

第 3 章

模糊计算

不确定性的产生有多种原因,如随机性、模糊性等。处理随机性的理论基础是概率论,处理模糊性的基础是模糊集合论。模糊集合论是由 L. A. Zadeh 于 1965 年提出的。随后,他又将模糊集合论应用于近似推理方面,形成了可能性理论。近似推理的基础是模糊逻辑(fuzzy logic),它建立在模糊理论的基础上,是一种处理不精确描述的软计算,它的应用背景是自然语言理解。可以说模糊逻辑是直接建立在自然语言上的逻辑系统,与其他逻辑系统相比较,它考虑了更多的自然语言成分。按照 Zadeh 的说法,模糊逻辑就是词语上的计算。

自模糊逻辑和可能性理论提出后,经过 Zadeh 和其他研究者的共同努力,模糊逻辑和可能性理论取得了很大的发展,并已经广泛地应用于专家系统和智能控制中。在人工智能领域里,特别是在知识表示方面,模糊逻辑有相当广阔的应用前景。

3.1 模糊集合

3.1.1 模糊集合的定义

模糊集合(fuzzy set)是经典集合的扩充^[1]。首先介绍集合论中的几个名词。

论域: 所讨论的全体对象称为论域。一般用 U 、 E 等大写字母表示论域。

元素: 论域中的每个对象。一般用 a 、 b 、 c 、 x 、 y 、 z 等小写字母表示论域中的元素。

集合: 论域中具有某种相同属性的、确定的、可以彼此区别的元素的整体,常用 A 、 B 、 C 、 X 、 Y 、 Z 等表示集合。

在经典集合中,元素 a 和集合 A 的关系只有两种: a 属于 A 或 a 不属于 A ,即只有两个真值“真”和“假”。

例如,若定义 18 岁以上的人为“成年人”集合,则一位超过 18 岁的人属于“成年人”集合,而另外一位不足 18 岁的人,哪怕只差一天也不属于该集合。

经典集合可用特征函数表示。例如,“成年人”集合可以表示为

$$\mu_{\text{成年人}}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 18 \\ 0, & x < 18 \end{cases} \quad (3.1)$$

如图 3.1 所示,这是一种对事物的二值描述,即二值逻辑。

经典集合只能描述确定性的概念,而不能描述现实世界中模糊的概念。例如,“天气很热”等概念。模糊逻辑模仿人类的智慧,引入隶属度(degree of membership)的概念,描述介于“真”与“假”中间的过程。隶属度是一个命题中所描述的事物的属性、状态和关系等的强度。

模糊集合中每个元素被赋予一个 0~1 的实数,描述其元素属于这个模糊集合的强度,该实数即为该元素属于这个模糊集合的隶属度,模糊集合中所有元素的隶属度全体构成模糊集合的隶属度函数。如上述例子中,一个人变成“成年人”的过程可用连续曲线表示,如图 3.2 所示。

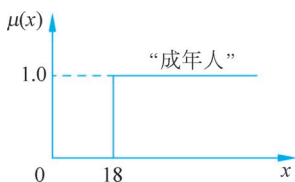


图 3.1 “成年人”特征函数

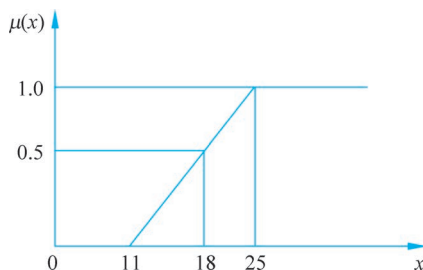


图 3.2 “成年人”隶属度函数

模糊集合是经典集合的推广。实际上,经典集合是模糊集合中隶属度函数取 0 或 1 时的特例。

3.1.2 隶属度函数定义

模糊集合中所有元素的隶属度全体构成模糊集合的隶属度函数。隶属度函数(membership function)是用于表征模糊集合的数学工具。隶属度函数对应的每个隶属度描述某个元素 u 对 U 上的一个模糊集合的隶属关系,由于这种关系的不分明性,它用从区间 $[0,1]$ 中所取的数值表示元素属于某模糊集合的“真实程度”。对于模糊集合来说,某一集合中的每个元素的隶属度代表了这些元素属于该集合的程度,隶属度函数可以是离散的,也可以是连续的^[2]。

如图 3.3 所示,黑色曲线就是一个隶属度函数,0 表示不属于,1 表示完全属于。由于集合的模糊性,因此需要用在 $[0,1]$ 的数代替 0 和 1 表示元素属于模糊集合的程度。

下面介绍在模糊控制中常见的几种隶属度函数类型。

(1) 矩形分布的隶属度函数如图 3.4 所示,可表示为

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & b < x \end{cases} \quad (3.2)$$

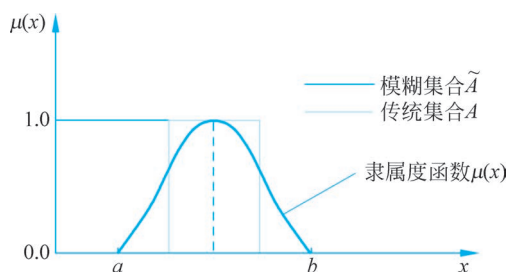


图 3.3 隶属度函数的表达

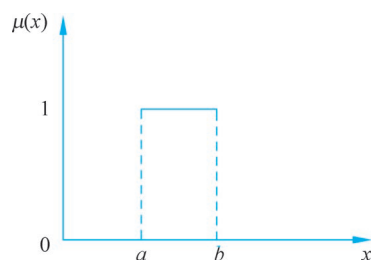


图 3.4 矩形分布的隶属度函数

(2) 梯形分布(中间型)的隶属度函数如图 3.5 所示,可表示为

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x < a \text{ 或 } x > d \end{cases} \quad (3.3)$$

(3) K 次抛物型分布的隶属度函数如图 3.6 所示,可表示为

$$\mu(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^K, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x < c \\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right)^K, & c \leq x \leq d \\ 0, & x < a \text{ 或 } d < x \end{cases} \quad (3.4)$$

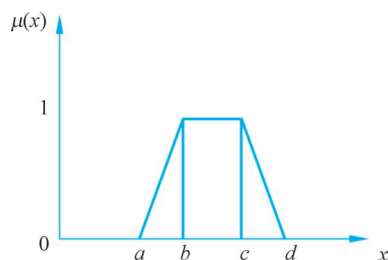
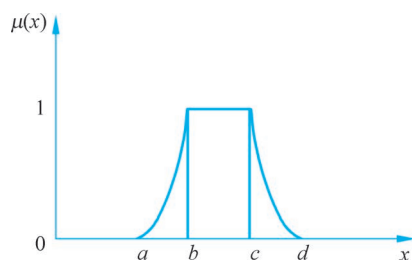


图 3.5 梯形分布的隶属度函数

图 3.6 K 次抛物型分布的隶属度函数

(4) 高斯分布或半高斯分布可以分为 3 种。偏小型高斯分布的隶属度函数如图 3.7 所示,可表示为

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & a < x \end{cases} \quad (3.5)$$

偏大型高斯分布或半高斯分布的隶属度函数如图 3.8 所示,可表示为

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & a < x \end{cases} \quad (3.6)$$

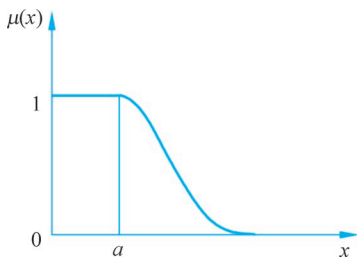


图 3.7 偏小型高斯分布的隶属度函数

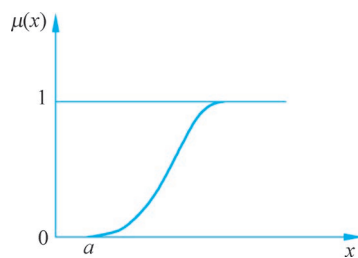


图 3.8 偏大型高斯分布或半高斯分布的隶属度函数

中间型高斯分布或半高斯分布的隶属度函数如图 3.9 所示,可表示为

$$\mu(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.7)$$

上述例子中模糊集合“年老”的隶属度函数如图 3.10 所示,其可以表示为

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 50 \\ \left[1 + \left(\frac{5}{x-50}\right)^2\right]^{-1}, & 50 < x \leq 200 \end{cases} \quad (3.8)$$

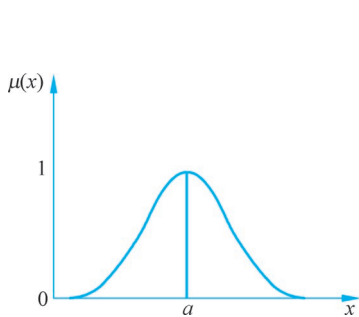


图 3.9 中间型高斯分布或半高斯分布的隶属度函数

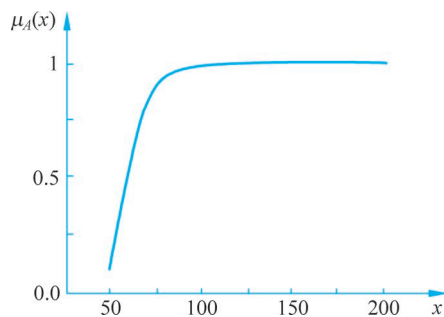


图 3.10 “年老”的隶属度函数

3.1.3 模糊集合的表示

与经典集合不同的是,模糊集合不仅要列出属于这个集合的元素,而且要注明这个元素属于这个集合的隶属度。

当论域中元素数目有限时,模糊集合 A 的数学描述为

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\} \quad (3.9)$$

其中, $\mu_A(x)$ 为元素 x 属于模糊集 A 的隶属度, X 是元素 x 的论域。

(1) Zadeh 表示法。当论域是离散且元素数目有限时,模糊集合的 Zadeh 表示为

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \quad (3.10)$$

当论域是连续的,或者其中元素数目无限时,Zadeh 将模糊集 A 表示为

$$A = \int_{x \in U} \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} \quad (3.11)$$

(2) 序偶表示法。模糊集合的序偶表示为

$$A = \{(\mu_A(x_1), x_1), (\mu_A(x_2), x_2), \dots, (\mu_A(x_n), x_n)\} \quad (3.12)$$

(3) 向量表示法。模糊集合的向量表示为

$$A = \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n)\} \quad (3.13)$$

应注意,在向量表示法中,默认模糊集合中元素依次是 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 所以隶属度为 0 的项不能省略。

3.1.4 隶属度函数确定方法

在模糊理论的应用中,面临的首要问题就是建立模糊集的隶属度函数。对于一个特定的模糊集来说,隶属度函数不仅基本体现了它所反映的模糊概念的特性,而且通过量化还可以实现相应的数学运算和处理。因此,“正确地”确定隶属度函数是应用模糊数学理论恰如其分地定量表达模糊概念的基础,也是利用模糊数学方法解决各种实际问题的关键。隶属度函数一般有以下确定方法。

1. 直觉方法

直觉的方法是人们用自己对模糊概念的认识和理解,或者人们对模糊概念的普遍认同建立隶属度函数。这种方法通常用于描述人们熟知、有共识的客观模糊现象,或者用于难以采集数据的情形。虽然直觉的方法非常简单,也很直观,但它却包含着对象的背景、环境以及语义上的有关知识,也包含了对这些知识的语言学描述。因此,对于同一个模糊概念,不同的背景、不同的人可能会建立出不完全相同的隶属度函数。例如,对于模糊集 $A = \{\text{高个子}\}$,如果论域是“成年男性”,则可构造隶属度函数如图 3.11(a)所示;而如果论域是“初中一年级男生”,则可构造隶属度函数如图 3.11(b)所示。

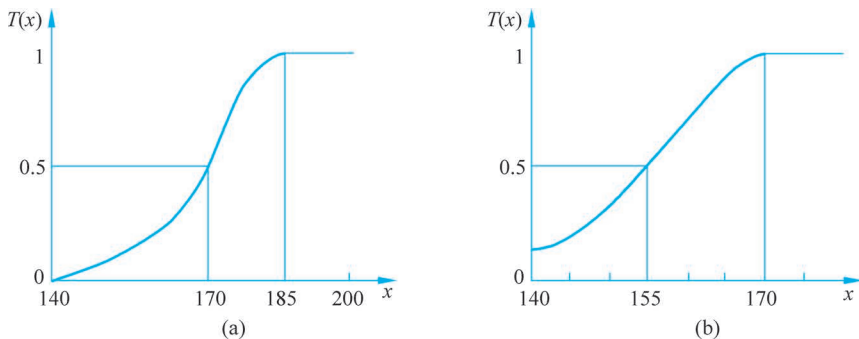


图 3.11 根据不同论域构建的隶属度函数图

2. 二元对比排序法

有些模糊概念不仅外延是模糊的,其内涵也不十分清晰,如“舒适性”“满意度”等。对于这样的模糊集建立隶属度函数,实际上可以看成对论域中每个元素隶属于这个模糊概念的程度进行比较、排序。借鉴两两比较排序的思想,人们提出了确定隶属度函数的二元对比排序法。

二元对比排序法就是通过对多个对象进行两两对比来确定某种特征下的顺序,由此来决定这些对象对该特征的隶属度。这种方法更适用于根据事物的抽象性质由专家来确定隶属度函数的情形,可以通过多名专家或者一个委员会确定隶属度函数,是一种比较实用的确定隶属度函数的方法。设 $U = \{x, y, z, \dots\}$ 为给定的论域, A 是某一模糊概念。二元对比排序法的实施步骤如下。

(1) 对任取的一对元素 $x, y \in U$ 进行比较, 得到以 y 为标准时 x 隶属于 A 的程度值 $f_y(x)$, 以及以 x 为标准时 y 隶属于 A 的程度值 $f_x(y)$ 。

(2) 计算相对优先度函数, 有

$$f(x/y) = \frac{f_y(x)}{\max\{f_x(y), f_y(x)\}}, \quad \forall x, y \in U \quad (3.14)$$

显然, $0 \leq f(x/y) \leq 1, \forall x, y \in U$ 。

(3) 以 $f(x/y)$ 为元素构造一个矩阵 G , 称为相对优先矩阵, 即

$$G = \begin{bmatrix} f(x/x) & f(x/y) & f(x/z) & \cdots \\ f(y/x) & f(y/y) & f(y/z) & \cdots \\ f(z/x) & f(z/y) & f(z/z) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

(4) 相对优先矩阵 G 的每一行取最小值或平均值, 则 A 的隶属度函数为

$$A(x) = \min_{y \in U} \{f(x/y)\}, \quad \forall x \in U \quad (3.16)$$

或

$$A(x) = \frac{1}{|U|} \sum_{y \in U} f_y(x), \quad \forall x \in U \quad (3.17)$$

3. 模糊统计试验法

模糊统计试验法是借用概率论的思想来获得隶属度函数。为了确定论域 X 中的某个元素 u_0 对描述某个模糊概念的模糊集 A 的隶属关系(即隶属度), 进行 n 次重复独立统计试验。由于每次试验的条件不同(带有模糊性), 那么每次试验中论域中哪些元素被判定为隶属于 A 是不大明确的。如果将每次试验中被判定隶属于 A 的元素构成的集合均记为 A^* 。由于每次试验的结果或者是 $u_0 \in A^*$ 或者是 $u_0 \notin A^*$, 令 $u_0 \in A^*$ 的次数为 m , 并称 m/n 为 u_0 对 A 的隶属频率。随着 n 的增大, 隶属频率会呈现稳定性, 就可以将隶属频率稳定所在的数值, 定为 u_0 对 A 的隶属度函数 $A(u_0)$ 。归纳起来, 模糊统计试验法的基本步骤如下。

(1) 在每一次试验下, 要对论域中固定的元素 u_0 是否属于一个可变动的分明集合进行确切的判断。

(2) 各次试验中, u_0 是固定的, 而 A^* 在随机变动, u_0 对 A 的隶属频率定义为

$$u_0 \text{ 对 } A \text{ 的隶属频率} = \frac{"u_0 \in A^*" \text{ 的次数 } m}{\text{试验的总次数 } n}$$

3.1.5 模糊集合的运算

模糊集合是经典集合的推广, 因此经典集合的运算可以推广到模糊集合。由于模糊集合要由隶属度函数加以确定, 所以需要重新定义模糊集合的基本运算^[3-4]。

1. 模糊集合的基本运算定义

(1) 包含关系: 若 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$, 则称 A 包含 B , 记作 $A \supseteq B$ 。

(2) 相等关系: 若 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$ 。

(3) 模糊集合的交并补运算: 设 A, B 是论域 U 中的两个模糊集。

① 交运算 $A \cap B$:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad (3.18)$$

② 并运算 $A \cup B$:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad (3.19)$$

③ 补运算 $\bar{A}$:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (3.20)$$

其中, $\wedge$ 表示取小运算; $\vee$ 表示取大运算。

2. 并、交、补的相关运算性质

(1) 幂等律:

$$A \cup A = A, A \cap A = A \quad (3.21)$$

(2) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A \quad (3.22)$$

(3) 结合律:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (3.23)$$

(4) 吸收律:

$$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A \quad (3.24)$$

(5) 分配律:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned} \quad (3.25)$$

(6) 0-1 律:

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, U \cup A = U, U \cap A = A \quad (3.26)$$

例 3.1 设论域 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, A 及 B 是论域 U 上的两个模糊集合, 已知

$$A = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0.4}{x_4}$$

$$B = \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.9}{x_2} + \frac{0.4}{x_3}$$

求 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 、 $A \cap B$ 、 $A \cup B$ 。

解:

$$\bar{A} = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0.6}{x_4}; \quad \bar{B} = \frac{0.4}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.6}{x_3}$$

$$A \cap B = \frac{0.5 \wedge 0.6}{x_1} + \frac{0.6 \wedge 0.9}{x_2} + \frac{0.2 \wedge 0.4}{x_3} + \frac{0.4 \wedge 0}{x_4} = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.2}{x_3}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \frac{0.5 \vee 0.6}{x_1} + \frac{0.6 \vee 0.9}{x_2} + \frac{0.2 \vee 0.4}{x_3} + \frac{0.4 \vee 0}{x_4} \\ &= \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.9}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.4}{x_4} \end{aligned}$$

3. 模糊集合的代数运算

(1) 代数积:

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x) \quad (3.27)$$

(2) 代数和:

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{AB}(x) \quad (3.28)$$

(3) 有界和:

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\} = 1 \wedge (\mu_A(x) + \mu_B(x)) \quad (3.29)$$

(4) 有界积:

$$\mu_{A \otimes B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} = 0 \vee (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \quad (3.30)$$

例 3.2 设论域 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, A 及 B 是论域 U 上的两个模糊集合, 已知

$$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{0.5}{x_3} + \frac{0.3}{x_4}$$

$$B = \frac{0.4}{x_1} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.8}{x_4}$$

求 $\bar{A}, \bar{B}, A \cap B, A \cup B, A \cdot B, A + B, A \oplus B, A \otimes B$ 。

解:

$$\bar{A} = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.3}{x_2} + \frac{0.5}{x_3} + \frac{0.7}{x_4} \quad \bar{B} = \frac{0.6}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.2}{x_4}$$

$$A \cap B = \frac{0.2 \wedge 0.4}{x_1} + \frac{0.7 \wedge 0}{x_2} + \frac{0.5 \wedge 0.6}{x_3} + \frac{0.3 \wedge 0.8}{x_4} = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_3} + \frac{0.3}{x_4}$$

$$A \cup B = \frac{0.2 \vee 0.4}{x_1} + \frac{0.7 \vee 0}{x_2} + \frac{0.5 \vee 0.6}{x_3} + \frac{0.3 \vee 0.8}{x_4} = \frac{0.4}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.8}{x_4}$$

$$A \cdot B = \frac{0.08}{x_1} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.24}{x_4}; \quad A + B = \frac{0.52}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0.86}{x_4};$$

$$A \oplus B = \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}; \quad A \otimes B = \frac{0.1}{x_3} + \frac{0.1}{x_4}$$

3.2 模糊关系及其合成

3.2.1 模糊矩阵

模糊矩阵是建立模糊数学方法的重要工具之一。当论域有限时, 模糊关系可以用模糊矩阵来表示。

定义 3.1 设 $R = (r_{ij})_{m \times n}$ 是一个 $m \times n$ 的矩阵, 如果 $r_{ij} \in [0, 1], 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, 则称 R 是模糊矩阵, 通常用 $M_{m \times n}$ 表示所有 $m \times n$ 的模糊矩阵构成的集合。

定义 3.2 设 $R, S \in M_{m \times n}$ 且 $R = (r_{ij})_{m \times n}, S = (s_{ij})_{m \times n}$, 则

(1) R 与 S 相等定义为

$$R = S \Leftrightarrow r_{ij} = s_{ij}, \quad \forall i, j \quad (3.31)$$

(2) R 包含于 S 定义为

$$R \subseteq S \Leftrightarrow r_{ij} \leq s_{ij}, \quad \forall i, j \quad (3.32)$$

(3) R 与 S 的交定义为

$$R \cap S = (r_{ij} \wedge s_{ij})_{m \times n} \quad (3.33)$$

(4) R 与 S 的并定义为

$$R \cup S = (r_{ij} \vee s_{ij})_{m \times n} \quad (3.34)$$

(5) R 的余定义为

$$R^c = (1 - r_{ij})_{m \times n} \quad (3.35)$$

例 3.3 设 $R, S, T \in M_{2 \times 2}$ 且

$$R = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

由定义 3.2 有 $S \subseteq T$, 且

$$R \cap S = \begin{bmatrix} 0.7 \wedge 0.6 & 0.5 \wedge 0.3 \\ 0.8 \wedge 0.2 & 0.2 \wedge 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$R \cup S = \begin{bmatrix} 0.7 \vee 0.6 & 0.5 \vee 0.3 \\ 0.8 \vee 0.2 & 0.2 \vee 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$R^c = \begin{bmatrix} 1-0.7 & 1-0.5 \\ 1-0.8 & 1-0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

模糊矩阵的交、并、余运算满足如下运算律:

定理 3.1 设 $R, S, T, W \in M_{m \times n}$ 。

(1) 幂等律:

$$R \cap R = R, \quad R \cup R = R \quad (3.36)$$

(2) 交换律:

$$R \cap S = S \cap R, \quad R \cup S = S \cup R \quad (3.37)$$

(3) 结合律:

$$(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T), \quad (R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T) \quad (3.38)$$

(4) 吸收律:

$$(R \cap S) \cup R = R, \quad (R \cup S) \cap R = R \quad (3.39)$$

(5) 分配律:

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T) \quad (3.40)$$

(6) 复原律(对合律):

$$(R^c)^c = R \quad (3.41)$$

(7) 对偶律(De Morgan 律):

$$(R \cap S)^c = R^c \cup S^c, \quad (R \cup S)^c = R^c \cap S^c \quad (3.42)$$

(8) 单调性:

$$R \subseteq S, \quad T \subseteq W \Rightarrow R \cap T \subseteq S \cap W, \quad R \cup T \subseteq S \cup W \quad (3.43)$$

定义 3.3 设 $R \in M_{m \times t}, S \in M_{t \times n}$ 且 $R = (r_{ij})_{m \times t}, S = (s_{ij})_{t \times n}$ 。

令 $T \in M_{m \times n}$ 且 $T = (t_{ij})_{m \times n}$, 其中:

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1}^t (r_{ik} \wedge s_{kj}) \quad (3.44)$$

则称 T 为 R 与 S 的合成(模糊乘积), 记为 $T = R \circ S$, 其中符号 $\vee$ 表示对矩阵中各个元素交运算的结果取并运算。

例 3.4 设 $R \in M_{2 \times 3}, S \in M_{3 \times 2}$, 其中

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} (0.2 \wedge 0.5) \vee (0.5 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.3) & (0.2 \wedge 0.2) \vee (0.5 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.9) \\ (0.6 \wedge 0.5) \vee (0.3 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.3) & (0.6 \wedge 0.2) \vee (0.3 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}$$

模糊矩阵的合成运算满足如下运算律。

定理 3.2 设 R, S, T 为满足相应运算的模糊矩阵。

(1) 结合律:

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T) \quad (3.45)$$

(2) 分配律:

$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T) \quad (3.46)$$

(3) 弱分配律:

$$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T) \quad (3.47)$$

(4) 单调性:

$$R \subseteq S \Rightarrow R \circ T \subseteq S \circ T, \quad T \circ R \subseteq T \circ S \quad (3.48)$$

一般来讲,模糊矩阵的合成不满足交换律。例如,例 3.4 中的模糊矩阵 R 和 S ,显然有

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad S \circ R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

即 $R \circ S \neq S \circ R$ 。

定义 3.4 设 $R \in M_{m \times n}$ 且 $R = (r_{ij})_{m \times n}$, 则称 $R^T = (r_{ji})_{n \times m}$ 为 R 的转置。

3.2.2 模糊关系

模糊关系是经典关系的推广。经典关系描述两个集合的元素之间是否适合某种关系,而模糊关系则是描述两个集合的元素之间适合某种关系的程度大小。在模糊集合理论中,模糊关系占有相当重要的地位。

定义 3.5 给定集合 X 和 Y ,由全体元素 (x, y) 组成的集合 $(x \in X, y \in Y)$,叫作 X 和 Y 的笛卡儿积(或直积),记作 $X \times Y$ 。

定义 3.6 给定非空集合 X 和 Y 。如果 $R \in F(X \times Y)$ (R 是以 $X \times Y$ 为论域的一个模糊子集),则称 R 为从 X 到 Y 的一个模糊(二元)关系, R 的隶属度函数 $R(x, y)$ 表示 X 中的元素 x 与 Y 中的元素 y 适合这种关系的程度。特别地,当 $X = Y$ 时,从 X 到 Y 的模糊(二元)关系 R 称为 X 上的模糊(二元)关系。

由定义 3.5 和定义 3.6 可见,模糊关系本质上是模糊集合,由其隶属度函数来刻画。因此,当 $R(x, y)$ 仅取 1 或 0 时, R 退化为经典二元关系,即经典关系是模糊关系的特例。

与经典二元关系类似,在有限论域的情况下,模糊二元关系 R 可以直观地用模糊矩阵或者赋权图来表示。设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为两个非空的有限集合,若 $R \in F(X \times Y)$, 则模糊二元关系 R 可由一个 $m \times n$ 的模糊矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times n}$ 表示,其中 $r_{ij} = R(x_i, y_j)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 。

同时模糊二元关系 R 也可用关系图来描述,如图 3.12 所示。

图 3.12 中对应的模糊二元关系可用如下的模糊矩阵表达:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

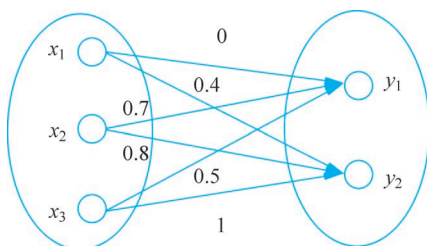


图 3.12 有限集到有限集的模糊二元关系图

在模糊数学中,模糊关系对应的模糊矩阵可用叉积计算得到。在模糊逻辑中,这种叉积常用最小算子运算。设 A, B 为两个模糊集合,则

$$\mu_{A \times B}(a, b) = \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\} \quad (3.49)$$

若 A, B 为离散模糊集,隶属度函数分别为

$$\mu_A = \{\mu_A(a_1), \mu_A(a_2), \dots, \mu_A(a_n)\}, \quad \mu_B = \{\mu_B(b_1), \mu_B(b_2), \dots, \mu_B(b_n)\}$$

则其叉积运算为

$$\mu_{A \times B}(a, b) = \mu_A^T \circ \mu_B \quad (3.50)$$

其中, $\circ$ 运算在这里指模糊集合 μ_A 与 μ_B 对应位置元素分别进行叉积运算。

例 3.5 已知输入的模糊集合 A 和输出的模糊集合 B 分别为

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{0.8}{a_2} + \frac{0.2}{a_3} + \frac{0.5}{a_4}; \quad B = \frac{0.3}{b_1} + \frac{0.7}{b_2} + \frac{0.2}{b_3} + \frac{0.6}{b_4}$$

求 A 到 B 的模糊关系 R 。

解:

$$\begin{aligned} R = A \times B &= \mu_A^T \circ \mu_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \circ [0.3 \quad 0.7 \quad 0.2 \quad 0.6] \\ &= \begin{bmatrix} 1 \wedge 0.3 & 1 \wedge 0.7 & 1 \wedge 0.2 & 1 \wedge 0.6 \\ 0.8 \wedge 0.3 & 0.8 \wedge 0.7 & 0.8 \wedge 0.2 & 0.8 \wedge 0.6 \\ 0.2 \wedge 0.3 & 0.2 \wedge 0.7 & 0.2 \wedge 0.2 & 0.2 \wedge 0.6 \\ 0.5 \wedge 0.3 & 0.5 \wedge 0.7 & 0.5 \wedge 0.2 & 0.5 \wedge 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

模糊二元关系具有以下的运算和性质:

定义 3.7 设 R 与 S 为从论域 U 到论域 V 的两个模糊二元关系,即 $R, S \in F(U \times V)$ 。

(1) R 与 S 相等定义为 $R = S \Leftrightarrow R(x, y) = S(x, y), \forall (x, y) \in U \times V$

(2) R 包含于 S 定义为 $R \subseteq S \Leftrightarrow R(x, y) \leq S(x, y), \forall (x, y) \in U \times V$

(3) R 与 S 的交依然是从 U 到 V 的模糊二元关系,隶属度函数定义为

$$(R \cap S)(x, y) = \min\{R(x, y), S(x, y)\}, \quad \forall (x, y) \in U \times V$$

(4) R 与 S 的并依然是从 U 到 V 的模糊二元关系,隶属度函数定义为

$$(R \cup S)(x, y) = \max\{R(x, y), S(x, y)\}, \quad \forall (x, y) \in U \times V$$

(5) R 的逆关系定义为

$$R^{-1}(y, x) = R(x, y), \quad \forall (y, x) \in V \times U$$

3.2.3 模糊关系的合成

模糊关系的合成是常用的运算之一,许多模糊关系的性质都与合成有关^[5]。自然,模糊二元关系的合成是经典二元关系的合成的推广。

设模糊关系 $Q \in F(X \times Y)$, $R \in F(Y \times Z)$, 则模糊关系 $S \in F(X \times Z)$ 称为模糊关系 Q 与 R 的合成。常用的计算方式有以下两种。

(1) 最大-最小合成法(模糊矩阵合成): 写出 Q 、 R 中的每个元素,然后将矩阵乘积过程中的乘积运算用取小运算代替,求和运算用取大运算代替,即

$$(Q \circ R)(x, z) = \bigvee_{y \in Y} [Q(x, y) \wedge R(y, z)], \quad \forall (x, z) \in X \times Z \quad (3.51)$$

(2) 最大-代数积合成法: 写出矩阵乘积 QR 中的每个元素,然后将其中的求和运算用取大运算代替,而乘积运算不变,即

$$(Q \circ R)(x, z) = \bigvee_{y \in Y} [Q(x, y) \times R(y, z)], \quad \forall (x, z) \in X \times Z \quad (3.52)$$

例 3.6 设有模糊集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$ 。

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

求模糊关系 Q 与模糊关系 R 的合成 S 。

解:

(1) 最大-最小合成法:

$$\begin{aligned} S = Q \circ R &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.5 \wedge 0.2) \vee (0.4 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.6) & (0.5 \wedge 1) \vee (0.4 \wedge 0.6) \vee (0.3 \wedge 0.5) \\ (0.6 \wedge 0.2) \vee (0.5 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.6) & (0.6 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.5) \\ (0.1 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0 \wedge 0.6) & (0.1 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.6) \vee (0 \wedge 0.5) \\ (0.9 \wedge 0.2) \vee (0.2 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.6) & (0.9 \wedge 1) \vee (0.2 \wedge 0.6) \vee (0.8 \wedge 0.5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 最大-代数积合成法:

$$S = Q \circ R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (0.5 \times 0.2) \vee (0.4 \times 0.8) \vee (0.3 \times 0.6) & (0.5 \times 1) \vee (0.4 \times 0.6) \vee (0.3 \times 0.5) \\ (0.6 \times 0.2) \vee (0.5 \times 0.8) \vee (1 \times 0.6) & (0.6 \times 1) \vee (0.5 \times 0.6) \vee (1 \times 0.5) \\ (0.1 \times 0.2) \vee (0.8 \times 0.8) \vee (0 \times 0.6) & (0.1 \times 1) \vee (0.8 \times 0.6) \vee (0 \times 0.5) \\ (0.9 \times 0.2) \vee (0.2 \times 0.8) \vee (0.8 \times 0.6) & (0.9 \times 1) \vee (0.2 \times 0.6) \vee (0.8 \times 0.5) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.32 & 0.5 \\ 0.6 & 0.6 \\ 0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3.3 模糊推理

经典的二值逻辑为人们提供了严谨而又十分有效的假言推理模式,但它处理的信息和推理的规则是精确的、完备的,要求命题的条件与给定的条件完全一致,才能得出与命题结论相一致的推断。然而在现实生活以及计算机、自动控制、人工智能等应用实例中,许多命题反映的是不精确、不确定、不完备的信息,推理利用的也是不精确、不确定、不完备的知识或规则,无法用二值逻辑来描述,直接使用经典的推理模式难以得到真或假的结论,因此需要凭借经验和不完备信息进行近似推理或不确定推理。模糊推理就是基于模糊数学方法处理由模糊性引起的不确定推理。

3.3.1 模糊知识表示

1. 语言变量和模糊语言

语言变量是指以自然或人工语言的词、词组或句子作为值的变量(如“偏差”等),语言变量的值称为语言值(如“很大”等)。模糊语言变量指以自然或人工语言的词、词组或句子作为值的变量。例如,在模糊控制中的“偏差”“偏差变化率”等,它是一种定量地、形式地描述自然语言的模糊变量。语言变量的值称为变量值,一般为自然或人工语言的词、词组或句子。例如,“正大”“正中”“小”“零”“负小”“负中”“负大”等 7 个语言变量,用 PB、PM、PS、P0、NS、NM、NB 表示“偏差”“偏差变化率”的值。

2. 模糊命题与模糊条件语句

对于模糊不确定性,一般采用隶属度来刻画。对于含有模糊概念的对象,只能采用基于模糊集合论的模糊逻辑来描述。模糊命题是指含有模糊概念,具有某种真实程度的陈述句^[6]。一般形式为

$$P: p \text{ is } A$$

模糊命题的真值由变元对模糊集合的隶属程度表示,定义为

$$P = \mu_A(p)$$

除此之外,还可以用三元组的形式表示模糊命题。例如三元组(张三,体型,(胖, 0.9))表示命题“张三比较胖”,其中的 0.9 就代替“比较”而刻画了张三“胖”的程度。模糊知识表示一般形式为

$$(< \text{对象} >, < \text{属性} >, (< \text{属性值} >, < \text{隶属度} >))$$

可以看出,它实际是通常三元组($\langle$ 对象 $\rangle$, $\langle$ 属性 $\rangle$, $\langle$ 属性值 $\rangle$)的细化,其中的 $\langle$ 隶属度 $\rangle$ 一项是对前面属性值的精确刻画。在模糊数学中,通常将带有模糊词的条件语句称为模糊条件语句。例如,用模糊命题 A 表示“ x 是 a ”, B 表示“ y 是 b ”,则简单模糊条件语句可表示为

如果 A ,则 B

对应的命题表达式为 $A \rightarrow B = A \times B$,其真值是上的一个二元模糊关系 R ,其隶属度函数为

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \quad (3.53)$$

实际应用中,许多模糊规则是多重简单模糊条件语句,表示为

(如果 A_1 ,则 B_1) 或 (如果 A_2 ,则 B_2) 或 $\cdots$ 或 (如果 A_n ,则 B_n)

则其命题表达式为

$$\begin{aligned} & (A_1 \rightarrow B_1) \cup (A_2 \rightarrow B_2) \cup \cdots \cup (A_n \rightarrow B_n) \\ & = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup \cdots \cup (A_n \times B_n) \end{aligned}$$

对应的隶属度函数为

$$\mu_R(x, y) = V_{i=1}^n (\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)) \quad (3.54)$$

对于条件论域由多个论域交集构成的语句,一般称为多维模糊条件语句。其句型表示为

如果(A 且 B), 则 C

其命题表达式为

$$(A \times B) \rightarrow C = A \times B \times C$$

真值定义为 $X \times Y \times Z$ 上的一个三元模糊关系,其隶属度函数为

$$\mu_R(x, y, z) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \wedge \mu_C(z) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z) \quad (3.55)$$

3.3.2 模糊推理规则

模糊推理又称模糊逻辑推理,是指从已知模糊命题(包括大前提和小前提),推出新的模糊命题作为结论的过程,是一种近似推理。模糊推理的常用方法为关系合成推理法(Compositional Rule of Inference, CRI),CRI 包括两种计算方法:Zadeh 推理法和 Mamdani 推理法。以下主要介绍 Mamdani 推理法。

(1) 对于模糊取式推理,已知命题 $A \rightarrow B$,其中 R 为 A 到 B 的模糊关系,对于给定的 A' ,则可以推出

$$B' = A' \circ R$$

对应的隶属度函数计算公式为

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A'}(x) \circ \mu_R(x, y) = \mu_{A'}(x) \circ (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad (3.56)$$

(2) 对于模糊拒取式推理,已知命题 $A \rightarrow B$,其中 R 为 A 到 B 的模糊关系,对于给定的 B' ,则可以推出

$$A' = R \circ B'$$

对应的隶属度函数计算公式为

$$\mu_{A'}(x) = \mu_R(x, y) \circ \mu_{B'}(y) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \circ \mu_{B'}(y) \quad (3.57)$$

因此通过条件模糊向量与模糊关系的合成进行模糊推理,得到结论的模糊向量,然后采用“清晰化”方法(模糊判决)将模糊结论转换为精确量。

例 3.7 根据例 3.5 所示的模糊系统,求当输入为 $A' = \frac{0.2}{a_1} + \frac{0.7}{a_2} + \frac{0.2}{a_3} + \frac{0.5}{a_4}$ 时,系统的输出 B' 。

解: 例 3.5 中已经得到模糊关系,下面进行模糊合成得到模糊输出。

$$\begin{aligned} B' = A' \circ R &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.7 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= [(0.2 \wedge 0.3) \vee (0.7 \wedge 0.3) \vee (0.2 \wedge 0.2) \vee (0.5 \wedge 0.3), \\ &\quad (0.2 \wedge 0.7) \vee (0.7 \wedge 0.7) \vee (0.2 \wedge 0.2) \vee (0.5 \wedge 0.5), \\ &\quad (0.2 \wedge 0.2) \vee (0.7 \wedge 0.2) \vee (0.2 \wedge 0.2) \vee (0.5 \wedge 0.2), \\ &\quad (0.2 \wedge 0.6) \vee (0.7 \wedge 0.6) \vee (0.2 \wedge 0.2) \vee (0.5 \wedge 0.5)] \\ &= (0.3, 0.7, 0.2, 0.6) \end{aligned}$$

因此系统的输出为

$$B' = \frac{0.3}{b_1} + \frac{0.7}{b_2} + \frac{0.2}{b_3} + \frac{0.6}{b_4}$$

例 3.8 某工业窑炉模糊控制系统,输入为温度,输出为压力。已知在论域 $T(\text{温度}) = \{0, 20, 40, 60, 80, 100\}$, $P(\text{压力}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 上定义了模糊子集的隶属度函数为

$$\begin{aligned} \mu_A(\text{温度高}) &= \frac{0}{0} + \frac{0.1}{20} + \frac{0.3}{40} + \frac{0.6}{60} + \frac{0.85}{80} + \frac{1}{100} \\ \mu_B(\text{压力大}) &= \frac{0}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.85}{6} + \frac{1}{7} \end{aligned}$$

模糊命题是“如果温度高,那么压力就大”,根据经验给定“温度较高”的隶属度函数定义为

$$\mu_{A'}(\text{温度较高}) = \frac{0.1}{0} + \frac{0.15}{20} + \frac{0.4}{40} + \frac{0.75}{60} + \frac{1}{80} + \frac{0.8}{100}$$

利用模糊推理方法确定在“温度较高”的情况下“压力较大”的隶属度函数。

解: 首先将模糊子集写成向量形式,即

$$\begin{aligned} A(x) &= [0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 0.85 \quad 1] \\ B(y) &= [0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.7 \quad 0.85 \quad 1] \\ A'(x) &= [0.1 \quad 0.15 \quad 0.4 \quad 0.75 \quad 1 \quad 0.8] \end{aligned}$$

计算 A 到 B 的模糊关系 R , 即

$$R = A \times B = \mu_A^T \circ \mu_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.85 \\ 1 \end{bmatrix} \circ [0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.7 \quad 0.85 \quad 1]$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.85 & 0.85 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.85 & 1 \end{bmatrix} \\
 &B' = A' \circ R = [0.1 \quad 0.15 \quad 0.4 \quad 0.75 \quad 1 \quad 0.8] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.85 & 0.85 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.85 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= [0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.7 \quad 0.85 \quad 0.85]
 \end{aligned}$$

因此“压力较大”的隶属度函数可以表示为

$$\mu_B(\text{压力较大}) = \frac{0}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.85}{6} + \frac{0.85}{7}$$

3.3.3 模糊判决

由上述模糊推理得到的结论或者操作是一个模糊集合,不能直接应用,需要先转换为确定值。将模糊推理得到的模糊集合,转换为确定值的过程称为“模糊判决”,或者“模糊决策”“解模糊化”。下面介绍几种简单的模糊判决方法^[7]。

1. 最大隶属度法

最大隶属度法是在模糊集合中,取隶属度最大的量作为推理结果。即把模糊推理所得到的模糊向量中最大隶属度所对应的精确量作为模糊判决得到的精确量,若有多个最大隶属度,则取其对应的平均值作为模糊判决的结果。

例如,模糊集合为

$$U = \frac{0.1}{2} + \frac{0.9}{3} + \frac{0.3}{7} + \frac{0.4}{9}$$

可得到该模糊集合元素 3 的隶属度最大,所以取结论为 $U=3$ 。

这种方法的优点是简单易行,缺点是完全排除了其他隶属度较小的量的影响和作用,没有充分利用推理过程取得的信息。

2. 加权平均判决法

为了克服最大隶属度法的缺点,可以采用加权平均判决法,即取输出模糊集合隶属度函数曲线与横坐标轴围成面积的重心相应的输出当作精确值的输出。一般在连续论域下的计算公式为

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\mu(x)dx}{\int_a^b \mu(x)dx} \quad (3.58)$$

3. 中位数法

中位数法也称面积平均法。在论域上把隶属度函数曲线与横坐标围成的面积平

分为两部分的元素称为模糊集的中位数,中位数点所对应的横坐标值作为系统控制量,如图 3.13 所示。

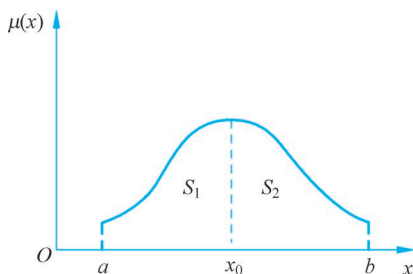


图 3.13 中位数法隶属度函数计算示意图

当论域为有限离散点时,中位数 μ^* 可以用下列公式求取:

$$\sum_{\mu_1}^{\mu^*} \mu(\mu_i) = \sum_{\mu^*+1}^{\mu_n} \mu(\mu_j) \quad (3.59)$$

如果该点在有限元素之间,可用插值的方法来求取。实际上,模糊推理不需要很精确,因此也可以不用插值法,直接取靠近 μ^* 的其中一个元素作为 μ^* 。

与最大隶属度法相比,这种方法利用了更多的信息,但计算比较复杂,特别是在连续隶属度函数时,需要求解积分方程,因此应用场合要比加权平均法少。加权平均法比中位数法具有更佳的性能,而中位数法的动态性能要优于加权平均法,静态性能则略逊于加权平均法。而一般情况下,这两种方法都优于最大隶属度法。

3.4 模糊计算应用

40 年来,模糊数学获得了蓬勃发展,其触角遍及自然科学、社会科学及横断交叉学科,在数学理论(如拓扑学、逻辑学、测度论等)、应用方法(如控制论、聚类分析、模式识别、综合评估等)、实际应用(如中长期气象预报、成矿预测、良种选择、故障诊断等)及人文系统(如经济系统、政治系统、决策系统、教育系统)等诸多方面都取得了很有价值的成果。本节将重点介绍模糊计算在聚类分析和控制系统两个领域中的经典应用:模糊 C 均值聚类算法和模糊控制。

3.4.1 模糊 C 均值聚类算法

模糊 C 均值聚类算法(Fuzzy C-Means clustering algorithm, FCM)是一种基于划分的聚类算法,它的思想就是使被划分到同一簇的对象之间的相似度最大,而不同簇的对象之间的相似度最小。根据模糊集合与隶属度函数的概念,在聚类的问题中,可以把聚类生成的簇看成模糊集合,因此,每个样本点隶属于簇的隶属度就是 $[0, 1]$ 区间内的值。具体地,FCM 的目标函数可以定义为

$$J_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C u_{ij}^m d^2(x_i, v_j) \quad (3.60)$$

其中, $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^p$ 是在 p 维空间中的数据, N 是数据项的数目; C 是

聚类的数目且 $2 \leq C < N$; u_{ij} 是 x_i 是第 j 个类的隶属度; m 是每个模糊隶属度的加权指数; v_j 是聚类中心; $d^2(x_i, v_j)$ 为 x_i 和聚类中心 v_j 之间的距离度量。一般情况下,距离的度量采用欧几里得范数(L_2 范数)的形式计算,即

$$d(x_i, v_j) = x_i - v_j = \sqrt{\sum_{k=1}^K (x_{ik} - v_{jk})^2} \quad (3.61)$$

根据目标函数 J_m , FCM 的主要算法流程见算法 3.1。

算法 3.1 模糊 C 均值聚类算法(FCM)

Step 1: 设定参数 C, m, ε 的值;

Step 2: 初始化隶属度矩阵 $U^{(0)}$;

Step 3: 设置循环计数器 $b = 0$;

Step 4: 根据隶属度矩阵 $U^{(b)}$ 计算出聚类中心 V_j^b :

$$V_j^{(b)} = \frac{\sum_{i=1}^N (u_{ij}^{(b)})^m x_i}{\sum_{i=1}^N (u_{ij}^{(b)})^m}; \quad (3.62)$$

Step 5: 计算隶属度矩阵 $U^{(b+1)}$:

$$U_{ij}^{(b+1)} = \frac{1}{\sum_{K=1}^C \left(\frac{d_{ji}}{d_{ki}} \right)^{\frac{2}{m-1}}}; \quad (3.63)$$

Step 6: 根据判定条件,如果 $\max\{U^{(b)} - U^{(b+1)}\} < \varepsilon$,则停止迭代。否则令 $b = b + 1$,并转到 Step 4。

图像分割问题一般可以等效为像素的无监督分类,因而可以用聚类算法进行图像分割。相较于 K-Means 算法,FCM 对大多数无噪声的图像行之有效。图 3.14 是原始图像,图 3.15 是应用 FCM 进行图像分割的结果。FCM 对噪声非常敏感,因为它没有考虑图像的空间结构信息,因此后来很多学者提出了基于 FCM 的改进版本。



图 3.14 原始图像



图 3.15 应用 FCM 进行图像分割的结果

以下是采用 FCM 对 iris 数据集进行聚类的结果,图 3.16~图 3.19 为聚类前后的数据分布和实验结果。

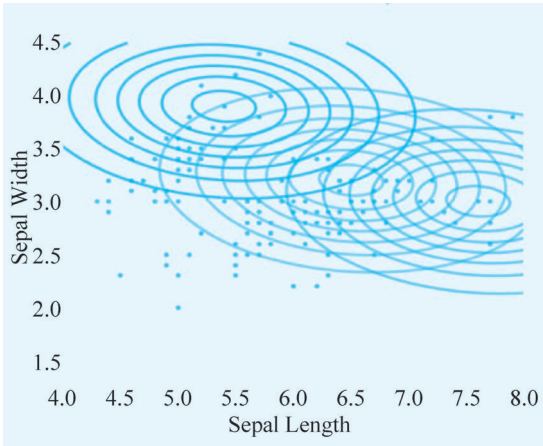


图 3.16 聚类中心初始化(花萼)

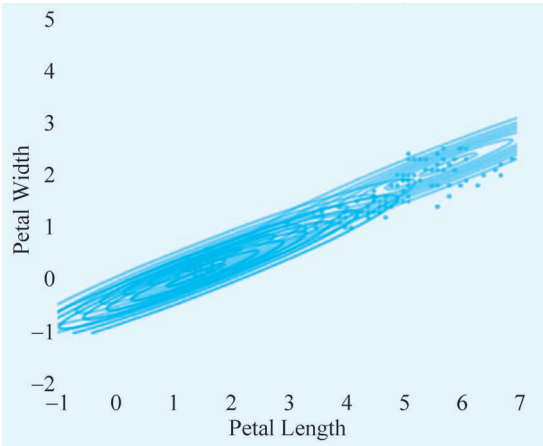


图 3.17 聚类中心初始化(花瓣)

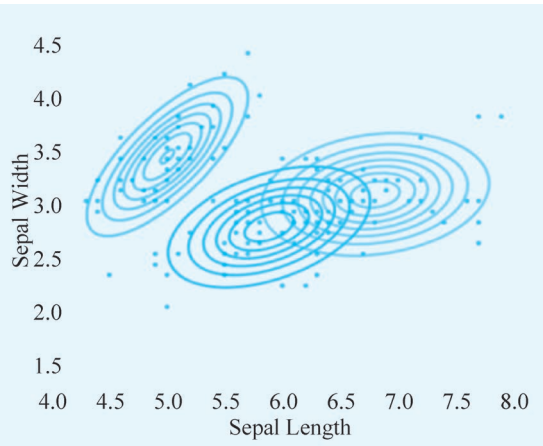


图 3.18 聚类结果(花萼)

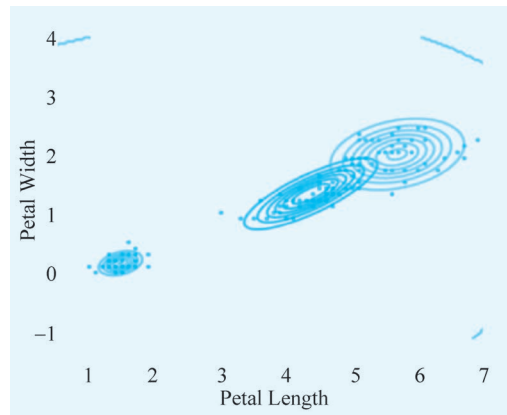


图 3.19 聚类结果(花瓣)

3.4.2 模糊控制

模糊控制是模糊计算在工程技术中的典型应用实例,它是以模糊集理论、模糊语言变量和模糊逻辑推理为基础的一种智能控制方法。模糊控制不需要被控对象的精确数学模型,而是基于专家的操作经验和知识建立模糊控制模型,通过模糊逻辑推理完成控制决策过程,最后实现对被控对象的调节控制^[8-9]。

模糊控制的总体思路是首先将操作人员或专家经验编成模糊规则,然后将来自传感器的实时信号模糊化,将模糊化后的信号作为模糊规则的输入,完成模糊推理,将推理后得到的输出量加到执行器上。

模糊控制系统的基本结构如图 3.20 所示。一般情况下,模糊控制系统由模糊控制器、输入/输出接口、执行机构、被控对象和测量装置等 5 部分组成。模糊控制器是模糊控制系统的核心部分,其可以进一步划分为模糊化接口、知识库、模糊推理和解模糊接口。

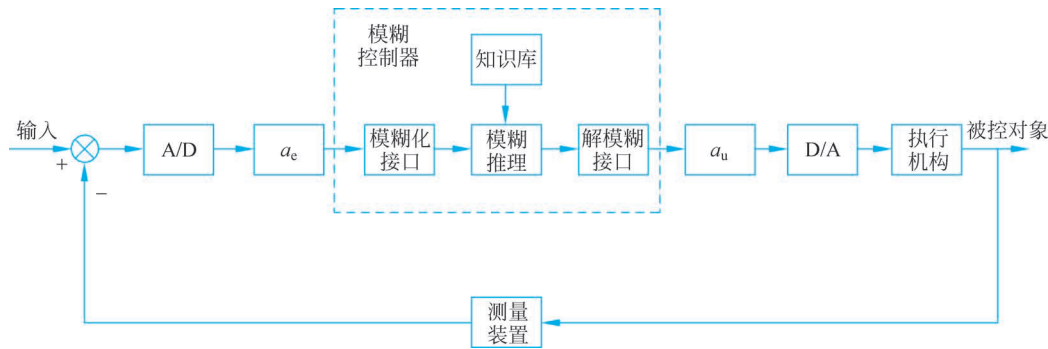


图 3.20 模糊控制系统的基本结构

下文将分别介绍这 4 个模块。

1. 模糊化接口

模糊化接口的作用是将一个精确的输入变量通过定义在其论域上的隶属度函数计算出其属于各模糊集合的隶属度,从而将其转化成为一个模糊变量。以偏差为例,假设其论域上定义了{负大,负中,负小,零,正小,正中,正大}7 个模糊集合,隶属度函数如图 3.21 所示,根据偏差输入变量的大小,可以算出其属于每个模糊集合的隶属度。

模糊化的方法一般有 3 种。

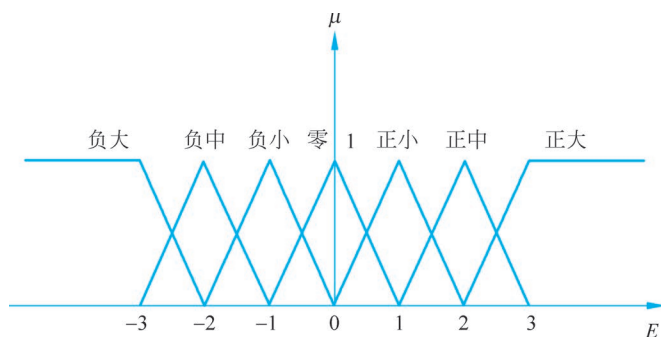


图 3.21 “偏差”的隶属度函数

(1) 单点模糊集合：如果输入量数据是准确的，则将其模糊化为单点模糊集合，隶属度函数表达为

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \quad (3.64)$$

(2) 三角形模糊集合：将随机量变换成模糊量，隶属度函数一般为等腰三角形，如图 3.22 所示。

(3) 铃形函数：隶属度函数为正态分布函数，即

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.65)$$

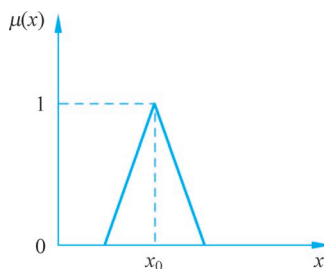


图 3.22 三角形模糊集合的隶属度函数

2. 知识库

模糊控制器中的知识库一般包含数据库和规则库两个组成部分。

(1) 数据库：存储着有关模糊化、模糊推理、解模糊化的一切知识，如模糊化中论域变化的方法、输入变量隶属度函数的定义、模糊推理算法、解模糊算法、输出变量各模糊集的隶属度函数的定义等。

(2) 规则库：包含了模糊语言变量表示的一系列控制规则，反映了控制专家的经验与知识。规则库中的模糊控制规则的建立一般有以下几种方式：①基于专家经验和控制工程知识；②基于操作人员的实际控制过程；③基于过程的模糊模型。同时模糊控制规则要具备以下的性能要求：①完备性，即对于任意的输入，模糊控制器均应给出合适的控制输出；②模糊控制规则数在满足完备性的条件下，尽量取较小的数值，以简化模糊控制器的设计与实现；③一致性：对于一组模糊控制规则，不允许出现给定一个输入，结果产生两组不同甚至是矛盾的输出。

3. 模糊推理

模糊推理是模糊控制器的核心，在 3.3 节中已经详细介绍了模糊推理，考虑到实际应用中对模糊推理的效率要求，在模糊关系合成法的基础上模糊控制系统还发展出了特征展开近似推理法、真值流推理法、作用模糊子集推理法等具有更快推理速度的推理方法，以下简要介绍特征展开近似推理法(Character Expansion of Inference, CEI)。

图 3.23 所示的基本模糊控制器中， e^* 、 ec^* 和 Δu^* 分别表示偏差、偏差变化和控制增量的精确量； A^* 、 B^* 和 C^* 分别为 e^* 、 ec^* 和 Δu^* 的模糊量； q_e 、 q_{ec} 和 q_u 分别为 e^* 、 ec^* 和 Δu^* 的量化因子和比例因子。设 X 、 Y 为输入变量论域， U 为输出变量

论域, $x \in X, y \in Y, u \in U$ 为基本变量, $A \subset X, B \subset Y, C \subset U$ 为模糊变量, 且 $e \in X, ec \in Y, u \in U; X, Y, U = [-6, 6]$ 。

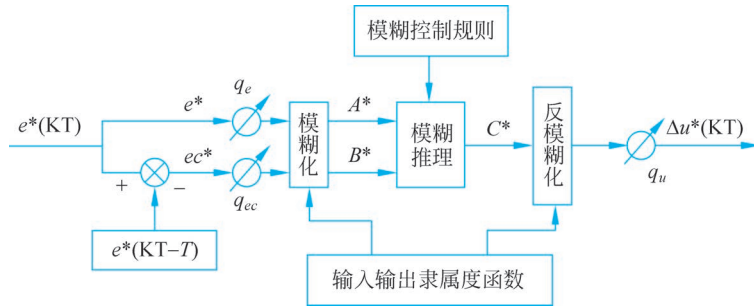


图 3.23 基本模糊控制器

在 CRI 方法中, 每一个模糊蕴涵关系 $A_i \times B_j \rightarrow C_{ij}$ 都要建立一个 $X \times Y \times U$ 上的模糊关系 $R_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 7)$ 。这样的 $\mathbf{R}$ 是具有三重下标的矩阵, 若 X, Y 和 U 分别包含 m, n, l 个离散点, 则 $\mathbf{R}$ 就含有 $m \times n \times l$ 个元素, 再做关系合成运算, 其运算量将非常之大。在实际应用中, 通常需要事先计算出输入输出响应表, 通过查表的方法实现模糊控制。针对 CRI 法推理计算过程的复杂性问题, CEI 方法把模糊集族 $\{A_i\}$ 、 $\{B_j\}$ 、 $\{C_{ij}\}$ 看成三组“特征基”, 分别称

$$\alpha_k = V_{i=1}^{13} [A^*(x) \wedge A_k(x_i)], \quad \beta_k = V_{i=1}^{13} [B^*(y) \wedge B_k(y_i)] \quad (3.66)$$

为 A^* 关于 A_k 和 B^* 关于 B_k 的特征系数, 其中 $k = 1, 2, \dots, 49$ 。CEI 法指出, 近似推理实际上是特征系数的传递。因此控制量 u 的模糊量值 $C^*(u)$ 为

$$C^*(u) = V_{k=1}^{49} [\alpha_k \wedge \beta_k \wedge C_k(u)] \quad (3.67)$$

得到模糊量值 $C^*(u)$ 后, 经过解模糊化即可得到具体实施的精确量。CEI 法除了不必计算总模糊蕴涵关系 R 外, 其余过程均与 CRI 法相同。下面证明 CEI 法完全等同于 CRI 法。

证: 已知 A^* 和 B^* 分别为实测量 (e^*, ec^*) 的模糊量值, $\mathbf{R}$ 为总模糊蕴涵关系, 由 CRI 法可知, 控制量的模糊量值为

$$C_i^*(u) = (A^* \text{ and } B^*) \circ \mathbf{R} = (A^* \text{ and } B^*) \circ \bigcup_{i=1}^n R_i \quad (3.68)$$

由最大—最小蕴涵运算算子结合律可知,

$$\begin{aligned} C_i^*(u) &= \bigcup_{i=1}^n (A^* \text{ and } B^*) \circ R_i \\ &= \bigcup_{i=1}^n (A^* \text{ and } B^*) \circ (A_i \text{ and } B_i \rightarrow C_i) \\ &= \bigvee_{i=1}^n [A^*(x) \wedge B^*(y)] \circ [A_i(x) \wedge B_i(y) \wedge C_i(u)] \\ &= \bigvee_{i=1}^n \{ [A^*(x) \wedge A_i(x)] \wedge [B^*(y) \wedge B_i(y)] \wedge C_i(u) \} \end{aligned} \quad (3.69)$$

比较式 (3.66) 和式 (3.69) 可知

$$C_i^* = \bigvee_{i=1}^n \{ \alpha_i \wedge \beta_i \wedge C_i(u) \} \quad (3.70)$$

由此可见, CEI 法是 CRI 法的简化, 二者完全相同, 但由于特征展开法不需构造 $\mathbf{R}$ 而使计算量大幅减少。同时, CEI 法指出近似推理实际上是特征系数的传递这一本质

使得人们可以从 CRI 法复杂的推理过程中解脱出来,清晰地看到信息在模糊推理中的传递过程。

4. 解模糊接口

通过模糊推理得到的结果是一个模糊集合或者隶属度函数,但在实际使用中,特别是在模糊控制中,必须用一个确定的值才能控制执行机构,因此在推理得到的模糊集合中取一个相对最能代表这个模糊集合的单值的过程就称作解模糊或模糊判决。在 3.3 节的模糊判决中介绍了常用的几种解模糊化方法:①最大隶属度法;②中位数法;③加权平均判决法,这里不再赘述。

综上所述,模糊控制的基本算法可概括为 4 个步骤:

- (1) 根据采样得到系统的输出值,计算所选择的系统的输入变量;
- (2) 将输入变量的精确值变为模糊量;
- (3) 根据输入模糊量及模糊控制规则,按合成规则计算模糊控制量;
- (4) 由上述得到的模糊控制量计算精确的控制量。

例 3.9 以水位的模糊控制为例,如图 3.24 所示。设有一个水箱,通过调节阀可向内注水和向外抽水。设计一个模糊控制器,通过调节阀门将水位稳定在固定点附近。按照日常的操作经验,可以得到基本的控制规则:

- “若水位高于 O 点,则向外排水,差值越大,排水越快”
 - “若水位低于 O 点,则向内注水,差值越大,注水越快”
- 根据上述经验,按下列步骤设计模糊控制器。

(1) **确定观测量和控制量。**定义理想液位 O 点的水位为 h_0 ,实际测得的水位高度为 h ,选择液位差

$$e = \Delta h = h_0 - h$$

将当前水位对于 O 点的偏差 e 作为观测量。

(2) **输入量和输出量的模糊化。**将偏差 e 分为 5 个模糊集:负大(NB),负小(NS),零(ZO),正小(PS),正大(PB)。根据偏差 e 的变化范围分为 7 个等级: $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ 。得到水位变化划分见表 3.1。控制量 u 为调节阀门开度的变化。将其分为 5 个模糊集:负大(NB),负小(NS),零(ZO),正小(PS),正大(PB)。并将 u 的变化范围分为 9 个等级: $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4$ 。得到控制量变化划分见表 3.2。

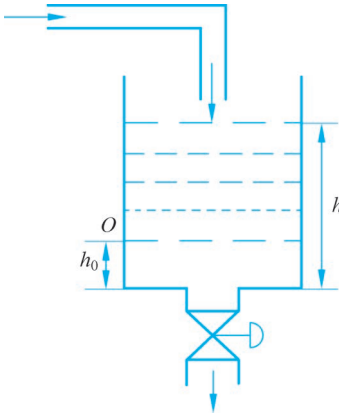


图 3.24 水箱液位控制

表 3.1 水位变化划分表

隶 属 度		e 变化等级						
		-3	-2	-1	0	1	2	3
模糊集	PB	0	0	0	0	0	0.5	1
	PS	0	0	0	0	0.5	1	0
	ZO	0	0	0.5	1	0.5	0	0
	NS	0	0.5	1	0	0	0	0
	NB	1	0.5	0	0	0	0	0

表 3.2 控制量变化划分表

隶 属 度	u 变化等级									
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
模糊集	PB	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1
	PS	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0
	ZO	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0
	NS	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0
	NB	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0

(3) 模糊规则的描述。根据日常的经验,设计以下模糊规则:①“若 e 负大,则 u 负大”;②“若 e 负小,则 u 负小”;③“若 e 为 0,则 u 为 0”;④“若 e 正小,则 u 正小”;⑤“若 e 正大,则 u 正大”。其中,排水时, u 为负;注水时, u 为正。根据上述经验规则,可得模糊控制见表 3.3。

表 3.3 模糊控制规则表

e	NB	NS	ZO	PS	PB
u	NB	NS	ZO	PS	PB

(4) 求模糊关系。模糊控制规则是一个多条语句,它可以表示为 $U \times V$ 上的模糊子集,即模糊关系为

$R = (NB_e \times NB_u) \cup (NS_e \times NS_u) \cup (ZO_e \times ZO_u) \cup (PS_e \times PS_u) \cup (PB_e \times PB_u)$
其中,规则内的模糊集运算取交集,规则间的模糊集运算取并集。

$$\begin{aligned} NB_e \times NB_u &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ NS_e \times NS_u &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{ZOe} \times \mathbf{ZCu} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{PSe} \times \mathbf{PSu} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{PBe} \times \mathbf{PBu} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \times [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1.0]
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

由以上 5 个模糊矩阵求并集(隶属度函数最大值)得

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

(5) 模糊决策。模糊控制器的输出为误差向量和模糊关系的合成,即

$$\mathbf{u} = \mathbf{e} \circ \mathbf{R}$$

当误差 $\mathbf{e}$ 为 NB 时, $\mathbf{e} = [1, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0]$ 控制器输出为

$$\mathbf{u} = \mathbf{e} \circ \mathbf{R}$$

$$= [1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \circ \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

(6) 控制量的解模糊化。由模糊决策可知,当误差为负大时,实际液位远高于理想液位, $\mathbf{e} = \text{NB}$, 控制器的输出为模糊向量,可表示为

$$\mathbf{u} = \frac{1}{-4} + \frac{0.5}{-3} + \frac{0.5}{-2} + \frac{0.5}{-1} + \frac{0}{0} + \frac{0}{+1} + \frac{0}{+2} + \frac{0}{+3} + \frac{0}{+4}$$

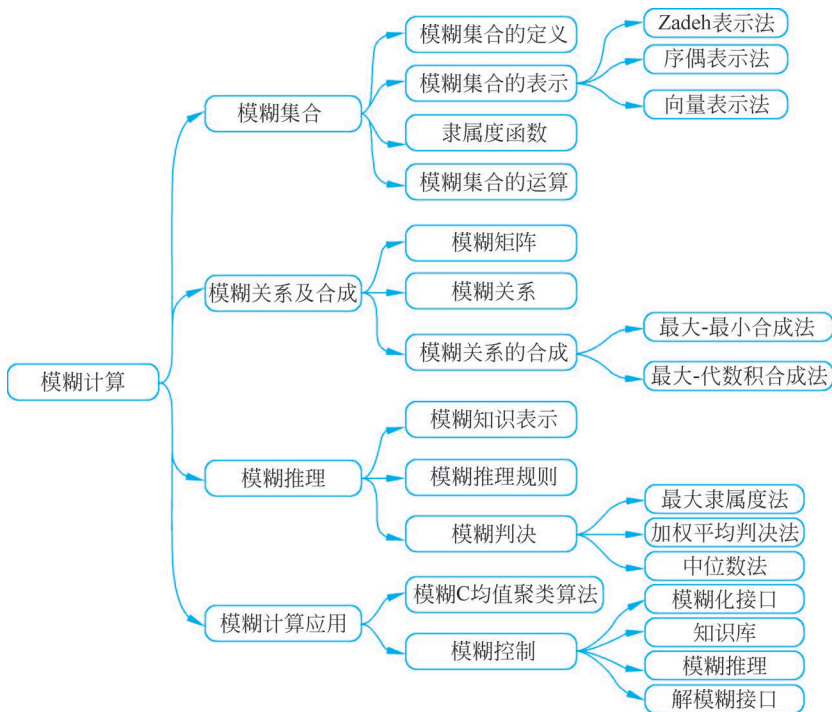
如果按照“隶属度最大原则”进行解模糊化,则选择控制量为-4,即阀门的开度应开大一些,加大排水量。

本章小结

对于现实世界中存在的大量的不确定性的、复杂性问题,以经典集合为基础的经典数学往往显得无能为力,而以模糊集合为基础的模糊计算在处理该类问题上具有极大的优越性。3.1 节阐述了模糊集合的定义,分别介绍了模糊集合的表示方法、常见的隶属度函数、模糊集合运算的定理与性质、隶属度函数的确定方法。3.2 节介绍了

模糊矩阵的定义和运算定理,并讨论了模糊关系的定义、表示方法以及模糊二元关系的运算。在模糊关系的合成一节中介绍了两种合成运算方法。3.3节讨论了模糊语言、模糊命题等模糊知识表示,重点描述了3种模糊条件语句、模糊推理规则以及3种常用的模糊判决方式。3.4节介绍了模糊计算的两个经典应用:模糊C均值聚类算法以及模糊控制系统,并回顾了模糊推理的相关内容。

模糊理论是由美国的 L. A. Zadeh 教授提出的。然而,模糊理论在产生之初,在美国发展并不顺利,同样在欧洲也受到一定程度的抵制。这是因为西方人喜欢钻研精确问题,偏好 Aristotle 的二元逻辑系统。相反,模糊理论在中国、日本、印度这些东方国家却大受欢迎,发展迅速。这是因为东方人擅长兼容并蓄的思维方式,逻辑系统也和西方的二元逻辑大不相同。正是这种文化沉淀上的差异,使得东西方在面对模糊逻辑时,表现出的接受程度大相径庭。模糊理论的成功表明模糊是相对于精确而言的,对于多因素的复杂状况,模糊往往显示出更大的“精确”。而传统意义上的过分精确还可能导致过于刻板、缺乏灵活性。



习题

1. 说明模糊集合与经典集合的主要区别。
2. 简要说明模糊控制系统中模糊控制器的工作原理。
3. 设论域 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, A 及 B 为论域 U 上的两个模糊集, 已知:

$$A = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0.6}{x_4} + \frac{1}{x_5}; \quad B = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0.3}{x_5}$$

试计算: $A \cap B, A \cup B, \bar{A}, A \cup \bar{B}, A \cdot B, A + B, A \oplus B, A \otimes B$ 。

4. 设某汽车研究所拟对 4 种车型 a, b, c, d 的乘坐舒适性进行评估。为此,令 $U = \{a, b, c, d\}$, $A = \{\text{乘坐舒适性}\}$, 并挑选 10 名长期从事汽车道路试验的技术人员和司机, 通过实际乘坐进行评估, 评估方法为: 任取两辆车编成一组进行对比, 以先乘坐的一辆车为基准, 以后乘坐的一辆车为对象做相对比较评分, 评分标准如表 3.4 所示。

表 3.4 乘坐舒适性评分表

乘坐感觉	很好	好	稍好	相同	稍差	差	很差
分值	10	9	7	5	3	1	0

假设先乘 b 车再乘 a 车, 相对于 b 车 10 人对 a 车评分的总和为 83 分, 则取 $f_b(a) = 0.83, f_a(b) = 0.17$ 。得到的所有评分结果如表 3.5 所示。

表 3.5 乘坐舒适性得分表

$f_y(x)$		基准 y			
		a	b	c	d
对象 x	a	0.50	0.63	0.70	0.79
	b	0.37	0.50	0.68	0.69
	c	0.30	0.32	0.50	0.74
	d	0.21	0.31	0.26	0.50

根据二元对比排序法计算相对优先矩阵和 A 的隶属度函数。

5. 已知存在模糊向量 A 和模糊矩阵 R 如下:

$$A = (0.8 \quad 0.2 \quad 0.6)$$
$$R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

计算 $B = A \circ R$ 。

6. 设有下面两个模糊关系:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

试求出 R_1 与 R_2 的复合关系 $R_1 \circ R_2$ 。

7. 设 $U = V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2}, B = \frac{0.4}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{1}{5}$

模糊知识: IF x is A THEN y is B

模糊证据: x is A'

其中, A' 的模糊集为: $A' = \frac{1}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.2}{3}$, 求其模糊结论 B' 。

8. 查阅相关资料, 总结至少 3 种基于模糊 C 均值算法的改进聚类算法, 并编写代码实现其中一种算法。

9. 已知某一炉温控制系统, 要求温度保持在 600°C 恒定。针对该控制系统有以下

控制经验：

- (1) 若炉温低于 600°C ，则升压；低的越多升压越高。
- (2) 若炉温高于 600°C ，则降压；高的越多降压越高。
- (3) 若炉温等于 600°C ，则保持电压不变。

设模糊控制器为一维控制器，输入语言变量为误差，输出为控制电压。输入输出的量化等级为 7 级，取 5 个模糊集。试设计隶属度函数误差变化划分表、控制电压变化划分表和模糊控制规则表。

10. 查阅相关资料，总结一种现实生活中模糊控制的应用（例如模糊电饭煲），并分析其中的模糊控制原理与模糊推理规则。

参考文献

- [1] Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets and Systems-Theory and Applications [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [2] 张国立, 张辉, 孔倩. 模糊数学基础及应用[M]. 北京: 化学工业出版社, 2011.
- [3] 李士勇. 工程模糊数学及应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2004.
- [4] 王立新. 模糊系统与模糊控制教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [5] 张吉礼. 模糊-神经网络控制原理与工程应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2004.
- [6] Timothy J R. 模糊逻辑及其工程应用[M]. 钱同惠, 沈其聪, 葛晓滨, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2001.
- [7] 刘若辰, 慕彩红, 焦李成, 等. 人工智能导论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2021.
- [8] 刘金琨. 智能控制[M]. 4 版. 北京: 电子工业出版社, 2017.
- [9] 石辛民, 郝整清. 模糊控制及其 MATLAB 仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2018.