来判断某一段传输线属于长线还是短线。例如，50Hz 高压输电线，其波长为 6000km；800Hz 被覆线，其波长也可达 375km。100km 几何长度的这两种传输线，也只能看作短线。相反，0.5m 长的同轴电缆传输频率为 3GHz 的电磁波，可以称为长线。

5.1.2 传输线的分布参数和等效电路

短线对应于低频传输线，它在低频电路中只起到连接线的作用，其本身分布参数引起的效应可忽略不计。所以在低频电路中只考虑时间因子而忽略空间效应，把电路当作集总参数来处理是允许的。长线对应于微波传输线，由于分布参数效应，传输线除了做连接线之外，还形成了分布参数电路，参与整个电路的工作，此时的分布参数就不能忽略了。

也就是说，长线传输线上的电流、电压不仅是时间的函数，还是空间位置的函数，这时必须考虑分布参数效应。当信号源频率升高，特别是达微波波段后，信号通过传输线时，会产生分布参数。导线流过电流时，周围会产生高频磁场，因而沿导线各点会存在串联分布电感 L；两导线间加上电压时，线间会存在高频电场，于是线间会产生并联分布电容 C；电导率有限的导线流过电流时会发热，而且高频时由于趋肤效应，电阻会加大，即表明导线有分布电阻 R；导线间介质非理想时有漏电流，这就意味着导线间有分布漏电导 G。这些分布参数在低频时的影响较小，可以忽略；而在高频时引起的沿线电压、电流幅度变化，以及相位滞后是不能忽略的，这就是所谓的分布参数效应。平行板、平行双导线和同轴线的分布参数，如表 5.1.1 所示。表中，ε 和 σ 分别为导体间介质的介电常数和电导率；σ_1 为导体的电导率；μ_0 为导体和介质的磁导率。

表 5.1.1 常见传输线的分布参数

传输线的横截面 / 单位长度的分布参数	平行板	平行双导线	同轴线
			
$R/(\Omega\cdot m^{-1})$	$\frac{2}{a}\sqrt{\frac{\pi f\mu_0}{\sigma_0}}$	$\frac{2}{\pi d}\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma_0}}$	$\sqrt{\frac{f\mu_0}{4\pi\sigma_1}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
$G/(S\cdot m^{-1})$	$\frac{\sigma a}{d}$	$\frac{\pi\sigma}{\ln\frac{D+\sqrt{D^2-d^2}}{d}}$	$\frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{b}{a}}$
$L/(H\cdot m^{-1})$	$\frac{\mu_0 d}{a}$	$\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D+\sqrt{D^2-d^2}}{d}$	$\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$
$C/(F\cdot m^{-1})$	$\frac{\varepsilon d}{a}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{D+\sqrt{D^2-d^2}}{d}}$	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}$

因此,当分布参数效应无法忽略时,可以将平行双导线或同轴线等效为图 5.1.2(a)的电路。如果 $R=G=0$,则称无耗传输线,其等效电路如图 5.1.2(b)所示。

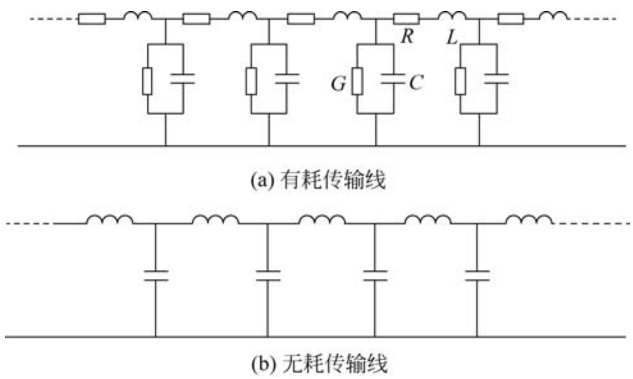


图 5.1.2 传输线等效电路

5.2 均匀传输线方程及其解

视频5-1

5.2.1 传输线方程

如果传输线的分布参数沿线是均匀的,称作均匀传输线,否则是非均匀传输线。表征均匀传输线上电压、电流的方程式称为传输线方程。下面由平行双导线来导出传输线

方程。

在平行双导线上截取长度为无限小的一段 Δz 作为单位长度传输线，传输线 Δz 的集总元件等效电路模型如图 5.2.1 所示，其中，等效电路两端电压、电流分别是 $u(z,t)$、$i(z,t)$、$u(z+\Delta z,t)$、$i(z+\Delta z,t)$，其上有电阻 $R\Delta z$（单位为 Ω/m）、电感 $L\Delta z$（单位为 H/m）、电容 $C\Delta z$（单位为 F/m）和漏电导 $G\Delta z$（单位为 S/m）。

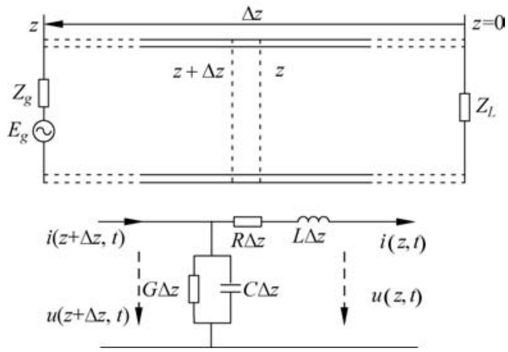


图 5.2.1　长度为 Δz 传输线的分布参数电路

图 5.2.1 中，由基尔霍夫电压和电流定律可得

$$\begin{cases} u(z+\Delta z,t)=\left[Ri(z,t)+L\dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right]\Delta z+u(z,t) \\ i(z+\Delta z,t)=\left[Gu(z+\Delta z,t)+C\dfrac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t}\right]\Delta z+i(z,t) \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Δz 很小时，电压和电流的增量可表示为偏微分

$$\begin{cases} u(z+\Delta z,t)-u(z,t)=\dfrac{\partial u(z,t)}{\partial z}\Delta z \\ i(z+\Delta z,t)-i(z,t)=\dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z}\Delta z \end{cases} \tag{5.2.2}$$

将式(5.2.2)代入式(5.2.1)整理，并且取极限 $\Delta z\to 0$，可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(z,t)}{\partial z}=Ri(z,t)+L\dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z}=Gu(z,t)+C\dfrac{\partial u(z,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{5.2.3}$$

这就是时域的均匀传输线方程。该方程最初是在研究电报线上电压、电流变化规律时推导出来的，故又称为电报方程。

对于时谐电磁波，有时谐因子 $e^{j\omega t}$，ω 是角频率，单位为弧度/秒（rad/s）。且 $d(e^{j\omega t})/dt=j\omega e^{j\omega t}$，因此可以把函数 $u(z,t)$ 和 $i(z,t)$ 中的时间自变量分离出来，即

$$\begin{cases} u(z,t)=\mathrm{Re}[U(z)e^{j\omega t}] \\ i(z,t)=\mathrm{Re}[I(z)e^{j\omega t}] \end{cases} \tag{5.2.4}$$

将式(5.2.4)代入式(5.2.3)，可得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z}=ZI(z) \\
\dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=YU(z)
\end{cases}
\tag{5.2.5}
$$

上式称为时谐形式的传输线方程。式中，

$$
\begin{cases}
Z=R+\mathrm{j}\omega L \\
Y=G+\mathrm{j}\omega C
\end{cases}
\tag{5.2.6}
$$

Z 和 Y 分别为传输线单位长度串联阻抗(单位为 Ω/m)和单位长度并联导纳(单位为 S/m)。

5.2.2 均匀传输线方程解

为求解方程式(5.2.5)，将式两边对 z 微分并互相代换，得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2U(z)}{\mathrm{d}z^2}-\gamma^2U(z)=0 \\
\dfrac{\mathrm{d}^2I(z)}{\mathrm{d}z^2}-\gamma^2I(z)=0
\end{cases}
\tag{5.2.7}
$$

式中，$\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta$ 是传播常数，定义为

$$
\gamma^2=ZY=(R+\mathrm{j}\omega L)(G+\mathrm{j}\omega C)
\tag{5.2.8}
$$

式(5.2.7)是电压和电流所满足的一维波动方程，电压通解为

$$
U(z)=A_1\mathrm{e}^{\gamma z}+A_2\mathrm{e}^{-\gamma z}
\tag{5.2.9}
$$

由式(5.2.5)，得电流通解为

$$
I(z)=\frac{1}{Z_0}(A_1\mathrm{e}^{\gamma z}-A_2\mathrm{e}^{-\gamma z})
\tag{5.2.10}
$$

其中，A_1 和 A_2 为待定系数；Z_0 是传输线特性阻抗，定义为

$$
Z_0=\sqrt{\frac{Z}{Y}}=\sqrt{\frac{R+\mathrm{j}\omega L}{G+\mathrm{j}\omega C}}
\tag{5.2.11}
$$

根据式(5.2.9)和式(5.2.10)，可得传输线上电压和电流的瞬时值表达式为

$$
\begin{cases}
u(z,t)=A_1\mathrm{e}^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z)+A_2\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)=u_i(z,t)+u_r(z,t) \\
i(z,t)=\dfrac{1}{Z_0}[A_1\mathrm{e}^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z)-A_2\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)]=i_i(z,t)+i_r(z,t)
\end{cases}
\tag{5.2.12}
$$

上式说明，传输线上电压和电流是以波的形式传播，传输线上任一点的电压或者电流由入射波和反射波叠加形成。入射波是沿 $-z$ 方向传播的衰减行波，反射波是沿 $+z$ 方向传播的衰减行波。

以下区分两种情况，求传输线方程的特解。一是已知传输线终端电压和电流值，二是已知传输线始端电压和电流值，分别将其作为边界条件，来确定待定系数 A_1 和 A_2，从而求出两种情况下的特解。

(1) 已知终端电压 U_L 和终端电流 I_L。

如图 5.2.2 所示，将边界条件 $U(0)=U_L$、$I(0)=I_L$ 代入式(5.2.9)和式(5.2.10)，化简得到

$$\begin{cases} A_1=\dfrac{U_L+Z_0 I_L}{2} \\ A_2=\dfrac{U_L-Z_0 I_L}{2} \end{cases} \tag{5.2.13}$$

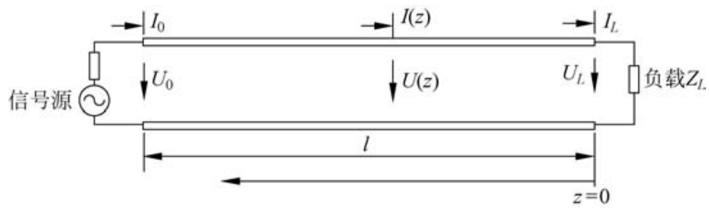


图 5.2.2 由边界条件确定待定系数

将上式代回式(5.2.9)和式(5.2.10)，得到沿线电压和电流的表达式

$$\begin{cases} U(z)=\dfrac{U_L+I_L Z_0}{2}e^{\gamma z}+\dfrac{U_L-I_L Z_0}{2}e^{-\gamma z}=U_L\operatorname{ch}\gamma z+I_L Z_0\operatorname{sh}\gamma z \\ I(z)=\dfrac{U_L+I_L Z_0}{2Z_0}e^{\gamma z}-\dfrac{U_L-I_L Z_0}{2Z_0}e^{-\gamma z}=I_L\operatorname{ch}\gamma z+\dfrac{U_L}{Z_0}\operatorname{sh}\gamma z \end{cases} \tag{5.2.14}$$

其中，双曲余弦表示为 $\operatorname{ch}(\gamma z)=\dfrac{e^{\gamma z}+e^{-\gamma z}}{2}$；双曲正弦表示为 $\operatorname{sh}(\gamma z)=\dfrac{e^{\gamma z}-e^{-\gamma z}}{2}$。

(2) 已知始端电压 U_0 和始端电流 I_0。

如图 5.2.2 所示，将边界条件 $U(l)=U_0$、$I(l)=I_0$ 代入式(5.2.9)和式(5.2.10)，化简得到

$$\begin{cases} A_1=\dfrac{(U_0+I_0 Z_0)}{2}e^{-\gamma l} \\ A_2=\dfrac{(U_0-I_0 Z_0)}{2}e^{\gamma l} \end{cases} \tag{5.2.15}$$

将上式代回式(5.2.9)和式(5.2.10)，得到沿线电压和电流的表达式

$$\begin{cases} U(z)=\dfrac{U_0+I_0 Z_0}{2}e^{-\gamma(l-z)}+\dfrac{U_0-I_0 Z_0}{2}e^{\gamma(l-z)}=U_0\operatorname{ch}\gamma(l-z)-I_0 Z_0\operatorname{sh}\gamma(l-z) \\ I(z)=\dfrac{U_0+I_0 Z_0}{2Z_0}e^{-\gamma(l-z)}-\dfrac{U_0-I_0 Z_0}{2Z_0}e^{\gamma(l-z)}=I_0\operatorname{ch}\gamma(l-z)-\dfrac{U_0}{Z_0}\operatorname{sh}\gamma(l-z) \end{cases} \tag{5.2.16}$$

也就是说，已知终端电压 U_L、终端电流 I_L 及传输线特性参数 γ、Z_0，可以确定传输线上任一点的电压 $U(z)$ 和电流 $I(z)$；同样，已知始端电压 U_0、始端电流 I_0 及传输线特性参数 γ、Z_0，也可以确定传输线上任一点的电压 $U(z)$ 和电流 $I(z)$。

5.3 均匀传输线的特性参数和工作参数

5.3.1 传播常数

由式(5.2.8)可知,传输线的传播常数为 $\gamma=\sqrt{(R+\mathrm{j}\omega L)(G+\mathrm{j}\omega C)}=\alpha+\mathrm{j}\beta$,其中 α 为衰减常数,表明电压或电流经过单位长度传输线后振幅的减少量,定义为减小到原来幅度的 $1/\mathrm{e}^{\alpha}$,单位为 Np/m 或 dB/m;β 为相位常数,表示经过单位长度后电压和电流的相位变化量,单位为 rad/m。

若 $\alpha\neq0$,则为有耗传输线;若 $\alpha=0$,则为无耗传输线。

由于

$$\gamma=\sqrt{(R+\mathrm{j}\omega L)(G+\mathrm{j}\omega C)}=\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\sqrt{1-\mathrm{j}\left(\frac{R}{\omega L}+\frac{G}{\omega C}\right)-\frac{RG}{\omega^2 LC}} \tag{5.3.1}$$

一般来说,在微波波段,传输线上的分布电阻和分布电导的影响相对于分布电感和分布电容来说很小,即 $R\ll\omega L$,$G\ll\omega C$,$RG\ll\omega^2 LC$,那么上式可简化为

$$\gamma=\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\sqrt{1-\mathrm{j}\left(\frac{R}{\omega L}+\frac{G}{\omega C}\right)} \tag{5.3.2}$$

式中,$\left(\frac{R}{\omega L}+\frac{G}{\omega C}\right)$是相对微小量。对$\sqrt{1-\mathrm{j}\left(\frac{R}{\omega L}+\frac{G}{\omega C}\right)}$做泰勒展开,并取前两项,得到

$$\gamma\approx\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\left[1-\frac{\mathrm{j}}{2}\left(\frac{R}{\omega L}+\frac{G}{\omega C}\right)\right] \tag{5.3.3}$$

因此

$$\alpha\approx\frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}}+G\sqrt{\frac{L}{C}}\right)=\alpha_c+\alpha_d \tag{5.3.4}$$

$$\beta\approx\omega\sqrt{LC} \tag{5.3.5}$$

式中,α_c 和 α_d 分别称为导体衰减常数和介质衰减常数,它们是分别由导体损耗和介质损耗引起的衰减。

对于无耗传输线,由于 $R=0$、$G=0$,易知

$$\alpha=0,\quad \beta=\omega\sqrt{LC} \tag{5.3.6}$$

此时,传输线方程的电压、电流通解可简化为

$$U(z)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{5.3.7}$$

$$I(z)=\frac{1}{Z_0}(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}-A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}) \tag{5.3.8}$$

5.3.2 特性阻抗

特性阻抗 Z_0 为无限长(无反射)传输线上任意点朝向传输线延伸方向看过去的阻抗

值，对于无限长传输线，含有 $\exp(-\gamma z)$ 的项为 0。也就是不存在反射波，只存在沿传输线延伸方向传播的波。由式(5.2.9)和式(5.2.10)可得

$$Z_0 = \frac{U_i(z)}{I_i(z)} = -\frac{U_r(z)}{I_r(z)} \tag{5.3.9}$$

也就是说，特性阻抗 Z_0 是入射波电压与入射波电流之比，或者说是反射波电压与反射波电流之比的负值。这就是入射波电压、入射波电流与特性阻抗的关系。

均匀传输线的特性阻抗 Z_0 定义为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{G + \mathrm{j}\omega C}} \tag{5.3.10}$$

其中，Z 和 Y 都是均匀传输线的分布参数。从上式可以看出，特性阻抗与工作频率、传输线自身的分布参数有关，而与负载和信号大小无关，故称为特性阻抗，它通常是个复数。对于均匀无耗传输线，$R=G=0$，其特性阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{5.3.11}$$

此时特性阻抗 Z_0 与工作频率无关，为实数。当损耗很小，满足 $R \ll \omega L$、$G \ll \omega C$ 时，上式近似成立。

特性阻抗 Z_0 的倒数称为特性导纳，用 Y_0 表示。

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \tag{5.3.12}$$

5.3.3 相速和波长

沿传输线传播的等相位点所构成的面称为等相位面。相速 v_p 定义为等相位面的传播速度。可以由等相位面方程 $\omega t \pm \beta z =$ 常数的两边对 t 求微分得到

$$v_p = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \pm \frac{\omega}{\beta} \tag{5.3.13}$$

式中的正、负号说明传输线上入射波和反射波以相同的速度向相反的方向传播。对于均匀传输线，$\beta = \omega\sqrt{LC}$，则相速 v_p 为

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{5.3.14}$$

以平行双导线为例，讨论相速 v_p。将表 5.1.1 中的分布电容 C 和分布电感 L 代入上式，得

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \tag{5.3.15}$$

式中，$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ 为电磁波在空气中的传播速度，即光速；μ_r 为介质的相对磁导率，通常 $\mu_r = 1$；ε_r 为介质的相对介电常数。若平行双导线间填充介质为空气，则 $\varepsilon_r = 1$，相速 $v_p = c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$，即相速等于电磁波传播速度；若填充其他介质，则传输线上相速是

空气中相速的 $1/\sqrt{\varepsilon_r}$ 倍。

传输线上波长 λ 定义为传输线上行波在一个周期内等相位面沿传输线移动的距离，即

$$\lambda = v_p T = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\beta} \tag{5.3.16}$$

对于无耗或低损耗传输线，传输线上的波长 λ 和真空中电磁波的波长 λ_0 有下面的关系：

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \tag{5.3.17}$$

5.3.4 输入阻抗

输入阻抗定义为传输线上任意一点 z 处的输入电压和输入电流之比为该点向负载方向看去的输入阻抗，记作 $Z_{\text{in}}(z)$

$$Z_{\text{in}}(z) = \frac{U(z)}{I(z)} \tag{5.3.18}$$

将式(5.2.14)代入上式，可得有耗传输线上 z 处的输入阻抗

$$Z_{\text{in}}(z) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \text{th}(\gamma z)}{Z_0 + Z_L \text{th}(\gamma z)} \tag{5.3.19}$$

式中，Z_L 为终端负载阻抗

$$Z_L = \frac{U_L}{I_L} \tag{5.3.20}$$

对于均匀无耗传输线，由于 $\gamma = \text{j}\beta$，则 $Z_{\text{in}}(z)$ 为

$$Z_{\text{in}}(z) = Z_0 \frac{Z_L + \text{j}Z_0 \tan(\beta z)}{Z_0 + \text{j}Z_L \tan(\beta z)} \tag{5.3.21}$$

由上式可知，均匀无耗传输线输入阻抗与传输线的特性阻抗 Z_0、传播常数 γ、终端负载阻抗 Z_L 和观察点位置 z 有关。

无耗传输线上的阻抗具有以下两个重要性质：

1. $\lambda/2$ 阻抗重复性

由上式可求出传输线上距终端负载 $\lambda/2$ 处的输入阻抗为

$$Z_{\text{in}}(\lambda/2) = Z_0 \frac{Z_L + \text{j}Z_0 \tan\left(\beta \dfrac{\lambda}{2}\right)}{Z_0 + \text{j}Z_L \tan\left(\beta \dfrac{\lambda}{2}\right)} = Z_L \tag{5.3.22}$$

上式说明，传输线上距终端负载 $\lambda/2$ 处的输入阻抗仍为 Z_L。推广到一般情况，传输线上相距 $\lambda/2$ 及其整数倍的任意两点输入阻抗相同，即

$$Z\left(z+n\frac{\lambda}{2}\right)=Z(z),\quad n\text{ 为正整数} \tag{5.3.23}$$

这就是均匀无耗传输线 $\lambda/2$ 的阻抗重复性。

2. $\lambda/4$ 阻抗变换(倒置)性

由式(5.3.21)可求出传输线上距终端负载 $\lambda/4$ 处的输入阻抗为

$$Z_{\text{in}}(\lambda/4)=Z_0\frac{Z_L+\text{j}Z_0\tan\left(\beta\frac{\lambda}{4}\right)}{Z_0+\text{j}Z_L\tan\left(\beta\frac{\lambda}{4}\right)}=\frac{Z_0^2}{Z_L} \tag{5.3.24}$$

上式说明,传输线上距终端负载 $\lambda/4$ 处的输入阻抗发生了倒置现象,即感性负载经 $\lambda/4$ 长度后,变成容性特性;短路负载经 $\lambda/4$ 长度后,变成开路特性;串联谐振电路经 $\lambda/4$ 长度后,变成并联谐振特性,等等。

推广到一般情况,传输线上相距 $\lambda/4$ 及其奇数倍的任意两点输入阻抗具有倒置性,即

$$Z_{\text{in}}\left[z+(2n-1)\frac{\lambda}{4}\right]=\frac{Z_0^2}{Z(z)},\quad n\text{ 为正整数} \tag{5.3.25}$$

由于阻抗与导纳互为倒数关系,可得均匀无耗传输线上的输入导纳公式为

$$Y_{\text{in}}(z)=Y_0\frac{Y_L+\text{j}Y_0\tan(\beta z)}{Y_0+\text{j}Y_L\tan(\beta z)} \tag{5.3.26}$$

5.3.5 反射系数

电压反射系数 $\Gamma_u(z)$ 定义为传输线上任意一点 z 处的反射波电压 $U_r(z)$ 与入射波电压 $U_i(z)$ 之比,由式(5.2.14)可得

$$\Gamma_u(z)=\frac{U_r(z)}{U_i(z)}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\text{e}^{-2\gamma z}=\Gamma_L\text{e}^{-2\gamma z}=\Gamma_L\text{e}^{-2\alpha z}\text{e}^{-\text{j}2\beta z} \tag{5.3.27}$$

式中,Γ_L 称为终端反射系数,即

$$\Gamma_L=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=|\Gamma_L|\text{e}^{\text{j}\phi_L} \tag{5.3.28}$$

同样,电流反射系数 $\Gamma_i(z)$ 定义为传输线上任意一点 z 处的反射波电流 $I_r(z)$ 与入射波电流 $I_i(z)$ 之比。易知 $\Gamma_i(z)=-\Gamma_u(z)$,即与电压反射系统 $\Gamma_u(z)$ 的模相等,相位相差 π。由于电压便于测量,故反射系数通常指的是电压反射系数,记作 $\Gamma(z)$。

由上式可知,电压反射系数 $\Gamma(z)$ 的模和相位分别为

$$|\Gamma(z)|=|\Gamma_L|\text{e}^{-2\alpha z} \tag{5.3.29}$$

$$\phi(z)=\phi_L-2\beta z \tag{5.3.30}$$

式(5.3.29)表明,有耗传输线上反射系数的模沿传输线指数衰减;式(5.3.30)表明,相位沿反射波方向线性连续滞后并作 $\lambda/2$ 周期变化。

若传输线无耗，此时 $\Gamma(z)$ 表示为

$$\Gamma(z)=\Gamma_L e^{-j2\beta z} \tag{5.3.31}$$

其模 $|\Gamma(z)|=|\Gamma_L|$，即传输线上任意一点 z 处反射系数的模均等于终端反射系数的模；其相位 $\phi(z)=\phi_L-2\beta z$，与有耗传输线一致，相位按 $\lambda/2$ 周期变化。这说明，无论是有耗传输线还是无耗传输线，反射系数均具有 $\lambda/2$ 重复性。

引入了反射系数的定义，传输线上任意一点 z 处的电压 $U(z)$ 和电流 $I(z)$ 又可表示为如下形式：

$$U(z)=U_i(z)+U_r(z)=U_i(z)(1+\Gamma(z)) \tag{5.3.32}$$

$$I(z)=I_i(z)+I_r(z)=I_i(z)(1-\Gamma(z)) \tag{5.3.33}$$

输入阻抗 $Z_{\text{in}}(z)$ 可通过反射系数 $\Gamma(z)$ 表示

$$Z_{\text{in}}(z)=\frac{U(z)}{I(z)}=\frac{U_i(z)(1+\Gamma(z))}{I_i(z)(1-\Gamma(z))}=Z_0\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)} \tag{5.3.34}$$

反射系数 $\Gamma(z)$ 也可通过输入阻抗 $Z_{\text{in}}(z)$ 表示

$$\Gamma(z)=\frac{Z_{\text{in}}(z)-Z_0}{Z_{\text{in}}(z)+Z_0} \tag{5.3.35}$$

当 $z=0$ 时，$\Gamma(0)$ 即为终端反射系数 Γ_L，通过上式易知 Γ_L 与终端负载阻抗 Z_L 的关系

$$Z_L=Z_0\frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} \tag{5.3.36}$$

$$\Gamma_L=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \tag{5.3.37}$$

这与式(5.3.28)也是一致的。

5.3.6 驻波比和行波系数

传输线上驻波比 ρ 定义为传输线上电压振幅的最大值与最小值之比，即

$$\rho=\frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} \tag{5.3.38}$$

显然，$1\leqslant\rho\leqslant\infty$。因为传输线上任一点电压是由入射波电压与反射波电压叠加而成的，所以当入射波电压与反射波电压同相位时，电压出现最大值；当入射波电压与反射波电压反相位时，电压出现最小值。因此对于无耗传输线，有

$$|U|_{\max}=|U_i(z)|+|U_r(z)|=|U_i(z)|[1+|\Gamma(z)|] \tag{5.3.39}$$

$$|U|_{\min}=|U_i(z)|-|U_r(z)|=|U_i(z)|[1-|\Gamma(z)|] \tag{5.3.40}$$

因此，驻波比与反射系数的关系为

$$\rho=\frac{1+|\Gamma[z]|}{1-|\Gamma[z]|}=\frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} \tag{5.3.41}$$

也就是说，驻波比 ρ 能够通过终端反射系数的模 $|\Gamma_L|$ 来表示。当 $|\Gamma_L|=0$ 时，传输线上

无反射，$\rho=1$；当$|\Gamma_L|=1$时，传输线上全反射，ρ趋于无穷大。

或者

$$|\Gamma(z)|=\frac{\rho-1}{\rho+1} \tag{5.3.42}$$

传输线上的行波系数K定义为电压振幅最小值与最大值之比，它与电压驻波比互为倒数，即

$$K=\frac{|U|_{\min}}{|U|_{\max}}=\frac{1}{\rho}=\frac{1-|\Gamma_L|}{1+|\Gamma_L|} \tag{5.3.43}$$

显然，$0\leqslant K\leqslant 1$。行波系数与反射系数有如下关系：

$$|\Gamma(z)|=\frac{1-K}{1+K} \tag{5.3.44}$$

【例 5-1】 设无耗传输线的特性阻抗为100Ω，负载阻抗为(50－j50)Ω，试求其终端反射系数、驻波比及距离负载0.15λ处的输入阻抗。

解：终端反射系数为

$$\Gamma_L=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{50-\mathrm{j}50-100}{50-\mathrm{j}50+100}=-\frac{1+2\mathrm{j}}{5}$$

驻波比为

$$\rho=\frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}=2.618$$

距离负载0.15λ处的输入阻抗为

$$Z_{\mathrm{in}}(d)=Z_0\frac{Z_L+\mathrm{j}Z_0\tan(\beta d)}{Z_0+\mathrm{j}Z_L\tan(\beta d)}=100\times\frac{50-\mathrm{j}50+\mathrm{j}100\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times 0.15\lambda\right)}{100+\mathrm{j}(50-\mathrm{j}50)\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times 0.15\lambda\right)}$$

$$=43.55+\mathrm{j}34.16(\Omega)$$

视频5-2

5.4 无耗传输线的工作状态

均匀无耗传输线的工作状态主要取决于终端负载阻抗的大小和性质。根据终端负载阻抗的不同，传输线将会呈现3种工作状态：①行波状态；②驻波状态；③行驻波状态。

5.4.1 行波状态

当负载阻抗等于传输线的特性阻抗，即$Z_L=Z_0$，此时传输线处于行波状态。由式(5.3.37)可知，行波状态下$\Gamma_L=0$，传输线上各点的反射系数$\Gamma(z)$均为0，传输线沿线只有入射的行波而无反射波。

由式(5.2.9)和式(5.2.10)可得，一般情况下的均匀无耗传输线，沿线电压和电流可以表示为

$$\begin{cases} U(z)=A_1 e^{j\beta z}[1+\Gamma_L e^{-j2\beta z}] \\ I(z)=\dfrac{A_1 e^{j\beta z}}{Z_0}[1-\Gamma_L e^{-j2\beta z}] \end{cases} \tag{5.4.1}$$

经整理，进一步表示为

$$\begin{cases} U(z)=A_1(1-\Gamma_L)e^{j\beta z}+2\Gamma_L A_1\cos\beta z \\ I(z)=\dfrac{A_1}{Z_0}(1-\Gamma_L)e^{j\beta z}+2j\Gamma_L\dfrac{A_1}{Z_0}\sin\beta z \end{cases} \tag{5.4.2}$$

通过上式，已知终端入射波电压 A_1 和终端反射系数 Γ_L，可以求出沿线电压和电流的分布。

当 $Z_L=Z_0$ 时，$\Gamma_L=0$，则沿线电压和电流改写为

$$\begin{cases} U(z)=U_i(z)=A_1 e^{j\beta z} \\ I(z)=I_i(z)=\dfrac{A_1}{Z_0}e^{j\beta z} \end{cases} \tag{5.4.3}$$

其瞬时值表示为

$$\begin{cases} u(z,t)=|A_1|\cos(\omega t+\beta z+\phi_0) \\ i(z,t)=\dfrac{|A_1|}{Z_0}\cos(\omega t+\beta z+\phi_0) \end{cases} \tag{5.4.4}$$

式中，$|A_1|$ 和 ϕ_0 分别是 A_1 的模和相位。

在有耗条件下，传输线上任意一点 z 处的传输功率由式(5.4.1)可得

$$P(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[U(z)I^*(z)]=\frac{|A_1|^2}{2Z_0}e^{2\alpha z}[1-|\Gamma_L|^2 e^{-4\alpha z}]=P_i(z)-P_r(z) \tag{5.4.5}$$

式中，$P_i(z)$ 和 $P_r(z)$ 分别为入射波功率和反射波功率。

由于行波状态下 $\Gamma_L=0$，并考虑无耗传输线 $\alpha=0$，则式(5.4.5)化简为

$$P(z)=\frac{|A_1|^2}{2Z_0} \tag{5.4.6}$$

可以看到，此时的入射波功率最大，反射波功率为0。

将行波状态的特点总结如下：

(1) 行波无反射状态，沿线只有入射的行波而没有反射波。

(2) 入射波的能量全被负载所吸收，即负载吸收功率等于入射波功率。

(3) 沿线任意一点的输入阻抗均等于传输线特性阻抗。

(4) 沿线电压和电流的振幅值保持不变。

(5) 沿线电压和电流的相位以 $e^{j(\omega t+\beta z+\phi_0)}$ 的规律变化，在传播方向上连续滞后。

5.4.2 驻波状态

当终端为短路($Z_L=0$)、开路($Z_L=\infty$)或纯电抗负载($Z_L=\pm jX_L$)这三种情况之一

时，传输线处于驻波状态。此时终端反射系数$|\Gamma_L|=1$，入射波在终端产生全反射，沿线入射波与反射波叠加后，电压和电流在时间和空间上都会有$\pi/2$的相位差，形成驻波。

1. 终端短路

终端短路，即终端没有接负载，用短路线把两根传输线连接，负载阻抗$Z_L=0$，终端反射系数$\Gamma_L=-1$。

将$\Gamma_L=-1$代入式(5.4.1)得

$$\begin{cases} U(z)=\mathrm{j}2A_1\sin\beta z \\ I(z)=\dfrac{2A_1}{Z_0}\cos\beta z \end{cases} \tag{5.4.7}$$

其瞬时值表示为

$$\begin{cases} u(z,t)=2\mid A_1\mid\cos\left(\omega t+\phi_0+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\beta z \\ i(z,t)=\dfrac{2\mid A_1\mid}{Z_0}\cos(\omega t+\phi_0)\cos\beta z \end{cases} \tag{5.4.8}$$

式中，$|A_1|$和ϕ_0分别是A_1的模和相位。

此时传输线上任一点z处的输入阻抗为

$$Z_{\mathrm{in}}(z)=Z_0\frac{Z_L+\mathrm{j}Z_0\tan\beta z}{Z_0+\mathrm{j}Z_L\tan\beta z}=\mathrm{j}Z_0\tan\beta z \tag{5.4.9}$$

将$\Gamma_L=-1$、$\alpha=0$（若传输线无耗），代入式(5.4.5)，可得传输线上任一点z处的传输功率为

$$P(z)=0 \tag{5.4.10}$$

图5.4.1表示终端短路时电压和电流分布特征。

1）振幅分布

沿线电压、电流的振幅分布如图5.4.1(a)所示。

沿线电压、电流振幅按正余弦变化，其极大值点称为波腹点，极小值点称为波节点。结合图5.4.1(a)和式(5.4.7)，电压波节点振幅为0，位于

$$z=\frac{n\lambda}{2},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.11}$$

该位置为电流波腹点，取最大值为$2|A_1|/Z_0$。

电压波腹点振幅为$2|A_1|$，位于

$$z=\frac{(2n+1)\lambda}{4},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.12}$$

该位置为电流波节点，取最小值为0。

2）相位分布

沿线电压、电流的相位分布如图5.4.1(b)所示。电压、电流的相位始终相差$\pi/2$。

3）阻抗分布

沿线阻抗分布如图5.4.1(c)所示。由式(5.4.9)知，沿线任一点z处的输入阻抗为

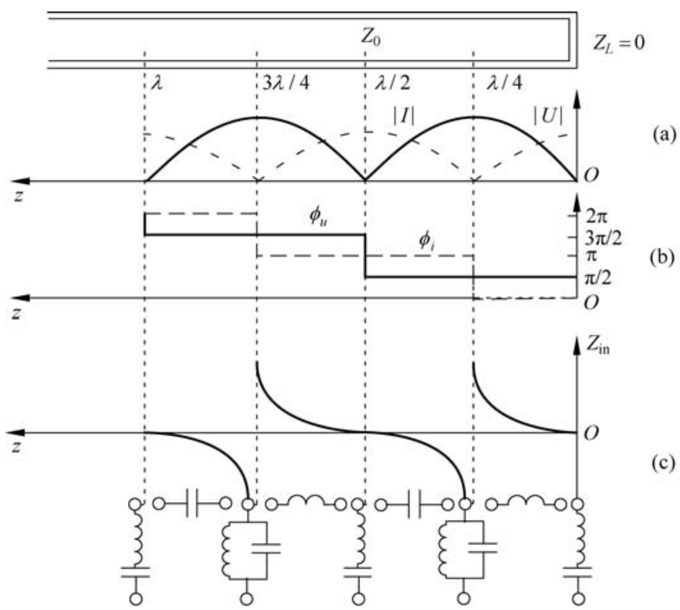


图 5.4.1 终端短路时电压和电流分布特征

纯电抗。在终端 $z=0$ 处，电压位于波节点，输入阻抗 $Z_{in}=0$，相当于串联谐振；在 $0<z<\lambda/4$ 范围内，输入阻抗相当于纯电感；在 $z=\lambda/4$ 处，电压位于波腹点，输入阻抗 $Z_{in}=\infty$，相当于并联谐振；在 $\lambda/4<z<\lambda/2$ 范围内，输入阻抗相当于纯电容。

4）各个参量

输入阻抗 $Z_{in}(z)$、反射系数 $\Gamma(z)$、驻波比 ρ、行波系数 K 等传输线参量为

$$Z_{in}(z)=\mathrm{j}Z_0\tan\beta z,\quad \Gamma(z)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z},\quad \rho=\infty,\quad K=0 \tag{5.4.13}$$

5）传输功率

驻波状态下，传输线上无能量传输，电磁能量在信号源和负载之间来回振荡。

2. 终端开路

终端开路，即负载阻抗 $Z_L=\infty$，终端反射系数 $\Gamma_L=1$。

将 $\Gamma_L=1$ 代入式(5.4.1)得传输线沿线任一点 z 处的电压、电流分布

$$\begin{cases} U(z)=2A_1\cos\beta z \\ I(z)=\dfrac{\mathrm{j}2A_1}{Z_0}\sin\beta z \end{cases} \tag{5.4.14}$$

此时传输线上任一点 z 处的输入阻抗为

$$Z_{in}(z)=Z_0\frac{Z_L+\mathrm{j}Z_0\tan\beta z}{Z_0+\mathrm{j}Z_L\tan\beta z}=-\mathrm{j}Z_0\cot\beta z \tag{5.4.15}$$

图 5.4.2 表示终端开路时电压和电流分布特征。可以看到，电压波腹点位于

$$z=\frac{n\lambda}{2},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.16}$$

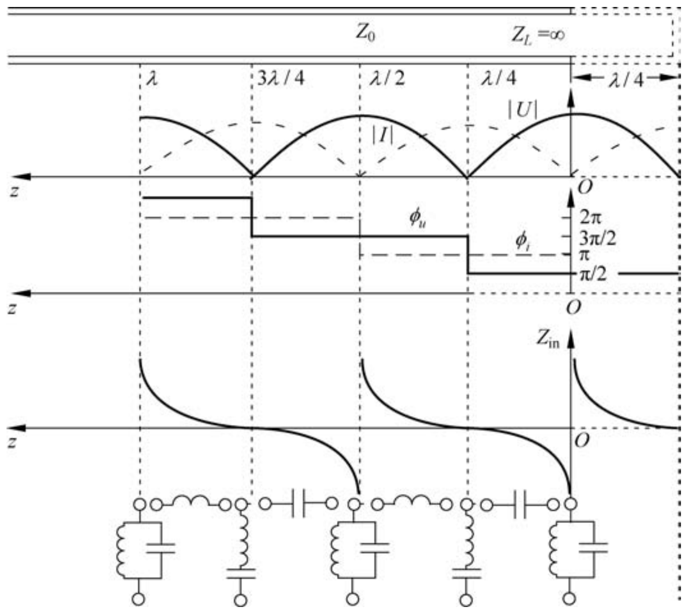


图 5.4.2　终端开路时电压和电流分布特征

该位置是电流波节点。电压波节点位于

$$z=\frac{(2n+1)\lambda}{4},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.17}$$

该位置是电流波腹点。

终端开路可以用一段长度为 $\lambda/4$ 的终端短路线来实现。通过比较图 5.4.2 与图 5.4.1 可知，将终端短路传输线向信号源方向截取 $\lambda/4$ 长度，其电压、电流和阻抗分布即为终端开路时的分布曲线。另外，终端开路时的传输线参量为

$$Z_{\text{in}}(z)=-\mathrm{j}Z_0\cot\beta z,\quad \Gamma(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z},\quad \rho=\infty,\quad K=0 \tag{5.4.18}$$

3. 终端接纯电抗负载

终端为纯电抗负载时（$Z_L=\pm\mathrm{j}X_L$），由于纯电抗负载不消耗能量，因此在终端也形成全反射，传输线同样工作在驻波状态。

1）纯电感负载 $Z_L=\mathrm{j}X_L$

由式(5.4.9)可知，可以用小于 $\lambda/4$ 的短路线来等效纯电感，其等效长度为

$$l_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sc}}=\frac{\lambda}{2\pi}\arctan\left(\frac{X_L}{Z_0}\right) \tag{5.4.19}$$

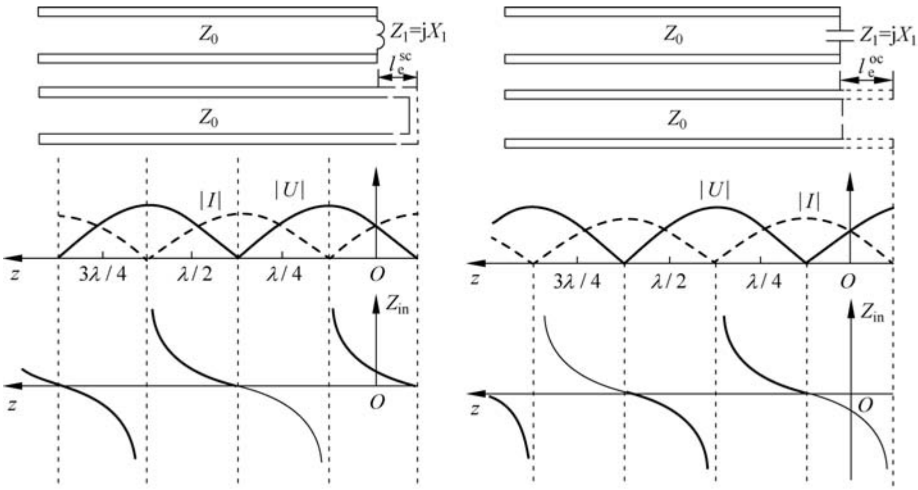
2）纯电容负载 $Z_L=-\mathrm{j}X_L$

由式(5.4.15)可知，可以用小于 $\lambda/4$ 的开路线来等效纯电容，其等效长度为

$$l_{\mathrm{e}}^{\mathrm{oc}}=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{X_L}{Z_0}\right) \tag{5.4.20}$$

采用式(5.4.19)或式(5.4.20)所示等效长度的短路线或开路线来取代纯电抗负载，

即可得到沿线电压、电流和输入阻抗的分布曲线，如图 5.4.3 所示。



(a) 纯电感负载　　(b) 纯电容负载

图 5.4.3　终端接纯电抗负载时的电压和电流分布特征

在图 5.4.3(a)中纯电感负载情况下，可以看到电压波节点位于

$$z=\frac{n\lambda}{2}-l_e^{sc},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.21}$$

电压波腹点位于

$$z=\frac{(2n+1)\lambda}{4}-l_e^{sc},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.22}$$

在图 5.4.3(b)中纯电容负载情况下，可以看到电压波节点位于

$$z=\frac{(2n+1)\lambda}{4}-l_e^{oc},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.23}$$

电压波腹点位于

$$z=\frac{n\lambda}{2}-l_e^{oc},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.24}$$

5.4.3　行驻波状态

当传输线终端接任意负载 $Z_L=R_L\pm jX_L$ 时，入射波的一部分被终端负载吸收，另一部分被反射，在传输线上由入射波和部分反射波叠加形成行驻波状态。

在行驻波状态下，终端的反射系数 Γ_L 为

$$\Gamma_L=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{R_L\pm jX_L-Z_0}{R_L\pm jX_L+Z_0}=|\Gamma_L|e^{\pm j\phi_L} \tag{5.4.25}$$

式中，

$$|\Gamma_L| = \sqrt{\frac{(R_L - Z_0)^2 + X_L^2}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2}} \tag{5.4.26}$$

$$\phi_L = \arctan\frac{2X_L Z_0}{R_L^2 + X_L^2 - Z_0^2} \tag{5.4.27}$$

1. 电压、电流的振幅分布

传输线任一点 z 处的电压、电流表达式为

$$|U(z)| = \left|\frac{U_L + I_L Z_0}{2}\right| \sqrt{1 + |\Gamma_L|^2 + 2|\Gamma_L|\cos(2\beta z - \phi_L)} \tag{5.4.28}$$

$$|I(z)| = \left|\frac{U_L + I_L Z_0}{2Z_0}\right| \sqrt{1 + |\Gamma_L|^2 - 2|\Gamma_L|\cos(2\beta z - \phi_L)} \tag{5.4.29}$$

由式(5.4.28)可知，当 $\cos(2\beta z - \phi_L) = 1$ 时，对应的 z 为电压波腹点。即 $2\beta z - \phi_L = 2n\pi, n = 0,1,2,\cdots$，得到

$$z_{\max} = \frac{\lambda\phi_L}{4\pi} + n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{5.4.30}$$

此时，电压为最大值(波腹点)，电流为最小值(波节点)，二者分别为

$$|U|_{\max} = |A_1|[1 + |\Gamma_L|] \tag{5.4.31}$$

$$|I|_{\min} = \frac{|A_1|}{Z_0}[1 - |\Gamma_L|] \tag{5.4.32}$$

将 $n = 0$ 代入式(5.4.30)，得到第一个电压波腹点和负载之间的距离

$$z_{\max 1} = \frac{\lambda\phi_L}{4\pi} \tag{5.4.33}$$

同理可得，当 $\cos(2\beta z - \phi_L) = -1$ 时，对应的 z 为电压波节点。即 $2\beta z - \phi_L = (2n+1)\pi, n = 0,1,2,\cdots$，得到

$$z_{\min} = \frac{\lambda\phi_L}{4\pi} + (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{5.4.34}$$

因此，第一个电压波节点和负载之间的距离为

$$z_{\min 1} = \frac{\lambda\phi_L}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} \tag{5.4.35}$$

对应该点的电压、电流分别为

$$|U|_{\min} = |A_1|[1 - |\Gamma_L|] \tag{5.4.36}$$

$$|I|_{\max} = \frac{|A_1|}{Z_0}[1 + |\Gamma_L|] \tag{5.4.37}$$

传输线终端接任意负载 $Z_L = R_L \pm jX_L$ 时，沿线电压、电流振幅分布如图 5.4.4 所示。根据负载阻抗的具体取值不同，又区分为以下四种情况。

1) 负载 $Z_L = R_L > Z_0$

负载是大于传输线特性阻抗的纯电阻，$\phi_L = 0$，$z_{\max 1} = 0$。也就是说，终端位置为电

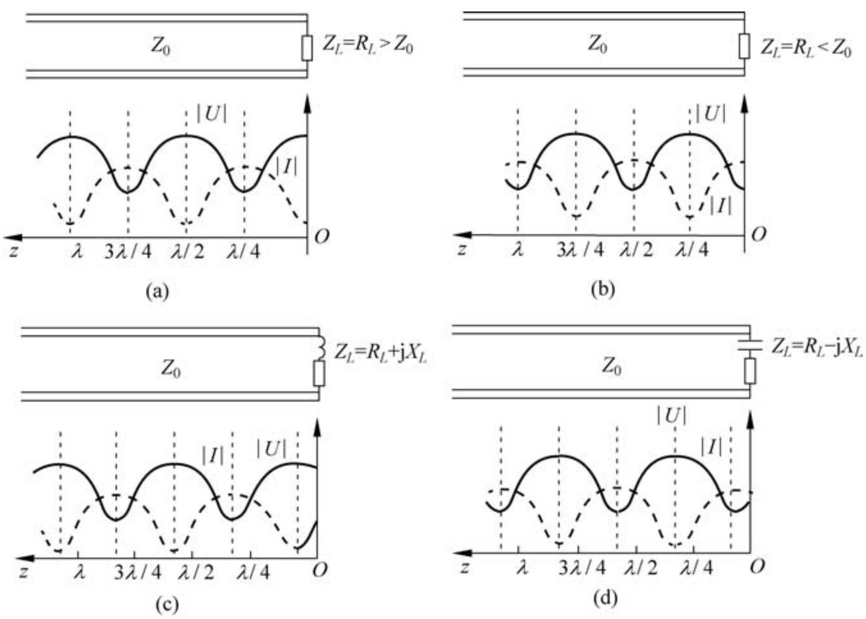


图 5.4.4　终端接任意负载时的电压和电流分布特征

压波腹点、电流波节点，如图 5.4.4(a)所示。

2) 负载 $Z_L=R_L<Z_0$

负载是小于传输线特性阻抗的纯电阻，$\phi_L=\pi$，$z_{\max1}=\lambda/4$。根据 $\lambda/4$ 阻抗变化性，终端位置为电压波节点、电流波腹点，如图 5.4.4(b)所示。

3) 负载为感性阻抗 $Z_L=R_L+\mathrm{j}X_L$

由式(5.3.28)，可得 $0<\phi_L<\pi$。根据式(5.4.33)，可知 $0<z_{\max1}<\lambda/4$。表明离开终端向信号源方向第一个出现的是电压波腹点、电流波节点，如图 5.4.4(c)所示。

4) 负载为容性阻抗 $Z_L=R_L-\mathrm{j}X_L$

由式(5.3.28)，可得 $\pi<\phi_L<2\pi$。根据式(5.4.33)，可知 $\lambda/4<z_{\max1}<\lambda/2$。表明离开终端向信号源方向第一个出现的是电压波节点、电流波腹点，如图 5.4.4(d)所示。

2. 阻抗分布

沿传输线任意点的输入阻抗按公式 $Z_{\text{in}}(z)=Z_0\dfrac{Z_L+\mathrm{j}Z_0\tan(\beta z)}{Z_0+\mathrm{j}Z_L\tan(\beta z)}$求出。在电压波腹点(电流波节点)，其输入阻抗由式(5.4.31)和式(5.4.32)得出

$$R_{\max}=\frac{|U|_{\max}}{|I|_{\min}}=Z_0\frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}=Z_0\rho>Z_0 \tag{5.4.38}$$

同样，在电压波节点(电流波腹点)的输入阻抗为

$$R_{\min}=\frac{|U|_{\min}}{|I|_{\max}}=Z_0\frac{1-|\Gamma_L|}{1+|\Gamma_L|}=Z_0K<Z_0 \tag{5.4.39}$$

电压波腹点和波节点相距 $\lambda/4$，两点的输入阻抗均为纯电阻，且满足以下关系：

$$R_{\max}R_{\min}=Z_0^2 \tag{5.4.40}$$

*5.5 史密斯圆图

史密斯圆图也称阻抗圆图，由美国电子工程师菲利普·史密斯于1939年发明。该图将传输线的特性参数和工作参数融为一体，是一种采用图解法求解的专用图表。利用史密斯圆图，可以方便地在已知传输线特性阻抗、传播常数和长度等特性参数的基础上，进行反射系数、输入阻抗、驻波比等工作参数的换算。

史密斯圆图的基本功能包括：

(1) 已知输入阻抗，求输入导纳(及其逆问题)。

(2) 已知输入阻抗，求反射系数和驻波比(及其逆问题)。

(3) 已知负载阻抗，求输入阻抗。

(4) 已知驻波比和波节点(波腹点)位置，求阻抗。

5.5.1 阻抗圆图

由均匀无耗传输线的输入阻抗计算公式可得

$$\bar{Z}_{in}(z)=\frac{Z_L+jZ_0\tan(\beta z)}{Z_0+jZ_L\tan(\beta z)} \tag{5.5.1}$$

式中，$\bar{Z}_{in}(z)$为传输线归一化阻抗，定义为传输线输入阻抗与特性阻抗之比，即

$$\bar{Z}_{in}(z)=\frac{Z_{in}(z)}{Z_0}=r(z)+jx(z) \tag{5.5.2}$$

式中，$r(z)$为归一化电阻；$x(z)$为归一化电抗。

为表示传输线归一化阻抗与反射系数之间的关系，由式(5.3.34)可得

$$\bar{Z}_{in}(z)=\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)} \tag{5.5.3}$$

由上式得

$$\Gamma(z)=\frac{\bar{Z}_{in}(z)-1}{\bar{Z}_{in}(z)+1} \tag{5.5.4}$$

$\Gamma(z)$一般为复数，可表示为

$$\Gamma(z)=|\Gamma(z)|e^{j\phi(z)}=u+jv \tag{5.5.5}$$

式中，u 和 v 分别表示$\Gamma(z)$的实部和虚部。

式(5.5.3)和式(5.5.4)表明，归一化阻抗 $\bar{Z}_{in}(z)$和反射系数 $\Gamma(z)$之间存在一一对应关系。我们可以制成一张阻抗圆图，来反映这种对应关系。

1. 第一步：建立等反射系数圆

建立坐标系，以反射系数的实部 u 为横坐标、虚部 v 为纵坐标，得到反射系数复平

面，也称 Γ 平面，如图 5.5.1 所示。

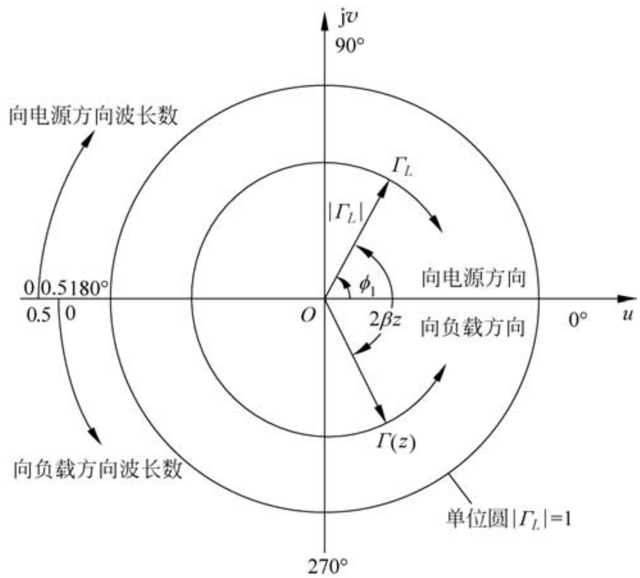


图 5.5.1　等反射系数圆

在 Γ 平面上可以画出等反射系数模和等反射系数相位的曲线。$|\Gamma(z)|$ 对应 Γ 平面上一簇以原点为圆心的同心圆，即等反射系数圆。由于 $0\leqslant|\Gamma(z)|\leqslant 1$，故所有的圆均在 $|\Gamma(z)|=1$ 对应的那个最大圆内。$|\Gamma(z)|=1$ 的圆代表全反射状态，$|\Gamma(z)|=0$ 缩为原点，称为阻抗匹配点。圆越大，离原点越远，说明系统匹配性越差。

等反射系数相位曲线是从原点发出的径向线，该径向线与横轴的夹角就是反射系数的相位 $\phi(z)$。

当沿传输线自终端负载向信号源方向移动时，由 $\Gamma(z)=\Gamma_L \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}$ 可见，$\Gamma(z)$ 的相位越来越滞后，相当于反射系数沿顺时针方向旋转；从信号源向终端负载方向移动时，反射系数则沿逆时针方向旋转。

沿传输线移动 $\lambda/2$ 时，反射系数的相位变化 2π，对应在反射系数圆上旋转了一圈。

2. 第二步：建立归一化等电阻圆和归一化等电抗圆

将式(5.5.2)代入式(5.5.4)，得

$$\Gamma(z)=\frac{r+\mathrm{j}x-1}{r+\mathrm{j}x+1}=\frac{(r-1)+\mathrm{j}x}{(r+1)+\mathrm{j}x} \tag{5.5.6}$$

即

$$u+\mathrm{j}v=\frac{(r-1)+\mathrm{j}x}{(r+1)+\mathrm{j}x} \tag{5.5.7}$$

整理上式，得到实部 u 和虚部 v，分别为

$$u=\frac{(r^2-1)+x^2}{(r+1)^2+x^2} \tag{5.5.8}$$

$$v=\frac{2x}{(r+1)^2+x^2} \tag{5.5.9}$$

联立式(5.5.8)和式(5.5.9),消去 x,整理可得

$$\left(u-\frac{r}{1+r}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \tag{5.5.10}$$

上式表明,当 r 为常数,u、v 所确定的曲线是圆,圆心为$(r/(r+1),0)$,半径为 $1/(1+r)$,称为归一化等电阻圆。每一个 r 对应一个归一化电阻圆,如图 5.5.2 所示。由归一化电阻圆可知:

(1) 圆心都在实轴上,圆心横坐标与半径之和恒等于 1,每一个圆都与直线 $u=1$ 在(1,0)点相切。

(2) r 的取值范围为 $0\sim\infty$,对应着无穷多个归一化电阻圆。

(3) $r=1$ 的圆与虚轴在原点(0,0)相切。

(4) $r=\infty$的圆缩为一点(1,0),称为开路点。

(5) $0<r<1$ 的圆均在 $r=1$ 的圆以外。

(6) $1<r<\infty$的圆均在 $r=1$ 的圆以内。

联立式(5.5.8)和式(5.5.9),消去 r,整理可得

$$(u-1)^2+\left(v-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{5.5.11}$$

上式表明,当 x 为常数,u、v 所确定的曲线同样是圆,圆心为$(1,1/x)$,半径为 $1/|x|$,称为归一化等电抗圆。每一个 x 对应一个归一化电抗圆,如图 5.5.3 所示。由归一化电抗圆可知:

(1) 圆心都在直线 $u=1$ 上,圆心纵坐标与半径相等,每一个圆都与实轴在(1,0)相切。

(2) x 的取值范围为$-\infty\sim+\infty$,对应着无穷多个归一化电抗圆。

(3) $x=-\infty$和 $x=\infty$的圆均缩为一点(1,0),称为开路点。

(4) $x<0$ 的圆都在实轴以下。

(5) $x>0$ 的圆都在实轴以上。

(6) $x=0$ 的圆是实轴,因此实轴又被称为纯电阻线。

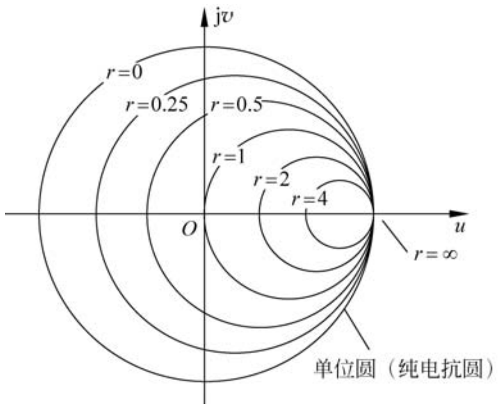


图 5.5.2 归一化电阻圆

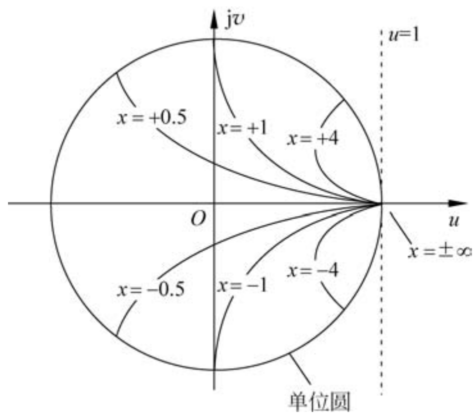


图 5.5.3 归一化电抗圆

3. 第三步：构成阻抗圆图

将等归一化电阻圆和等归一化电抗圆叠加到 Γ 平面上，即构成阻抗圆图，如图 5.5.4 所示。对阻抗圆图做如下说明。

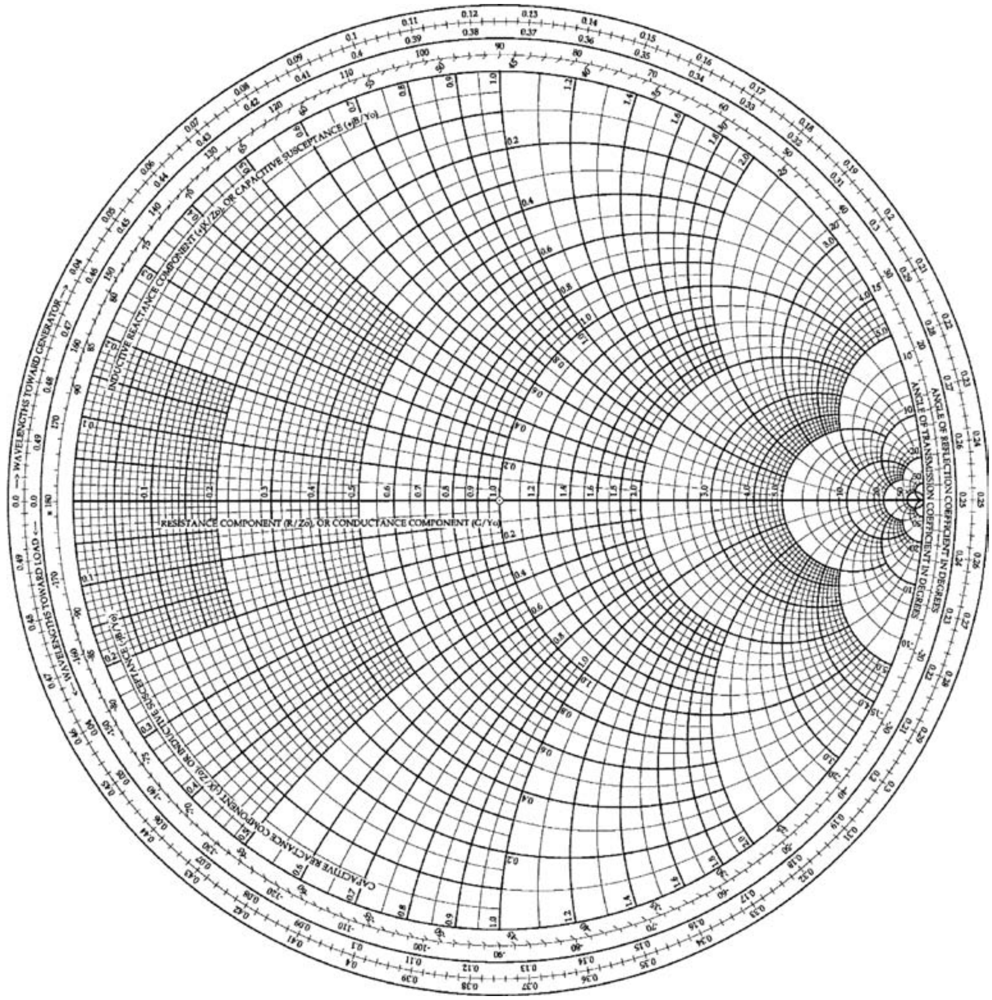


图 5.5.4　阻抗圆图

(1) 传输线沿线任意一点的归一化阻抗 $\bar{Z}_{\text{in}}(z)=r(z)+\mathrm{j}x(z)$ 对应于阻抗圆图中归一化等电阻圆和归一化等电抗圆的交点。r 值标注在纯电阻线上，x 值标注在 $|\Gamma|=1$ 的单位圆内侧等 x 线与 $|\Gamma|=1$ 的单位圆交点处。

(2) 阻抗圆图上的任意一点都是等反射系数圆、等反射系数相位线、等归一化电阻圆和等归一化电抗圆的交点，即在阻抗圆图上可同时读出对应于传输线上任一点的反射系数(模与相位)、归一化阻抗(电阻和电抗)。为了使所画出的圆图更为清晰，实际的圆图上并不画出等反射系数圆和等反射系数相位线，可以通过直尺测量得到 $|\Gamma(z)|$ 值，通过

读取圆图最外圈标出的相对波长 l/λ 或相位 $2\beta l$ 得到 $\phi(z)$值。

(3) 在传输线上的移动对应于圆图中相应点的转动。如图 5.5.5 所示,当沿线由 A 处向负载方向移动至 B 处,反映在圆图上为点 Z_A 沿其等反射系数圆逆时针方向转 $2\beta l_B$ 弧度或 l_B/λ 电长度至点 Z_B。若沿线由 A 处向信号源方向移动至 F 处,则反映在圆图上为点 Z_A 沿其等反射系数圆顺时针方向转 $2\beta l_F$ 弧度或 l_F/λ 电长度至点 Z_F。

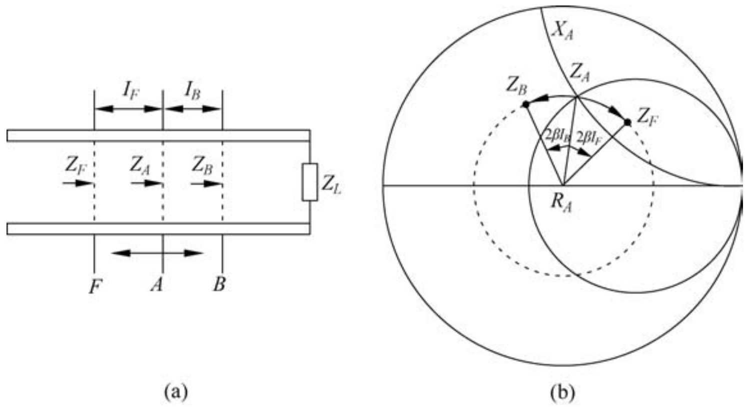


图 5.5.5　沿线位移对应于圆图中相应点的转动

为了熟悉圆图上各点的归一化阻抗及相关参数的取值范围,下面来说明阻抗圆图上一些关键的点、线、面的意义及其对应的各种参数,如图 5.5.6 所示。

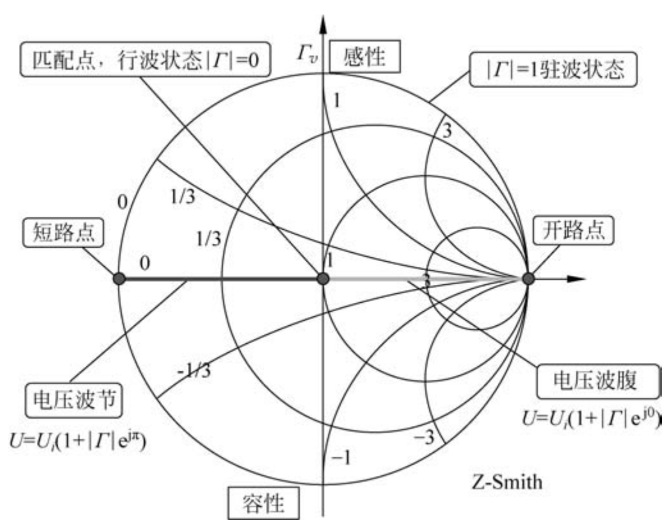


图 5.5.6　阻抗圆图上特殊点、线、面的意义

(1) 匹配点,即阻抗圆图的中心点。该点的$|\Gamma|=0$、$\bar{Z}_{in}=1$、$\rho=1$,相应于传输线上的行波状态。

(2) 上纯电抗圆和下纯电抗圆。$|\Gamma|=1$ 的单位圆为纯电抗圆。纯电抗圆的上半部分称为上纯电抗圆,$x>0$;下半部分称为下纯电抗圆,$x<0$。

(3) 短路点和开路点。Γ 平面的负实轴与纯电抗圆的交点为短路点；Γ 平面的正实轴与纯电抗圆的交点为开路点。

(4) 左纯电阻线和右纯电阻线。对于纯电阻线，有 $x=0$，因此 $\bar{Z}_{\text{in}}=r$，那么 Γ 也是实数。左纯电阻线指的是实轴上 $-1<u<0$ 的这一部分，$0<r<1$，终端位置为电压波节点，由式(5.4.39)可知

$$\bar{Z}_{\text{in}}=r=\frac{1-|\Gamma|}{1+|\Gamma|}=K<1 \tag{5.5.12}$$

也就是说，左纯电阻线上 r 的数值表示行波系数 K 值。

右纯电阻线指的是实轴上 $0<u<0$ 的这一部分，$1<r<\infty$，终端位置为电压波腹点，由式(5.4.38)可知

$$\bar{Z}_{\text{in}}=r=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=\rho>1 \tag{5.5.13}$$

也就是说，右纯电阻线上 r 的数值表示驻波比 ρ 值。

(5) 圆图中心点(即匹配点)的 $|\Gamma|=0$，圆图最大圆(即电抗圆)的 $|\Gamma|=1$，因此二者之间的 $|\Gamma|$ 是等分的，可用直尺测量得到。

(6) 由于 Γ 的周期为半波长，因此最大的相对波长为 0.5，相位范围是 $0\sim\pm\pi$。

5.5.2 导纳圆图

归一化输入导纳是归一化输入阻抗的倒数

$$\bar{Y}_{\text{in}}=\frac{1}{\bar{Z}_{\text{in}}}=\frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \tag{5.5.14}$$

因此

$$\Gamma=\frac{1-\bar{Y}_{\text{in}}}{1+\bar{Y}_{\text{in}}} \tag{5.5.15}$$

而

$$\bar{Y}_{\text{in}}=g+\mathrm{j}b \tag{5.5.16}$$

将式(5.5.16)代入式(5.5.15)中，得

$$\Gamma=\frac{(1-g)-\mathrm{j}b}{(1+g)+\mathrm{j}b} \tag{5.5.17}$$

由于 $\Gamma=u+\mathrm{j}v$，因此

$$u+\mathrm{j}v=\frac{(1-g)-\mathrm{j}b}{(1+g)+\mathrm{j}b}=-\frac{(g-1)+\mathrm{j}b}{(g+1)+\mathrm{j}b} \tag{5.5.18}$$

比较式(5.5.18)与式(5.5.7)发现，两式在形式上一样，只相差一个负号。若将阻抗圆图中的 r 用 g 代替、x 用 b 代替、Γ 用 $-\Gamma$ 代替，则阻抗圆图变为导纳圆图。由于电流反射系数 Γ_i 恰好是电压反射系数 Γ 的负数，因此导纳圆图可以看作是由电流反射系数建立。

由上述讨论可知，图 5.5.4 所示的阻抗圆图可以当作导纳圆图。需要说明的是，图 5.5.4 用作阻抗圆图时，图上的点表示电压反射系数 Γ 和归一化输入阻抗 $\bar{Z}_{\text{in}}$；而该

图用作导纳圆图时，图上的点则表示电流反射系数 Γ_i 和归一化输入导纳 $\overline{Y}_{in}$。

将图 5.5.4 作为导纳圆图使用时，与阻抗圆图上一些点、线、面存在物理意义的区别如表 5.5.1 所示，其中点、线、面的位置参考图 5.5.7。

表 5.5.1　阻抗圆图与导纳圆图上特殊点、线、面的区别

在圆图上的点、线、面	阻抗圆图	导纳圆图
A 点	开路点 $\Gamma=1$	短路点 $\Gamma=-1$
B 点	短路点 $\Gamma=-1$	开路点 $\Gamma=1$
O 点	匹配点 $\Gamma=0$	匹配点 $\Gamma=0$
OA 线	电压波腹	电压波节
OB 线	电压波节	电压波腹
$\lvert\Gamma\rvert=1$ 圆	纯电抗线	纯电纳线
上半圆	感性	容性
下半圆	容性	感性

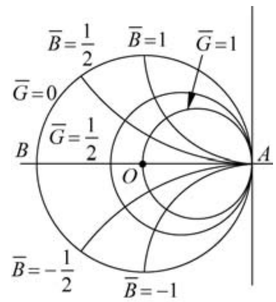


图 5.5.7　导纳圆图上的特殊点、线、面

视频5-3

5.6　阻抗匹配

5.6.1　阻抗匹配的概念

阻抗匹配是使微波传输系统无反射、处于行波或接近行波状态的技术措施。在微波传输系统中，阻抗匹配极其重要，它关系到系统的传输效率、功率容量与工作稳定性，关系到微波元器件的质量等一系列问题。

微波传输系统一般由电源、传输线和负载三部分组成。电源内阻和负载阻抗一般为复数，而无耗传输线的特性阻抗为实数。传输线的作用是将电源的功率传送到负载阻抗。因此，传输线应工作在行波状态。为达到该工作状态需要采用阻抗匹配技术。通常阻抗匹配有三种：负载阻抗匹配、信号源无反射阻抗匹配和信号源共轭阻抗匹配。

1. 负载阻抗匹配

负载阻抗匹配是指负载阻抗 Z_L 与传输线特性阻抗 Z_0 相等，即 $Z_L=Z_0$。此时，负载无反射，传输线上电压和电流呈行波分布，信号源入射的微波功率被负载完全吸收。传输线的传输效率最高。

2. 信号源无反射阻抗匹配

信号源无反射阻抗匹配是指信号源内阻抗 Z_g 与传输线特性阻抗 Z_0 相等，即 $Z_g=Z_0$。此时，信号源输出能量无反射地传送给传输线；另一方面，如传输线上反射波传至信号源，将被信号源全部吸收。实现了这种匹配的信号源称为匹配源。实现的方法是在电源的输出端插入一个隔离器或去耦衰减器，使得只有入射波通过、反射波被吸收。

3. 信号源共轭阻抗匹配

信号源共轭阻抗匹配是指信号源端的传输线输入阻抗 Z_{in} 与信号源内阻抗 Z_g 互为共轭复数,即 $Z_{in}=Z_g^*$。信号源内阻抗 $Z_g=R_g+jX_g$,传输线输入阻抗 $Z_{in}=R_{in}+jX_{in}$,则在信号源共轭阻抗匹配状态下,$Z_{in}=Z_g^*$、$R_g=R_{in}$、$X_g=-X_{in}$。信号源输出最大功率为

$$\begin{aligned}P_{max}&=\frac{1}{2}\frac{|E_g|^2R_{in}}{|Z_g+Z_{in}|^2}=\frac{1}{2}\frac{|E_g|^2R_{in}}{(R_g+R_{in})^2+(X_g+X_{in})^2}\\&=\frac{1}{2}|E_g|^2\frac{1}{4R_g}\end{aligned}\tag{5.6.1}$$

只有当 $Z_g=Z_0=Z_L$ 均为纯电阻时,三种阻抗匹配能够同时实现,这在实际上很难实现。本书讨论的重点是负载阻抗匹配。

实现负载阻抗匹配的方法是在传输线与负载之间加入一阻抗匹配网络,接入传输线时应尽可能靠近负载,通过匹配网络引入一个新的反射波来抵消原来的反射波,从而完成匹配。匹配网络通常有阻抗变换器和支节匹配器两类。

5.6.2 1/4 波长阻抗变换器

1. 负载阻抗为纯电阻

当负载阻抗为纯电阻 R_L 时,可在负载与主传输线之间插入一节长度为 $\lambda/4$、特性阻抗为 Z_{01} 的传输线实现阻抗匹配,如图 5.6.1 所示。此时,$\lambda/4$ 阻抗变换器输入端的输入阻抗为

$$Z_{in}=Z_{01}\frac{R_L+jZ_{01}\tan(\beta\lambda/4)}{Z_{01}+jR_L\tan(\beta\lambda/4)}=\frac{Z_{01}^2}{R_L}\tag{5.6.2}$$

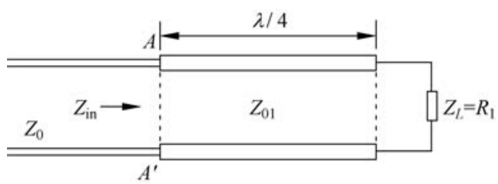


图 5.6.1 1/4 波长阻抗变换器(负载为纯电阻)

要使阻抗变换器输入端与主传输线匹配,必须 $Z_{in}=Z_0$,因此 $Z_0=Z_{01}^2/R_L$,则

$$Z_{01}=\sqrt{Z_0R_L}\tag{5.6.3}$$

2. 负载阻抗为复阻抗

当负载阻抗为复阻抗 $Z_L=R_L+jX_L$ 时,$\lambda/4$ 阻抗变换器不能直接与负载相接,而应接在距负载一段距离的电压波节点或波腹点上,再经 $\lambda/4$ 阻抗变换器后与主传输线匹配,如图 5.6.2 所示。

由式(5.4.38),电压波腹点阻抗为 $R_{max}=Z_0\rho$,则在电压波腹点上接入的 $\lambda/4$ 阻抗

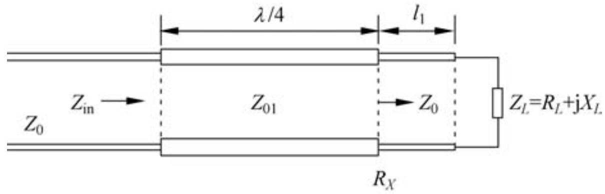


图 5.6.2　1/4 波长阻抗变换器(负载为复阻抗)

变换器的特性阻抗为

$$Z_{01}=\sqrt{Z_0R_{\max}}=Z_0\sqrt{\rho} \tag{5.6.4}$$

由式(5.4.39),电压波节点阻抗为 $R_{\min}=Z_0K$,则在电压波节点上接入的 λ/4 阻抗变换器的特性阻抗为

$$Z_{01}=\sqrt{Z_0R_{\min}}=Z_0\sqrt{K} \tag{5.6.5}$$

【例 5-2】 如图 5.6.3 所示,一无耗传输线的特性阻抗 $Z_0=75\Omega$,终端接负载阻抗 $Z_L=(100-j50)\Omega$,试用 1/4 波长传输线将负载与主传输线匹配。

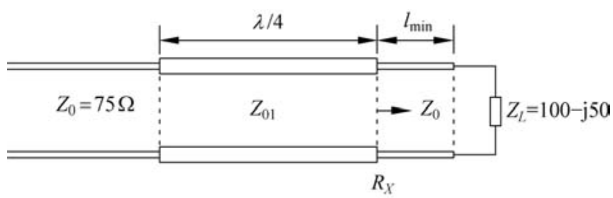


图 5.6.3　1/4 波长阻抗变换器匹配例题

解:1/4 波长传输线完成实阻的变换。在电压波腹点或波节点处阻抗为实阻,以波节点为例:$R_{\min}=\dfrac{Z_0}{\rho}$。则如图所示的 1/4 波长传输线的特性阻抗为

$$Z_{01}=\sqrt{Z_0R_{\min}}=\sqrt{Z_0\frac{Z_0}{\rho}}=\frac{Z_0}{\sqrt{\rho}}$$

由于 $\rho=\dfrac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}$,而 $\Gamma_L=\dfrac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\dfrac{25-j50}{175-j50}=0.31e^{-j47.5^\circ}$,因此 $\rho=\dfrac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}=\dfrac{1+0.31}{1-0.31}\approx1.9$。则 $Z_{01}=\dfrac{Z_0}{\sqrt{\rho}}=\dfrac{75}{\sqrt{1.9}}\approx54.4(\Omega)$。

接入点位置 $l_{\min}$ 满足 $\varphi_L-2\beta l_{\min}=-\pi$,所以,

$$l_{\min}=\frac{180^\circ-47.5^\circ}{2\beta}=\frac{(180^\circ-47.5^\circ)\lambda}{2\times2\times180^\circ}=0.184\lambda$$

5.6.3　单支节匹配器

支节匹配器的原理是利用在传输线上并联或串联终端短路或开路的分支线,产生新的反射波来抵消原来的反射波,从而达到阻抗匹配。

单支节匹配器如图 5.6.4 所示，图 5.6.4(a)为并联匹配，图 5.6.4(b)为串联匹配。单支节匹配有两个可调的参数：支节与负载的距离 d，并联或串联支节的输入电纳或电抗值，即开路或短路支节的长度 l。

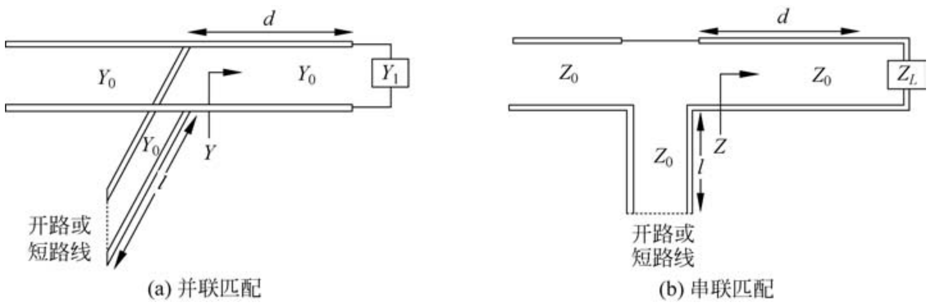


图 5.6.4　单支节匹配电路

1. 并联支节

并联支节匹配原理为：通过选择适当的距离 d，在主传输线上找到这样一点，该点向负载方向的输入导纳为 $Y_0+\mathrm{j}B$，在该点并联一个输入导纳为 $-\mathrm{j}B$ 的支节，就可以抵消主传输线负载方向输入导纳的电纳分量，从而达到阻抗匹配。

下面分别介绍实现并联支节匹配的解析法和圆图法。

1）解析法

将负载阻抗表示为 $Z_L=R_L+\mathrm{j}X_L$，距离负载 d 处的传输线输入阻抗为

$$Z_{\text{in}}=Z_0\frac{(R_L+\mathrm{j}X_L)+\mathrm{j}Z_0t}{Z_0+\mathrm{j}(R_L+\mathrm{j}X_L)t} \tag{5.6.6}$$

式中，$t=\tan(\beta d)$。该点的导纳为

$$Y_{\text{in}}=G+\mathrm{j}B=1/Z_{\text{in}} \tag{5.6.7}$$

式中，

$$\begin{cases} G=\dfrac{R_L(1+t^2)}{R_L^2+(X_L+Z_0t)^2} \\ B=\dfrac{R_L^2t-(Z_0-X_Lt)(X_L+Z_0t)}{Z_0[R_L^2+(X_L+Z_0t)^2]} \end{cases} \tag{5.6.8}$$

若达到匹配，则支节与负载之间的距离确定为 d，使得 $G=Y_0=1/Z_0$，由此得 t 的二次方程

$$Z_0(R_L-Z_0)t^2-2X_LZ_0t+(R_LZ_0-R_L^2-X_L^2)=0 \tag{5.6.9}$$

解出 t

$$\begin{cases} t=\dfrac{X_L\pm\sqrt{R_L[(Z_0-R_L)^2+X_L^2]/Z_0}}{R_L-Z_0}, & R_L\neq Z_0 \\ t=-X_L/2Z_0, & R_L=Z_0 \end{cases} \tag{5.6.10}$$

d 的两个解为

$$\begin{cases} d/\lambda = \dfrac{1}{2\pi}\arctan t, & t \geqslant 0 \\ d/\lambda = \dfrac{1}{2\pi}(\pi + \arctan t), & t < 0 \end{cases} \tag{5.6.11}$$

将 t 代入式(5.6.8),求出 B,则支节输入端的电纳应等于$-B$。

因此,支节为开路线时的长度为

$$\frac{l_o}{\lambda} = -\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{B}{Y_0}\right) \tag{5.6.12}$$

支节为短路线时的长度为

$$\frac{l_s}{\lambda} = \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{Y_0}{B}\right) \tag{5.6.13}$$

如果求出的长度为负值,则加上 $\lambda/2$ 即可。

2) 圆图法

圆图法通过如下实例说明。

负载阻抗为 $Z_L = (15+\mathrm{j}10)\Omega$,传输线特性阻抗为 50Ω,设计单支节并联匹配网络,如图 5.6.5(a)所示。

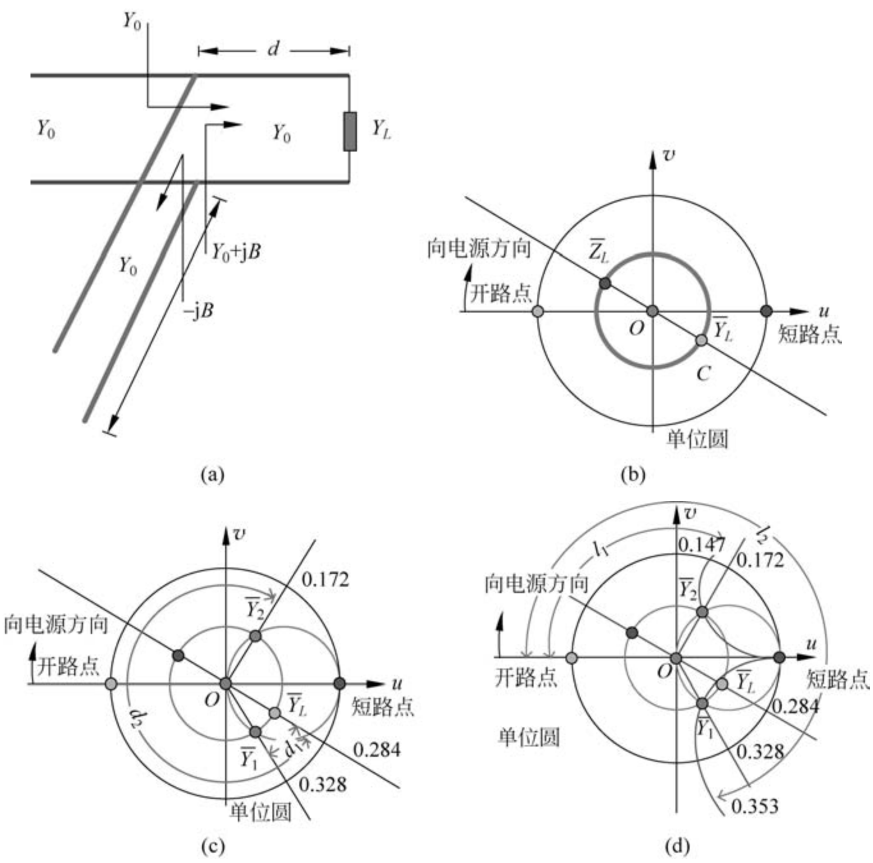


图 5.6.5 圆图法实现并联支节匹配

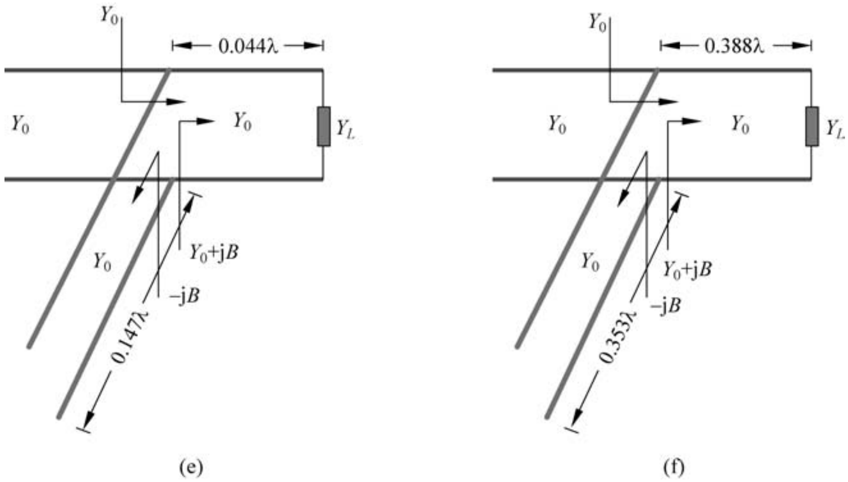


图 5.6.5 （续）

(1) 确定归一化导纳。

首先计算归一化阻抗 $\bar{Z}_L=\dfrac{Z_L}{Z_0}=(0.3+\mathrm{j}0.2)\Omega$，由归一化阻抗旋转 180°得到归一化导纳，如图 5.6.5(b)所示。

(2) 确定负载到支节位置。

从 $\bar{Y}_L$ 出发，与 $g=1$ 的圆相交，有两个交点 $\bar{Y}_1$ 和 $\bar{Y}_2$，分别为 $\bar{Y}_1=1-\mathrm{j}1.33$、$\bar{Y}_2=1+\mathrm{j}1.33$。如图 5.6.5(c)所示，$d_1=(0.328-0.284)\lambda=0.044\lambda$、$d_2=(0.5-0.284)\lambda+0.172\lambda=0.388\lambda$。

(3) 确定并联支节长度。

令开路线的电抗抵消 $\bar{Y}_1$ 和 $\bar{Y}_2$ 的电纳部分，即分别为 $+\mathrm{j}1.33$ 和 $-\mathrm{j}1.33$，所以开路并联支节长度分别为 0.147λ 和 0.353λ，如图 5.6.5(d)所示。

由此设计并联支节匹配电路如图 5.6.5(e)、(f)所示。

2. 串联支节

串联支节匹配原理：通过选择适当的距离 d，在主传输线上找到这样一点，该点向负载方向的输入阻抗为 $Z_0+\mathrm{j}X$，在该点串联一个输入阻抗为 $-\mathrm{j}X$ 的支节，就可以抵消主传输线负载方向输入阻抗的电抗分量，从而达到阻抗匹配。

串联支节匹配的实现方法同样包括解析法和圆图法。解析法的分析方法与并联支节同理，推导过程不再赘述，直接给出支节长度如下。

支节为短路线时的长度为

$$\frac{l_s}{\lambda}=-\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{X}{Z_0}\right) \tag{5.6.14}$$

支节为开路线时的长度为

$$\frac{l_o}{\lambda}=\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{Z_0}{X}\right) \tag{5.6.15}$$

5.6.4 双支节匹配器

单支节匹配器可匹配任意负载阻抗，但负载不同，支节与负载的距离 d、支节的长度 l 也不同。为了匹配不同的负载，单支节的 d、l 必须可调。通常，调节 l 在结构上容易实现，然而调节 d 较困难。为克服这一缺点，可采用不改变 d 的双支节匹配器。

如图 5.6.6 所示，双支节匹配器采用两个并联短路或开路支节。负载与第一个支节的距离 d_1 通常选小于 $\lambda/4$ 的任意值；两支节之间的距离一般选 $\lambda/8$、$\lambda/4$ 或 $3\lambda/8$。

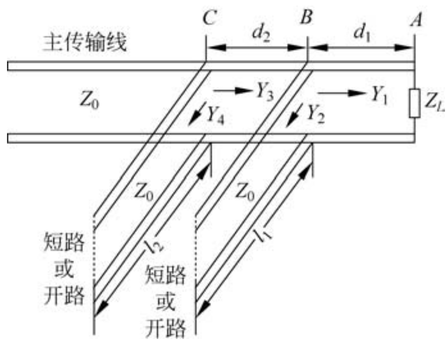


图 5.6.6 并联双支节匹配器

双支节匹配原理：负载导纳 $\bar{Y}_L$ 经长为 d_1 的一段传输线变换到 B 处的导纳为 $\bar{Y}_1$，第一个支节的作用是为 $\bar{Y}_1$ 增加一适当的电纳 $\bar{B}_2$，使 B 处的总导纳为 $\bar{Y}_1+\bar{Y}_2=\bar{Y}_1+\mathrm{j}\bar{B}_2$；该导纳经长为 d_2 的传输线变换到 C 处时导纳为 $\bar{Y}_3=1+\mathrm{j}\bar{B}_3$；第二个支节增加 $\bar{B}_4=-\bar{B}_3$ 的电纳，使 C 处的总电纳为 $\bar{Y}_3+\bar{Y}_4=1+\mathrm{j}(\bar{B}_3+\bar{B}_4)=1$，从而达到匹配。

习题

5-1 传输线长度为 10cm，当信号频率为 937.5MHz 时，此传输线是长线还是短线？当信号频率为 6MHz 时，此传输线是长线还是短线？

5-2 一根特性阻抗为 50Ω、长度为 2m 的无损耗传输线工作于频率 200MHz，终端接有阻抗 $Z_L=40+\mathrm{j}30\Omega$，试求其输入阻抗。

5-3 一根 75Ω 的无损耗线，终端接有负载阻抗 $Z_L=R_L+\mathrm{j}X_L$。

(1) 欲使线上的电压驻波比等于 3，则 R_L 和 X_L 有什么关系？

(2) 若 $R_L=150\Omega$，X_L 等于多少？

(3) 求在(2)情况下，距负载最近的电压最小点的位置。

5-4 考虑一根无损耗传输线，

(1) 当负载阻抗 $Z_L=(40-\mathrm{j}30)\Omega$ 时，欲使线上驻波比最小，则传输线的特性阻抗应为多少？

(2) 求出该最小的驻波比及相应的电压反射系数。

(3) 确定距负载最近的电压最小点的位置。

5-5 设一特性阻抗为 50Ω 的均匀传输线终端接负载 $R_L=100\Omega$，求负载反射系数 Γ_L，在离负载 0.2λ、0.25λ 及 0.5λ 处的输入阻抗及反射系数分别为多少？

5-6 设特性阻抗为 Z_0 的无耗传输线的驻波比为 ρ，第一个电压波节点离负载的距离为 $l_{\min}$，试证明此时终端负载应为

$$Z_1=Z_0\frac{1-\mathrm{j}\rho\tan\beta l_{\min1}}{\rho-\mathrm{j}\tan\beta l_{\min1}}$$

5-7 有一特性阻抗为 $Z_0=50\Omega$ 的无耗均匀传输线，导体间的媒质参数 $\varepsilon_r=2.25$，$\mu_r=1$，终端接有 $R_L=1\Omega$ 的负载。当 $f=100\mathrm{MHz}$ 时，其线长度为 $\lambda/4$。试求：

(1) 传输线实际长度；

(2) 负载终端反射系数；

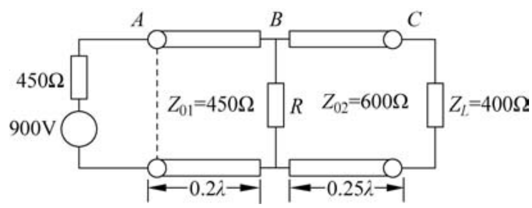
(3) 输入端反射系数；

(4) 输入端阻抗。

5-8 试证明无耗传输线上任意相距 $\lambda/4$ 的两点处的阻抗的乘积等于传输线特性阻抗的平方。

5-9 设某一均匀无耗传输线特性阻抗为 $Z_0=50\Omega$，终端接有未知负载 Z_L，现在传输线上测得电压最大值和最小值分别为 100mV 和 20mV，第一个电压波节的位置离负载 $l_{\min1}=\lambda/3$，试求该负载阻抗 Z_L。

5-10 设某传输系统如题图 5-10 所示，画出 AB 段及 BC 段沿线各点电压、电流和阻抗的振幅分布图，并求出电压的最大值和最小值(图中 $R=900\Omega$)。



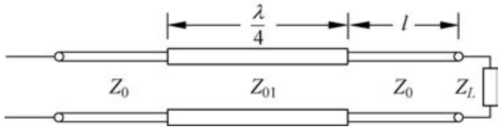
题图 5-10

5-11 特性阻抗为 $Z_0=100\Omega$，长度为 $\lambda/8$ 的均匀无耗传输线，终端接有负载 $Z_L=200+\mathrm{j}300\Omega$，始端接有电压为 $500\mathrm{V}\angle0°$，内阻 $R_g=100\Omega$ 的电源。求：

(1) 传输线始端的电压；

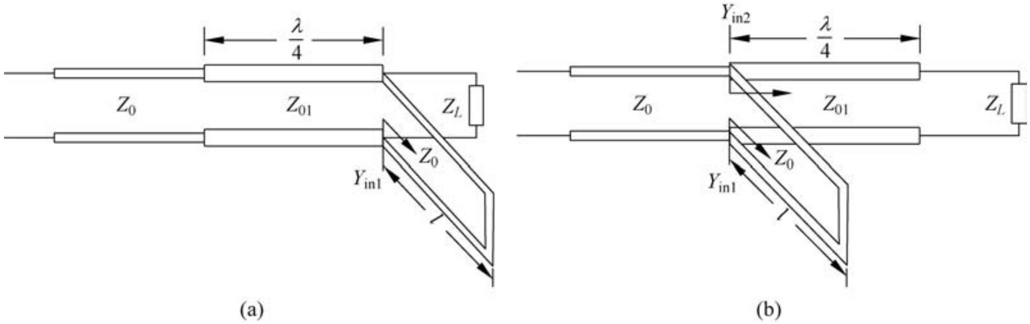
(2) 终端的电压。

5-12 特性阻抗为 $Z_0=150\Omega$ 的均匀无耗传输线，终端接有负载 $Z_L=250+\mathrm{j}100\Omega$，用 $\lambda/4$ 阻抗变换器实现阻抗匹配如题图 5-12 所示，试求 $\lambda/4$ 阻抗变换器的特性阻抗 Z_{01} 及离终端距离。



题图　5-12

5-13　设特性阻抗为 $Z_0=150\Omega$ 的均匀无耗传输线，终端接有负载 $Z_L=100+j75\Omega$ 的复阻抗时，可用以下方法实现 $\lambda/4$ 阻抗变换器匹配：在终端或在 $\lambda/4$ 阻抗变换器前并接一段终端短线，如题图 5-13(a)、(b)所示，试分别求这两种情况下 $\lambda/4$ 阻抗变换器的特性阻抗 Z_{01} 及短路线长度 l。



题图　5-13

5-14　在特性阻抗为 600Ω 的无耗双导线上测得 $|U_{max}|$ 为 200V，$|U_{min}|$ 为 40V，第一个电压波节点的位置为 $l_{min1}=0.51\lambda$，求负载 Z_L。今用并联支节进行匹配，求出支节的位置和长度。

5-15　一均匀无耗传输线的特性阻抗为 30Ω，负载阻抗为 $Z_L=70+j140\Omega$，工作波长 $\lambda=20cm$。试设计串联支节匹配器的位置和长度。