

第3章

叠加定理和额外元件定理



第1章已经对电路网络常用分析工具进行回顾。在众多定理中,诺顿和戴维南定理尤为实用,并且在第2章对某些电路进行具体分析时已经验证。然而当分析多输入电路时首先要考虑叠加定理,对叠加定理深入研究并扩展后即为额外元件定理(Extra Element Theorem, EET)。本章首先通过简单的图形方式引入叠加定理,并且以简单易懂的方式为EET的理解铺平道路。

3.1 叠加定理

图3.1为包含 u_1 和 u_2 双输入源的线性系统黑盒子。输入无论为电流源或电压源,叠加定理均适用。当两激励源同时作用时输出响应 y_1 定义为:

$$y_1 = f(u_1, u_2) \quad (3.1)$$

叠加定理表明,输出 y_1 为 u_1 设置为0时得到的响应与 u_2 设置为0时得到的响应的代数和。叠加定理的通用表达式为:

$$y_1(u_1, u_2, \dots, u_i) = y_1(u_1) \big|_{u_2=u_i=0} + y_1(u_2) \big|_{u_1=u_i=0} + \dots + y_1(u_n) \big|_{u_2=u_i=0} \quad (3.2)$$

在前面章节中已经对电源设置为0或将其关闭进行详细定义:独立电压源设置为0V时可由短路线代替,而独立电流源设置为0A时则将其断路或从电路中移除。除非分析过程中需要将受控源设置为0,否则电路中的受控源将保持不变。对图3.1中的简单电路应用叠加定理,新电路如图3.2所示。



图 3.1 由双输入源 u_1 和 u_2 以及单输出 y_1 构成的简单系统

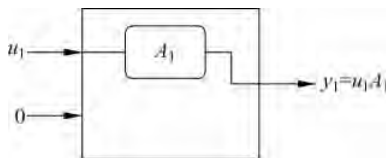


图 3.2 当 u_2 设置为0时 u_1 单独作用于输出

从图 3.2 可得:

$$\left. \frac{y_1}{u_1} \right|_{u_2=0} \equiv A_1 \quad (3.3)$$

如图 3.3 所示,同样可设置 u_1 为零、 u_2 单独对电路进行激励,以测试输出响应 y_1 。此时:

$$\left. \frac{y_1}{u_2} \right|_{u_1=0} \equiv A_2 \quad (3.4)$$

如图 3.4 所示,当两输入同时作用于电路时产生的输出为式(3.3)与式(3.4)之和,即:

$$y_1 = \left. \frac{y_1}{u_1} \right|_{u_2=0} u_1 + \left. \frac{y_1}{u_2} \right|_{u_1=0} u_2 = A_1 u_1 + A_2 u_2 \quad (3.5)$$

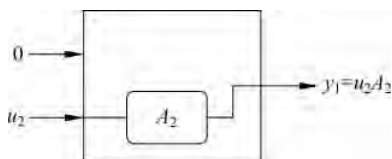


图 3.3 当 u_1 设置为 0 时 u_2 单独作用于输出

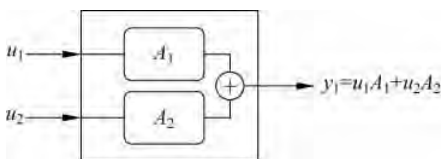


图 3.4 此时输出为 u_1 和 u_2 单独作用于电路时的输出之和

接下来通过两个简单实例具体讲解叠加定理如何应用。图 3.5(a)所示电路包含两个输入源,分别为电压源和电流源,输出为电阻 R_3 两端电压。首先如图 3.5(b)所示,将电压源 V_1 设置为 0V。

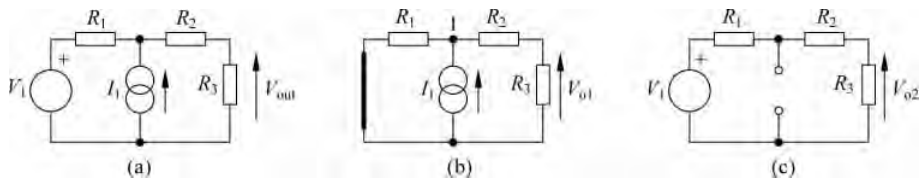


图 3.5 包含电压源和电流源的简单电路

从图 3.5(b)可得,电阻 R_2 和 R_3 串联,然后再与 R_1 并联。因此电流源两端电压即节点 1 的电压为:

$$V_{(1)} = I_1 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \quad (3.6)$$

电阻 R_3 两端电压为 R_2 和 R_3 所构成电阻分压器的输出电压,即:

$$V_{o1} = V_{(1)} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (3.7)$$

将式(3.6)代入式(3.7),整理得 $V_1=0$ 时的输出电压 V_{o1} 为:

$$V_{o1} = I_1 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (3.8)$$

接下来利用图 3.5(c)计算电压 V_{o2} ,此时将电流源关闭。因为 R_1 、 R_2 和 R_3 串联构成电阻分压器,所以输出电压 V_{o2} 为:

$$V_{o2} = V_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.9)$$

电阻 R_3 两端最终电压为 V_{o1} 和 V_{o2} 之和,即:

$$V_{\text{out}} = V_{\text{o1}} + V_{\text{o2}} = I_1 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \frac{R_2}{R_2 + R_3} + V_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.10)$$

利用 SPICE 直流工作点分析或 Mathcad 根据电阻和电源参数的运算结果对计算值进行验证。通过图 3.6 可得计算结果完全一致。

$$R_1 := 15\Omega \quad R_2 := 38\Omega \quad R_3 := 50\Omega \quad V_1 := 12\text{V}$$

$$I_1 := 2\text{A} \quad \parallel(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$V_{\text{o1}} := I_1 \cdot [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 14.563\text{V}$$

$$V_{\text{o2}} := V_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 5.825\text{V} \quad V_{\text{out}} := V_{\text{o1}} + V_{\text{o2}} = 20.388\text{V}$$

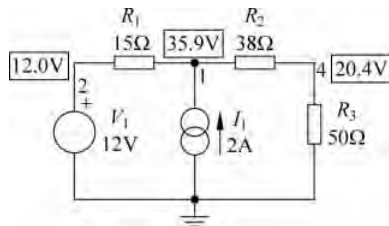


图 3.6 Mathcad 输出结果和 SPICE 直流工作点数据验证计算正确

图 3.7 为第 2 个实例,该电路包括受控源。电压源对电阻网络进行偏置,其输出电流为 I_1 。电流源 I_a 对节点 2 进行偏置,并且与 I_1 相关联的电流受控电压源通过电阻 R_2 也连接到节点 2。接下来计算 I_1 电流值。

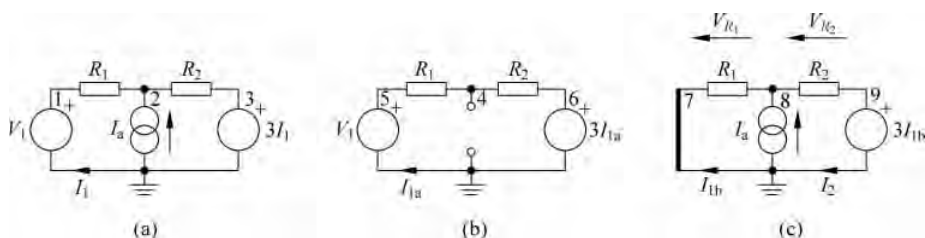


图 3.7 受控电流源对右侧电路提供电压 $3I_1$

应用叠加,将独立源交替设置为 0,而受控源保持不变。在图 3.7(b)中,电流 I_{1a} 计算公式为:

$$I_{1a} = \frac{V_1 - 3I_{1a}}{R_1 + R_2} \quad (3.11)$$

将式(3.11)移项并分解因式,整理得 I_{1a} 计算公式为:

$$I_{1a} = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + 3} \quad (3.12)$$

接下来将电压源 V_1 设置为 0V(两端短路),具体如图 3.7(c)所示,然后求解包含 I_1 和 I_2 的简单方程。流经电阻 R_2 的电流 I_2 为其两端电压 V_{R_2} 与其电阻值之商,即:

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{-V_{R_1} - 3I_{1b}}{R_2} = \frac{-R_1 I_{1b} - 3I_{1b}}{R_2} = -\frac{I_{1b}(R_1 + 3)}{R_2} \quad (3.13)$$

同时电流 $I_2 = I_a + I_b$,即:

$$I_2 = I_a + I_{1b} \quad (3.14)$$

将式(3.13)和式(3.14)进行因式分解和重新整理,求得电流 I_{1b} 为:

$$I_{1b} = -\frac{I_a}{1 + \frac{R_1 + 3}{R_2}} = -\frac{R_2 I_a}{R_1 + R_2 + 3} \quad (3.15)$$

于是电流 $I_1 = I_{1a} + I_{1b}$ 的最终表达式为:

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + 3} - \frac{R_2 I_a}{R_1 + R_2 + 3} = \frac{V_1 - R_2 I_a}{R_1 + R_2 + 3} \quad (3.16)$$

根据电阻和激励源的具体参数值,利用 Mathcad 数值计算和 SPICE 直流工作点分析对表达式的正确性进行验证。应当注意,电流受控源中因数 3 的量纲为欧姆。根据图 3.8 可知计算结果正确。

$$R_1 := 100\Omega \quad R_2 := 25\Omega \quad V_1 := 24V \quad I_a := 7A \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$I_{1a} := \frac{V_1}{R_1 + R_2 + 3\Omega} = 0.632A \quad I_{1b} := -\frac{I_a}{1 + \frac{R_1 + 3\Omega}{R_2}} = -4.605A$$

$$I_1 := I_{1a} + I_{1b} = 3.974A$$

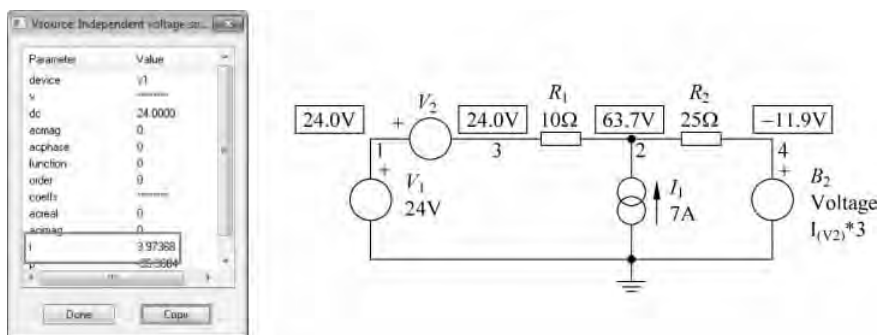


图 3.8 Mathcad 输出结果和 SPICE 直流工作点数据验证计算正确

类似上述电路分析的教程与习题在互联网随处可见,所以实例分析点到为止(具体见文献[1]和[2])。文献[2]中的电路分析耐人寻味,本节第 2 个实例即来自该文献。文献中作者对叠加定理进行重申:特定条件下所有输入源均可置零,包括受控源。并且作者结合大量实例对扩展定理进行佐证。

3.1.1 双输入/双输出系统*

在图 3.1 中,电路系统包含多个输入但仅有唯一输出。通过增加第二输出 y_2 使系统成为双输出系统,如图 3.9 所示。此时输出响应 y_1 和 y_2 由激励源 u_1 和 u_2 控制。分析方法与双输入/单输出系统相同,计算 y_1 和 y_2 表达式时将 u_1 和 u_2 交替设置为 0。双输入/双输出电路系统如图 3.10 所示。



图 3.9 当增加第二输出时黑盒子线性系统成为双输入/双输出电路网络

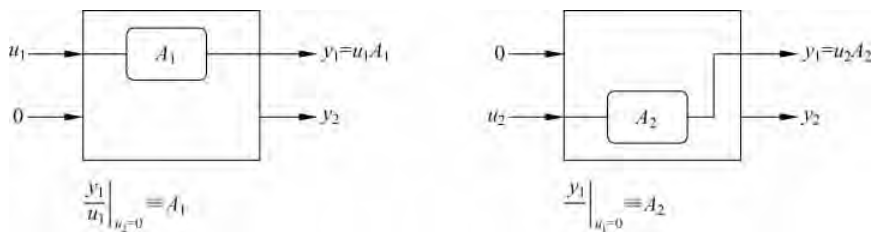


图 3.10 计算输出 y_1 时将 u_1 和 u_2 交替设置为 0

* 原书仅有 3.1.1 节,此处与原书保持一致。

当输入 $u_2=0$ 时求得 A_1 为:

$$\left. \frac{y_1}{u_1} \right|_{u_2=0} \equiv A_1 \quad (3.17)$$

当输入 $u_1=0$ 时求得 A_2 为:

$$\left. \frac{y_1}{u_2} \right|_{u_1=0} \equiv A_2 \quad (3.18)$$

输出 y_2 计算方法与上述一致,具体电路如图 3.11 所示。

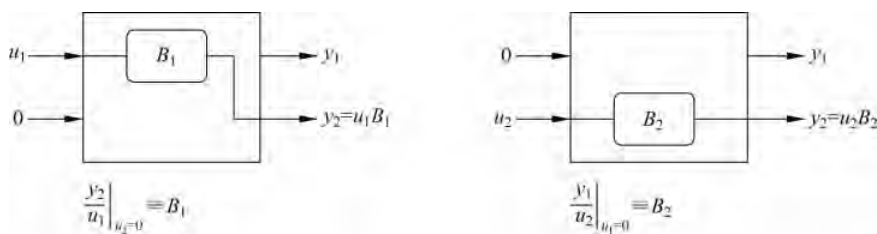


图 3.11 计算输出 y_2 时将 u_1 和 u_2 交替设置为 0

通过电路分析,求得增益 B_1 和 B_2 定义式为:

$$\left. \frac{y_2}{u_1} \right|_{u_2=0} \equiv B_1 \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{y_2}{u_2} \right|_{u_1=0} \equiv B_2 \quad (3.20)$$

按照图 3.12 规则将上述分析结果进行组合,此时输出 y_1 和 y_2 均由输入 u_1 和 u_2 清晰

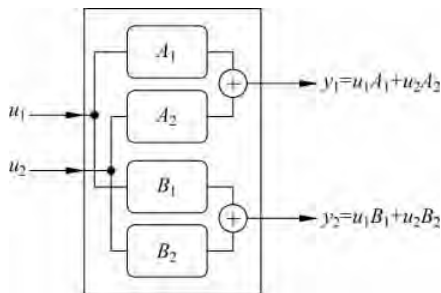


图 3.12 将图 3.10 和图 3.11 组合成
双输入/双输出系统

表达。利用叠加定理对双输入系统进行分析,当某一输入处于激活状态时另一输入设置为 0。当两输入同时处于激活时定义为双注入状态。因为输出 y_1 和 y_2 为输入 u_1 和 u_2 的线性组合,所以输出可为任意值。对电路进行分析时,当 u_1 和 u_2 为何值时输出为 0 通常为研究重点。一般利用电路网络零点计算时采用的 NDI 技术对电路进行分析。下面通过调整输入 u_1 和 u_2 将两输出之一 y_1 置零。因为:

$$y_1 = u_1 A_1 + u_2 A_2 \quad (3.21)$$

以及

$$y_2 = u_1 B_1 + u_2 B_2 \quad (3.22)$$

当 y_1 为零时关于 u_1 和 u_2 的表达式为:

$$0 = u_1 \big|_{y_1=0} A_1 + u_2 \big|_{y_1=0} A_2 \quad (3.23)$$

当 y_1 为零时 y_2 关于 u_1 和 u_2 的表达式为:

$$y_2 \big|_{y_1=0} = u_1 \big|_{y_1=0} B_1 + u_2 \big|_{y_1=0} B_2 \quad (3.24)$$

当 y_1 为零时从式(3.23)中提取 u_1 得:

$$u_1 \big|_{y_1=0} = -u_2 \big|_{y_1=0} \frac{A_2}{A_1} \quad (3.25)$$

将式(3.25)代入式(3.24)整理得:

$$y_2 \big|_{y_1=0} = u_2 \big|_{y_1=0} B_2 - u_2 \big|_{y_1=0} \frac{A_2}{A_1} B_1 \quad (3.26)$$

分解因式 $u_2 \big|_{y_1=0}$ 得:

$$y_2 \big|_{y_1=0} = u_2 \big|_{y_1=0} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \quad (3.27)$$

当 y_1 为零时将 y_2 重新表达为 u_2 的传递函数,即:

$$\frac{y_2}{u_2} \bigg|_{y_1=0} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \quad (3.28)$$

应当注意,式(3.28)与 $u_1=0$ 时所得定义式(3.20)不同。虽然所分析电路比率相同,但此时输出 y_1 为零。对于内部增益 A 和 B 已经确定的双输入/双输出系统,当输出 y_1 为零时,可直接应用公式(3.28)解得 y_2 与 u_2 之间的相互关系,而不必重新实际计算 y_2/u_2 。

接下来通过简单实验对表达式的物理意义进行具体描述。图 3.13 为原始黑盒子电路,其中 A 和 B 分别设置为不同值。如前所述,当 $y_1=0$ 时计算 u_1 和 u_2 的偏置值。通过式(3.23)计算 $y_1=0$ 时 u_1 与 u_2 之比:

$$\frac{u_1}{u_2} \bigg|_{y_1=0} = -\frac{A_2}{A_1} \quad (3.29)$$

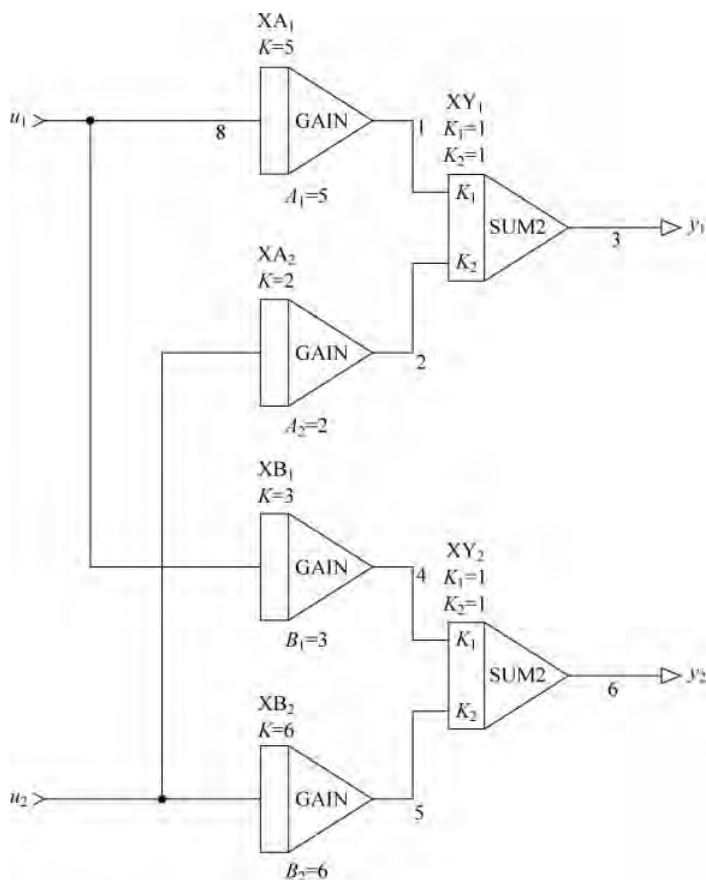


图 3.13 A 和 B 具有不同增益值时的电路系统

对式(3.29)进行整理,结果与式(3.25)相同,即:

$$u_1|_{y_1=0} = -\frac{A_2}{A_1}u_2|_{y_1=0} \quad (3.30)$$

将图 3.13 中参数值代入式(3.30),即:

$$u_1|_{y_1=0} = -\frac{2}{5}u_2|_{y_1=0} = -0.4u_2|_{y_1=0} \quad (3.31)$$

同样,利用公式(3.28)计算 $y_1=0$ 时 y_2 关于 u_1 和 u_2 的输出值:

$$y_2|_{y_1=0} = \left[\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1} \right] u_2|_{y_1=0} = \frac{5 \times 6 - 2 \times 3}{5} u_2|_{y_1=0} = 4.8u_2|_{y_1=0} \quad (3.32)$$

当设置 u_2 为 5V 时,计算 $y_1=0$ 时的 u_1 值。计算结果如式(3.30)所示:

$$u_1|_{y_1=0} = -0.4u_2|_{y_1=0} = -0.4 \times 5 = -2V \quad (3.33)$$

当 $y_1=0$ 时利用式(3.32)计算 y_2 的具体值,结果如下:

$$y_2|_{y_1=0} = 4.8u_2|_{y_1=0} = 4.8 \times 5 = 24V \quad (3.34)$$

当 u_2 设置为 5V 时对 u_1 进行扫描,仿真结果如图 3.14 所示,该实例通过对电源进行直流扫描分析使得输出 $Y_1=0$ 。通过图形数据可得,当偏置电压 $u_2=-2V$ 时输出 $y_1=0V$ 、 $y_2=24V$ 。此时利用式(3.28)计算 y_2 关于 u_2 的增益值,结果如下:

$$\frac{y_2}{u_2} \Big|_{y_1=0} = \frac{5 \times 6 - 2 \times 3}{5} = \frac{24}{5} = 4.8 \quad (3.35)$$

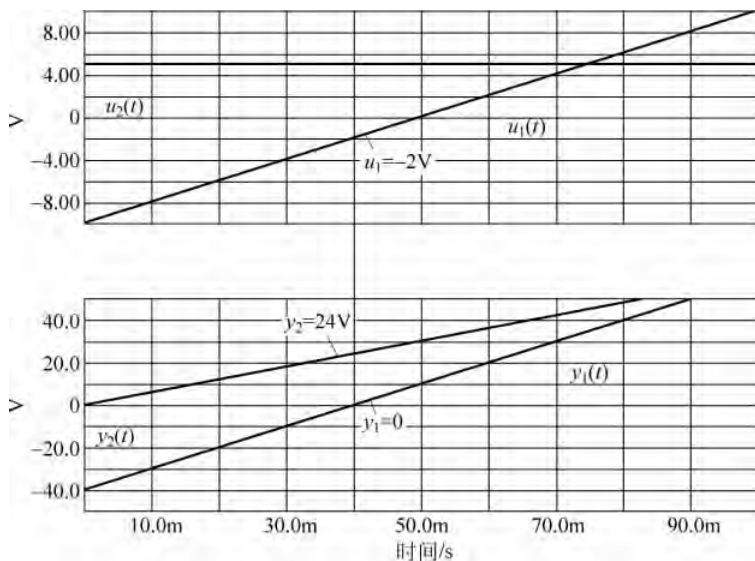


图 3.14 当 u_1 和 u_2 选择合理参数值时能够使得输出 $y_1=0$

如图 3.14 所示,当输入偏置电压为 5V 时输出为 24V,此时增益为 4.8。

该测试实验同样适用于交流分析,Middlebrook 博士在其论文^[3]已进行详细讲解。图 3.15 为交流仿真分析的具体设置。

在图 3.15 中,节点 V_1 为交流正弦波电压源,峰值幅度为 20V。节点 V_2 与 V_1 幅值相同但相位相差 180° 。节点 ramp 为锯齿波,最小值 1V、最大值 1V、周期 100ms。利用 BU_1 将 V_1 与 V_{ramp} 相乘,所得正弦波在 100ms 内从 0V 线性上升至峰值 20V。设置 V_2 为 u_2 并且幅值固定,当 u_1 为锯齿波时输出 y_1 在某时刻为零,如图 3.16 所示。由公式(3.30)可得,当 $u_1 = 20 \times$

0.4=8V 峰值时输出 $y_1=0$ 。此时通过公式(3.32)可得 $y_2=4.8 \times 20=96\text{V}$ 。当双输入/双输出系统中两注入信号同时变化时,利用上述两实例分析方法,可将某输出设置为零。

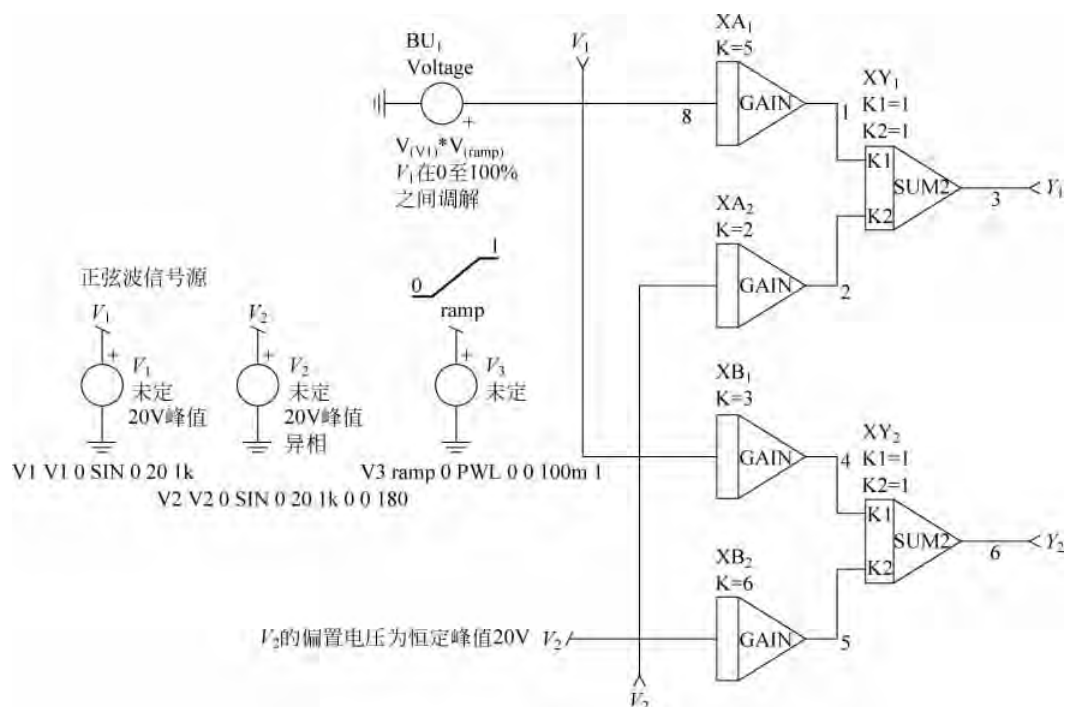


图 3.15 对黑盒子电路输入端进行交流扫描并记录输出结果

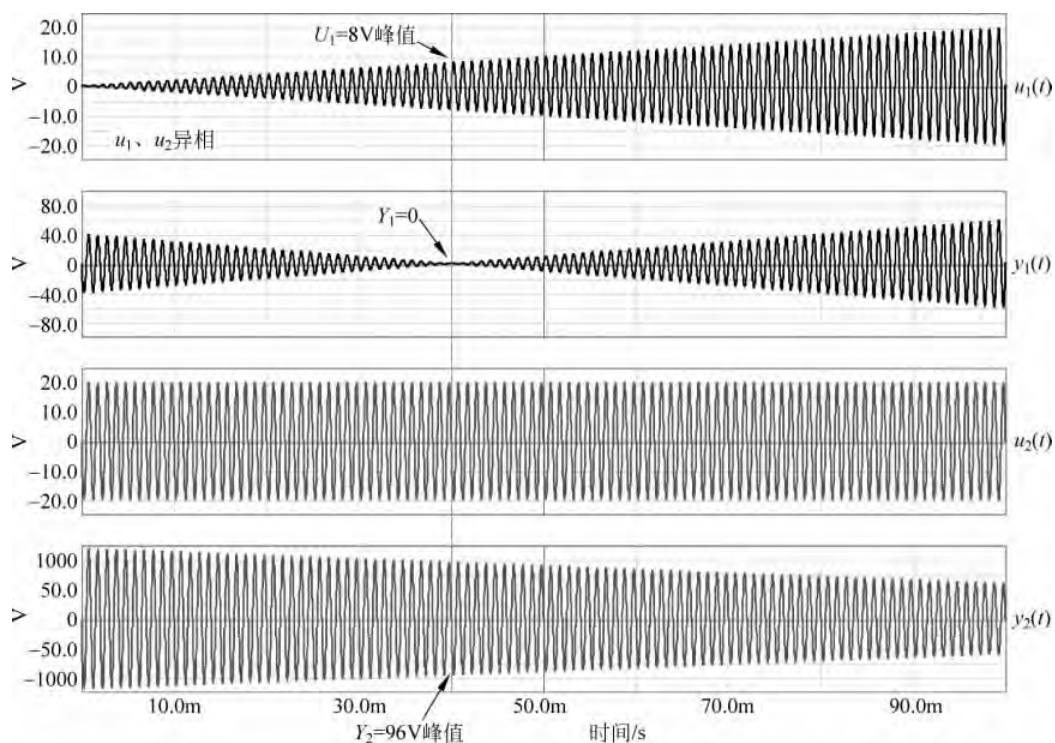


图 3.16 当输入电压设定为特定组合值时输出 $Y_1=0$

对电路变换网络的数学表达式进行分析时, $s=s_z$ 为输出响应零点, 所以需要将输出设置为零。下面章节将利用额外元件定理对零点进行计算。

3.2 额外元件定理

到目前为止, u_1 和 u_2 通常标定为激励源, 但并未定义其类型, 例如电压源或电流源。现在假设激励源 u_2 为电流源 i , 输出变量 y_2 为电压 v , 于是电路图 3.12 更新为图 3.17。

通过对新电路进行分析, 得到如下两方程:

$$y_1 = u_1 A_1 + i A_2 \quad (3.36)$$

和

$$v = u_1 B_1 + i B_2 \quad (3.37)$$

当输入激励源 u_1 和 i 使得 y_1 为零时等式(3.36)的输出值为零。如果从式(3.36)中提取 u_1 , 然后将其代入式(3.37)并将其重新整理为 v/i 的比率形式, 可得到式(3.28)中计算结果, 即:

$$\left. \frac{v}{i} \right|_{y_1=0} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \quad (3.38)$$

式(3.38)为激励电流源 i 与输出电压响应 v 之间的传递函数式, 即第 1 章所定义的互阻。因为 v 和 i 从不同端点测得, 并非取自同一端口, 所以其比值并非阻抗。当式(3.37)中激励源 u_2 设置为 0 时可得比率 i/v 的其他形式的互阻定义式, 与式(3.20)形式相同, 即:

$$\left. \frac{v}{i} \right|_{u_1=0} \equiv B_2 \quad (3.39)$$

在上述分析中, 因为输入和输出物理分离, 因此定义为互阻。但是, 迄今为止对电阻或电导进行计算时 i 和 v 均取自相同端口。利用图 3.17 进行互阻计算时, 只需更改第二输出端口 y_2 的位置, 使其成为激励源电流 i 两端产生的电压 v 。更改之后的电路如图 3.18 所示。

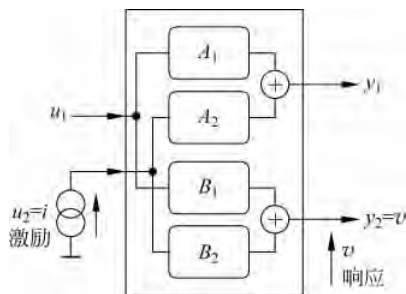


图 3.17 输入 u_2 定义为电流源

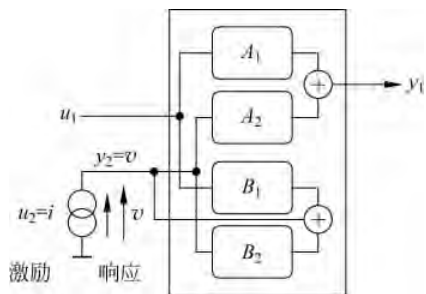


图 3.18 输出 y_2 为激励电流源两端电压, 比率 i/v 即为阻抗

图 3.18 为式(3.38)和式(3.39)的理论表示。实际上, 电流源与元件端子相连接(此时更加清晰), 即为额外元件, 图 3.19 为更新之后的原理图。

在图 3.19 所示电路中,由于 i 和 v 在相同物理位置(电流源连接端子)测量,所以将式(3.38)和式(3.39)定义为驱动点阻抗(DPI,标记为 Z_{DP})。由于式(3.38)为 $y_1=0$ 时测得,所以称为 Z_n ;而式(3.39)为 $u_1=0$ 时测得,所以标记为 Z_d 。“n”代表分子—当分子为 0 时函数输出值为零,即 $y_1=0$;而“d”代表分母,当激励 $u_1=0$ 时得到其数值。根据上述定义,将函数式整理如下:

$$\left. \frac{v}{i} \right|_{y_1=0} = Z_{\text{DP}} \big|_{y_1=0} \equiv Z_n = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{v}{i} \right|_{u_1=0} = Z_{\text{DP}} \big|_{u_1=0} \equiv Z_d = B_2 \quad (3.41)$$

更新之后的电路如图 3.20 所示,此时恒流源由阻抗 Z 代替,并且图 3.19 中的电流 i 和电压 v 仍然存在,且保持方向相同。此时电流 i 不再为外部电流源激励,而由阻抗 Z 两端的电压 v 决定。由式(3.21)和式(3.22)导出的数学关系仍然有效,并且 y_2 和 u_2 之间的函数关系由阻抗 Z 进行转换,即:

$$i = -\frac{v}{Z} \quad (3.42)$$

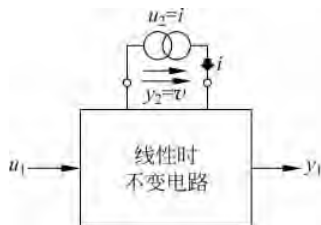


图 3.19 元件端口测试数据分别标识
为电流 i 和电压 v

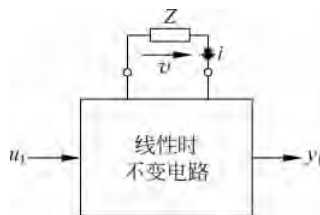


图 3.20 电流源由阻抗 Z 代替

因为图 3.18 中电压和电流方向一致,即 i 、 v 方向相同,所以式(3.42)中包含负号。根据式(3.42)中电流新定义方式,可将式(3.36)更新为:

$$y_1 = u_1 A_1 - \frac{A_2}{Z} v \quad (3.43)$$

从式(3.43)提取电压 v 得:

$$v = \frac{u_1 A_1 - y_1}{A_2} Z \quad (3.44)$$

将式(3.44)和式(3.42)代入式(3.37),整理得:

$$\frac{A_1 u_1 Z}{A_2} - \frac{y_1 Z}{A_2} = B_1 u_1 + \frac{B_2 y_1}{A_2} - \frac{A_1 B_2 u_1}{A_2} \quad (3.45)$$

整理同类项得

$$u_1 \left(\frac{A_1}{A_2} Z + \frac{A_1 B_2}{A_2} - B_1 \right) = y_1 \left(\frac{Z}{A_2} + \frac{B_2}{A_2} \right) \quad (3.46)$$

将 y_1/u_1 之比定义如下:

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{\frac{A_1}{A_2} Z + \frac{A_1 B_2 - B_1 A_2}{A_2}}{\frac{Z}{A_2} + \frac{B_2}{A_2}} \quad (3.47)$$

提取因式 $\frac{A_1 Z}{A_2}$ 得:

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{\frac{A_1}{A_2} Z \left(1 + \frac{A_2}{A_1 Z} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_2} \right)}{\frac{Z}{A_2} \left(1 + \frac{A_2}{Z} \frac{B_2}{A_2} \right)} \quad (3.48)$$

分子和分母同时约分 $\frac{Z}{A_2}$ 简化得:

$$\frac{y_1}{u_1} = A_1 \frac{1 + \frac{1}{Z} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1}}{1 + \frac{1}{Z} B_2} \quad (3.49)$$

将式(3.40)中 $\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1}$ 定义为 Z_n , 即当输出 $y_1 = 0$ 时输入端口阻抗值。式(3.49)中分母 B_2 定义为 $u_1 = 0$ 时的输入端口阻抗值, 即式(3.41)中 Z_d 。利用上述定义将式(3.49)重新表达为额外元件定理形式, 即:

$$\frac{y_1}{u_1} = A_1 \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} \quad (3.50)$$

当式(3.50)中 $Z \rightarrow \infty$ 并从电路物理移除时, 该传递函数变为:

$$\left. \frac{y_1}{u_1} \right|_{Z \rightarrow \infty} = A_1 \frac{1 + \frac{Z_n}{\infty}}{1 + \frac{Z_d}{\infty}} = A_1 \quad (3.51)$$

如果利用受额外元件 Z 控制的符号 A 对传递函数 y_1/u_1 进行标识, 然后使用式(3.51)可将式(3.50)表达为如下更规范形式:

$$A|_Z = A|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} \quad (3.52)$$

通过额外元件定理可得, 线性系统增益受额外元件 Z 控制, 由两部分构成: 第一部分为 Z 断开时系统的增益值; 第二部分为校正系数, 由 Z 以及两输出阻抗 Z_n 和 Z_d 组成, 上述两阻抗分别为输出为零和输入激励为零时的额外元件端口阻抗值。

将式(3.52)中分子和分母分别提取因式 $\frac{Z_n}{Z}$ 和 $\frac{Z_d}{Z}$, 该表达式重新整理为:

$$A|_Z = A|_{Z=\infty} \frac{\frac{Z_n}{Z} \left(\frac{Z}{Z_n} + 1 \right)}{\frac{Z_d}{Z} \left(\frac{Z}{Z_d} + 1 \right)} = \left(A|_{Z=\infty} \frac{Z_n}{Z_d} \right) \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \quad (3.53)$$

与式(3.51)中将 $Z \rightarrow \infty$ 不同, 式(3.53)中可将 $Z \rightarrow 0$, 如下所示:

$$A|_{Z=0} = \left(A|_{Z=\infty} \frac{Z_n}{Z_d} \right) \frac{\frac{0}{Z_n} + 1}{\frac{0}{Z_d} + 1} = A|_{Z=\infty} \frac{Z_n}{Z_d} \quad (3.54)$$

利用该表达式,将式(3.53)中 $A|_{Z=\infty} \frac{Z_n}{Z_d}$ 简单替换为 $A|_{Z=0}$,形成额外元件定理的第二个定义式为:

$$A|_Z = A|_{Z=0} \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \quad (3.55)$$

通过额外元件定理第二表达式可得,线性系统增益受额外元件 Z 控制,由两部分构成:第一部分为 Z 短路时系统的增益值;第二部分为校正系数,由 Z 以及两输出阻抗 Z_n 和 Z_d 组成,上述两阻抗分别为输出为零和输入激励为零时的额外元件端口阻抗值。

将 EET 应用于 1 阶电路的具体步骤如下。

(1) 定义额外元件 Z 。 Z 即可为储能元件 L 或 C ,也可为电阻 R 。同时 EET 适用于受控源电路,但本章不进行深入探讨。通常将“棘手”器件选定为额外元件,因为该类器件的存在使得电路传递函数变得非常复杂。

(2) 确定是否可将额外元件短路或去除。在某些情况下,如果将元件去除,传递函数可能变为零,式(3.52)无法应用。当原点处含有零点时即属上述情形,此时将其短路,然后利用式(3.55)进行分析。当储能元件处于参考状态(开路或短路)时计算主导项 $A|_{Z=0}$ 和 $A|_{Z=\infty}$ 。该项定义为参考增益。

(3) 应用第 1 章和第 2 章所讲方法。将激励源设置为 0,计算额外元件移除时端口阻抗值,即 Z_d 。

(4) 利用空双注入法计算额外元件移除并且输出响应为零时端口的阻抗值,即 Z_n 。

(5) 如果参考电路为纯电阻,即 $Z_d=R_d$ 和 $Z_n=R_n$,通过校正因数可直接求得所研究电路的转角频率。

上述即为 EET 具体操作规程,下面通过实例进行具体说明。

3.2.1 EET 实例 1

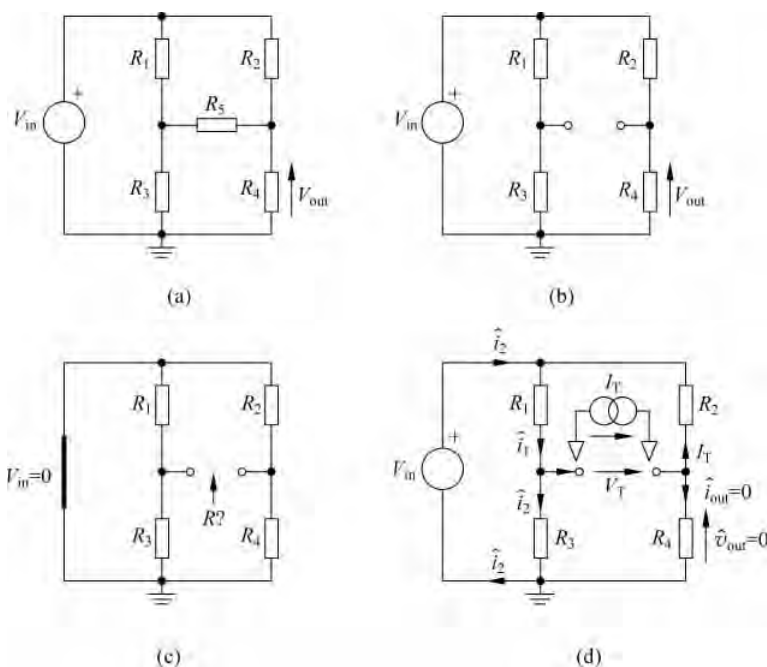
根据上面章节已经整理得到额外元件定理,接下来将其解题技巧应用于 1 阶电路。第一个电路如图 3.21(a)所示,为电阻桥电路。该电路无储能元件,完全为纯电阻电路。电阻 R_4 两端电压为输出电压。计算输出 V_{out} 与输入 V_{in} 之间的传递函数。通过简单观察可以看出电阻 R_5 使电路复杂化。不同观察者可能会选择 R_4 (或任何其他电阻)为额外元件。无论选择任何电阻,EET 分析流程均保持不变。假设选择 R_5 为额外元件,首先将其电阻值设置为无穷大并检验传递函数增益是否存在。此时电路如图 3.21(b)所示,电阻 R_1 和 R_3 串联,对输出无影响; V_{out} 通过 R_4 、 R_2 与输入 V_{in} 相连接,构成简单分压器。第一步计算参考增益,即:

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{R_5 \rightarrow \infty} = \frac{R_4}{R_4 + R_2} \quad (3.56)$$

第二步将激励源设置为 0,即输入源 V_{in} 由短路线代替,如图 3.21(c)所示。将 R_1 和 R_2 上端子接地,此时 R_5 两端电阻为两并联电阻之和,即 R_1/R_3 和 R_2/R_4 ,具体公式如下:

$$R_d = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4 \quad (3.57)$$

第三步即最后一步,计算输出 $\hat{v}_{out}$ 为零时电阻 R_5 两端电阻值。更新之后的电路原理如图 3.21(d)所示,此时输入源 V_{in} 重新复原,电路成为双输入系统。如前所述,通过调节输入

图 3.21 由电阻构成分压器电路,求 V_{out} 与 V_{in} 之间的传递函数

电流源 I_T 的参数值将输出电压设置为零。当计算储能元件(或电阻)两端电阻与其两端电压 V_{in} 无关。由于 $\hat{v}_{\text{out}}$ 为零,所以 $\hat{i}_{\text{out}}$ 也为零,所有测试电流 I_T 均流入电阻 R_2 的 0V 端。电阻 R_3 两端电压为 $-V_T$,于是电流 i_2 可简写为:

$$\hat{i}_2 = -\frac{V_T}{R_3} \quad (3.58)$$

电流 i_1 为 I_T 和 i_2 之和,即:

$$\hat{i}_1 = I_T + \hat{i}_2 \quad (3.59)$$

此时电阻 R_2 和 R_1 两端电压 V_T 为:

$$V_T = I_T R_2 + \hat{i}_1 R_1 \quad (3.60)$$

提取 $\hat{i}_1$ 得:

$$\hat{i}_1 = \frac{V_T - R_2 I_T}{R_1} \quad (3.61)$$

将式(3.58)和式(3.61)代入式(3.59)整理得:

$$\frac{V_T - R_2 I_T}{R_1} = -\frac{V_T}{R_3} + I_T \quad (3.62)$$

将式(3.62)提取因式 V_T 和 I_T 整理得:

$$V_T \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) = I_T (R_1 + R_2) \quad (3.63)$$

因此,当 $V_{\text{out}}=0$ 时电阻 R_5 两端电阻为:

$$R_n = \frac{V_T}{I_T} = \frac{R_1 + R_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}} \quad (3.64)$$

将式(3.56)、式(3.57)和式(3.64)整理为最终传递函数为:

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{R_4}{R_4 + R_2} \frac{1 + \frac{\frac{R_1 + R_2}{1 + R_1/R_3}}{R_5}}{1 + \frac{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}{R_5}} \quad (3.65)$$

利用 Mathcad 对上述表达式进行实际参数计算,具体如图 3.22 所示。

$$\begin{aligned} R_1 &:= 205 \Omega \quad R_2 := 12 \text{ k}\Omega \quad R_3 := 18 \text{ k}\Omega \quad R_4 := 150 \Omega \quad R_5 := 470 \Omega \\ \| (x, y) &:= \frac{x \cdot y}{x + y} \quad V_1 := 3 \text{ V} \quad H_1 := \frac{R_4}{R_4 + R_2} \frac{1 + \frac{\frac{R_1 + R_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}}}{R_5}}{1 + \frac{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}{R_5}} = 0.179 \end{aligned}$$

图 3.22 可用 Mathcad 可高效计算并联元件的传递函数

接下来利用 SPICE 对计算结果进行验证。图 3.23 为 SPICE 仿真电路图,包含上述所有步骤,并得到最终计算结果(电压源 B_7)。当采用电路图中具体参数时,节点 TF 的电压值 0.179 即为原始传递函数计算值,与 Mathcad 公式(3.65)计算结果一致。然后按照三步法进行计算:第一步将电阻 R_5 去除;第二步将输入源 V_{in} 设置为 0;最后一步即第三步利用跨导放大器计算 R_n 。所有步骤通过节点 TFEET 进行组合,最终显示值为 0.179,与计算值一致。如果在 NDI 设置中改变输入源 V_4 ,并且通过调节 V_5 的注入电流使得输出电压 $\hat{v}_{\text{out}} = 0$,但保持 B_4 的电阻计算值恒定。对电路进行仿真计算时,务必确保跨导放大器的电压和电流测量值正负极性与图 3.19 一致。在 SPICE 电路中,电流流入元件(电阻或者电源等)端点定义为正电流,电流流出元件端点定义为负电流。为获得正确的电阻值,必须注意图 3.23 中与 G_1 相串联电压源 V_5 和节点 14、节点 15 的极性,因为 B_4 利用上述值计算 Z_n 。

3.2.2 EET 实例 2

第二个测试实例电路如图 3.24 所示,该电路图采用电感代替电阻 R_5 ,所以可采用式(3.52)或式(3.55)求解电路传递函数。如果采用第一定义,只需利用电感 sL 代替电阻 R_5 ,传递函数立即可得,即:

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{R_4}{R_4 + R_2} \frac{1 + \frac{\frac{R_1 + R_2}{1 + R_1/R_3}}{sL}}{1 + \frac{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}{sL}} \quad (3.66)$$

式(3.66)即为图 3.24 中输出 V_{out} 与输入 V_{in} 之间的新传递函数。然而式(3.66)中 s 在分母中,不能与传统低熵表达式相匹配,即:

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.67)$$

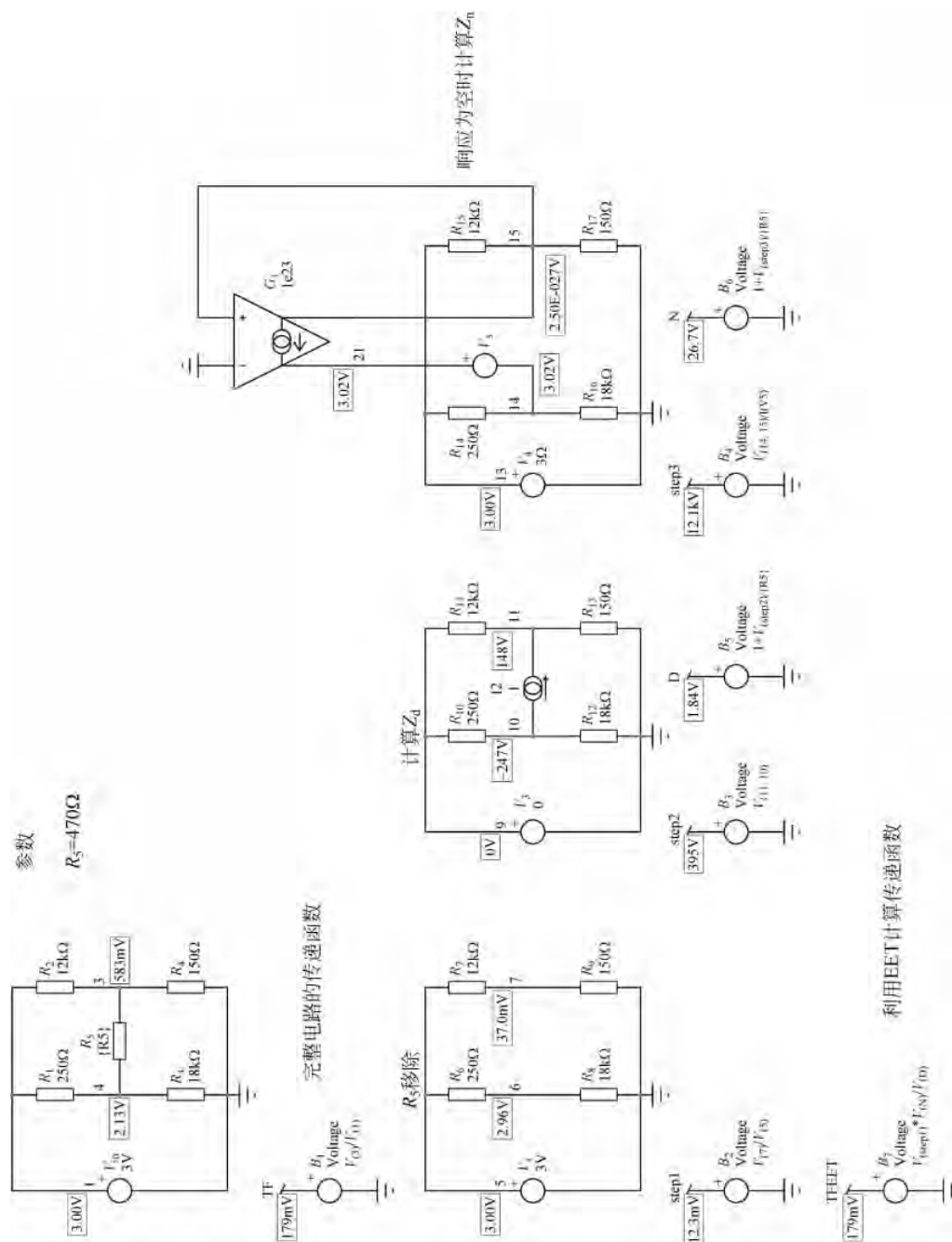


图 3.23 利用 SPICE 软件对计算结果进行快速检验

利用式(3.55)而非式(3.52)对新电路传递函数进行分析。在表达式中阻抗 $Z=0$ 即电感 L 短路。此时为直流传递函数 H_0 ，在第1章和第2章已经详细计算多次。在图3.24中，当电感 L 由短路代替时，电阻 R_1 与 R_2 、 R_3 与 R_4 分别并联，然后再串联构成电阻分压器，即：

$$\left. \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right|_{L=0} = \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4} \quad (3.68)$$

因为前面章节已经计算得到激励为零并且输出为零时的电感 L 驱动电阻值。所以只需按照式(3.55)对传递函数进行构建，并且设置 $Z=sL$ ，最终传递函数表达式为：

$$H(s) = \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4} \frac{1 + s \frac{L}{\frac{R_1 + R_2}{1 + R_1/R_3}}}{1 + s \frac{L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}} \quad (3.69)$$

式(3.69)即为广义传递函数的低熵表达形式，与式(3.67)格式相符，具体如下：

$$H_0 = \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4} \quad (3.70)$$

$$\omega_z = \frac{R_1 + R_2}{(1 + R_1/R_3)L} \quad (3.71)$$

$$\omega_p = \frac{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}{L} \quad (3.72)$$

表达式(3.66)和式(3.69)完全一致，利用 Mathcad 和 SPICE 对表达式进行验证，计算结果完全匹配。由 SPICE 中电压源 B_5/B_6 计算所得极点和零点值与图3.25中计算结果完全一致。在图3.26中，因为 V_5 中电流能自动调整使得输出保持为零，所以将 V_4 随意设置为4V或者其他任何值对计算结果无任何影响。

3.2.3 EET 实例 3

EET 实例3为电容构成的1阶系统，具体电路如图3.27(a)所示。如果电容 C 的容量无穷大，即电容由短路线代替，那么输出 V_{out} 与输入 V_{in} 之间的响应是否仍然存在？因为电容 C 与零点相关，所以输出依然存在。首先移除电容计算第一个传递函数，即参考直流增益，计算公式如下：

$$H|_{z \rightarrow \infty} = H_0 = \frac{R_3}{R_3 + R_1} \quad (3.73)$$

第二步将 V_{in} 设置为0，如图3.27(c)所示。此时电路结构得到简化，可得电容两端电阻为：

$$R_d = R_2 + R_1 \parallel R_3 \quad (3.74)$$

最后设置 $\hat{v}_{\text{out}}=0$ ，如图3.27(d)所示。当 R_3 中无电流流通时，所有 I_T 电流均流入 R_1 并通过 R_2 返回。该状态下电容两端的等效电阻简化为：

$$R_n = R_1 + R_2 \quad (3.75)$$

按照公式(3.52)格式将式(3.73)~(3.75)进行组合，最终传递函数 $H(s)$ 为：

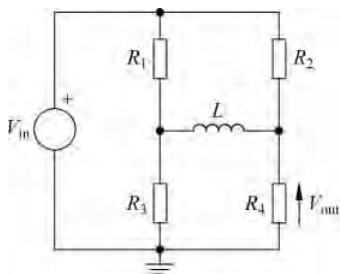


图 3.24 由电感代替电阻 R_5 之后的新电路图

$$R_1 := 250\Omega \quad R_2 := 12\text{k}\Omega \quad R_3 := 18\text{k}\Omega \quad R_4 := 150\Omega \quad R_5 := 470\Omega \quad L := 10\text{mH}$$

$$\parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$H_2(s) := \frac{R_4}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + \frac{\frac{R_1 + R_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}} s \cdot L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}}{1 + \frac{s \cdot L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}}$$

$$H_3(s) := \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{L}{\frac{R_1 + R_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}}}}{1 + s \cdot \frac{L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}} \quad H_0 := \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4}$$

$$\omega_z := \frac{R_1 + R_2}{\left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) \cdot L} \quad \omega_p := \frac{(R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4)}{L} \quad H_4(s) := H_0 \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

$$f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 192.294\text{kHz} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 6.282\text{kHz}$$

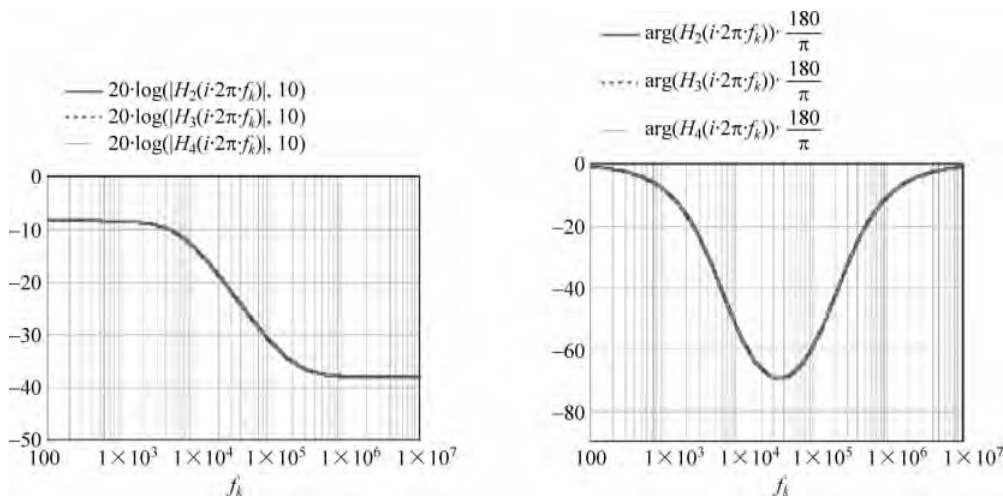


图 3.25 通过 Mathcad 验证式(3.66)与式(3.69)结果一致

$$H(s) = \frac{R_3}{R_3 + R_1} \frac{1 + \frac{R_1 + R_2}{1/sC}}{1 + \frac{R_2 + R_1 \parallel R_3}{1/sC}} = \frac{R_3}{R_3 + R_1} \frac{1 + s(R_1 + R_2)C}{1 + sC[R_2 + R_1 \parallel R_3]} \quad (3.76)$$

将上述传递函数重新整理为经典格式,即:

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.77)$$

式(3.77)中 H_0 由式(3.73)定义,并且极点和零点表达式为:

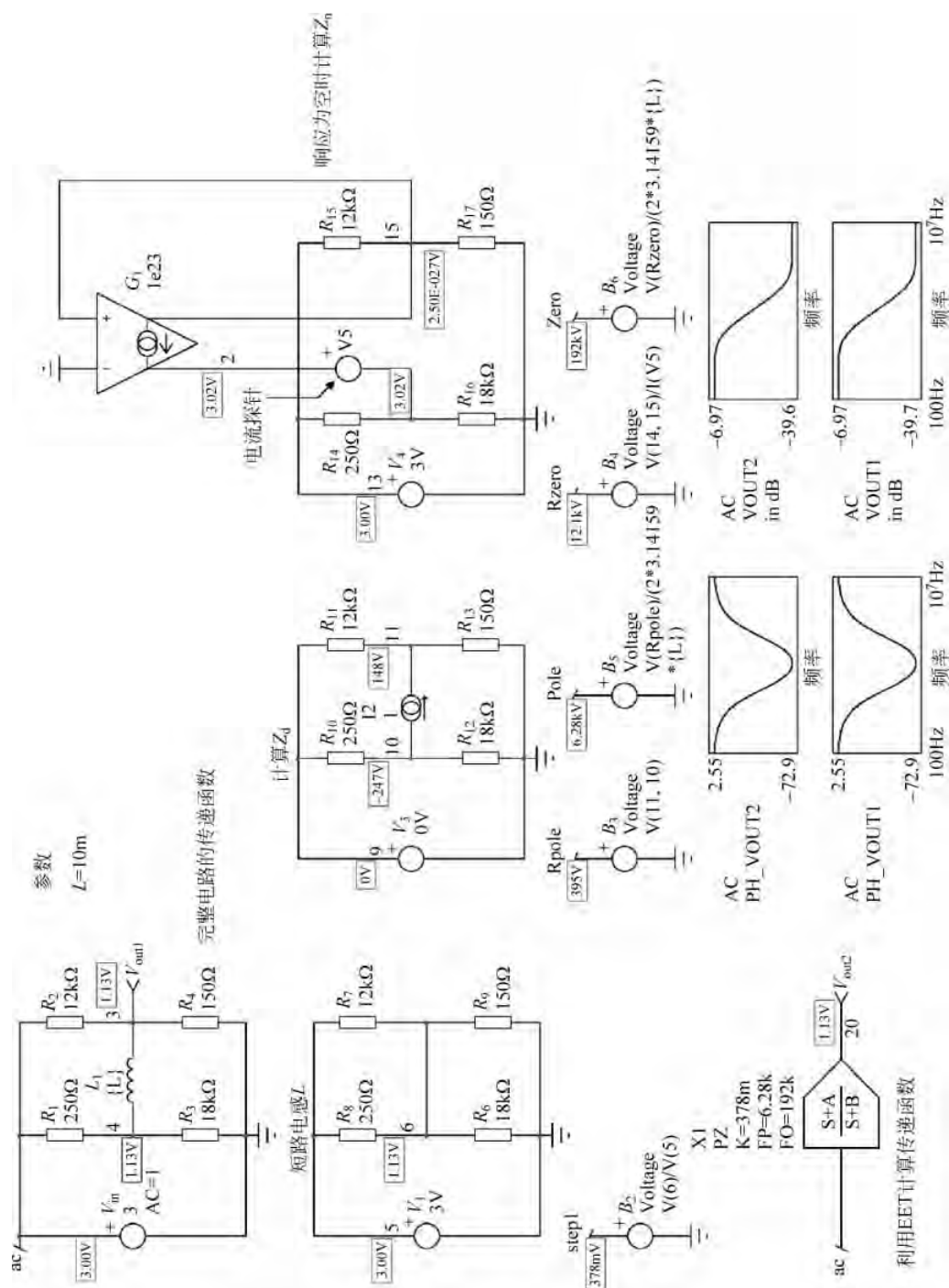


图 3.26 利用 SPICE 软件自动计算极点 and 零点, 其输出响应与原电路一致

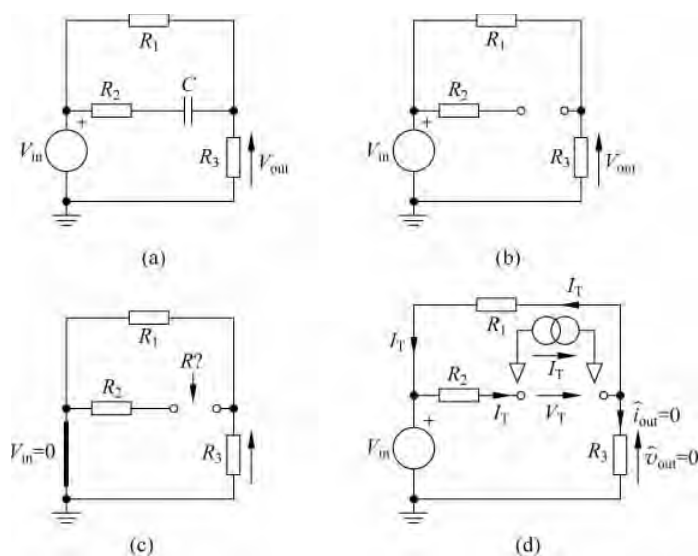


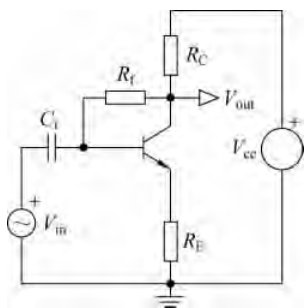
图 3.27 由单电容和三电阻构成的 EET 第三实例

$$\omega_z = \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \quad (3.78)$$

$$\omega_p = \frac{1}{C[R_2 + R_1 \parallel R_3]} \quad (3.79)$$

3.2.4 EET 实例 4

EET 实例 4 电路如图 3.28 所示,该电路为简单双极性晶体管放大电路,但是具有局部

图 3.28 具有局部反馈电阻 R_f 的双极性晶体管电路

反馈电阻 R_f 。该放大电路的等效小信号模型如图 3.29(a) 所示。首先假设电容 C 直流阻塞,即电路分析时电容短路。接下来详细分析该电路中的关键元件 R_f 。首先将 R_f 电阻值设置为无穷大(即将 R_f 其从电路中移除),此时电路如图 3.29(b)所示,计算此时电路传递函数。当集电极电流 βi_b 通过电阻 R_C 时形成输出电压 V_{out} ,即:

$$V_{out} = -\beta i_b R_C \quad (3.80)$$

输入电压 V_{in} 由动态输入电阻 r_π 和发射极电阻承担,即:

$$V_{in} = r_\pi i_b + (\beta + 1) i_b R_E = i_b [r_\pi + (\beta + 1) R_E] \quad (3.81)$$

提取基极电流 i_b 得:

$$i_b = \frac{V_{in}}{r_\pi + (\beta + 1) R_E} \quad (3.82)$$

将式(3.82)代入式(3.80),然后分解 V_{out} 和 V_{in} 得:

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{R_f \rightarrow \infty} = -\frac{\beta R_C}{r_\pi + (\beta + 1) R_E} \quad (3.83)$$

此时传递函数第一项已经求得,接下来将输入电压源 V_{in} 短路,计算 R_f 两端的电阻值 R_d 。在图 3.29(c)中,电阻 r_π 和 R_E 接地,基极电流 $i_b = 0$,因此电流源 $\beta i_b = 0$ (即该电流源从

电路中移除),此时 R_f 两端的唯一电阻为集电极电阻 R_C ,所以:

$$R_d = R_C \quad (3.84)$$

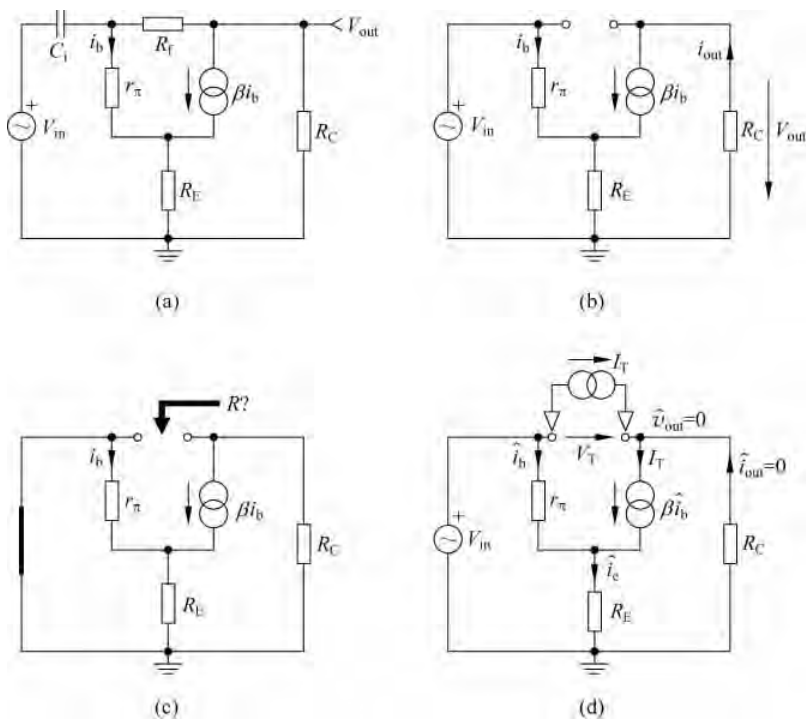


图 3.29 通过 EET 三步法计算电路传递函数

最后一步:当输出为零时计算 R_f 两端电阻 R_n ,更新之后的原理图为 3.29(d)。如果输出电压为零则输出电流也为零,所以测试电流 I_T 全部由电流源 $\beta \hat{i}_b$ 吸收,即:

$$I_T = \beta \hat{i}_b \quad (3.85)$$

此时基极电流为:

$$\hat{i}_b = \frac{I_T}{\beta} \quad (3.86)$$

流过发射极电阻电流为基极电流和测试电流之和,即:

$$\hat{i}_e = \frac{I_T}{\beta} + I_T = I_T \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) \quad (3.87)$$

由于测试电流源的右端电位为 $0V$,所以其左端电位为 $-V_T$,即电阻 r_π 和 R_E 压降之和:

$$-V_T = r_\pi \frac{I_T}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) I_T \quad (3.88)$$

将式(3.88)重新整理即可得到 $\hat{v}_{out}=0$ 时 R_f 两端电阻,即:

$$R_n = \frac{V_T}{I_T} = - \left[\frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] \quad (3.89)$$

通过式(3.89)可得 R_n 为负电阻。如果采用电容代替电阻 R_f 将由此得到负时间常数,即产生右半平面零点。

利用式(3.52)将上述计算结果整理得到传递函数为:

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = -\frac{\beta R_C}{r_\pi + (\beta+1)R_E} \frac{1 - \frac{\frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{R_f}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} = -\frac{\beta}{\beta+1} \frac{R_C}{\frac{r_\pi}{\beta+1} + R_E} \frac{1 - \frac{\frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{R_f}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \quad (3.90)$$

利用 SPICE 对每个电路进行仿真测试,然后将仿真结果与 Mathcad 计算数据进行对比,具体如图 3.30 和图 3.31 所示,两计算结果完全匹配。

3.2.5 EET 实例 5

如图 3.28 所示,当电容 C_i 再次恢复至电路中时计算电路的传递函数。当电容短路时其 EET 表达式为式(3.90)的局部,具体参见式(3.55)。当电路包含电容 C_i 时传递函数完整表达式为:

$$\left. \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} \right|_{Z_{C_i}} = \left. \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} \right|_{Z_{C_i} \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{Z_{C_i}}{R_n}}{1 + \frac{Z_{C_i}}{R_d}} \quad (3.91)$$

如图 3.32 所示,计算与 R_d 相关的时间常数时将 V_{in} 设置为 0V。但是由于电路中存在受控电流源,并且电路结构复杂,所以计算电容 C_i 的驱动电阻并非易事。实际计算时利用电流源 I_T 对电路进行激励,并测试其两端电压 V_T , V_T/I_T 即为所求电阻值。

现在从式(3.93)中提取 $\hat{i}_c$ 并代入式(3.97)导致:

由 KCL 可得

$$I_T = \hat{i}_1 + \hat{i}_b \quad (3.92)$$

同时

$$I_T + \hat{i}_c = (\beta+1) \hat{i}_b \quad (3.93)$$

流入电阻 R_f 电流为其两端电压与电阻值之比,即:

$$\hat{i}_1 = \frac{V_T + R_C \hat{i}_c}{R_f} \quad (3.94)$$

通过 r_π 和射极电阻构成的桥路两端电压为 V_T ,即:

$$V_T = \hat{i}_b r_\pi + (\beta+1) \hat{i}_b R_E \quad (3.95)$$

整理得基极电流 $\hat{i}_b$ 为:

$$\hat{i}_b = \frac{V_T}{r_\pi + (\beta+1)R_E} \quad (3.96)$$

将式(3.94)代入式(3.92)整理得:

$$I_T = \frac{V_T + R_C \hat{i}_c}{R_f} + \hat{i}_b \quad (3.97)$$

从式(3.93)中提取 $\hat{i}_c$ 并将其代入式(3.94)中整理得:

$$I_T = \frac{V_T + R_C [(\beta+1) \hat{i}_b - I_T]}{R_f} + \hat{i}_b \quad (3.98)$$

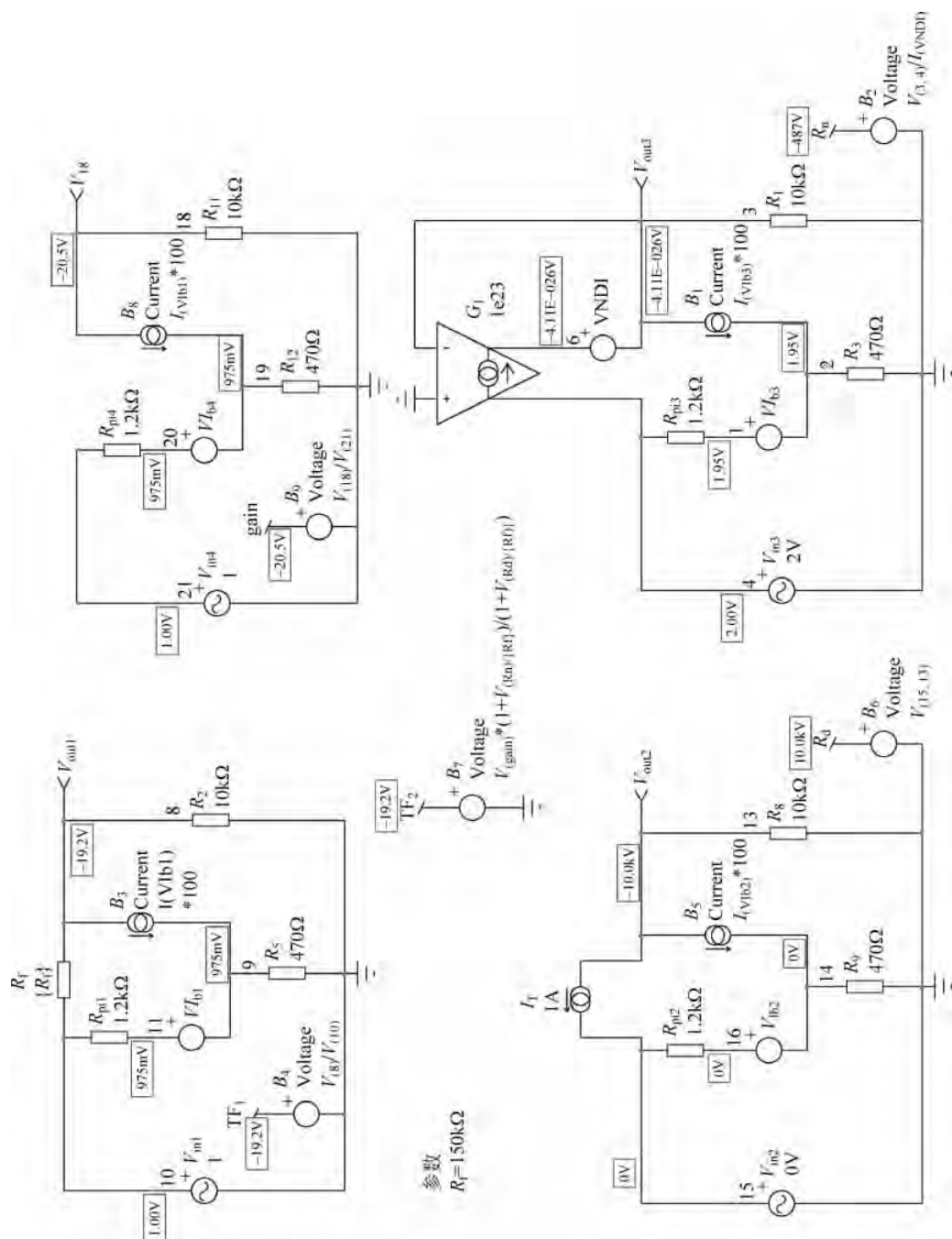


图 3.30 利用 SPICE 对整体电路进行直流工作点分析得到节点 TF1 的增益为 -19.2, 与节点 TF2 的 EET 计算结果一致

$$\beta := 100 \quad R_C := 100\text{k}\Omega \quad r_\pi := 1.2\text{k}\Omega \quad R_E := 470\Omega \quad R_f := 150\text{k}\Omega$$

$$R_n := -\left[\frac{r_\pi + R_E}{\beta} \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right] = -486.7\Omega \quad R_d := R_C \quad H_0 := -\frac{\beta \cdot R_C}{r_\pi + (\beta + 1) \cdot R_E} = -20.547$$

$$G_1 := -\frac{\beta \cdot R_C}{r_\pi + (\beta + 1) \cdot R_E} \cdot \frac{1 - \frac{r_\pi + R_E}{\beta} \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{1 + \frac{R_C}{R_f}} = -19.2$$

图 3.31 Mathcad 与图 3.30 中的 SPICE 直流工作点计算结果相匹配

当 V_{in} 设置为零时, 将等式(3.96)代入上式, 整理得电容两端电阻为:

$$\frac{V_T}{I_T} = R_d = \frac{(R_C + R_f)(R_E + r_\pi + \beta R_E)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + \beta(R_C + R_E)} \quad (3.99)$$

当输出为零时计算第二电阻值 R_n , 新电路如图 3.33 所示。

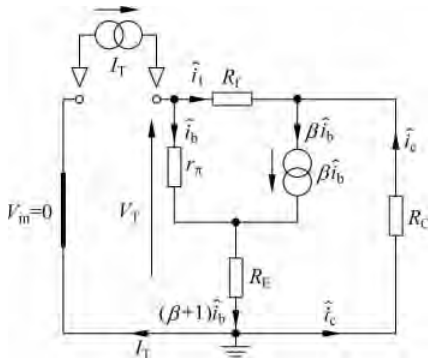


图 3.32 由于存在受控电流源, 所以设置激励源为零计算, 电容驱动电阻时需要利用 KCL 和 KVL 定理

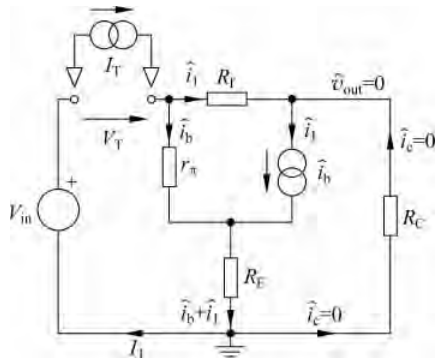


图 3.33 图中输出电压为零, 即无电流通过集电极电阻 R_C

因为图 3.33 所示电路输出电压为零, 所以集电极电流 $\hat{i}_c$ 为:

$$\hat{v}_{out} = 0 \quad (3.100)$$

$$\hat{i}_c = 0 \quad (3.101)$$

假设集电极电流为零, 则经过电阻 R_f 的电流 $i_1 = \beta \hat{i}_b$ 。假定输出电压为零, 则 R_f 两端电压为电阻 r_π 和发射极电阻 R_E 两端电压之和, 即:

$$\beta \hat{i}_b R_f = \hat{i}_b [r_\pi + (\beta + 1) R_E] \quad (3.102)$$

只有当 $\hat{i}_b = 0$ 时式(3.102)才能成立, 此时 $\hat{i}_1 = 0$ 。因为测试电流 $I_T = \hat{i}_b + \hat{i}_1$, 所以 $I_T = 0$ 。因此当空双注入时电容两端的等效电阻为:

$$R_n = \left. \frac{V_T}{I_T} \right|_{I_T=0} \rightarrow \infty \quad (3.103)$$

上述分析结果与直流分析时原点处存在零点相一致: 当电容 C_i 从电路移除时输出电压为零, 即增益为零。按照式(3.91)形式将上述表达式进行组合, 所得传递函数为:

$$\left. \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right|_{C_1} = - \frac{\beta R_C}{r_\pi + (\beta + 1)R_E} \frac{1 - \frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \frac{1 + \frac{1/sC}{\infty}}{1 + \frac{1/sC}{\frac{(R_C + R_f)(R_E + r_\pi + \beta R_E)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + \beta(R_C + R_E)}}} \quad (3.104)$$

将式(3.104)简化为:

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = H_\infty \frac{1}{1 + \frac{\omega_p}{s}} \quad (3.105)$$

其中

$$H_\infty = - \frac{\beta R_C}{r_\pi + (\beta + 1)R_E} \frac{1 - \frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \quad (3.106)$$

以及

$$\omega_p = \frac{1}{C_1 \frac{(R_C + R_f)(R_E + r_\pi + \beta R_E)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + \beta(R_C + R_E)}} \quad (3.107)$$

式(3.105)由原点处的零点和相关极点构成。该表达式与式(3.77)不同,因为 s 处于表达式不同位置。所以式(3.105)称为倒极点表达式,下一节将对其书写格式进行详细讲解。

利用 SPICE 对电路图 3.28 进行仿真,将其仿真结果与 Mathcad 计算值进行对比,以检验计算值是否正确。SPICE 仿真电路如图 3.34 所示,频率为 1Hz 时增益为 -22.189dB, -3dB 时极点频率为 247Hz。高频渐近线增益通过方程式(3.90)进行计算。图 3.35 为 Mathcad 计算工作表,计算公式返回值和输出图形与 SPICE 仿真结果非常一致。

3.2.6 EET 实例 6

第 1 章曾经对含有电感的 1 阶电路进行分析,并计算电路时间常数以及直流输入电阻表达式。在电路图 3.36 中,如果将电感 L_1 设定为额外元件,可以利用式(3.52)或式(3.55)对传递函数进行计算。当设定 L_1 短路时,更新之后的电路如图 3.37 所示。该电路为桥型结构,通过输入端子很难直接求得其阻抗 R 。首先将电阻 R_3 作为额外元件,然后利用 EET 对电路进行求解。当电感 L_1 无穷大时,可将其从电路中移除,如图 3.38 所示,此时利用 EET 并且采用式(3.52)求得输入阻抗为:

$$Z|_{L_1 \rightarrow \infty} = R_2 + R_4 \parallel (R_3 + R_5) \quad (3.108)$$

现在计算激励源为零时电感两端的电阻值。当求解两端点阻抗时,通常将激励信号设定为电流源。计算电路时间常数时通常将其设置为零,或将其从电路中移除。更新之后的电路如图 3.39(a)所示,为便于读图,将其整理为图 3.39(b)所示电路。计算结果如第 1 章所示,首先电阻 R_4 和 R_5 串联,之后与 R_3 并联,最后再与 R_2 和 r_L 串联,所以总电阻 R_d 表达式为:

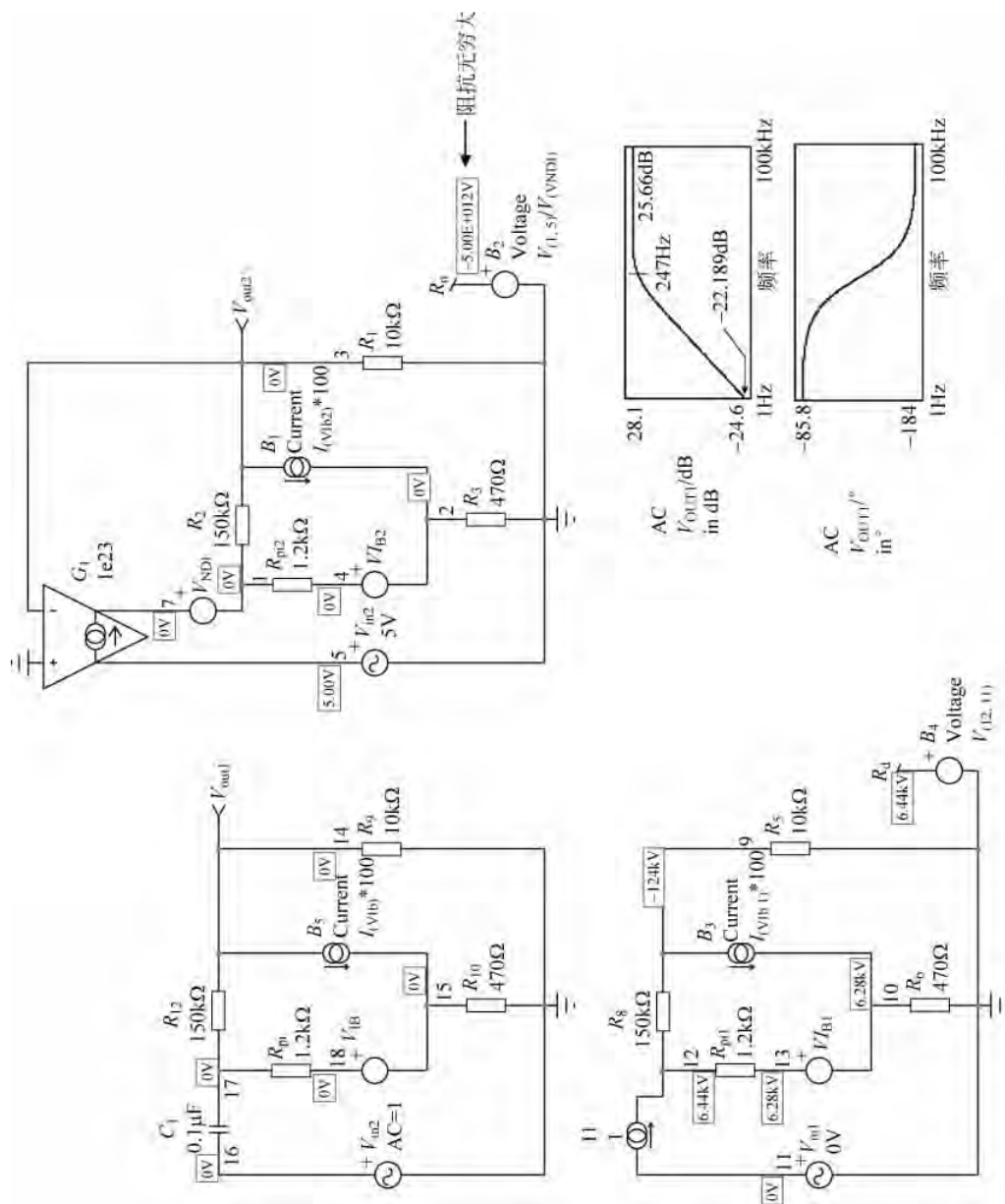


图 3.34 利用简单电路计算驱动电容串联电阻,由于原点处存在零点,所以当输出为零时输入阻抗无穷大

$$\beta := 100 \quad R_C := 10\text{k}\Omega \quad r_\pi := 1.2\text{k}\Omega \quad R_E := 470\Omega \quad R_f := 150\text{k}\Omega \quad C_1 := 0.1\mu\text{F}$$

$$H_1(s) := \frac{\beta \cdot R_C}{r_\pi + (\beta + 1) \cdot R_E} \cdot \frac{1 - \frac{r_\pi + R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{\beta}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{c_1 \cdot s \cdot \frac{(R_C + R_f) \cdot (R_E + r_\pi + R_E \cdot \beta)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + R_C \cdot \beta + R_E \cdot \beta}}}$$

$$20 \cdot \log[|H_1(i \cdot 2\pi \cdot 1\text{Hz})| \cdot 10] = -22.189 \quad 20 \cdot \log[|H_1(i \cdot 2\pi \cdot 10^6\text{Hz})| \cdot 10] = 25.666$$

$$\omega_p := \frac{1}{C_1 \cdot \frac{(R_C + R_f) \cdot (R_E + r_\pi + R_E \cdot \beta)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + R_C \cdot \beta + R_E \cdot \beta}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 247.028\text{Hz} \quad \frac{(R_C + R_f) \cdot (R_E + r_\pi + R_E \cdot \beta)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + R_C \cdot \beta + R_E \cdot \beta} = 6.443\text{k}\Omega$$

$$H_{\text{inf}} := \frac{\beta \cdot R_C}{r_\pi + (\beta + 1) \cdot R_E} \cdot \frac{1 - \frac{r_\pi + R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{\beta}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \quad H_3(s) := -H_{\text{inf}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega_p}{s}}$$

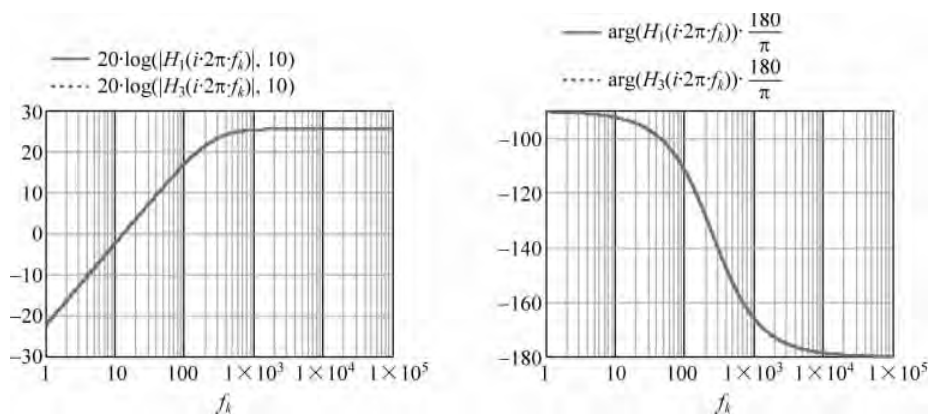
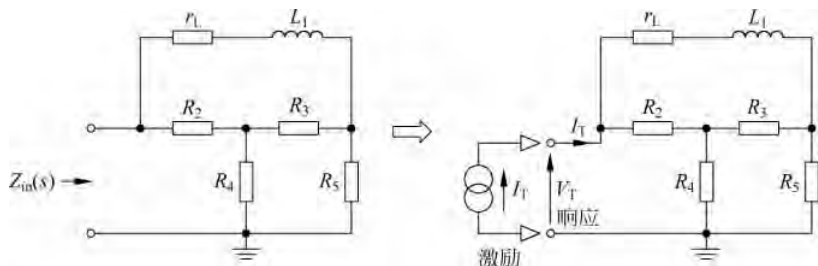
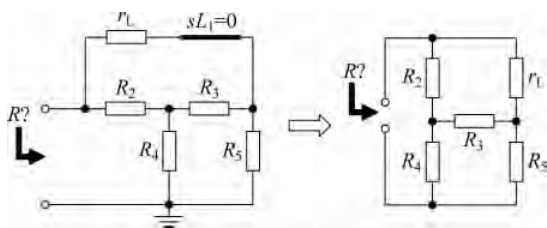


图 3.35 Mathcad 计算结果与 SPICE 仿真结果完全一致

图 3.36 利用电流源 I_T 和输出响应 V_T 计算 1 阶电路输入阻抗图 3.37 当 $L_1=0$ 时桥路输入电阻计算非常复杂，需将 R_3 设定为额外元件并利用 EET 求解

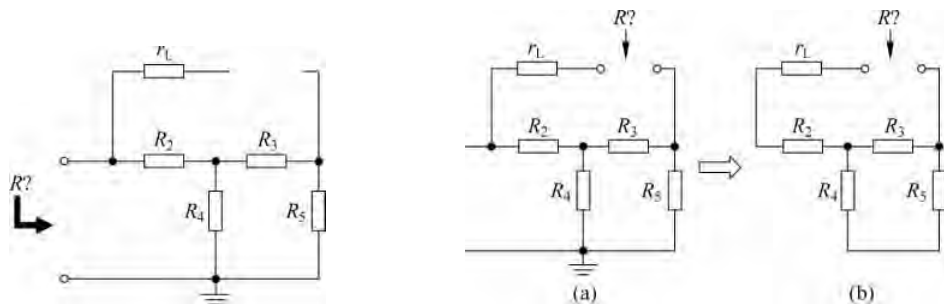


图 3.38 当 L_1 无穷大时等效为将其从电路中移除, 图 3.39 设置激励信号为零等效于移除电流源此时通过观察可直接求得输入电阻 R

$$R_d = r_L + R_2 + (R_5 + R_4) \parallel R_3 \quad (3.109)$$

当输出响应为零时计算电感两端的电阻值 R_n 。利用第 2 章所学知识, 如果电流源两端电压为零, 可利用导线将其替代。更新之后的电路如图 3.40 所示, 经过整理可得电阻 R_n 为:

$$R_n = r_L + R_5 \parallel [(R_2 \parallel R_4) + R_3] \quad (3.110)$$

应用式(3.52)将最终传递函数整理为:

$$Z_{in}(s) = R_2 + R_4 \parallel (R_3 + R_5) \frac{1 + \frac{r_L + R_5 \parallel [(R_2 \parallel R_4) + R_3]}{sL_1}}{1 + \frac{r_L + R_2 + (R_5 + R_4) \parallel R_3}{sL_1}} \quad (3.111)$$

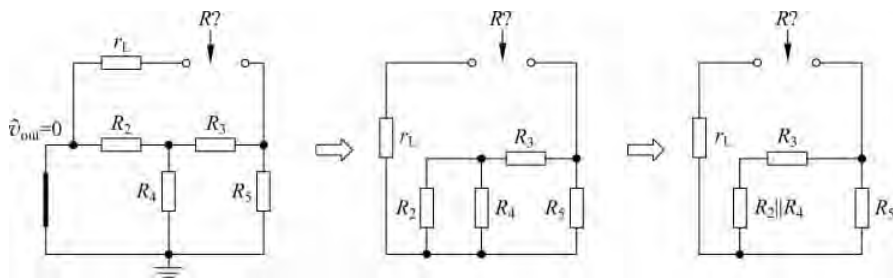


图 3.40 电流源两端电压为零时等效为将其短路

图 3.41 为数值计算, 输入阻抗曲线包含直流和高频两条渐近线。采用 EET 形式时主导项代表高频渐近线; 如果选择其他形式, 则主导项可能表示直流增益。建立 SPICE 仿真电路对计算结果进行检验。如图 3.42 所示, 仿真结果与 Mathcad 计算结果完全一致。

3.2.7 倒置极点和零点

在式(3.67)中, 传递函数表达式由静态增益 H_0 以及单零点和单极点构成, 其频率特性由零点和极点控制。当 $s=0$ 时可直接计算其增益值。假如传递函数的零点为原点, 当极点生效后其高频渐近线为 H_∞ , 则该类传递函数表达式为:

$$H(s) = H_\infty \frac{\frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \quad (3.112)$$

$$r_L := 10\Omega \quad R_2 := 10\text{k}\Omega \quad R_3 := 120\Omega \quad R_4 := 1.2\text{k}\Omega \quad R_5 := 3.3\text{k}\Omega \quad L_1 := 1\text{H} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$Z_{\text{inf}} := R_2 + R_4 \parallel (R_3 + R_5) = 10.8883\text{k}\Omega \quad R_d := r_L + R_2 + (R_5 + R_4) \parallel R_3 = 10.1269\text{k}\Omega$$

$$Z_1(s) := Z_{\text{inf}} \cdot \frac{1 + \frac{R_n}{s \cdot L_1}}{1 + \frac{R_d}{s \cdot L_1}} \quad R_n := [(R_2 \parallel R_4) + R_3] \parallel R_5 + r_L = 885.3817\Omega$$

$$\omega_z := \frac{R_n}{L_1} \quad \omega_p := \frac{R_d}{L_1} \quad Z_2(s) := Z_{\text{inf}} \cdot \frac{1 + \frac{\omega_z}{s}}{1 + \frac{\omega_p}{s}}$$

$$f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 140.9129\text{Hz} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 1.6117\text{kHz}$$

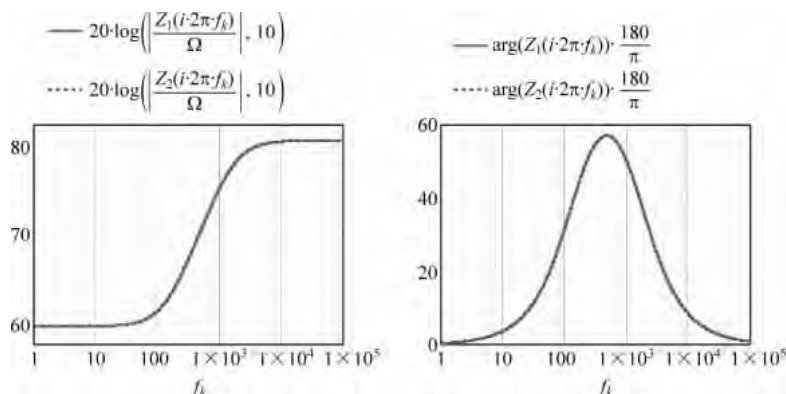


图 3.41 利用 Mathcad 工作表对最终公式进行计算

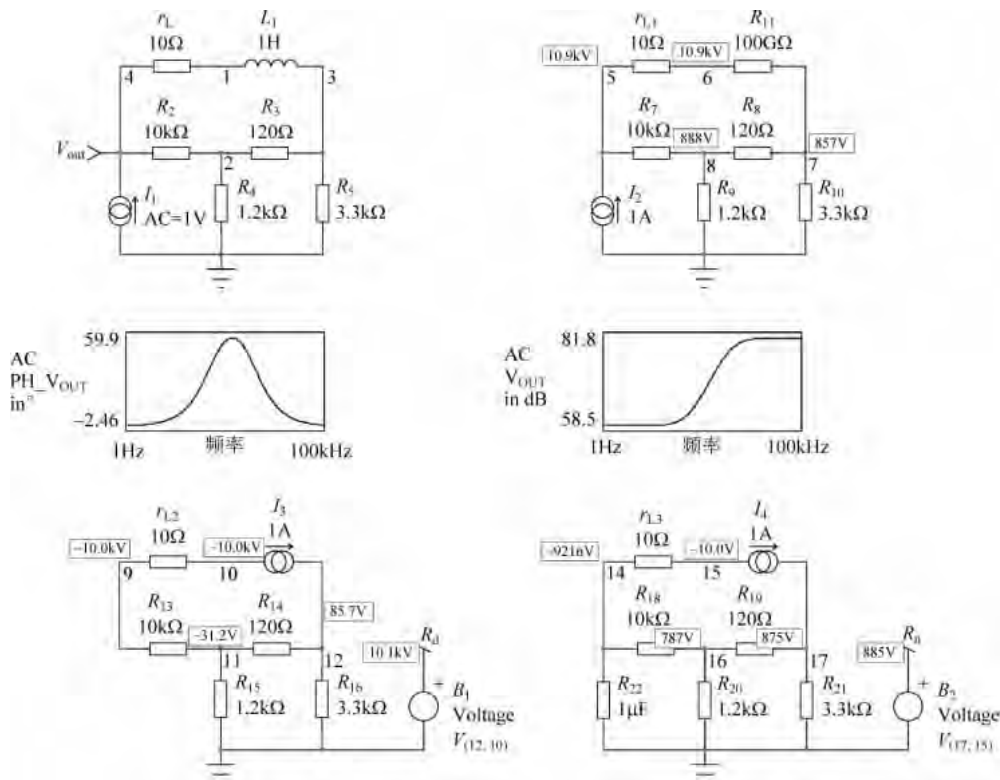


图 3.42 利用 SPICE 和 Mathcad 得到的计算结果和频率特性完全一致

传递函数(3.112)的幅度响应与图 3.35 相似。但是其表达式可通过分子和分母中分解 s/ω_1 表达为其他形式。更新之后的表达式如下所示:

$$H(s) = H_\infty \frac{\frac{s}{\omega_1}}{\frac{s}{\omega_1} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{\omega_1}{s} + 1} = H_\infty \frac{1}{1 + \frac{\omega_1}{s}} \quad (3.113)$$

在式(3.113)中,当 s 无穷大时可立即得出 H 的幅度与渐近线 H_∞ 几乎一致。表达式分母中的 $1 + \omega_1/s$ 称为倒置极点,利用该极点形式能够让式(3.112)更加简洁、可读,并且满足低熵理论。

有时需要将原始表达式进行因式分解以匹配式(3.113)的简单性,并获得其低熵表达式。利用 EET 能够直接得到式(3.113)的表达形式。接下来再次利用实例 5 的求解过程计算图 3.43 的传递函数表达式。

在图 3.43(a)中电容与激励信号源相串联,并且定义电容为额外元件。式(3.52)和式(3.55)为 EET 的两种表达形式,选择能够确定低频或高频渐近线具体数值的定义式。如果将电容 C_1 删除,如式(3.52)所示,则静态增益为零。然后选择式(3.55)计算 $Z=0$ 时的增益值,具体电路如图 3.43(b)所示,此时增益值为:

$$H_\infty |_{Z \rightarrow 0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.114)$$

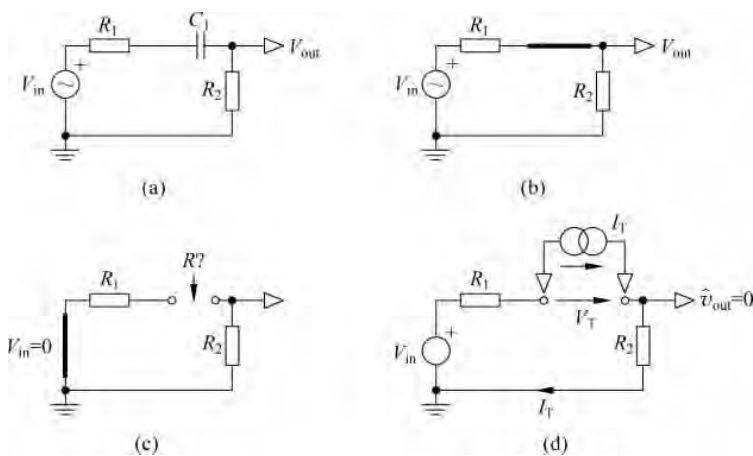


图 3.43 在该表达式中电容 C_1 对直流进行阻塞,所以原点处存在零点

由图 3.43(c)可得,当激励源设置为零时电容的驱动电阻为 R_d ,其值为:

$$R_d = R_1 + R_2 \quad (3.115)$$

如图 3.43(d)所示,当输出电压为零时电容的驱动电阻为 R_n 。当电阻 R_2 中电流为零时输出电压也为零。只有当电容两端电阻无穷大时才能使测试电流 I_T 为零,因此:

$$R_n = \frac{V_T}{I_T} \Big|_{I_T=0} \rightarrow 0 \quad (3.116)$$

根据式(3.55),将传递函数整理为:

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + \frac{1/sC_1}{\infty}}{1 + \frac{1/sC_1}{R_1 + R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_1(R_1 + R_2)}} = H_\infty \frac{1}{1 + \frac{\omega_p}{s}} \quad (3.117)$$

其中

$$\omega_p = \frac{1}{C_1(R_1 + R_2)} \quad (3.118)$$

式(3.117)为分母采用倒置极点表示的低熵表达式。

接下来分析倒置零点的表达形式。当计算图 3.44(a)所示滤波器的传递函数时,可以利用压控电压源代替运算放大器,将其两输入之间的误差电压进行 A_{OL} 倍增益放大。

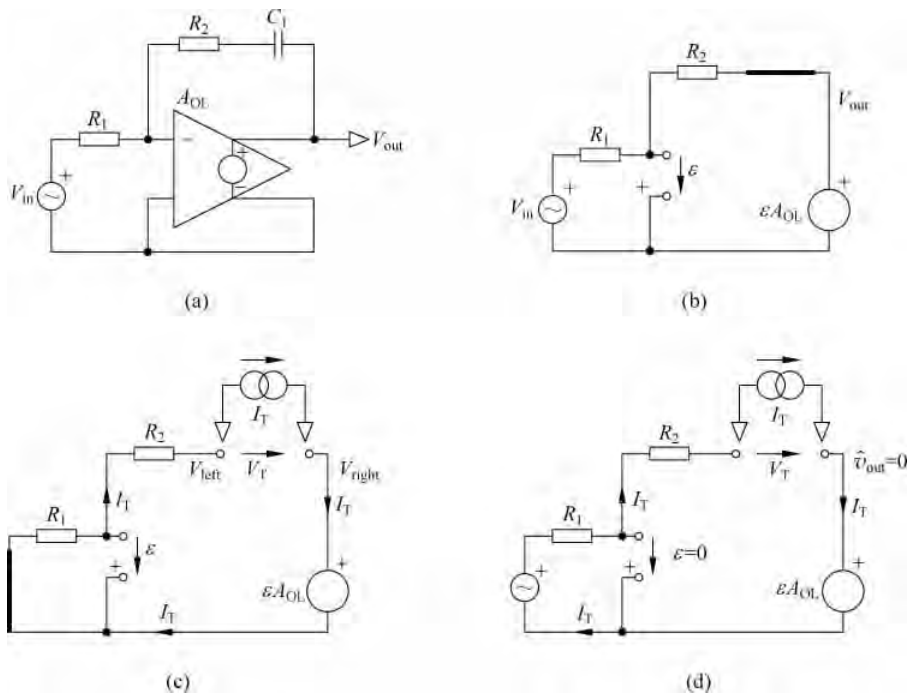


图 3.44 将 EET 定理用于运算放大器电路分析

在表达式(3.119)中,将电容 C_1 指定为额外元件,并且确定 C_1 短路时的运放增益,具体如式(3.55)所示。此时电路更新为图 3.44(b),利用叠加定理计算电路增益,具体步骤如下:

$$\epsilon|_{V_{in}=0} = -V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (3.119)$$

$$\epsilon|_{V_{out}=0} = -V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.120)$$

总误差电压为式(3.119)与式(3.120)之和,即:

$$\epsilon = \epsilon|_{V_{in}=0} + \epsilon|_{V_{out}=0} = -V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.121)$$

误差电压 ϵ 为输出电压 V_{out} 与运算放大器开环增益 A_{OL} 之商,即:

$$\frac{V_{out}}{A_{OL}} = -V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.122)$$

将式(3.122)重新整理为电压增益定义式,即:

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{Z \rightarrow 0} = - \frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}}} \quad (3.123)$$

当激励源设置为零时,通过电路图 3.44(c)计算时间常数。此时运算放大器的反相端电压通过式(3.124)可轻易求得:

$$V_{(-)} = -I_T R_1 \quad (3.124)$$

因此电流源左端偏置电压为电阻 R_1 和 R_2 两端负电压之和:

$$V_{\text{left}} = -I_T R_1 - I_T R_2 = -I_T (R_1 + R_2) \quad (3.125)$$

电流源右端电压为:

$$V_{\text{right}} = \epsilon A_{OL} = (V_{(+)} - V_{(-)}) A_{OL} = I_T R_1 A_{OL} \quad (3.126)$$

于是

$$V_T = V_{\text{right}} - V_{\text{left}} = I_T R_1 A_{OL} + I_T (R_1 + R_2) \quad (3.127)$$

当激励源设置为零时,电容两端的电阻为:

$$\frac{V_T}{I_T} = R_d = R_1 (A_{OL} + 1) + R_2 \quad (3.128)$$

如图 3.44(d)所示,通过空双注入法可得到传递函数零点值。当输出为零时误差电压 ϵ 同样也为零,所以电阻 R_2 左端接地,电流源输出电流只流经该电阻,所以:

$$\frac{V_T}{I_T} = R_n = R_2 \quad (3.129)$$

利用式(3.55)将上述表达式进行组合,最终传递函数由式(3.123)、式(3.128)和式(3.129)构成,即:

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} &= -\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}}} \frac{1 + \frac{1/sC_1}{R_2}}{1 + \frac{1/sC_1}{R_1(A_{OL} + 1) + R_2}} \\ &= -\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}}} \frac{1 + \frac{1}{sR_2C_1}}{1 + \frac{1}{sC_1[R_1(A_{OL} + 1) + R_2]}} \end{aligned} \quad (3.130)$$

在式(3.130)中,如果运算放大器开环增益无穷大,分母表达式简化为 1,此时式(3.130)变为:

$$H(s) = H_{\infty} \left(1 + \frac{\omega_z}{s} \right) \quad (3.131)$$

其中 H_{∞} 其定义为

$$H|_{\infty} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3.132)$$

零点定义为

$$\omega_z = \frac{1}{R_2 C_1} \quad (3.133)$$

表达式(3.131)采用倒置零点形式对传递函数进行描述。

图 3.45 为经典的极点/零点波特图及其倒置响应曲线。零点的幅度和相位交流响应相当于极点交流响应的垂直轴倒置。倒置极点(或零点)交流特性相当于极点(或零点)的幅度和相位响应关于对数横轴倒置。利用倒置零极点形式可对低熵表达式的高频渐近线(H_{∞})进行描述。

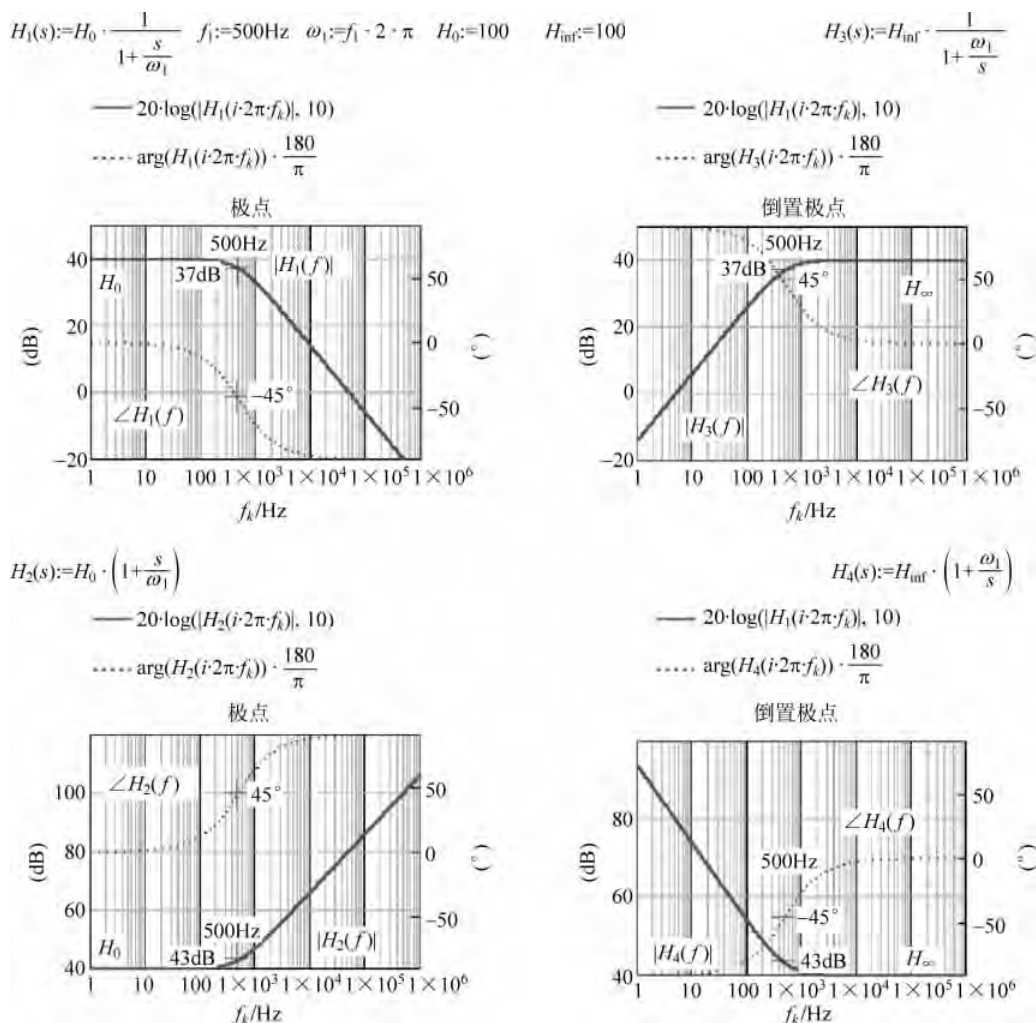


图 3.45 经典的零/极点波特图及其倒置响应曲线

3.3 1 阶系统广义传递函数

EET 定理可应用于如下两种分析方式：额外元件短路或开路。因为式(3.52)和式(3.55)完全表达相同的传递函数 H ：

$$H|_{z=\infty} \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} = H|_{z=0} \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \quad (3.134)$$

所以可将式(3.134)按照如下方式进行重新排列：

$$\frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} = \frac{H|_{z=0}}{H|_{z=\infty}} \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \quad (3.135)$$

将增益比移至等式右侧得：

$$\frac{\left(1 + \frac{Z_n}{Z}\right)\left(1 + \frac{Z}{Z_d}\right)}{\left(1 + \frac{Z_d}{Z}\right)\left(1 + \frac{Z}{Z_n}\right)} = \frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} \quad (3.136)$$

将式(3.136)右侧表达式进行简化,整理为：

$$\frac{Z_n}{Z_d} = \frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} \quad (3.137)$$

也可将式(3.137)表达为：

$$Z_n = \frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} Z_d \quad (3.138)$$

或者

$$Z_d = \frac{H|_{Z=\infty}}{H|_{Z=0}} Z_n \quad (3.139)$$

在式(3.139)中：

(1) $Z=0$ 即额外元件短路： C 和 L 由短路线代替。

(2) $Z=1$ 即额外元件开路： C 和 L 从电路中移除。

利用上述定义,采用式(3.138)代替 Z_n 对 EET 进行整理。将式(3.138)代入式(3.55)整理得：

$$\begin{aligned} H|_Z &= H|_{Z=0} \frac{1 + \frac{Z}{\frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} = \frac{H|_{Z=0} + H|_{Z=0} \frac{Z}{\frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \\ &= \frac{H|_{Z=0} + H|_{Z=\infty} \frac{Z}{Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} = H|_{Z=0} \frac{1 + \frac{H|_{Z=\infty}}{H|_{Z=0}} \frac{Z}{Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \end{aligned} \quad (3.140)$$

同样,将式(3.138)代入式(3.52)整理得：

$$\begin{aligned} H|_Z &= H|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{\frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} Z_d}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} = \frac{H|_{Z=\infty} + H|_{Z=\infty} \frac{\frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} Z_d}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} \\ &= \frac{H|_{Z=\infty} + H|_{Z=0} \frac{Z_d}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} = H|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} \frac{Z_d}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} \end{aligned} \quad (3.141)$$

虽然式(3.140)和式(3.141)形式各异,但是完全等价。如果将式(3.140)中阻抗 Z 由电感 L 表征,则传递函数更新为：

$$H(s) = \frac{H|_{Z=0} + H|_{Z=\infty} \frac{sL}{Z_d}}{1 + \frac{sL}{Z_d}} \quad (3.142)$$

如果将式(3.142)分子中第一项设定为直流增益($Z=0$ 即 L 短路),将第二项设定为高频增益(L 从电路中移除),利用第2章定义的广义传递函数:

$$H_0 = H|_{Z=0} \quad (3.143)$$

$$H^1 = H|_{Z \rightarrow \infty} \quad (3.144)$$

按照式(3.143)和式(3.144)的定义将式(3.142)改写为:

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s \frac{L}{Z_d}}{1 + s \frac{L}{Z_d}} \quad (3.145)$$

式(3.145)的分子和分母中的 L/Z_d 定义为电路时间常数 τ_1 , 最终表达式为:

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s \tau_1}{1 + s \tau_1} \quad (3.146)$$

如果 Z 更换为电容 C , 则式(3.141)变成:

$$H(s) = \frac{H|_{Z=\infty} + H|_{Z=0} \frac{Z_d}{1/sC}}{1 + \frac{Z_d}{1/sC}} \quad (3.147)$$

如果将式(3.147)分子中第一项定义为直流增益($Z=\infty$ 即电容 C 从电路中移除或电容值为零),将第二项定义为高频增益(即电容 C 短路或电容值无穷大),采用如下符号表示:

$$H_0 = H|_{Z=\infty} \quad (3.148)$$

$$H^1 = H|_{Z=0} \quad (3.149)$$

采用式(3.148)和式(3.149)表示的符号,将式(3.147)重新整理为

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s Z_d C}{1 + s Z_d C} \quad (3.150)$$

式(3.150)分母和分子中的 $Z_d C$ 定义为电路时间常数 τ_1 , 于是式(3.150)可重新整理为:

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s \tau_1}{1 + s \tau_1} \quad (3.151)$$

式(3.151)和式(3.146)为相同表达式,适用于所有具有电感或电容的1阶电路。该广义1阶表达式与第2章中使用不同方法所得最终结果一致,两种方式均出自参考文献[5]。表达式中 H_0 可取不同值:如果零点位于原点处,则其值为0;当 $s=0$ 时其值可为增益或衰减值;但是,如果电路在原点处存在极点,则其值可能为无穷大。然而在实际设计中,如3.3.5节实例5所示,该增益受运算放大器(或任何其他类型放大器)开环增益 A_{OL} 限制。

3.3.1 广义传递函数实例1

在图3.37中,当 L_1 设置为零时电路转换为电阻电桥电路,接下来计算输入传递函数。利用EET对电路进行分析,同时对NDI技术进行实际练习。因为此时电路为纯电阻电路,无任何储能元件,所以应用式(3.140)中的广义传递函数定义式计算电路的传递函数。首先将电阻 R_3 设置为0,此时更新之后的电路如图3.46所示,通过

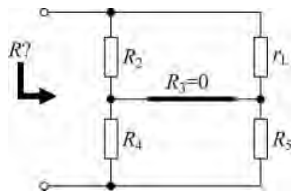


图3.46 当电阻 R_3 设置为0时电路变成简单的串并联结构

观察可得输入阻抗为:

$$R|_{z=0} = r_L \parallel R_2 + R_5 \parallel R_4 \quad (3.152)$$

接下来进行第二步计算,即从电路中移除电阻 R_3 (R_3 设置为无穷大) 时电路的输入电阻,更新之后的电路如图 3.47 所示。

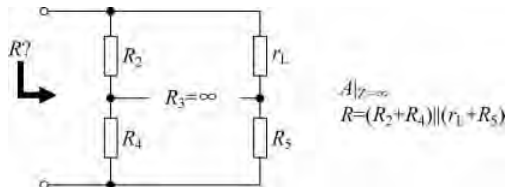


图 3.47 当电阻 R_3 设置为无穷大时电路变成其他串并联结构

此时无须计算,通过观察可直接得到输入阻抗为

$$R|_{z=\infty} = (R_2 + R_4) \parallel (r_L + R_5) \quad (3.153)$$

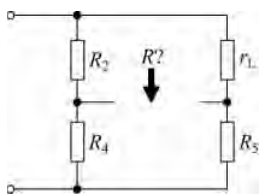


图 3.48 第三步设置时计算 R_3 端口电阻值的简化图

最后一步计算激励源设置为零时电阻 R_3 两端电阻值。对于电流源,将其参数值设置为 0A 等效于将其从电路中移除,此时电路如图 3.48 所示。

通过观察图 3.48 可直接得到 R_3 两端电阻值为:

$$Z_d = (r_L + R_2) \parallel (R_5 + R_4) \quad (3.154)$$

此时计算图 3.37 输入阻抗的所有因素均已求得,利用式(3.140)可得:

$$\begin{aligned} R_{in} = R|_{z=0} &= \frac{1 + \frac{R|_{z=\infty}}{R|_{z=0}} \frac{Z}{Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \\ &= (r_L \parallel R_2 + R_5 \parallel R_4) \frac{1 + \frac{(R_2 + R_4) \parallel (r_L + R_5)}{r_L \parallel R_2 + R_5 \parallel R_4} \frac{R_3}{(r_L + R_2) \parallel (R_5 + R_4)}}{1 + \frac{R_3}{(r_L + R_2) \parallel (R_5 + R_4)}} \quad (3.155) \end{aligned}$$

参考文献[4]利用 EET 和 NDI 整理得到不同表达式:

$$R_{in} = (R_2 + R_4) \parallel (r_L + R_5) \frac{1 + \frac{R_2 \parallel R_4 + r_L \parallel R_5}{R_3}}{1 + \frac{(R_2 + r_L) \parallel (R_4 + R_5)}{R_3}} \quad (3.156)$$

其实式(3.155)和式(3.156)完全等价。第 2 章已经对广义传递函数和 EET 所得结果进行对比,所以该实例分析结论合理:广义传递函数无须利用空双注入法对电路进行配置,可在该特定设置下直接利用三步法得到最终表达式。通过式(3.156)可以看出,输入电阻表达式排列有序,但是系数相对比较复杂。当利用另一方法——EET 与 NDI 相结合计算输入电阻时,所得表达式相对简单,因为输出为零时测试信号源短路。

当 $L_1=0$ 时的输入阻抗表达式已经得到,接下来继续利用式(3.109)和式(3.110)以及 EET 第二种表达式(3.55)将图 3.36 的输入阻抗定义为:

$$Z_{in}(s) = R_{in} \frac{1 + s \frac{L_1}{r_L + R_5 \parallel [(R_2 \parallel R_4) + R_3]}}{1 + s \frac{L_1}{r_L + R_2 + (R_5 + R_4) \parallel R_3}} \quad (3.157)$$

表达式(3.111)和(3.157)本质相同,但书写形式不同。在图 3.49 中,利用 Mathcad 对计算结果进行对比,并绘制输入阻抗的交流频率特性曲线。

$$r_L := 10\Omega \quad R_2 := 10\text{k}\Omega \quad R_3 := 120\Omega \quad R_4 := 1.2\text{k}\Omega \quad R_5 := 3.3\text{k}\Omega \quad L_1 := 1\text{H} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$Z_{inf} := R_2 + R_4 \parallel (R_3 + R_5) = 10.8883\text{k}\Omega \quad R_d := r_L + R_2 + (R_5 + R_4) \parallel R_3 = 10.1269\text{k}\Omega$$

$$R_n := [(R_2 \parallel R_4) + R_3] \parallel R_5 + r_L = 885.3817\Omega$$

$$R_{0a} := (r_L \parallel R_2 + R_5 \parallel R_4) \cdot \frac{1 + \frac{(R_2 + R_4) \parallel (r_L + R_5)}{(r_L \parallel R_2 + R_5) \parallel R_4} \cdot \frac{R_3}{(r_L + R_2) \parallel (R_4 + R_5)}}{1 + \frac{R_3}{(r_L + R_2) \parallel (R_4 + R_5)}} = 951.9525\Omega$$

$$R_{0b} := [(R_2 + R_4) \parallel (r_L + R_5)] \cdot \frac{1 + \frac{r_L \parallel R_5 + R_2 \parallel R_4}{R_3}}{1 + \frac{R_3}{(R_2 + r_L) \parallel (R_4 + R_5)}} = 951.9525\Omega$$

$$Z_3(s) := R_{0a} \frac{1 + \frac{s \cdot L_1}{R_n}}{1 + \frac{s \cdot L_1}{R_d}} \quad Z_1(s) := Z_{inf} \cdot \frac{1 + \frac{R_n}{s \cdot L_1}}{1 + \frac{R_d}{s \cdot L_1}}$$

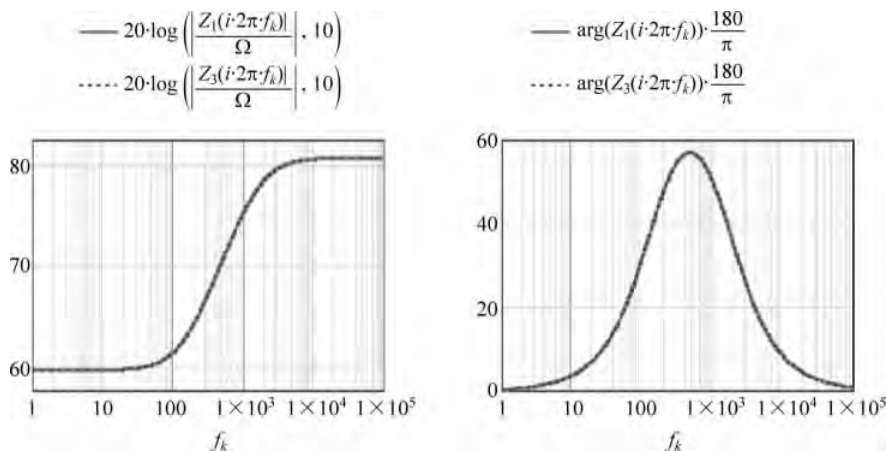


图 3.49 利用额外元件定理和广义 1 阶传递函数所得结果一致

3.3.2 广义传递函数实例 2

图 3.50 为双极性晶体管电路,其集电极为输出端 V_{out} 。该电路对节点 V_{in} 电压进行监测,当齐纳二极管开始导通时双极性晶体管 Q_1 正向偏置, V_{out} 下立即降。该经典结构通常用于开关电源初级稳压电路中,并且 V_{out} 与所选集成控制器的反馈引脚相连接。 V_{in} 为初级侧整流辅助电源 V_{cc} 。接下来首先对图 3.51 中小信号等效电路进行分析。

本电路实例将 EET 理论推广至电容 C (或电感 L)。由于此时电路包含单一储能元件,所以该电路为 1 阶电路。在图 3.51 中,如果将电容 C_f 短路,输出响应 V_{out} 是否依然存在? 此时电路与图 3.29(a)所研究电路相似: 存在与 C_f 相关的零点。具有极点、零点和低频渐近线的 1 阶传递函数可表示为:

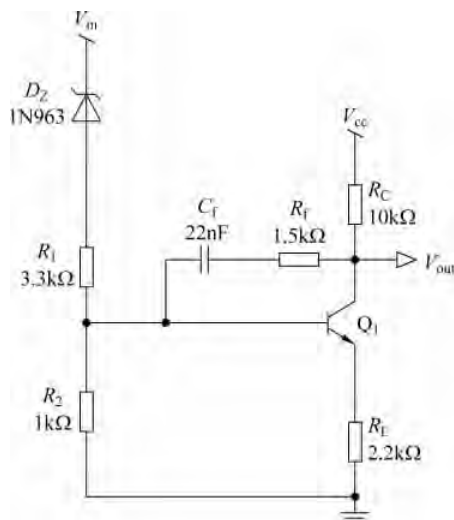


图 3.50 简单双极性晶体管放大电路通常用于开关电源初级稳压

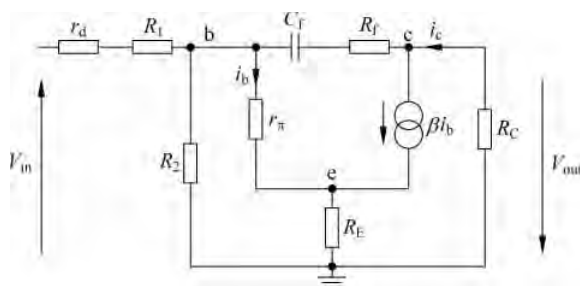
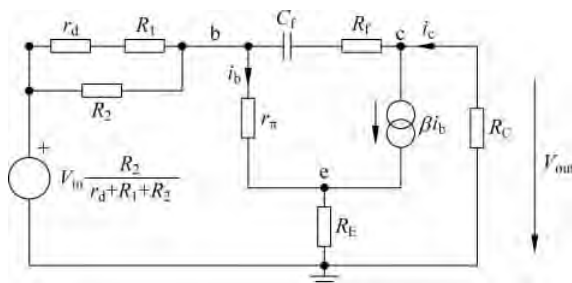


图 3.51 图 3.50 所示电路的小信号模型

$$H(s) = H_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} \quad (3.158)$$

实际上,式(3.52)中的 Z_n 和 Z_d 分别代表驱动阻抗 R_n 和 R_d 。 R_n 在 NDI 条件下确定,而 R_d 则在激励源为零时获得。电容阻抗 $Z=1/sC$ (电感阻抗 $Z=sL$)。在定义式(3.158)中,时间常数 τ_1 由电容 C_f 和驱动电阻 R_n 决定;时间常数 τ_2 为激励源设置为零时通过电阻 R_d 计算所得。首先计算电路直流增益 H_0 ,修改之后的电路如图 3.52 所示,此时输出电压定义为:

$$V_{out} = -\beta i_b R_C \quad (3.159)$$

图 3.52 直流分析时将电容 C_f 去除

基极电流通过电流源流入,定义式为:

$$i_b = \frac{V_{in} \frac{R_2}{r_d + R_1 + R_2} - V_b}{(r_d + R_1) \parallel R_2} \quad (3.160)$$

基极电压为电阻 r_π 两端压降与发射极电压 $v_{(e)}$ 之和,即:

$$V_b = r_\pi i_b + v_{(e)} = i_b(r_\pi + (\beta + 1)R_E) \quad (3.161)$$

将式(3.161)代入式(3.160),解得 i_b 为:

$$i_b = \frac{V_{in}}{(R_1 + r_d) \left(\frac{[r_\pi + R_E(\beta + 1)](R_1 + R_2 + r_d)}{R_2(R_1 + r_d)} + 1 \right)} \quad (3.162)$$

将式(3.162)中的 i_b 定义式代入式(3.159)中,整理得直流传递函数为:

$$H_0 = - \frac{\beta R_C}{(R_1 + r_d) \left(\frac{[r_\pi + R_E(\beta + 1)](R_1 + R_2 + r_d)}{R_2(R_1 + r_d)} + 1 \right)} \quad (3.163)$$

为获得阻抗 R_n ,需绘制 NDI 条件时的电路原理图,具体如图 3.53 所示。因为原理图 3.29(d)中的电阻值已经计算得到,所以此处可直接使用。在电路中,测试电压 V_T 直接与三极管基极相连接。该电压不仅与 V_{in} 无关,也不受电阻 r_d 、 R_1 和 R_2 影响。图 3.53 的 NDI 分析结果如下所示,除串联电阻 R_f 外, R_n 表达式与式(3.89)相似:

$$R_n = \frac{V_T}{I_T} = - \left[\frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] + R_f \quad (3.164)$$

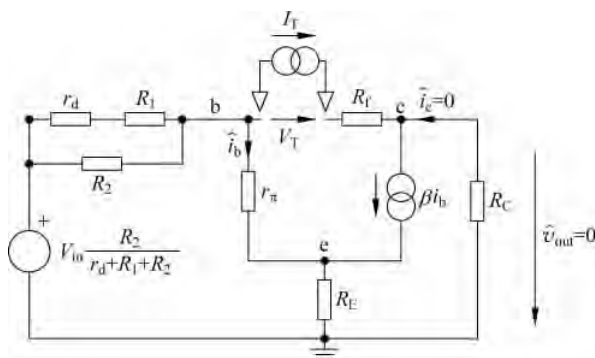


图 3.53 当电路设置为 NDI 时输出电压应为零

应当注意,当无电阻 R_f 时, R_n 为负值,当 R_f 满足如下条件时 R_n 为正数:

$$R_f > \frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \quad (3.165)$$

分子时间常数 τ_1 定义式为:

$$\tau_1 = C_f \left[R_f - \frac{r_\pi}{\beta} - R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] \quad (3.166)$$

如图 3.54 所示,当激励源设置为零时计算电路时间常数。

首先在去除电阻 R_f 的情况下计算阻抗 R_d ,最后再将 R_f 与计算结果相加。上述技术为串联电路快速分析的经典技术,同样适用于并联电路。虽然电路中不包含输入电压,但当电流在输入电阻网络 r_d 、 R_1 和 R_2 中循环流通时产生电压降 $v_{(b)}$,即:

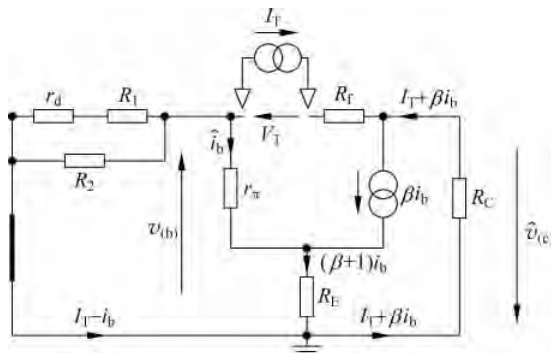


图 3.54 当激励源设置为零时计算时间常数

$$v_{(b)} = R_{eq}(I_T - i_b) \quad (3.167)$$

其中

$$R_{eq} = (R_1 + r_d) \parallel R_2 \quad (3.168)$$

因为 r_π 和 R_E 之间电压相同,所以:

$$v_{(b)} = i_b r_\pi + (\beta + 1)i_b R_E = i_b [r_\pi + (\beta + 1)R_E] \quad (3.169)$$

因为式(3.167)和式(3.169)相同,所以解得 i_b 为:

$$i_b = kI_T \quad (3.170)$$

其中

$$k = \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \quad (3.171)$$

节点 c 处的电压为电流与电阻 R_C 之积,即:

$$v_{(c)} = -R_C(I_T + \beta i_b) \quad (3.172)$$

所以阻抗定义式为:

$$\begin{aligned} R &= \frac{V_T}{I_T} = \frac{v_{(b)} - v_{(c)}}{I_T} = \frac{R_{eq}(I_T - k \cdot I_T) + R_C(I_T + k \cdot I_T \beta)}{I_T} \\ &= R_{eq}(1 - k) + R_C(1 + k\beta) \end{aligned} \quad (3.173)$$

电阻 R_d 的最终表达式为:

$$R_d = R + R_f \quad (3.174)$$

将 R_{eq} 和 k 采用其实际值代替,则第二时间常数 τ_2 定义如下:

$$\tau_2 = C_f \left[[(R_1 + r_d) \parallel R_2] \left(1 - \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \right) + R_C \left(1 + \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \beta \right) + R_f \right] \quad (3.175)$$

电路最终传递函数由式(3.163)、式(3.166)和式(3.175)组合而成,即:

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.176)$$

其中直流增益定义为:

$$H_0 = - \frac{\beta R_C}{(R_1 + r_d) \left(\frac{[r_\pi + R_E(\beta + 1)](R_1 + R_2 + r_d)}{R_2(R_1 + r_d)} + 1 \right)} \quad (3.177)$$

零点为

$$\omega_z = \frac{1}{C_f \left[R_f - \frac{r_\pi}{\beta} - R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]} \quad (3.178)$$

极点为

$$\omega_p = \frac{1}{C_f \left[\left[(R_1 + r_d) \parallel R_2 \right] \left(1 - \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \right) + R_C \left(1 + \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \beta \right) + R_f \right]} \quad (3.179)$$

为了对上述复杂结果进行检验,利用 Mathcad(见图 3.55)对表达式进行计算,并将结果与 SPICE 仿真进行比较(见图 3.56),两者完全一致。

$$r_d := 150 \Omega \quad R_C := 10 \text{ k}\Omega \quad R_E := 1200 \Omega \quad r_\pi := 1 \text{ k}\Omega \quad R_f := 2.2 \text{ k}\Omega \quad C_f := 22 \text{ nF}$$

$$\parallel(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y} \quad \beta := 150 \quad R_1 := 470 \Omega \quad R_2 := 1 \text{ k}\Omega$$

$$H_0 := - \frac{\beta \cdot R_C}{(R_1 + r_d) \cdot \left[\frac{[r_\pi + R_E \cdot (\beta + 1)] \cdot (R_1 + R_2 + r_d)}{R_2 \cdot (R_1 + r_d)} + 1 \right]} = -5.07127 \quad \text{condition for RHPZ or LHPZ}$$

$$R_n := R_f - \frac{r_\pi}{\beta} - R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = 985.33333 \Omega \quad \tau_1 := C_f \cdot R_n = 21.67733 \cdot \mu\text{s} \quad \frac{r_\pi}{\beta} + R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = 1.21467 \cdot \text{k}\Omega$$

$$R_d := [(r_d + R_1) \parallel R_2] \cdot \left[1 - \frac{1}{\frac{R_E + r_\pi + R_E \cdot \beta}{(r_d + R_1) \parallel R_2} + 1} \right] + R_C \cdot \left[1 + \frac{1}{\frac{R_E + r_\pi + R_E \cdot \beta}{(r_d + R_1) \parallel R_2} + 1} \beta \right] + R_f = 15.7261 \cdot \text{k}\Omega$$

$$\tau_2 := C_f \cdot R_d = 345.9742 \cdot \mu\text{s}$$

$$\omega_z := \frac{1}{\tau_1} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 7.342 \cdot \text{kHz} \quad \omega_p := \frac{1}{\tau_2} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 460.01968 \cdot \text{Hz} \quad H_1(s) := H_0 \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_2}$$

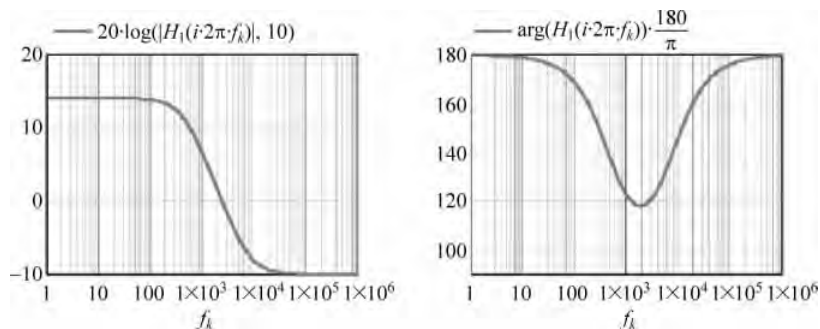


图 3.55 直流平坦、低频极点和高频零点

由表达式(3.165)可知,阻抗 R_n 的符号依赖于串联阻抗 R_f 。如果 R_f 被束缚,则式(3.178)中零点可能分布于 s 域的右半平面。与零点相位超前不同,右半平面零点产生相位滞后。如果 R_f ($R_f = 1.2147 \text{ k}\Omega$) 将零点完全抵消,则传递函数成为单极点形式,其最大滞后相位为 90° 。最后,当 R_f 数值大于 $1.2147 \text{ k}\Omega$ 时极点/零点响应曲线如图 3.56 所示。图 3.57 为 R_f 取三种不同数值时传递函数响应特性总结。

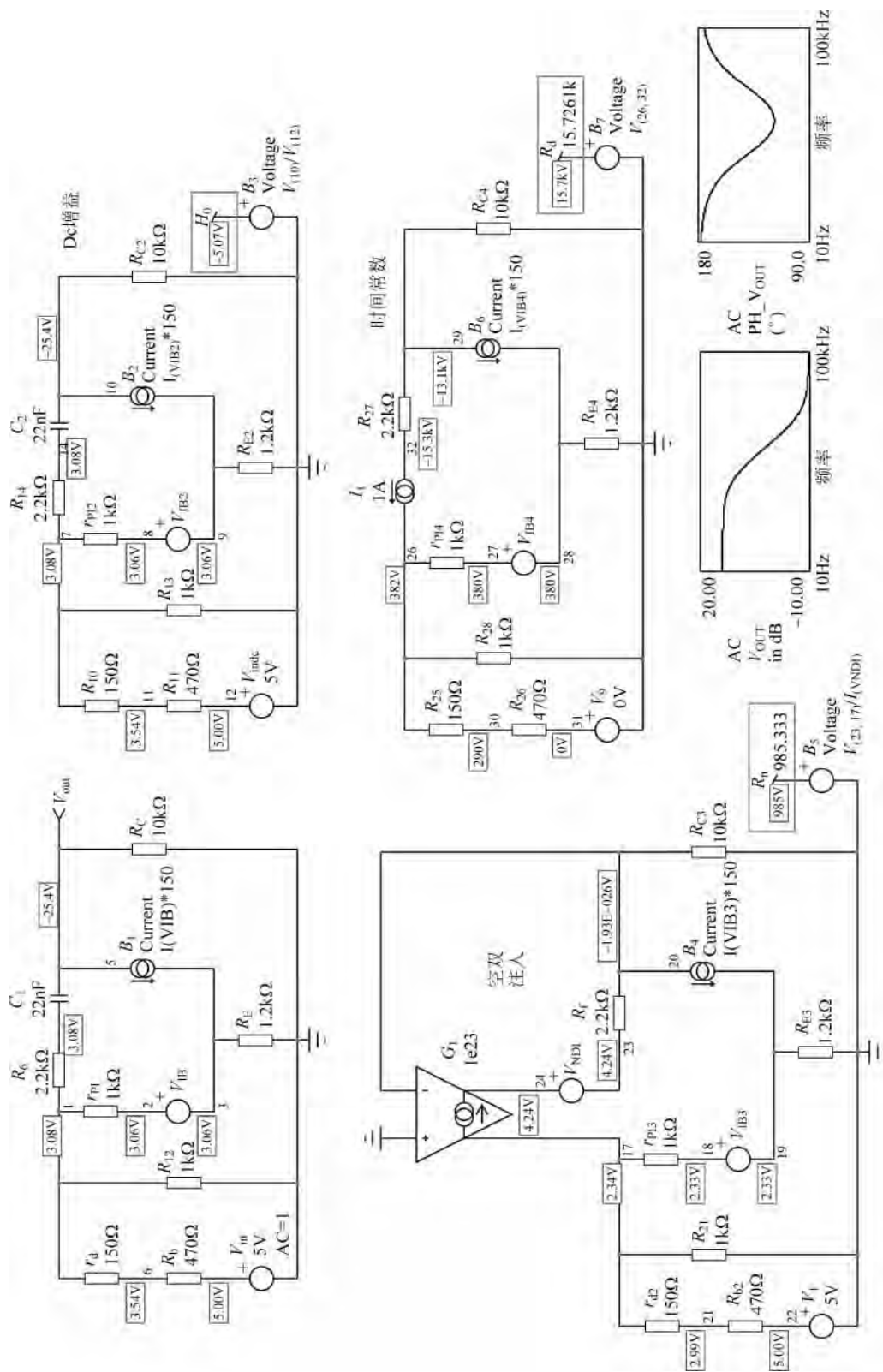
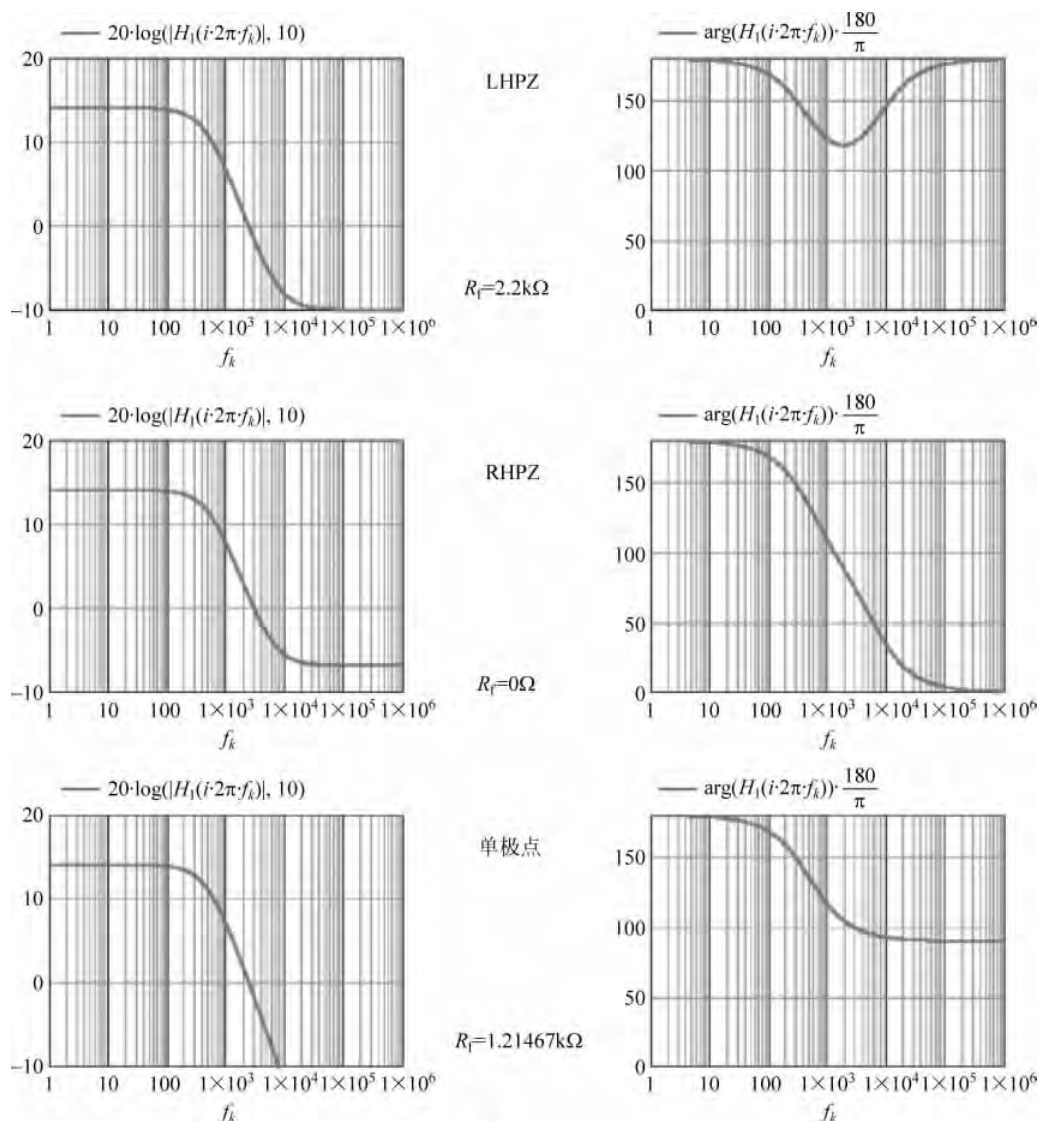


图 3.56 利用 SPICE 软件进行数值计算和交流频率特性绘制

图 3.57 通过改变射极电阻值 R_E 得到传递函数不同响应

3.3.3 广义传递函数实例 3

图 3.58 为运算放大器构成的反相放大电路,其中电容将反馈电阻中点连接至地。利用广义 1 阶传递函数计算该放大电路的传递函数。首先,如图 3.59 所示,将电容 C_1 移除后计算电路的直流增益。因为运算放大器的开环增益为 A_{OL} ,所以误差电压 ϵ 不为零。

图 3.59 所示电路的传递函数已经在第 2 章的习题 10 中进行详细计算。直流增益为:

$$H_0 = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \frac{1}{\frac{R_2 + R_3}{R_1} + 1} \frac{1}{A_{OL} + 1} \quad (3.180)$$

接下来计算电容 C_1 短路时的电路增益,此时电路如图 3.60 所示。因为电阻 R_3 等效为

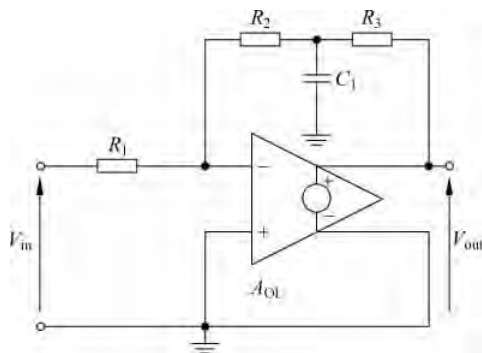
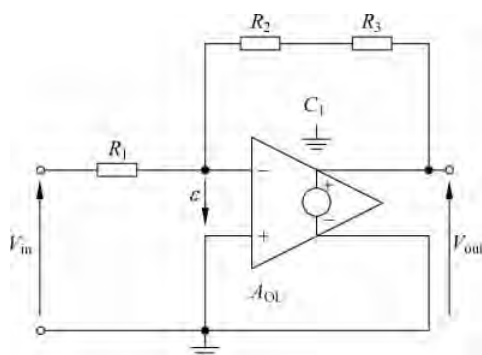
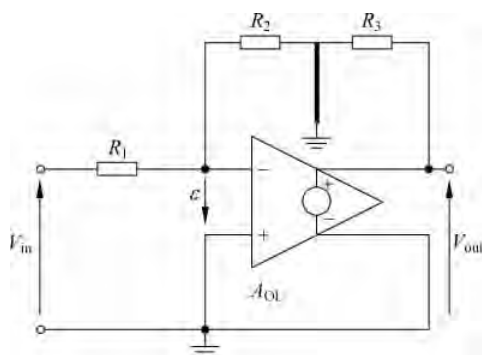


图 3.58 由运算放大器及电阻和电容构成的 1 阶有源滤波器

图 3.59 去除电容 C_1 之后的运放电路成为典型反相放大电路

运算放大器的输出负载(运算放大器输出阻抗为 0Ω)时,所以可将 R_3 从电路中直接去除。

图 3.60 短路电容 C_1 计算高频增益 H^1

于是:

$$V_{\text{out}} = A_{\text{OL}}\epsilon \quad (3.181)$$

此时运算放大器不再处于闭环状态,并且虚地效应不复存在。输入引脚之间电压由简单电阻分压器提供,即:

$$\epsilon = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}V_{\text{in}} \quad (3.182)$$

将式(3.182)代入式(3.181)中,整理得高频增益为:

$$H^1 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} A_{OL} \quad (3.183)$$

接下来计算电路时间常数。首先将激励源设置为 0V, 电路如图 3.61 所示。直觉观察很难得到等效输入电阻, 利用电流源对运放输入端进行激励, 通过计算其两端电压求得输入电阻, 具体如图 3.62 所示。应当注意, 为使电流转换更加方便, 特意将 ε 反相, 从而输出电压 εA_{OL} 也反相。

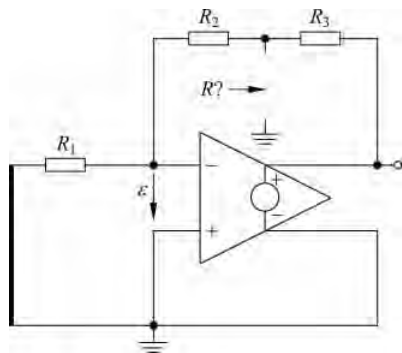


图 3.61 将激励电压源设置为 0V 以求得电路时间常数

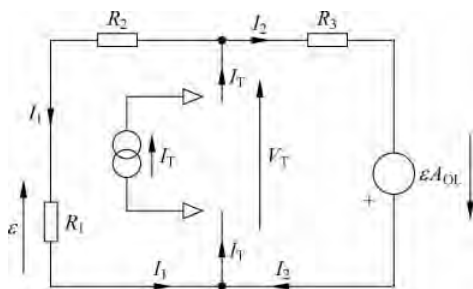


图 3.62 计算激励电流源 I_T 两端的电压表达式 V_T

首先定义电流 I_1 :

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} \quad (3.184)$$

其值也等于

$$I_1 = \frac{V_T - \varepsilon}{R_2} \quad (3.185)$$

令式(3.184)等于式(3.185)相等, 求解 ε 为:

$$\varepsilon = V_T \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (3.186)$$

测试电流 I_T 为 I_1 和 I_2 之和:

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{V_T + \varepsilon A_{OL}}{R_3} \quad (3.187)$$

将式(3.186)代入式(3.187)中,整理得测试电流 I_T 关于 V_T 的函数,即:

$$I_T = V_T \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A_{OL}}{R_3} \right] \quad (3.188)$$

于是阻抗的最终计算定义为:

$$R = \frac{V_T}{I_T} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A_{OL}}{R_3}} \quad (3.189)$$

重新整理式(3.189),求得与电容 C_1 相关的电路时间常数为:

$$\tau_1 = C_1 \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + A_{OL}R_1} \quad (3.190)$$

于是电路的最终传递函数为:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = H_0 \frac{1 + \frac{H^1}{H_0} s \tau_1}{1 + s \tau_1} = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.191)$$

其中

$$H_0 = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \frac{1}{\frac{\frac{R_2 + R_3}{R_1} + 1}{\frac{R_1}{A_{OL}}} + 1} \quad (3.192)$$

$$\omega_z = \frac{H_0}{H_1 \tau_1} = \frac{-\frac{R_2 + R_3}{R_1} \frac{1}{\frac{\frac{R_2 + R_3}{R_1} + 1}{\frac{R_1}{A_{OL}}} + 1}}{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} A_{OL} C_1 \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + A_{OL}R_1}} \quad (3.193)$$

将上述等式简化,求得零点为:

$$\omega_z = \frac{1}{C_1(R_2 \parallel R_3)} \quad (3.194)$$

极点为:

$$\omega_p = \frac{1}{C_1 \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + A_{OL}R_1}} \quad (3.195)$$

利用 Mathcad 对上述等式进行计算,结果如图 3.63 所示。然后利用 SPICE 仿真程序对计算结果进行对比验证。SPICE 仿真电路如图 3.64 所示,通过直流工作点仿真数据验证 Mathcad 计算结果正确。本实例特意将运算放大器开环增益设置为较低值(100 或 40dB),以观察其对计算结果的影响。

子电路 X_1 由极点、零点和增益构成。传递参数由 B_4 和 B_5 计算,然后将其交流响应(V_{out2})与 E_2 构建的原始电路输出响应 V_{out} 进行比较。仿真波形如图 3.64 所示,电路响应完全一致。

$$R_1 := 12\text{k}\Omega \quad R_3 := 10\text{k}\Omega \quad R_2 := 22\text{k}\Omega \quad C_1 := 22\text{nF} \quad A_{OL} := 100$$

$$\parallel(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$H_0 := -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \cdot \frac{1}{\frac{R_2 + R_3}{R_1} + 1} = -2.57235 \quad H_1 := -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) \cdot A_{OL} = -64.70588$$

$$R_d := \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + A_{OL} \cdot R_1} = 273.3119\Omega \quad \tau_1 := C_1 \cdot R_d \quad H_2(s) := H_0 \cdot \frac{1 + \frac{H_1}{H_0} \cdot s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_1}$$

$$\omega_z := \frac{H_0}{H_1 \cdot \tau_1} = 6.61157 \times 10^3 \frac{1}{s} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 1.05226\text{kHz} \quad \omega_p := \frac{1}{\tau_1} = 1.6631 \times 10^5 \frac{1}{s}$$

$$f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 26.46908\text{kHz} \quad \frac{1}{C_1 \cdot (R_2 \parallel R_3)} = 6.61157 \times 10^3 \frac{1}{s}$$

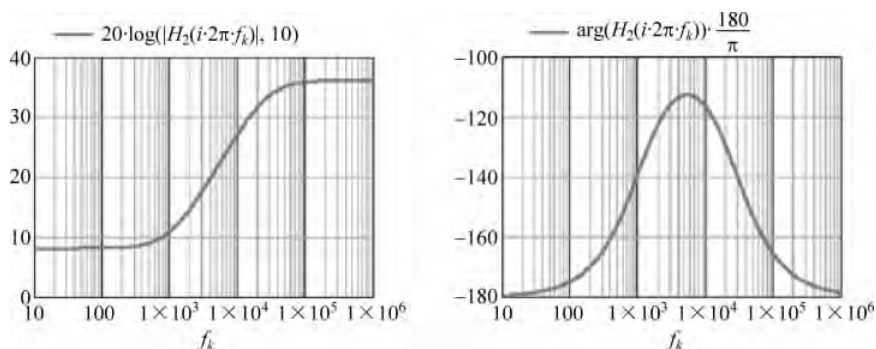


图 3.63 利用 Mathcad 绘制波特图以便与 SPICE 进行对比

3.3.4 广义传递函数实例 4

图 3.65 为电路实例 4 的电路图,该电路以运算放大器为核心,并且运放的增益设置为无穷大。首先计算电容从电路中移除后电路的直流增益,此时相应电路如图 3.66 所示。利用图右侧等效电路,通过应用叠加定理计算直流增益。当 R_1 左端接地时电路成为同相放大器,输出 V_{out1} 受增益 H_a 影响,该增益计算公式为:

$$H_a = \frac{R_2}{R_1} + 1 \quad (3.196)$$

当 R_3 左端接地时电路成为反相放大器,其第二增益 H_b 的计算公式为:

$$H_b = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3.197)$$

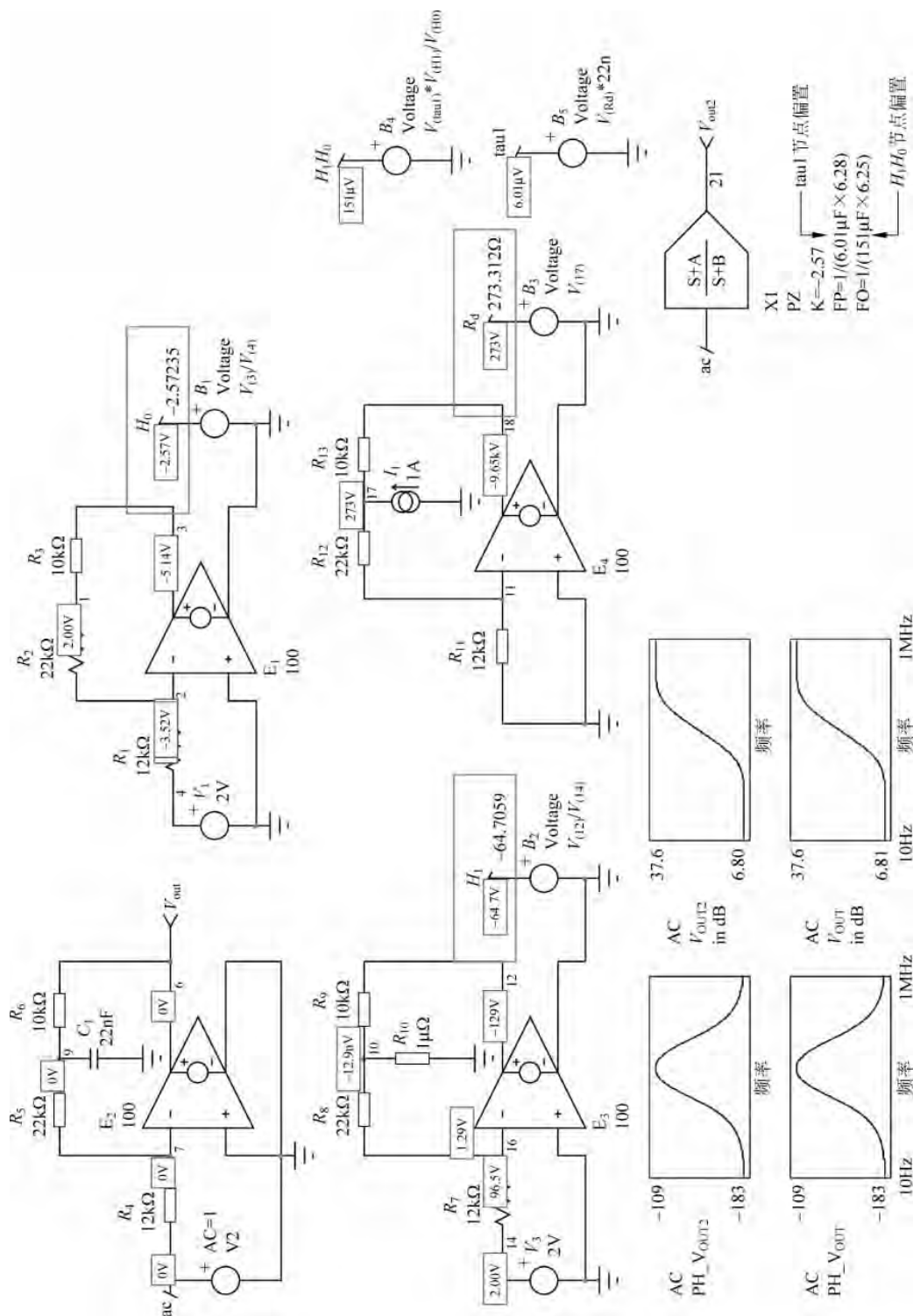
最终增益为 H_a 与 H_b 之和,即:

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1} + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) = 1 \quad (3.198)$$

接下来计算电容 C_1 无穷大时的电路增益,如图 3.67 所示。

此时电路为简单反相放大器,其增益与式(3.196)相似,计算公式为:

$$H^1 = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3.199)$$

图 3.64 利用 SPICE 软件对计算结果进行检验。因为 SPICE 中电阻不能设置为 0Ω ，所以将 H' 中 $1\mu\Omega$ 电阻等效为短路

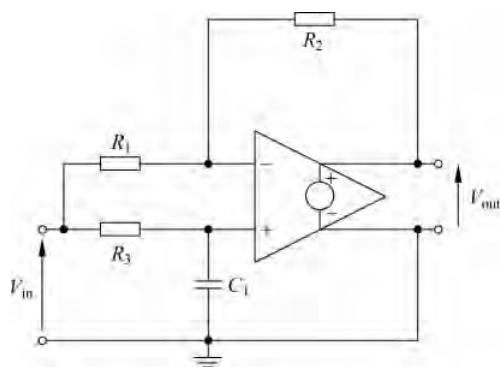


图 3.65 运放滤波器由三个电阻和一个电容构成,为 1 阶系统

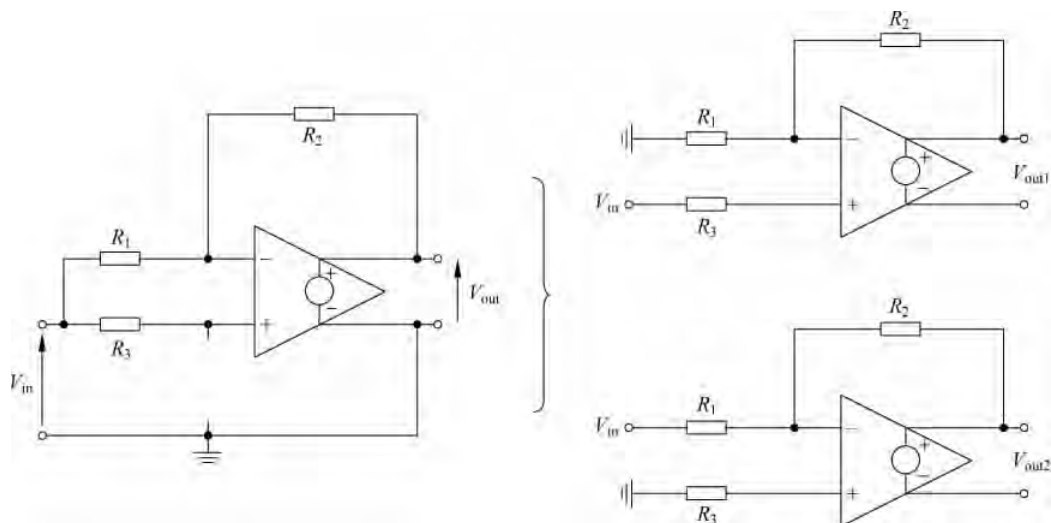
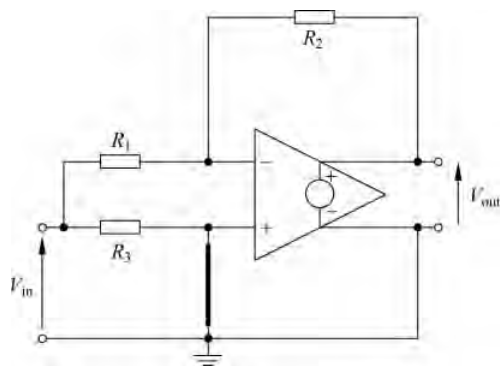


图 3.66 使用叠加定理可快速求得直流增益


 图 3.67 当 C_1 由短路线代替时可直接求得电路增益

如图 3.68 所示,将激励电压源设置为 0V,然后计算电路的时间常数。在该模式下,由于运放同相引脚的输入电阻无穷大,所以连接器两端的唯一电阻为 R_3 ,此时电路的时间常数为:

$$\tau_1 = R_3 C_1 \quad (3.200)$$

则最终传递函数为:

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{H_1}{H_0} s \tau_1}{1 + s \tau_1} = \frac{1 - s \frac{R_2}{R_1} R_3 C_1}{1 + s R_3 C_1} = \frac{1 - \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.201)$$

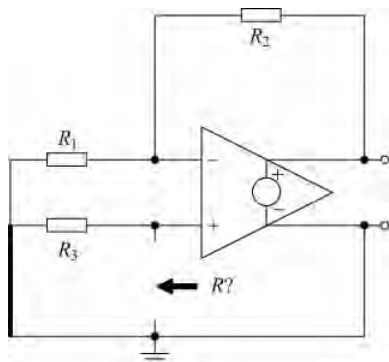


图 3.68 R_3 为电容驱动电阻

其中

$$\omega_z = \frac{R_1}{R_2 R_3 C_1} \quad (3.202)$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_3 C_1} \quad (3.203)$$

与式(3.201)相同,该电路具有右半平面零点。与 90° 极点滞后相关,该电路总滞后将达 180° 。图 3.69 和图 3.70 分别为 Mathcad 和 SPICE 计算结果,通过对比可得两结果完全一致。

$$R_1 := 1\text{k}\Omega \quad R_2 := 4.7\text{k}\Omega \quad R_3 := 10\text{k}\Omega \quad C_1 := 0.1\mu\text{F}$$

$$H_0 := 1 \quad \tau_1 := R_3 \cdot C_1 \quad H_1 := -\frac{R_2}{R_1} = -4.7 \quad H_{10}(s) := H_0 \cdot \frac{1 + \frac{H_1}{H_0} \cdot s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_1}$$

$$\omega_p := \frac{1}{\tau_1} = 1 \times 10^3 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 159.155\text{Hz} \quad \omega_z := -\frac{H_0}{H_1 \cdot \tau_1} = 212.766 \frac{1}{s} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 33.863\text{Hz}$$

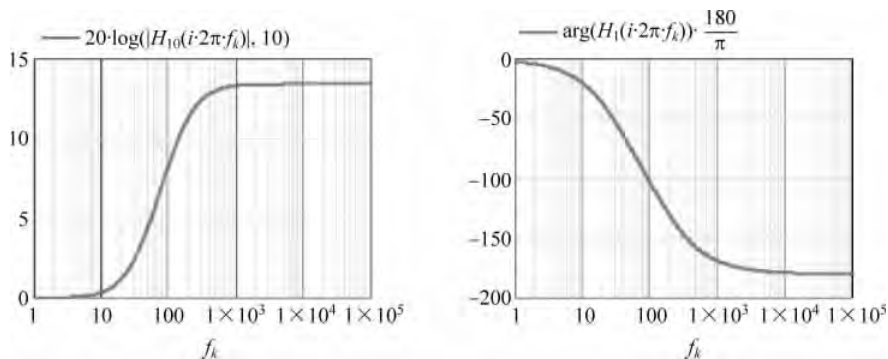


图 3.69 利用 Mathcad 绘制频率特性曲线以便与 SPICE 进行对比

3.3.5 广义传递函数实例 5

最后实例电路如图 3.71 所示,应用广义传递函数公式计算简单积分电路的传递函数。当电容 C_1 从电路中移除时计算直流增益 H_0 ,电路如图 3.72 所示。

此时直流增益简化为:

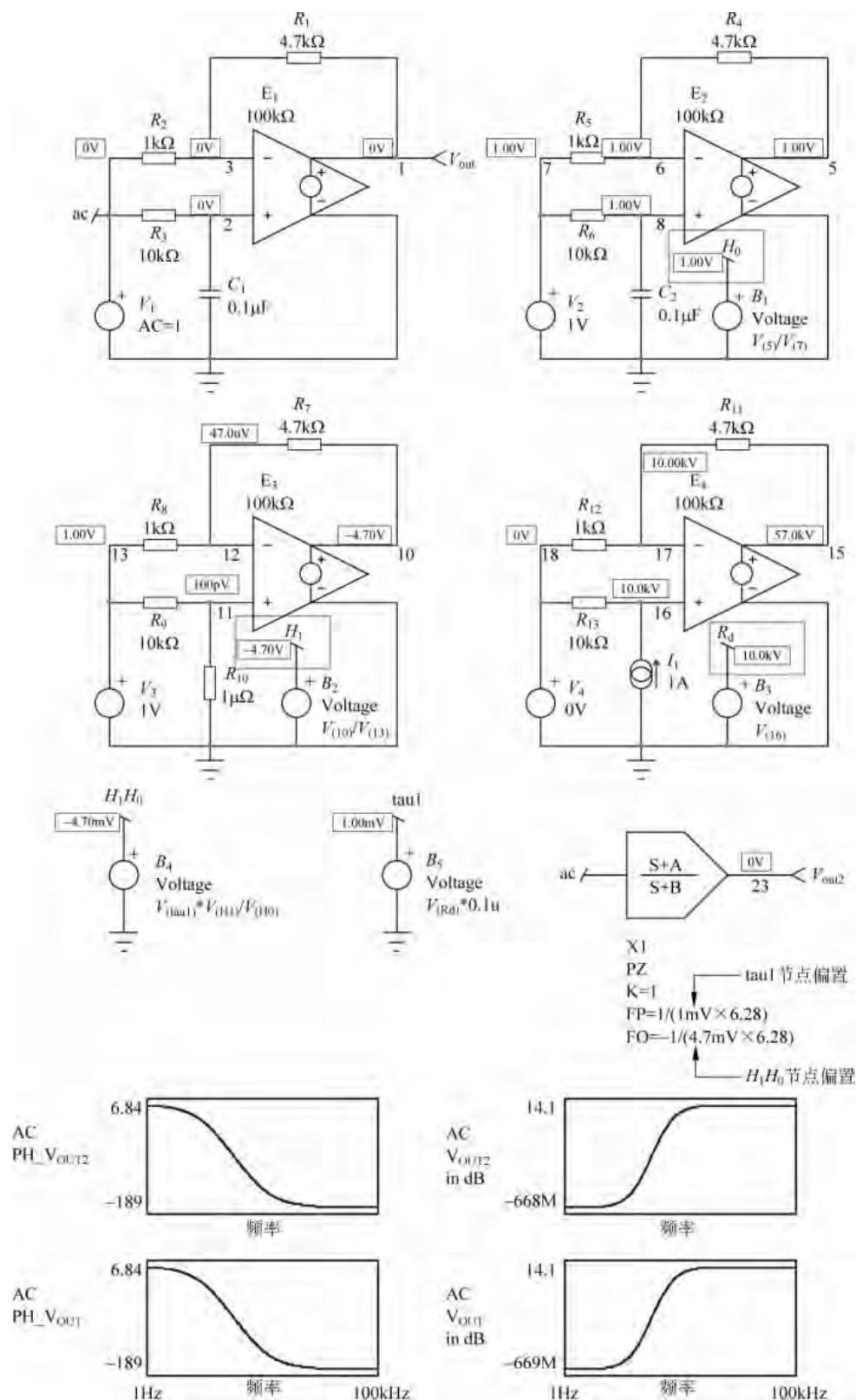


图 3.70 利用 SPICE 软件对计算过程和最终传递函数进行验证

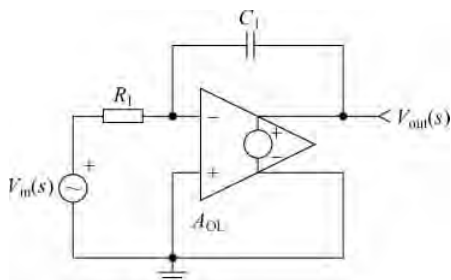


图 3.71 由开环增益为 A_{OL} 的运算放大器构成的简单积分器

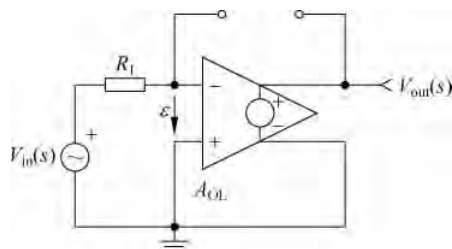


图 3.72 当 $s=0$ 时电容从电路中移除

$$H_0 = -A_{OL} \quad (3.204)$$

然后将激励电压源设置为 $0V$,并在电容 C_1 两端增加电流源 I_T ,具体电路如图 3.73 所示。此时电流源两端电压为:

$$V_T = R_1 I_T - V_{out} \quad (3.205)$$

运放输出电压计算公式为:

$$V_{out} = \epsilon \cdot A_{OL} \quad (3.206)$$

其中

$$\epsilon = -R_1 I_T \quad (3.207)$$

将式(3.207)代入式(3.206)整理得:

$$V_{out} = -R_1 I_T A_{OL} \quad (3.208)$$

将式(3.208)代入式(3.205)得:

$$V_T = I_T R_1 + R_1 I_T A_{OL} = I_T R_1 (1 + A_{OL}) \quad (3.209)$$

电容 C_1 的驱动电阻计算公式为:

$$R = \frac{V_T}{I_T} = R_1 (1 + A_{OL}) \quad (3.210)$$

因此时间常数 τ_1 为:

$$\tau_1 = C_1 R_1 (1 + A_{OL}) \quad (3.211)$$

如图 3.74 所示,高频时电容 C_1 短路,输出响应为 $0V$,所以:

$$H^1 = 0 \quad (3.212)$$

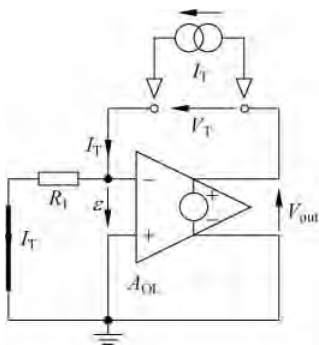


图 3.73 利用电流源计算激励为零时电容 C_1 的驱动电阻

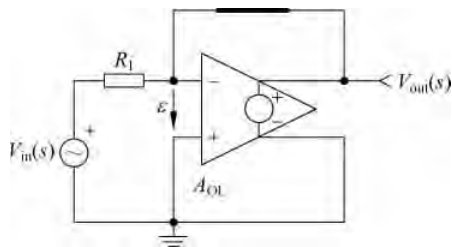


图 3.74 C_1 短路时传递函数为 0

应用广义传递函数表达式整理得：

$$H(s) = \frac{H_0 + H_1 s \tau_1}{1 + s \tau_1} = - \frac{A_{OL}}{1 + s R_1 C_1 (1 + A_{OL})} = - \frac{A_{OL}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.213)$$

其中低频极点为：

$$\omega_p = \frac{1}{R_1 C_1 (1 + A_{OL})} \quad (3.214)$$

提取因数 A_{OL} 整理得：

$$H(s) = - \frac{A_{OL}}{A_{OL}} \frac{1}{\left(\frac{1}{A_{OL}} + s R_1 C_1 \frac{1 + A_{OL}}{A_{OL}} \right)} = - \frac{1}{\frac{1}{A_{OL}} + s R_1 C_1 \frac{1 + A_{OL}}{A_{OL}}} \quad (3.215)$$

当 A_{OL} 非常大时，式(3.215)简化为：

$$H(s) = - \frac{1}{s R_1 C_1} = - \frac{1}{\frac{s}{\omega_{po}}} \quad (3.216)$$

其中

$$\omega_{po} = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (3.217)$$

ω_{po} 定义为 0dB 穿越极点，即增益为 0dB 时的频率值。图 3.75 为两传递函数的动态响应曲线。 H_2 代表式(3.213)，用于计算低频极点，并且该极点依赖于 A_{OL} ； H_3 用于计算 A_{OL} 无穷大时的 0dB 穿越频率，即 1.6kHz。

$$R_1 := 10\text{k}\Omega \quad C_1 := 10\text{nF} \quad A_{OL} := 10000$$

④

$$H_0 := -A_{OL} \quad H_1 := 0$$

$$R_d := R_1 \cdot (1 + A_{OL}) \quad \tau_1 := C_1 \cdot R_d \quad \omega_p := \frac{1}{\tau_1} = 0.9999 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 0.15914\text{Hz}$$

$$H_2(s) := \frac{H_0 + H_1 \cdot s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_1} \quad H_3(s) := \frac{1}{\frac{s}{\omega_{po}}} \quad \omega_{po} = \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \quad f_{po} := \frac{\omega_{po}}{2\pi} = 1.59155\text{kHz}$$

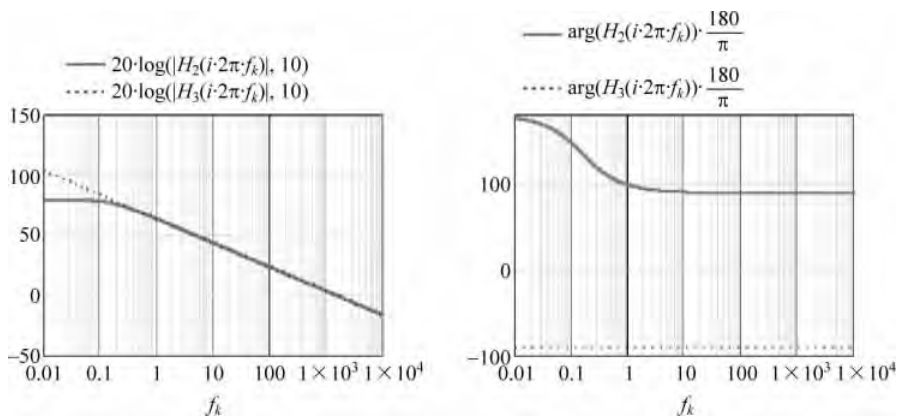


图 3.75 直流时积分器的输出响应受运算放大器开环增益(80dB)限制

3.4 深入阅读

本章以额外元件定理及其应用实例 5 作为结束。鼓励读者通过网站或专业书籍深入阅读其他论文及相关资料。除 Middlebrook 博士已经发表的基础论文^[3]外,读者还可访问文献[6]的网址,其中包含 Middlebrook 博士讲授的关于面向设计分析的大部分演讲和讨论。本书主要对 EET 进行分析和讲解,并且以设计实例和创新思维贯穿始终。在学习全书过程中,文献[4]不容忽略,该文献对 EET 定理进行详细推导和具体实例分析——从简单 1 阶电路至结构复杂的电路网络。文献[5]另辟蹊径,创建异于 NDI 的不同电路分析方法。无论利用 NDI 技术求得最简分子表达式,还是首先整理得到广义传递函数表达式然后再对分子进行简化,完全由读者自行选择。两表达式结果相似,但是广义传递函数有时需要处理复杂的 H^1 增益表达式,所以最终结果可能比较繁琐。文献[7]详细讲解利用 EET 和电路快速分析技术如何求解电路方程。文献[8]为比利时某大学的网站,该作者通过计算机仿真(例如 Cadence)对 Middlebrook 博士(EET 以及通用反馈定理)的各种定理进行验证。该网站还提供大量资料和网络链接。文献[9]为雅虎网址,设计师与该领域专家关于 FACT 进行互动讨论。最后,文献[10]并未对 EET 进行直接讨论,而是利用通用反馈定理(General Feedback Theorem, GFT)对环路技术进行分析,并且该文献包含大量实用信息。

尽管文字讲解和实例分析应有尽有,但实际练习必不可少:读者必须投入时间和精力利用 EET 及其不同表达形式对电路进行求解,以使技术炉火纯青。当输出为零或者计算特定时间常数时,可利用 SPICE 仿真技术对错误出处和电流方向进行判断。仿真技术对于查找电路设计时遗留的缺陷功不可没。

本章已介绍如何求解 1 阶电路,接下来的第 4 章将具体分析如何求解 2 阶网络。在阅读第 4 章之前,读者务必独立完成本章课后习题。

3.5 本章重点

第 3 章对电路快速分析技术核心——EET 技术进行深入探讨,并将其应用于实例分析。以下为本章内容总结:

(1) 分析具有多个独立源的线性电路时,首先分别计算每个独立源单独作用于电路时的输出响应(电流或电压),最后求得各个响应代数和。电压源关闭或设置为 0V 时由短路线代替,电流源设置为 0A 时等效为电源开路。

(2) 上述已经对单输出(响应)和多输入(激励)系统进行定义。总输出为某时刻仅有唯一激励源时电路输出响应之和。额外元件定理(EET)由叠加定理推导而来,最初用于分析双输出、双输入系统。与叠加定理不同,双输入信号可同时对电路进行激励,以产生双输出信号。当输入信号合理组合时,可使得两输出信号其中一路为零,即输出为 0V 或 0A,此状态称为空双注入。

(3) 应用 EET 进行电路分析时,首先将电路结构复杂化的元件标识为额外元件。然后根据 EET 表达式格式,确定额外元件从电路中物理移除或短路。通常根据电路的简化程度选择额外元件的移除或短路状态。最后根据所选 EET 表达式在各个状态下计算电路传递函数。

(4) 如果传递函数存在零点,将零点置于分子中,并将储能元件与电阻 R_n 相关联。利用 NDI 对电路进行分析时,变量 R_n 为储能元件的端口电阻:保持输入信号有效,当输出响应为零时计算给定端口的电阻值。

(5) 计算传递函数极点时,将激励源设置为零,然后计算储能元件端口的驱动电阻 R_d 。该电阻与储能元件共同决定电路时间常数 τ 。

(6) 利用 EET 可将广义 1 阶传递函数表达为不同形式。在上述表达式中,无须利用 NDI 计算 R_n ,但是必须求出直流增益 H_0 和 高频增益 H^1 。将两增益与电路时间常数 τ 组合,构成传递函数的分子表达式。电阻 R_d 的计算方法与之前一致,无须利用 NDI 技术可直接求得,但所得结果与 EET 相比将会更加复杂。最终选择何种计算方法完全由读者决定。

(7) EET 可应用于各种电路,例如无源电路、双极性晶体管或运算放大器电路。EET 同样适用于有源电路,但是当电路中含有受控源时计算 R_n 和 R_d 将变得复杂。

(8) 利用 SPICE 电路仿真技术能够对手工或数学计算器所得结果进行验证。当激励源为零时,利用简单的直流电流源对储能元件端口进行激励,通过 SPICE 电路仿真可直接求得电阻 R_d ;同样可以利用 NDI 技术,通过跨导放大器对储能元件端口进行偏置,当输出为零时求解电阻 R_n 。

(9) 图 3.76 对 EET 的各种表达式形式及其传递函数分子(零点)和分母(极点)中时间常数的构成形式进行总结。图 3.77 未使用 NDI 技术对广义 1 阶传递函数表达式进行定义。

额外元件定理为

A: 激励与响应之间的传递函数

Z: 额外元件

Z_n : 激励作用下输出响应为零时额外元件端口的阻抗

Z_d : 激励为零时额外元件端口的阻抗

$$A|_Z = A|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}}$$

$$A|_Z = A|_{Z=0} \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}}$$

(1) 当 Z 移除时计算 A

(1) 当 Z 短路时计算 A

(2) 当响应为零时计算 Z_n

(2) 当响应为零时计算 Z_n

(3) 当激励为零时计算 Z_d

(3) 当激励为零时计算 Z_d

如果 Z 为电容 C 或电感 L,则

R_n : 激励作用下输出响应为零时 C 或 L 端口的电阻

R_d : 激励为零时 C 或 L 端口的电阻

当直流增益 H_0 存在时:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{sC} & H(s) &= H_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z1}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p1}}} & Z &= sL \\ \tau_1 &= R_n C & & & \tau_1 &= \frac{L}{R_n} \\ \tau_2 &= R_d C & & & \tau_2 &= \frac{L}{R_d} \end{aligned}$$

如果增益存在,当 $s=\infty$ 时有:

$$H(s) = H_\infty \frac{1 + \frac{1}{s\tau_1}}{1 + \frac{1}{s\tau_2}} = H_\infty \frac{1 + \frac{\omega_{z1}}{s}}{1 + \frac{\omega_{p1}}{s}}$$

图 3.76 EET 及 1 阶传递函数总结

广义 1 阶传递函数

A : 激励与响应之间的传递函数

A_0 : 对电路进行直流分析时($s=0$)的传递函数

A^1 : 当频率无限大时($s\rightarrow\infty$)电路的传递函数

τ_1 : 与储能元件相关联的时间常数

$$A(s) = \frac{A_0 + A^1 s \tau_1}{1 + s \tau_1} \quad A^1 \text{ 中右上角标 } 1 \text{ 与高频状态 } \tau_1 \text{ 相关}$$

- (1) 当 C 或 L 移除时计算 A_0
- (2) 激励为零时计算储能元件端口的电阻
- (3) 计算时间常数 $\tau_1 = RC$ 或 $\tau_1 = L/R$
- (4) 当电容 C 短路或电感 L 移除时计算传递函数 A_1
- (5) 如果存在 A_0 (不同于 0), 在传递函数的分子中提取因式 A_0

$$A(s) = A_0 \frac{1 + \frac{A^1}{A_0} s \tau_1}{1 + s \tau_1} \quad A_0 \text{ 对应储能元件工作于直流状态}$$

图 3.77 广义 1 阶传递函数总结

3.6 附录 3A——习题

3.6.1 习题内容

1. 习题 1

如图 3.78 所示, 计算电路网络的输出阻抗。

2. 习题 2

如图 3.79 所示, 计算电路网络的输出导纳。

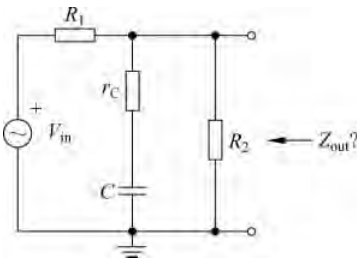


图 3.78 习题 1 图

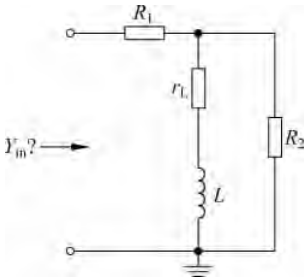


图 3.79 习题 2 图

3. 习题 3

如图 3.80 所示, 计算电路网络的输入阻抗。

4. 习题 4

如图 3.81 所示, 利用无 NDI 的 1 阶广义传递函数计算电路网络的输入阻抗, 并与利用 NDI 获得的计算结果进行对比。

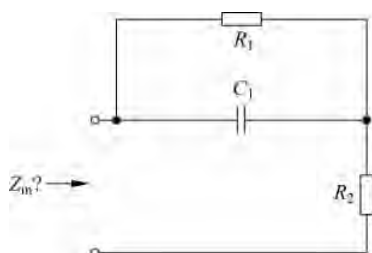


图 3.80 习题 3 图

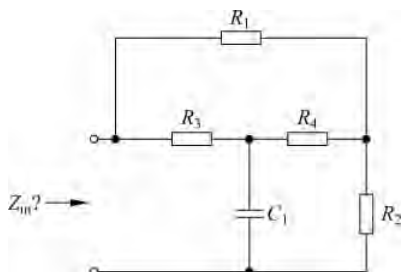


图 3.81 习题 4 图

5. 习题 5

如图 3.82 所示, 计算电路网络的输出阻抗。

6. 习题 6

如图 3.83 所示, 计算电路网络的传递函数。

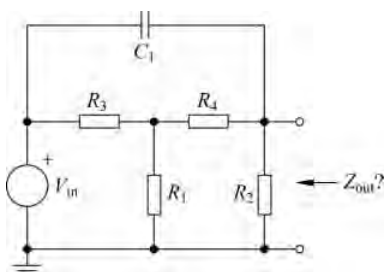


图 3.82 习题 5 图

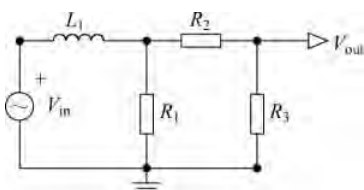


图 3.83 习题 6 图

7. 习题 7

如图 3.84 所示, 计算运算放大器开环增益无穷大时电路的传递函数。

8. 习题 8

如图 3.85 所示, 计算电路网络的输出阻抗。

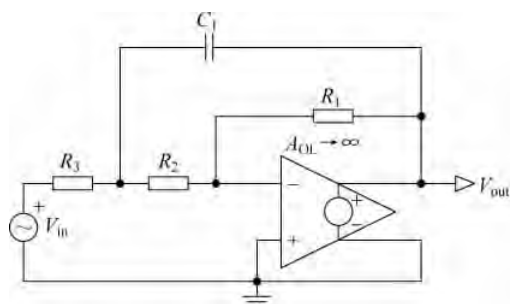


图 3.84 习题 7 图

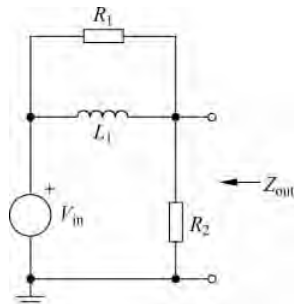


图 3.85 习题 8 图

9. 习题 9

如图 3.86 所示, 计算电路的传递函数。

10. 习题 10

如图 3.87 所示, 计算电路的传递函数。

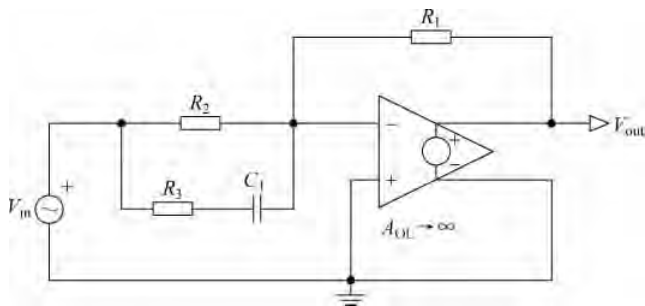


图 3.86 习题 9 图

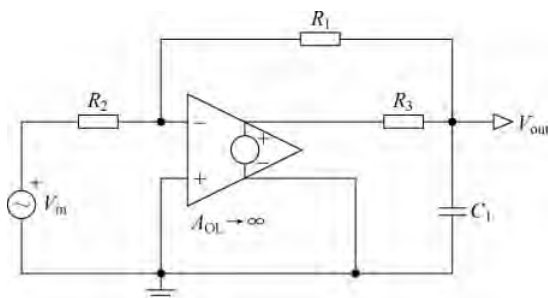
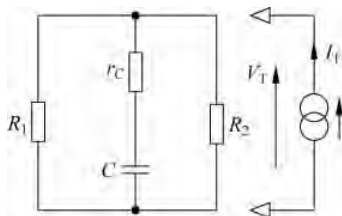


图 3.87 习题 10 图

3.6.2 习题答案

1. 习题 1

将电路网络重新整理为图 3.88 所示,其中电流源 I_T 为驱动信号,电压 V_T 为响应信号。该电路包含一个储能元件,所以为 1 阶系统。那么电路是否含有零点呢? 如果电容 C 的容值无穷大或者短路,输出电压 V_T 是否依然存在? 答案是肯定的,因为存在与电容 C 相关联的零点。电路传递函数形式如下:

图 3.88 激励信号为 I_T , 响应为 V_T

当电容 C 从电路移除时直流电阻 R_0 为:

$$Z_{out}(s) = R_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} \quad (3.218)$$

$$R_0 = R_2 \parallel R_1 \quad (3.219)$$

在图 3.88 中,当利用 I_T 驱动电路时,阻抗如何变化才能使得响应电压 V_T 为零? 如果电阻 R_2 两端短路,则响应为零。当角频率为 s_z 时,电容 C 与 r_C 构成的串联阻抗为零,此时 R_2 两端短路,即:

$$r_C + \frac{1}{sC} = \frac{1 + sr_C C}{sC} = 0 \quad (3.220)$$

解得

$$s_z = -\frac{1}{r_C C} \quad (3.221)$$

或

$$\omega_z = \frac{1}{r_c C} \quad (3.222)$$

如图 3.89 所示,当输出为零时计算电路等效阻抗。由于电流源两端电压为零与电源短路相似,所以电阻 r_c 上端接地。因此电容两端电阻为 r_c ,零点时间常数简化为:

$$\tau_1 = r_c C \quad (3.223)$$

当激励源设置为零时计算电路时间常数。由于电路中包含电流源,将其设置为零等效为开路,此时电路如图 3.90 所示,电容两端电阻简化为:

$$R = r_c + R_1 \parallel R_2 \quad (3.224)$$

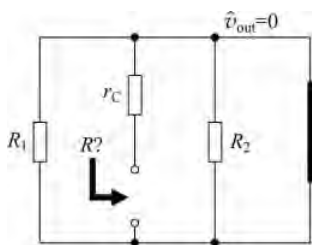


图 3.89 电流源两端电压为零等效为电源短路

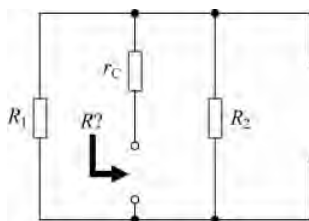


图 3.90 激励源设置为零等效为移除电流源

时间常数 τ_2 计算公式为:

$$\tau_2 = (r_c + R_1 \parallel R_2) C \quad (3.225)$$

输出阻抗表达式为:

$$Z_{out}(s) = R_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.226)$$

其中

$$R_0 = R_2 \parallel R_1 \quad (3.227)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r_c C} \quad (3.228)$$

$$\omega_p = \frac{1}{(r_c + R_1 \parallel R_2) C} \quad (3.229)$$

2. 习题 2

采用图 3.91 所示的电压源驱动电路网络,通过测试响应电流计算输入导纳,求解导纳表达式的方法有许多种。首先利用 EET 计算导纳,短路电感,具体公式如下:

$$Y|_{L=0} = \frac{1}{R_1 + r_L \parallel R_2} \quad (3.230)$$

当响应为零时,计算电感 L 的驱动电阻 R_n ,即电流 I_T 为零 0 时电感两端的电阻值。电路如图 3.92 所示,此时电阻 R_1 与电路断开,所以 R_n 的计算公式为。

$$R_n = r_L + R_2 \quad (3.231)$$

不利用 NDI 技术也能求得零点值。如果当角频率为 s_k (零点) 时电流为 0,则阻抗定义为:

$$Z = R_1 + (r_L + s_k L) \parallel R_2 \quad (3.232)$$

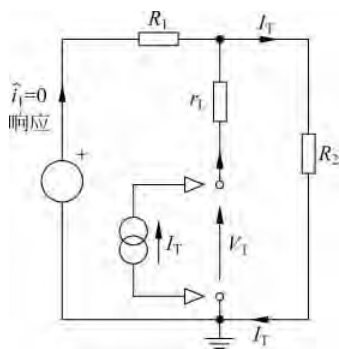
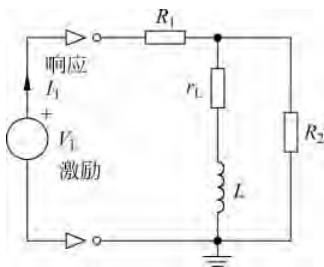


图 3.91 利用电压源驱动电路网络计算导纳 图 3.92 响应电流 i_1 为零：电流 I_T 全部通过 r_L 和 R_2

因为式(3.232)的阻抗无穷大,所以:

$$s_k L + r_L + R_2 = 0 \quad (3.233)$$

解得

$$s_k = -\frac{r_L + R_2}{L} \quad (3.234)$$

当激励源设置为 0V 时计算电感的时间常数值。如图 3.93 所示,电压源已经短路,可立即得到电阻 R_d 的计算公式:

$$R_d = r_L + R_1 \parallel R_2 \quad (3.235)$$

按照公式(3.55)将传递函数整理如下:

$$Y|_Z = Y|_{Z=0} \frac{1 + \frac{sL}{R_n}}{1 + \frac{sL}{R_d}} = \frac{1}{R_1 + r_L \parallel R_2} \frac{1 + s \frac{L}{r_L + R_2}}{1 + s \frac{L}{r_L + R_1 \parallel R_2}} \quad (3.236)$$

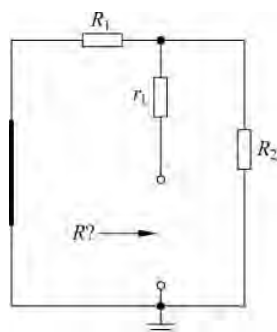


图 3.93 设计激励源为零,即短路电压源

式(3.236)与如下形式相符:

$$Y(s) = Y_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.237)$$

其中

$$Y_0 = \frac{1}{R_1 + r_L \parallel R_2} \quad (3.238)$$

$$\omega_z = \frac{r_L + R_2}{L} \quad (3.239)$$

$$\omega_p = \frac{r_L + R_1 \parallel R_2}{L} \quad (3.240)$$

利用数学软件 Mathcad 和电路仿真软件 SPICE 对计算数据进行验证,分别如图 3.94 和图 3.95 所示,两软件输出结果完全一致。

$$R_1 := 1\text{k}\Omega \quad R_2 := 3\text{k}\Omega \quad r_L := 22\Omega \quad L := 1\text{H} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

④

$$Y_0 := \frac{1}{R_1 + r_L \parallel R_2} = 9.786 \times 10^{-4} \text{ S} \quad 20 \cdot \log\left(\frac{Y_0}{\text{S}}\right) = -60.188$$

$$R_n := r_L + R_2 = 3.022\text{k}\Omega \quad R_d := r_L + R_1 \parallel R_2 = 772\Omega$$

$$\omega_p := \frac{R_d}{L} = 772 \frac{1}{\text{s}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 122.868 \text{ Hz} \quad \omega_z := \frac{R_n}{L} = 3.022 \times 10^3 \frac{1}{\text{s}} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 480.966 \text{ Hz}$$

$$Y(s) := Y_0 \cdot \frac{1 + \frac{s \cdot L}{R_n}}{1 + \frac{s \cdot L}{R_d}}$$

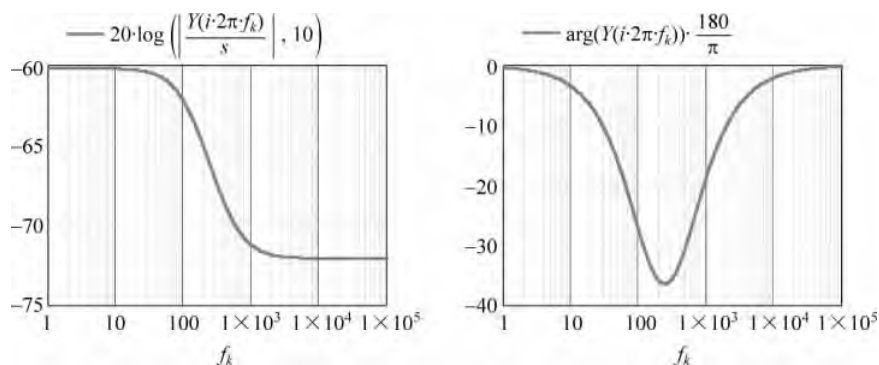


图 3.94 利用 Mathcad 快速绘制导纳的幅频和相频曲线

3. 习题 3

如图 3.96 所示,计算输入阻抗时利用电流源对电路网络连接端口进行驱动。那么该传递函数中是否存在零点呢?将电容 C_1 短路,测试电流源两端是否依然存在电压?由图 3.96 可得电压依然存在,所有该电路具有与 C_1 相关联的零点。

电路传递函数形式如下:

$$Z_{\text{in}}(s) = R_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} \quad (3.241)$$

当电容 C_1 移除时可直接得到端口的直流电阻 R_0 :

$$R_0 = R_1 + R_2 \quad (3.242)$$

当响应为零时,通过计算电容端口电阻求得第一时间常数 τ_1 ,具体电路如图 3.97 所示。因为电流源电压为零等效为短路,所以响应为零($V_T=0$)即 R_1 左端电压为 0V。

于是:

$$I_T = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 \quad (3.243)$$

当输出电压为零时 V_T 与电阻 R_1 和 R_2 连接,所以:

$$\hat{i}_1 = \frac{V_T}{R_2} \quad (3.244)$$

$$\hat{i}_2 = \frac{V_T}{R_1} \quad (3.245)$$

将式(3.244)和式(3.245)代入式(3.243)中得:

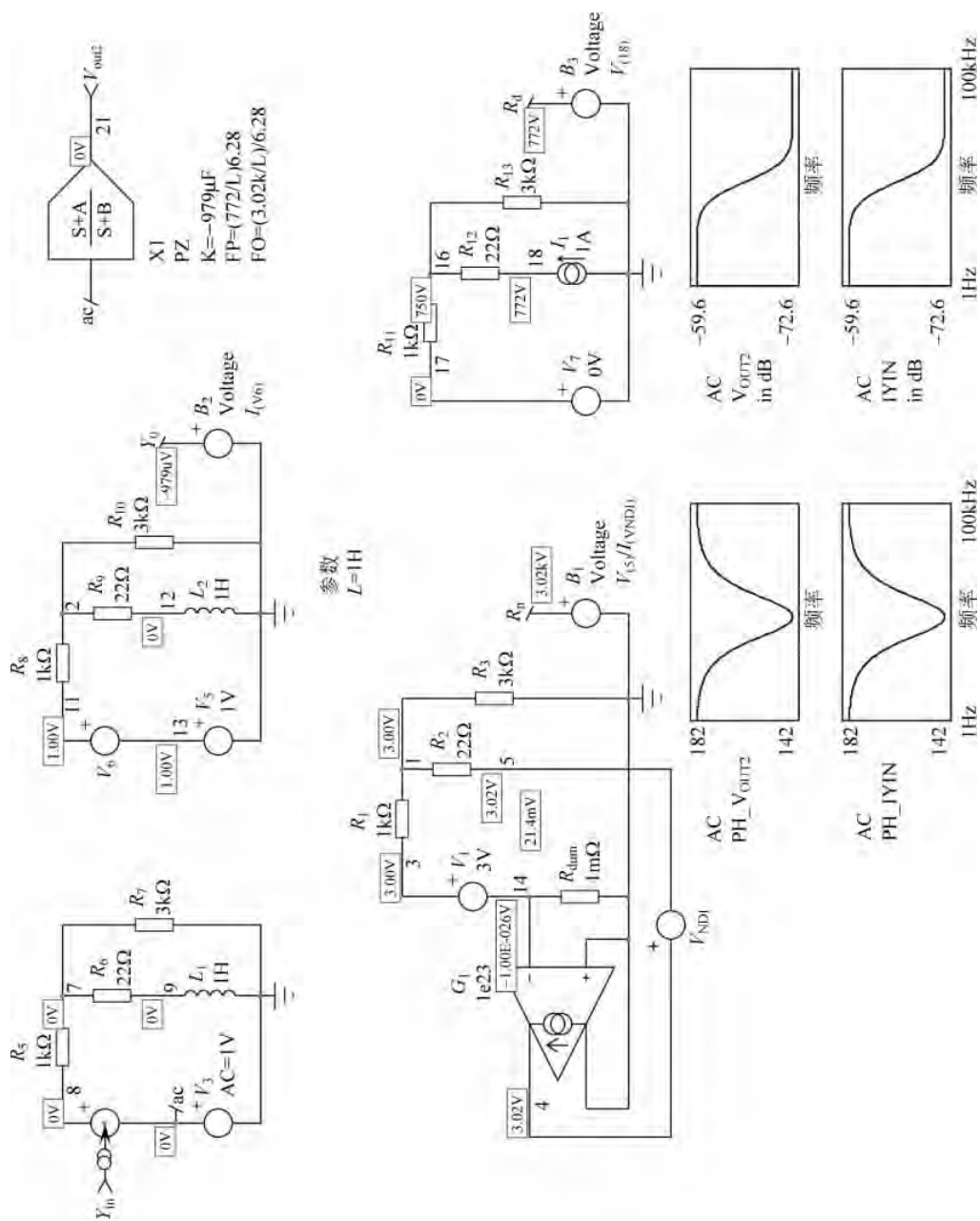


图 3.95 SPICE 仿真结果与计算结果一致,并且交流响应波形与 Mathcad 匹配

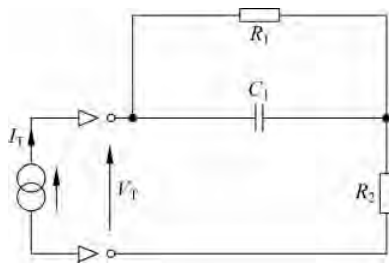


图 3.96 利用电流源对网络阻抗进行驱动，输出响应为端口电压

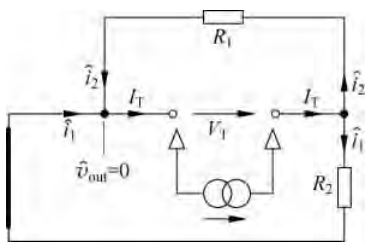


图 3.97 输出电压为零表明第一个电流源两端电压为 0V

$$I_T = V_T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.246)$$

重新整理得：

$$R_n = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = R_1 \parallel R_2 \quad (3.247)$$

不必通过 KCL 计算，从图 3.97 可直接得出 R_1 左端接地，电阻 R_1 和 R_2 并联。SPICE 仿真电路如图 3.98 所示， $10\text{k}\Omega$ 和 $1\text{k}\Omega$ 电阻的并联值由 B_1 计算并显示，具体值为 909Ω 。本例将电流源 I_1 任意设置为 1A ，也可以设置为其他任何值，但 B_1 的计算结果将仍然相同。

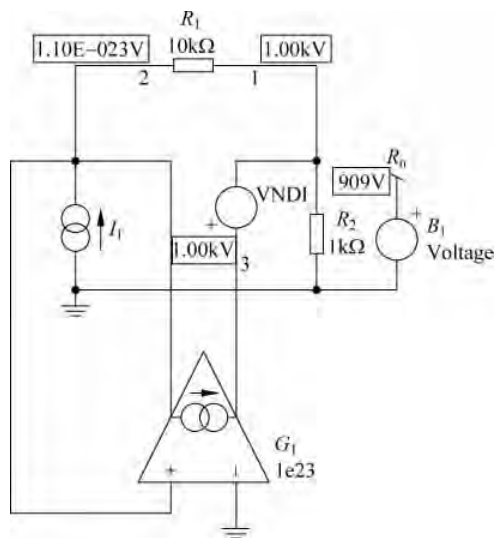


图 3.98 利用 SPICE 验证 R_1 和 R_2 并联

于是时间常数 τ_1 的定义式为：

$$\tau_1 = C_1 (R_1 \parallel R_2) \quad (3.248)$$

第二时间常数：将激励源设置为 0——电流源从电路中移除——直接可得电容两端电阻。由于 R_2 从电路中断开，所以电容两端电阻即为 R_1 ，于是第二时间常数计算公式为：

$$\tau_2 = R_1 C_1 \quad (3.249)$$

根据式(3.241)整理得最终传递函数：

$$Z_{in}(s) = (R_1 + R_2) \frac{1 + sC_1(R_1 \parallel R_2)}{1 + sR_1C_1} = R_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.250)$$

其中

$$R_0 = R_1 + R_2 \quad (3.251)$$

$$\omega_z = \frac{1}{(R_1 \parallel R_2)C_1} \quad (3.252)$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_1C_1} \quad (3.253)$$

交流响应曲线如图 3.99 所示。

$$R_1 := 10\text{k}\Omega \quad R_2 := 1\text{k}\Omega \quad C_1 := 100\text{nF} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

□

$$R_0 := R_1 + R_2 = 11\text{k}\Omega \quad 20 \cdot \log\left(\frac{R_0}{\Omega}\right) = 80.828\text{dB}\Omega\text{m}$$

$$R_n := R_1 \parallel R_2 = 909.091\Omega \quad R_d := R_1 = 10\text{k}\Omega$$

$$\omega_p := \frac{1}{R_d \cdot C_1} = 1 \times 10^3 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 159.155\text{Hz} \quad \omega_z := \frac{1}{R_n \cdot C_1} = 1.1 \times 10^4 \frac{1}{s} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 1.751 \times 10^3\text{Hz}$$

$$Z(s) := R_0 \cdot \frac{1 + s \cdot C_1 \cdot R_n}{1 + s \cdot C_1 \cdot R_d}$$

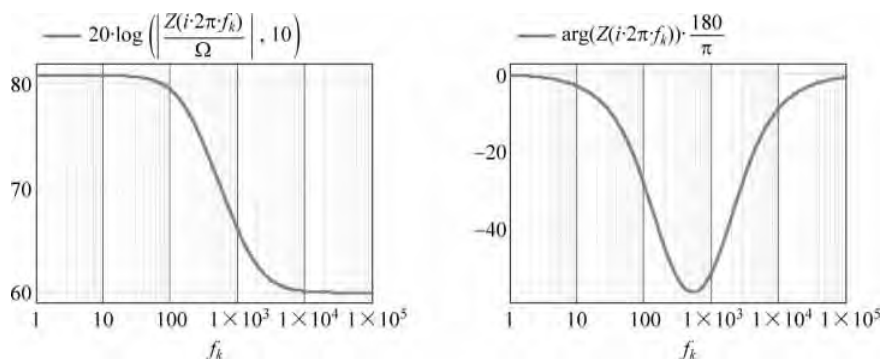


图 3.99 通过交流响应曲线对式(3.250)中的极点和零点进行验证

4. 习题 4

如图 3.100 所示,计算输入阻抗时利用电流源对电路网络连接端口进行驱动。那么该传递函数中是否存在零点呢?将电容 C_1 短路,测试电流源两端是否依然存在电压?由图 3.100 可得电压依然存在,所有该电路具有与 C_1 相关联的零点。接下来首先计算电容 C_1 移除时电路的直流输入电阻,具体电路如图 3.101 所示。

在图 3.101 所示电路中,电阻 R_1 与 R_3 、 R_4 之和并联,然后再与电阻 R_2 串联构成电阻 R_0 :

$$R_0 = R_1 \parallel (R_3 + R_4) + R_2 \quad (3.254)$$

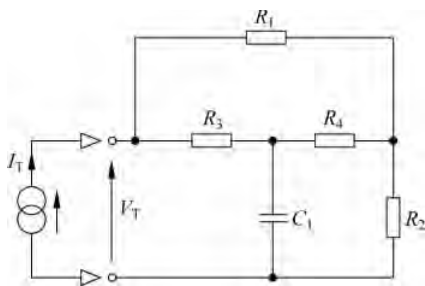


图 3.100 计算输入阻抗时采用电流源作为驱动信号、端口电压作为输出响应

在图 3.102 所示电路中,首先将电流源设置为 0A,然后计算电容端口的电阻值,进而求得电路的时间常数值。通过分析得,电阻 R_3 和 R_1 串联之后再与 R_4 并联,最后再和 R_2 串联,则 R_d 为:

$$R_d = (R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2 \quad (3.255)$$

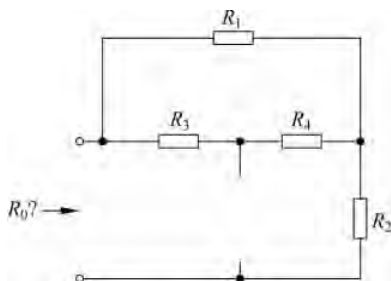


图 3.101 计算直流电阻电路图

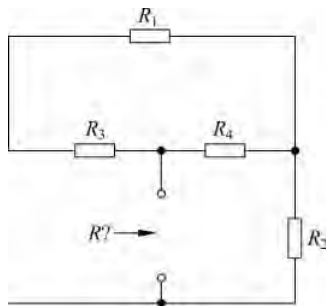


图 3.102 当电容移除并且激励电流源设置为 0 时的时间常数计算电路

因此时间常数 τ_2 为:

$$\tau_2 = [(R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2] C_1 \quad (3.256)$$

为得到传递函数的分子表达式,将 C_1 设置为无穷大或者短路,具体如图 3.103(a) 所示。为了快速得到阻抗值,特将电路图简化为图 3.103(b) 所示,此时阻抗计算公式为:

$$R_1 = R_3 \parallel (R_1 + R_4 \parallel R_2) \quad (3.257)$$

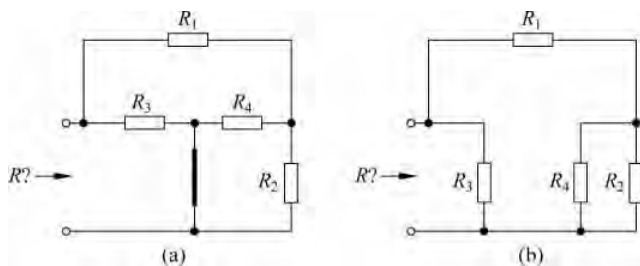


图 3.103 当电容 C_1 无穷大时,电阻 R_3 和 R_4 中点与输入地端短路

最终输入阻抗计算公式为:

$$\begin{aligned} Z_{in}(s) &= R_0 \frac{1 + s \frac{R_1}{R_0} \tau_2}{1 + s \tau_2} \\ &= (R_1 \parallel (R_3 + R_4) + R_2) \frac{1 + s \frac{R_3 \parallel (R_1 + R_4 \parallel R_2)}{R_1 \parallel (R_3 + R_4) + R_2} [(R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2] C_1}{1 + s [(R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2] C_1} \end{aligned} \quad (3.258)$$

将式(3.258)简化为:

$$Z_{in}(s) = R_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.259)$$

其中

$$R_0 = R_1 \parallel (R_3 + R_4) + R_2 \quad (3.260)$$

零点计算公式为:

$$\omega_z = \frac{R_0}{\tau_2 R^1} = \frac{R_1 \parallel (R_3 + R_4) + R_2}{[R_3 \parallel (R_1 + R_4 \parallel R_2)][(R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2]C_1} \quad (3.261)$$

最终极点计算公式为

$$\omega_p = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{[(R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2]C_1} \quad (3.262)$$

通过上述计算可得,未采用 NDI 技术得到的传递函数零点表达式非常复杂。如果需要表达式进一步简化,可通过 NDI 技术实现。因为响应为零时意味着电流源短路,所以相对于其他应用而言,NDI 更适用于阻抗计算,更新之后的电路如图 3.104(a)所示。为计算简便,特将电路进行重新绘制,具体如图 3.104(b)所示,于是可立即得到电阻 R_n 的计算公式为:

$$R_n = R_3 \parallel (R_4 + R_2 \parallel R_1) \quad (3.263)$$

则新的传递函数表达式为

$$\begin{aligned} Z_{in}(s) &= R_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} \\ &= (R_1 \parallel (R_3 + R_4) + R_2) \frac{1 + s[R_3 \parallel (R_4 + R_2 \parallel R_1)]C_1}{1 + s[(R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2]C_1} \\ &= R_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \end{aligned} \quad (3.264)$$

在式(3.260)和式(3.262)中 R_0 和 ω_p 的表达式相同,但零点表达式更加简单,即:

$$\omega_z = \frac{1}{[R_3 \parallel (R_4 + R_2 \parallel R_1)]C_1} \quad (3.265)$$

除了式(3.258)未采用 NDI 技术外,式(3.258)和式(3.264)在数学功能上完全相同。进行输入阻抗计算时,NDI 技术将电流源由短路线代替,比采用电压激励源计算输入阻抗更简单。利用数学软件 Mathcad 和电路仿真软件 SPICE 对数据进行验证,分别如图 3.105 和图 3.106 所示。最后,只有真正掌握其中差异,才能正确选择计算方法。

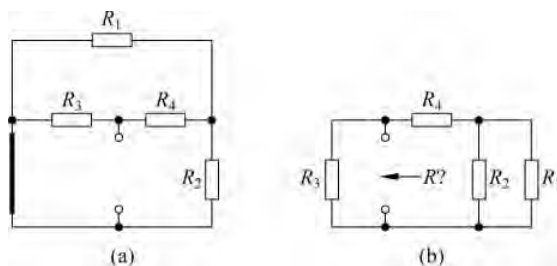


图 3.104 利用 NDI 技术对电流源驱动电路进行分析时,电流源端口由短路线代替

5. 习题 5

计算输出阻抗时利用电流源对电路网络输出端口进行驱动。仍然与前面分析实例一致, V_T 为输出响应, I_T 为激励电流。从图 3.107 所示电路实例中可立即得到电容 C_1 和电阻 R_3 左端接地。无须利用电路快速分析技术,可直接求得电路输出阻抗为:

$$Z_{out}(s) = R_2 \parallel \frac{1}{sC_1} \parallel (R_4 + R_1 \parallel R_3) \quad (3.266)$$

$$R_1 := 10\text{k}\Omega \quad R_2 := 1\text{k}\Omega \quad R_3 := 2.2\text{k}\Omega \quad R_4 := 3.3\text{k}\Omega \quad C_1 := 100\text{nF} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$R_0 := R_1 \parallel (R_3 + R_4) + R_2 = 4.548\text{k}\Omega \quad 20 \cdot \log\left(\frac{R_0}{\Omega}\right) = 73.157\text{dBohm}$$

$$R_{1\text{HF}} := R_3 \parallel (R_1 + R_4 \parallel R_2) = 1.827\text{k}\Omega \quad R_d := (R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2 = 3.597\text{k}\Omega \quad \frac{R_{1\text{HF}}}{R_0} \cdot R_d = 1.445 \times 10^3 \Omega$$

$$\tau_2 := C_1 \cdot R_d \quad R_n = R_3 \parallel (R_4 + R_2 \parallel R_1) = 1.445\text{k}\Omega \quad \tau_1 := R_n \cdot C_1$$

$$\omega_p := \frac{1}{\tau_2} = 2.78 \times 10^3 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 442.414\text{Hz} \quad \omega_z := \frac{R_0}{\tau_1 \cdot R_{1\text{HF}}} = 1.723 \times 10^4 \frac{1}{s} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 2.743\text{kHz}$$

$$Z_1(s) := R_0 \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_2 \cdot \frac{R_{1\text{HF}}}{R_0}}{1 + s \cdot \tau_2} \quad Z_2(s) := R_0 \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s}$$

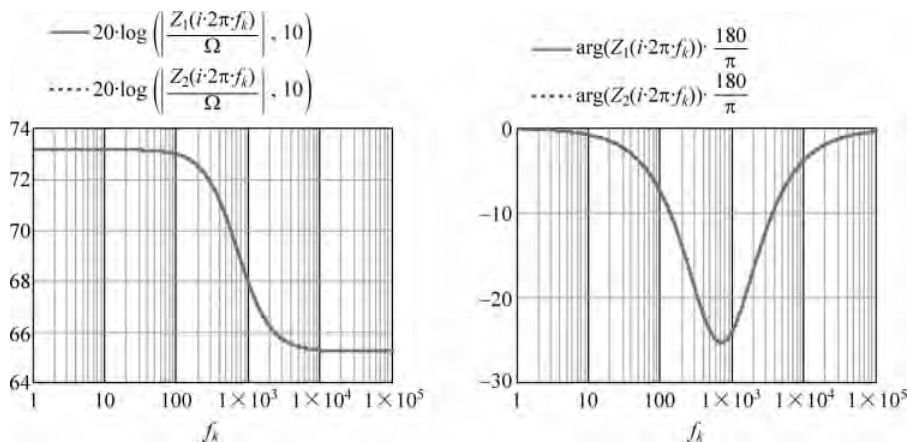


图 3.105 利用 Mathcad 绘制有无 NDI 时的频率特性曲线：结果完全一致

如果将式(3.266)展开,表达式将变得非常复杂,并且对电路特性分析无任何意义。如果需要得到传递函数的极点和零点值,需要继续对其进行计算。那么该传递函数中是否存在零点呢? 如果将电容 C_1 短路,响应电压 V_T 是否依然存在? 通过图 3.107 分析可得,电容 C_1 与电阻 R_2 并联,将 C_1 短路时输出响应为零,所以电路不存在零点,属于简单 1 阶传递函数,即:

$$Z_{\text{out}}(s) = R_0 \frac{1}{1 + s\tau_1} \quad (3.267)$$

如图 3.108 所示,当电容 C_1 移除时可快速求得电路的直流电阻。

直流电阻计算公式为:

$$R_0 = R_2 \parallel (R_4 + R_1 \parallel R_3) \quad (3.268)$$

计算时间常数时将激励电流源设置为零,即将其从电路中移除,具体电路如图 3.109 所示。此时电容左端接地,右端通过电阻 R_2 与 R_4 、 R_3 、 R_1 的串并联组合接地,所以:

$$R_d = R_2 \parallel (R_4 + R_3 \parallel R_1) \quad (3.269)$$

式(3.269)与式(3.268)相同,因此电路的时间常数为:

$$\tau_2 = C_1 [R_2 \parallel (R_4 + R_3 \parallel R_1)] \quad (3.270)$$

电路最终传递函数为:

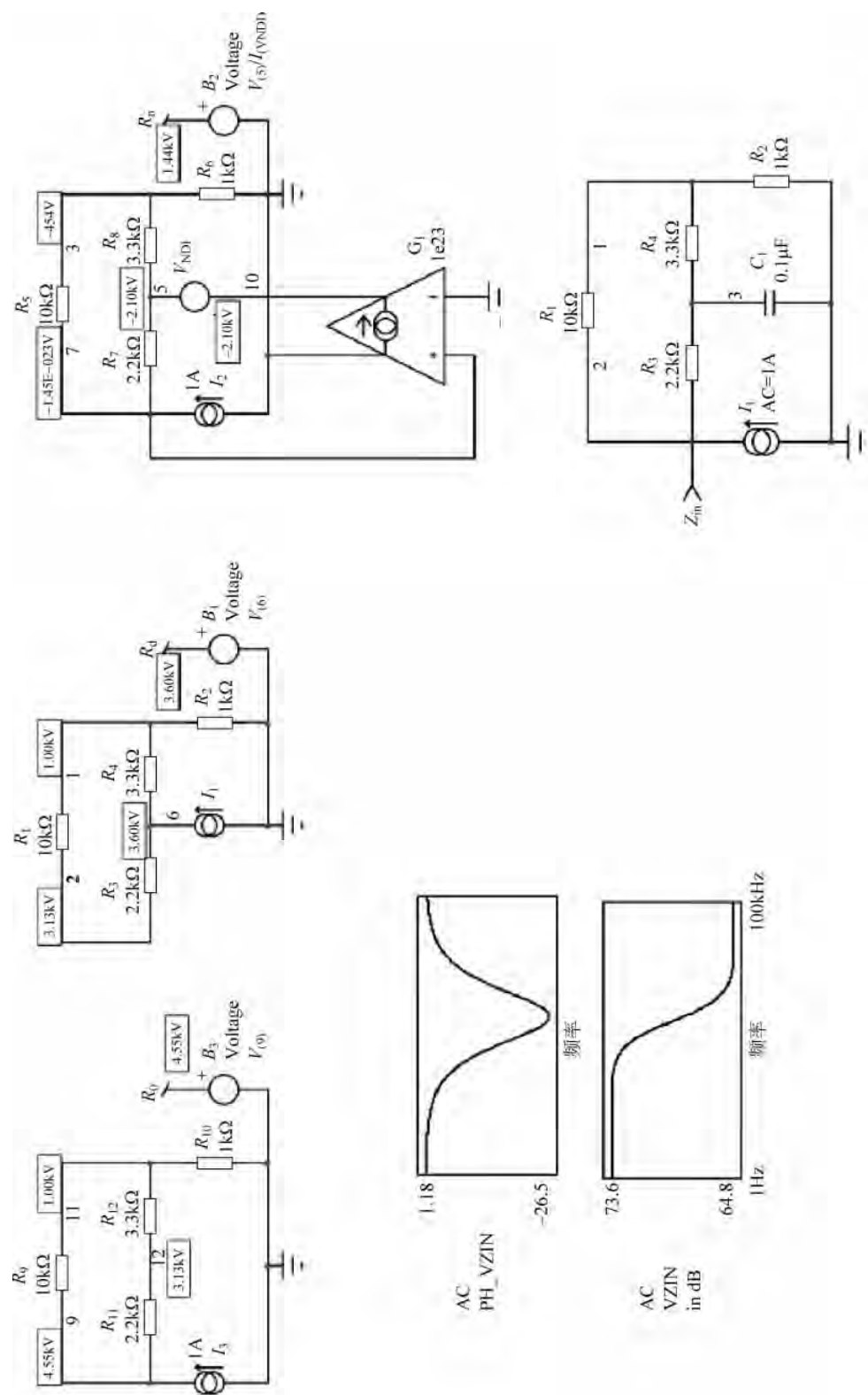


图 3.106 通过简单 SPICE 仿真程序验证计算结果的正确性

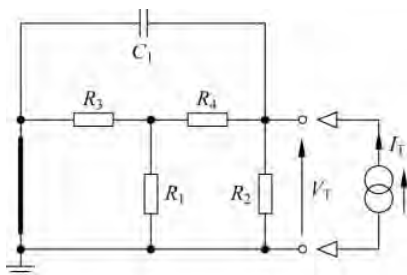


图 3.107 当直流输入源短路时利用电流源对输出端口进行扫描

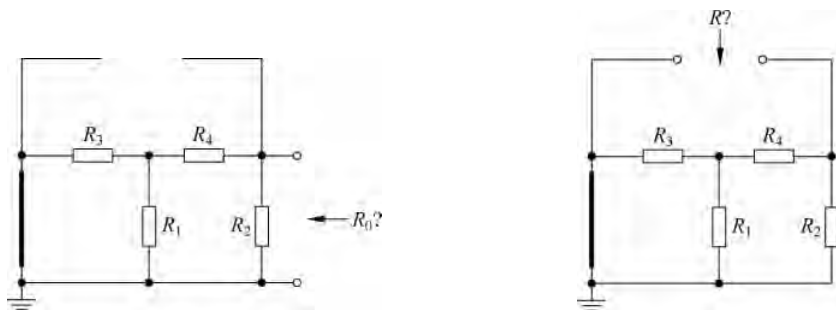
图 3.108 通过观察可直接求得该电路的直流电阻 R_0

图 3.109 求解电容端口电阻电路图

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{out}}(s) &= [R_2 \parallel (R_4 + R_1 \parallel R_3)] \frac{1}{1 + sC_1[R_2 \parallel (R_4 + R_3 \parallel R_1)]} \\
 &= R_0 \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}}
 \end{aligned} \tag{3.271}$$

其中

$$R_0 = R_2 \parallel (R_4 + R_1 \parallel R_3) \tag{3.272}$$

$$\omega_p = \frac{1}{C_1[R_2 \parallel (R_4 + R_3 \parallel R_1)]} \tag{3.273}$$

如图 3.110 所示,通过数学软件 Mathcad 验证,式(3.266)和式(3.271)频率特性曲线完全一致。

6. 习题 6

当电路中含有电感 L_1 时,首先将其参数值设置为无穷大,以判断传递函数中是否存在零点。此时电感 L_1 等效于从电路中移除,测试输出响应是否依然存在。通过分析可得输出响应为零,所以电路为 1 阶网络,传递函数遵循如下形式:

$$H(s) = H_0 \frac{1}{1 + s\tau_2} \tag{3.274}$$

当 L_1 短路时计算电路直流增益,具体如图 3.111 所示,此时电路通过 R_2 和 R_3 构成电阻分压器,即:

$$H_0 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \tag{3.275}$$

如图 3.112 所示,计算时间常数时将激励电压源设置为零,此时电感端口的电阻为:

$$R_d = R_1 \parallel (R_2 + R_3) \tag{3.276}$$

电路时间常数为:

$$R_1 := 10\text{k}\Omega \quad R_2 := 1\text{k}\Omega \quad R_3 := 2.2\text{k}\Omega \quad R_4 := 3.3\text{k}\Omega \quad C_1 := 1\mu\text{F} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

□

$$Z_{\text{out}}(s) := \left[R_2 \parallel \left(\frac{1}{s \cdot C_1} \right) \right] \parallel (R_4 + R_1 \parallel R_3)$$

$$R_0 := R_2 \parallel (R_4 + R_1 \parallel R_3) = 0.836\text{k}\Omega \quad 20 \cdot \log\left(\frac{R_0}{\Omega}\right) = 58.446\text{dB}$$

$$R_d := R_2 \parallel (R_4 + R_1 \parallel R_3) = 836.154\Omega \quad \tau_2 := C_1 \cdot R_d$$

$$\omega_p = \frac{1}{\tau_2} = 1.196 \times 10^3 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 190.342\text{Hz} \quad Z_{\text{out}2}(s) := R_0 \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_2}$$

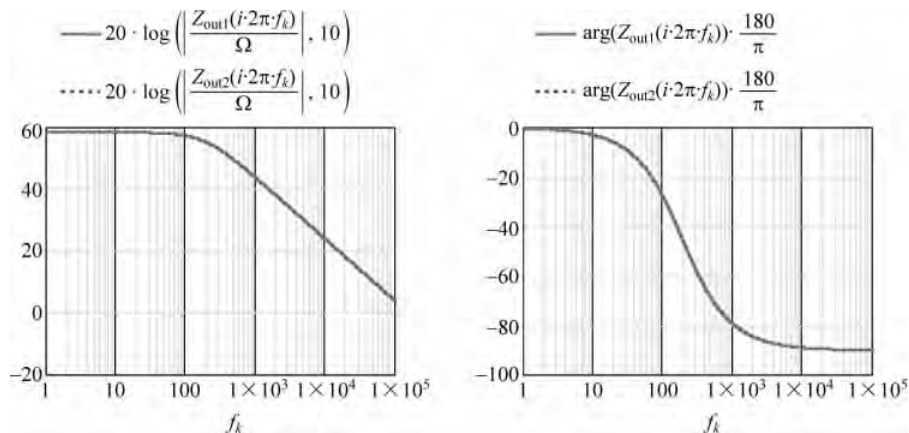


图 3.110 通过 Mathcad 验证表达式(3.266)和式(3.271)的频率特性曲线完全一致

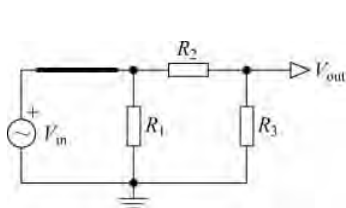


图 3.111 直流分析时电感短路,可直接求得传递函数 H_0

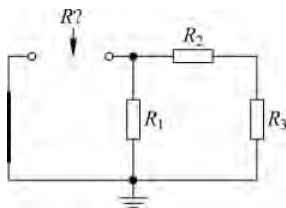


图 3.112 计算电感驱动电阻时将激励电压源设置为零

$$\tau_2 = \frac{L_1}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)} \quad (3.277)$$

最终传递函数为:

$$H(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{1}{1 + s \frac{L_1}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)}} = H_0 \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.278)$$

该表达式的直流增益为:

$$H_0 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (3.279)$$

极点为:

$$\omega_p = \frac{R_1 \parallel (R_2 + R_3)}{L_1} \quad (3.280)$$

图 3.113 为 Mathcad 计算程序,其输出响应为简单 1 阶低通滤波器。

$$R_1 := 1\text{k}\Omega \quad R_2 := 470\Omega \quad R_3 := 100\Omega \quad L_1 := 100\text{mH} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$H_0 := \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0.175 \quad 20 \cdot \log(H_0) = -15.117\text{dB}$$

$$R_d := R_1 \parallel (R_2 + R_3) = 363.057\Omega \quad \tau_2 := \frac{L_1}{R_d}$$

$$\omega_p := \frac{1}{\tau_2} = 3.631 \times 10^3 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 577.824\text{Hz} \quad H_1(s) := H_0 \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_2}$$

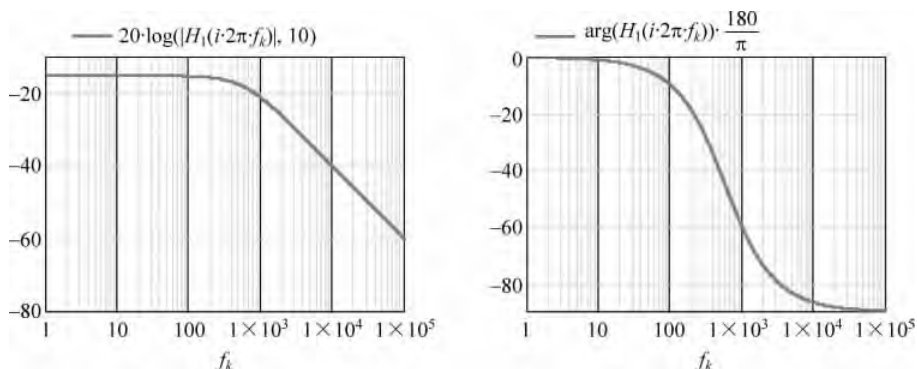


图 3.113 输出响应为简单低通滤波器

7. 习题 7

图 3.114 为运算放大器电路,包含一个储能元件,所以为 1 阶电路。与前面实例一样,首先判断电容 C_1 是否产生零点。利用短路线将电容 C_1 短路,测试输出电压是否依然存在。

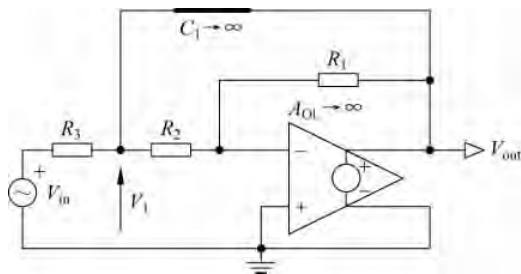


图 3.114 计算电路增益时利用短路线代替电容,以判断电路是否存在零点

当电容 C_1 未短路时,运算放大器实现缓冲作用,输出电压 V_{out} 与 V_1 的关系式为:

$$V_{out} = -\frac{R_1}{R_2} V_1 \quad (3.281)$$

当 C_1 短路时 V_1 与 V_{out} 一致,此时式(3.281)更新为:

$$V_{out} = -\frac{R_1}{R_2} V_{out} \quad (3.282)$$

只有当 $V_{out} = 0$ 时,式(3.282)才能成立: C_1 短路时输出响应为零,传递函数无零点。于是将电路传递函数定义如下:

$$G(s) = G_0 \frac{1}{1 + s\tau_2} \quad (3.283)$$

对电路进行直流分析时将电容移除,此时电路简化为图 3.115,电路增益为:

$$G_0 = -\frac{R_1}{R_2 + R_3} \quad (3.284)$$

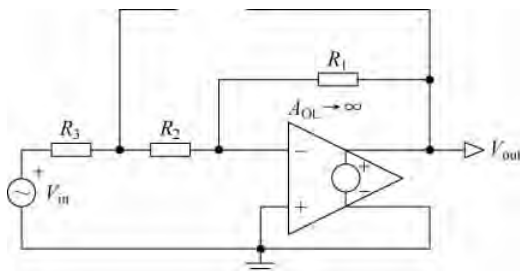


图 3.115 直流分析时电路简化为反相放大电路

计算电路时间常数时将电压源设置为 $0V$,通过电容端口计算电阻 R_d 。分析类似运算放大器等有源电路时,通过简单观察很难求得电阻值,但并非绝无可能。因此如往常一样,通过增加激励电流源测试电阻值,更新之后的电路如图 3.116 所示。

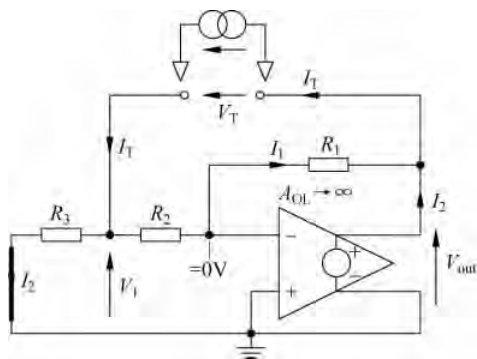


图 3.116 利用激励电流源计算电容端口的电阻值

由于运算放大器增益接近无穷大,因此图 3.116 中运放反相引脚的电压为 $0V$ 。电流 I_1 可通过电阻 R_2 两端电压或 R_1 两端电压 V_{out} 进行定义,具体如下:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_2} = -\frac{V_{out}}{R_1} \quad (3.285)$$

将电阻 R_3 两端电压标记为 V_1 ,因为电阻 R_2 和 R_3 并联,所以当电流 I_T 通过并联电阻时,电压 V_1 的计算公式为:

$$V_1 = I_T(R_2 \parallel R_3) \quad (3.286)$$

由式(2.285)和式(2.286)得:

$$I_1 = \frac{I_T(R_3 \parallel R_2)}{R_2} \quad (3.287)$$

输出电压表达式为:

$$V_{out} = -\frac{I_T(R_3 \parallel R_2)}{R_2} R_1 \quad (3.288)$$

电流源两端电压 $V_T = V_1 - V_{out}$, 所以:

$$V_T = I_T(R_2 \parallel R_3) + I_T \left[(R_2 \parallel R_3) \frac{R_1}{R_2} \right] \quad (3.289)$$

将式(3.289)重新整理并分解因式得:

$$R_d = \frac{V_T}{I_T} = (R_2 \parallel R_3) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \quad (3.290)$$

因此时间常数 τ_2 为:

$$\tau_2 = (R_2 \parallel R_3) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) C_1 \quad (3.291)$$

电路最终传输函数为:

$$G(s) = -\frac{R_1}{R_2 + R_3} \frac{1}{1 + s(R_2 \parallel R_3) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) C_1} = G_0 \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.292)$$

其中

$$G_0 = -\frac{R_1}{R_2 + R_3} \quad (3.293)$$

极点计算公式为:

$$\omega_p = \frac{1}{(R_2 \parallel R_3) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) C_1} \quad (3.294)$$

图 3.117 为 Mathcad 计算程序, 图 3.118 为 SPICE 仿真结果, 两者完全一致。

$$R_1 := 470 \text{ k}\Omega \quad R_2 := 150 \text{ k}\Omega \quad R_3 := 10 \text{ k}\Omega \quad C_1 := 0.1 \mu\text{F} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$G_0 := -\frac{R_1}{R_2 + R_3} = -2.9375 \quad 20 \cdot \log(|G_0|) = 9.35956 \text{ dB}$$

$$R_d := (R_2 \parallel R_3) \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = 38.75 \cdot \text{k}\Omega \quad \tau_2 := R_d \cdot C_1$$

$$\omega_p := \frac{1}{\tau_2} = 258.06452 \frac{1}{\text{s}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 41.07224 \text{ Hz} \quad G_1(s) := G_0 \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_2}$$

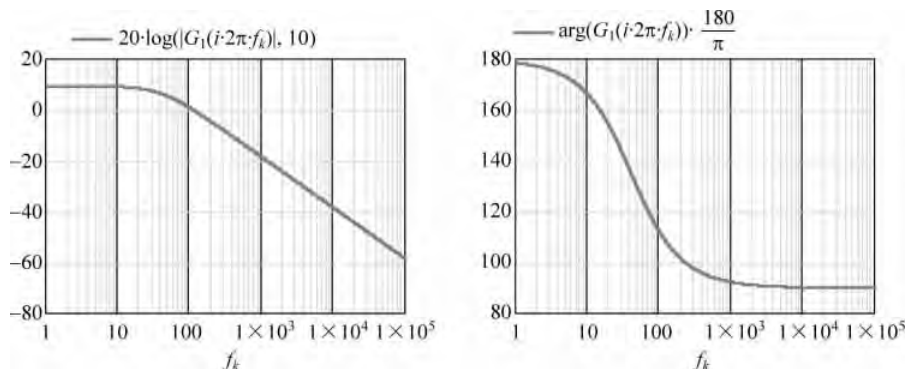


图 3.117 利用 Mathcad 快速求得答案, 并与 SPICE 仿真结果进行对比

8. 习题 8

计算输出阻抗时, 测试电流源按照图 3.119 所示进行连接。

首先进行零点确定: 当电感 L_1 无穷大(即从电路中移除)时, 采用电流源驱动电路以测

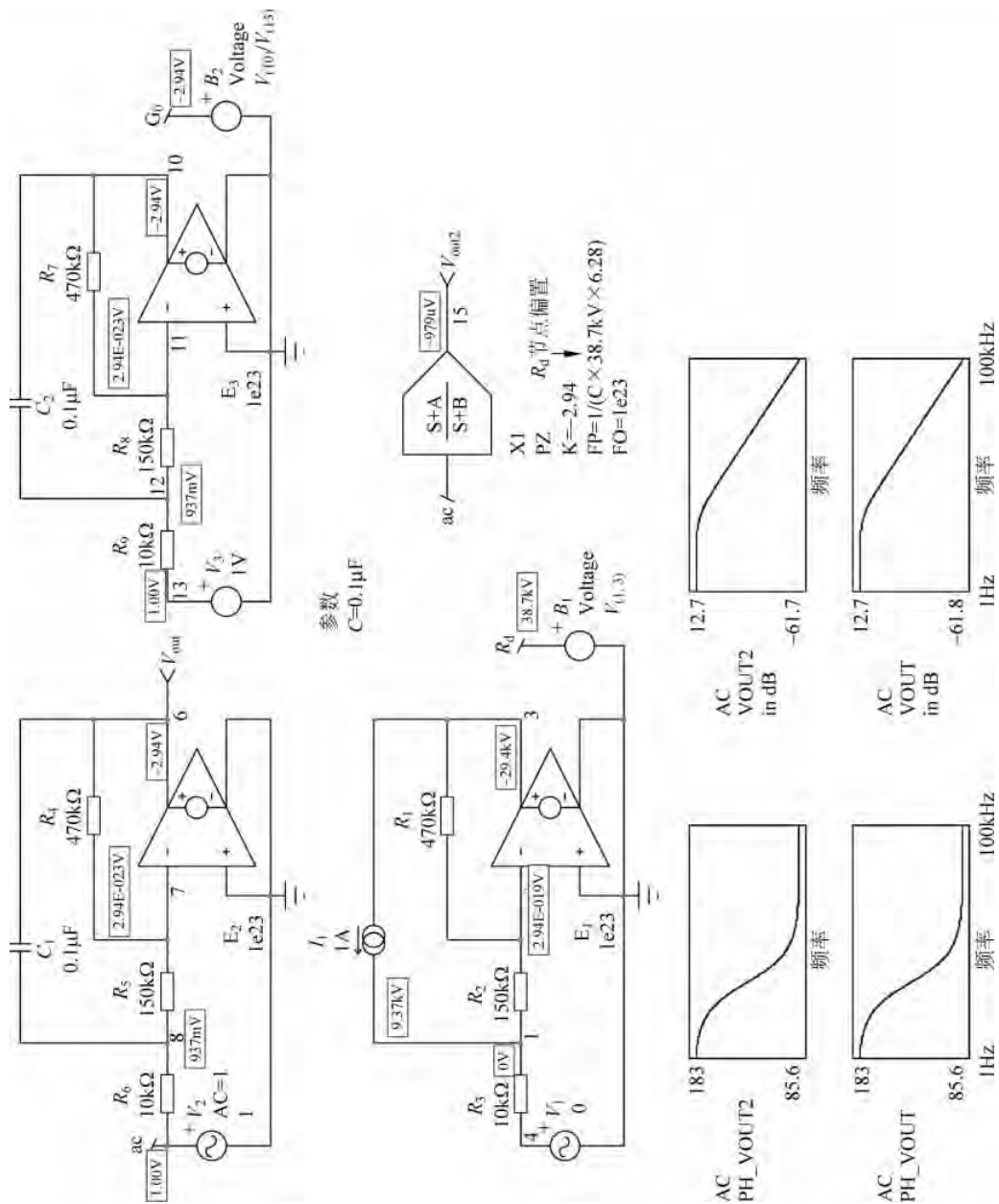


图 3.118 SPICE 仿真技术用于虚地有源电路

试输出响应是否依然存在。通过分析,输出响应依然存在,所以该电路含有与 L_1 相关联的零点,即传递函数表达式为:

$$Z_{\text{out}}(s) = R_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} \quad (3.295)$$

当 L_1 短路时计算直流电阻 R_0 得:

$$R_0 = 0 \quad (3.296)$$

当 $R_0=0$ 时式(3.295)始终为零,所以该阻抗计算表达式不适合于该电路。接下来利用图 3.76 中的阻抗表达式进行计算,即:

$$Z_{\text{out}}(s) = R_{\infty} \frac{1 + \frac{1}{s\tau_1}}{1 + \frac{1}{s\tau_2}} \quad (3.297)$$

此时电感 L_1 无穷大,电阻 R_1 与 R_2 并联,所以输出电阻为:

$$R_{\infty} = R_1 \parallel R_2 \quad (3.298)$$

当输出响应为零时计算第一时间常数 τ_1 。即利用电流源对电路进行激励,使其两端电压为零,具体如图 3.120 所示。无须计算,可直接求得连接端口电阻 $R_n=0$ 。因此时间常数 τ_1 无穷大,即:

$$\tau_1 = \frac{L_1}{0} \rightarrow \infty \quad (3.299)$$

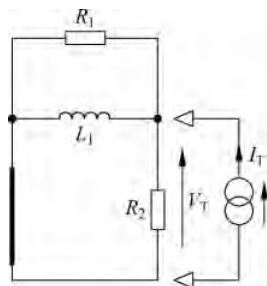


图 3.119 计算输出阻抗时采用电流源进行激励,端口电压为输出响应

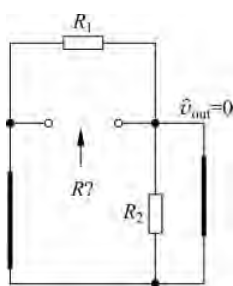


图 3.120 电感两端电阻为 0

计算电路第二时间常数 τ_2 时将电流源设置为 0A,然后求解电感两端的电阻值,具体电路如图 3.121 所示,则电阻 R_d 的计算公式为:

$$R_d = R_1 \parallel R_2 \quad (3.300)$$

时间常数 τ_2 为

$$\tau_2 = \frac{L_1}{R_1 \parallel R_2} \quad (3.301)$$

输出阻抗传递函数最终表达式为:

$$Z_{\text{out}}(s) = R_{\infty} \frac{1 + \frac{1}{s \cdot \infty}}{1 + \frac{1}{s\tau_2}} = R_{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{s\tau_2}} = R_{\infty} \frac{1}{1 + \frac{\omega_p}{s}} \quad (3.302)$$

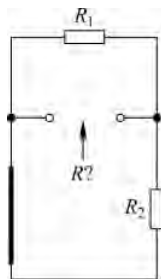


图 3.121 计算时间常数时将激励源设置为 0A

其中

$$R_{\infty} = R_1 \parallel R_2 \quad (3.303)$$

$$\omega_p = \frac{R_1 \parallel R_2}{L_1} \quad (3.304)$$

Mathcad 计算程序和输出结果如图 3.122 所示。应当注意式(3.302)为倒相极点,即每个极点都有原点处零点与之对应。

$$R_1 := 250\Omega \quad R_2 := 1\text{k}\Omega \quad L_1 := 500\text{mH} \quad \parallel(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

图

$$R_{\text{inf}} := R_1 \parallel R_2 = 200\Omega \quad 20 \cdot \log\left(\left|\frac{R_{\text{inf}}}{\Omega}\right|\right) = 46.0206\text{dB}$$

$$R_d := R_1 \parallel R_2 = 200\Omega \quad \tau_2 := \frac{L_1}{R_d}$$

$$\omega_p := \frac{1}{\tau_2} = 400 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 63.66198\text{Hz} \quad Z_1(s) := R_{\text{inf}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s \cdot \tau_2}}$$

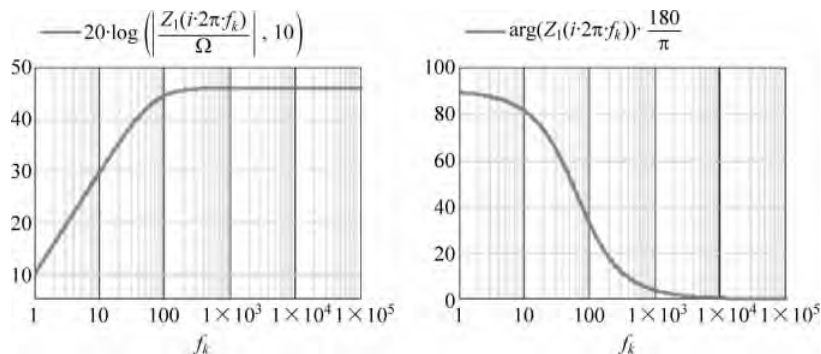


图 3.122 原点处零点和高频极点的频率特性曲线

9. 习题 9

该电路为 1 阶电路,电容 C_1 为储能元件。那么是否存在与 C_1 相关联的零点呢? 当 C_1 短路时输出响应 V_{out} 是否依然存在? 经过分析可得,确实存在与 C_1 相关联的零点,所以传递函数表达式为:

$$G(s) = G_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} \quad (3.305)$$

计算直流增益时将 C_1 从电路中移除,具体电路如图 3.123 所示。

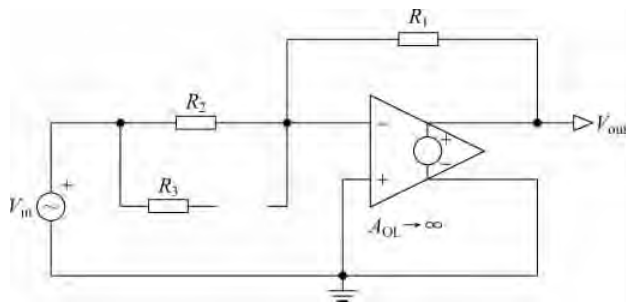


图 3.123 直流分析时 C_1 不起作用,1 阶电路简化为反相放大器

通过图 3.123 求得直流增益 G_0 为:

$$G_0 = -\frac{R_1}{R_2} \quad (3.306)$$

计算零点电阻 R_n 时,采用 NDI 技术并且利用电流源对电容端口进行激励,具体电路如图 3.124 所示。

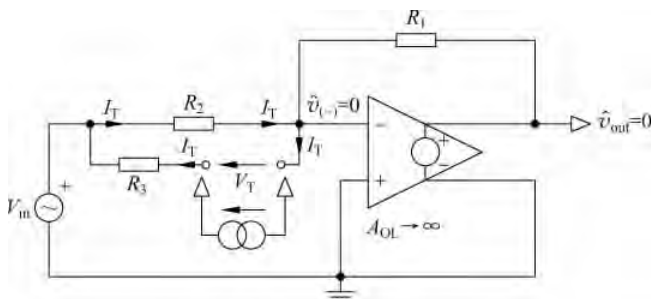


图 3.124 当输出响应为零时通过计算电容端口 R_n 电阻值求解电路零点

通过对电路进行仔细观察,不利用激励电流源,也可直接求出 R_n 电阻值。因为输出电压为零、运放反相引脚电压为零,所以电阻 R_1 中无电流流过。全部测试电流 I_T 均从 R_2 和 R_3 中通过,因此电阻 R_n 为:

$$R_n = R_2 + R_3 \quad (3.307)$$

时间常数 τ_1 表达式为:

$$\tau_1 = (R_2 + R_3)C_1 \quad (3.308)$$

计算电路时间常数 τ_2 时,将激励电压源设置为 0V,然后计算该模式下电容端口的电阻值。对于图 3.125 所示测试电路,可通过观察法直接求得 R_d 电阻值,也可利用测试电流源对电路进行激励,求解 R_d 。

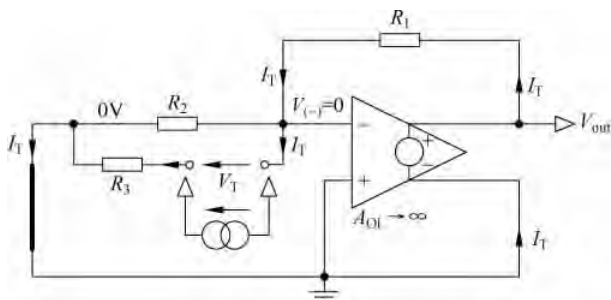


图 3.125 当激励电压源设置为 0V 时计算电路时间常数

由图 3.125 可得,电流源 I_T 左端通过激励电压源设置为 0V,然后通过 R_1 返回电流源右端。因为运放反相端电位为 0V(虚地),所以电流源两端唯一电阻为 R_3 ,因此:

$$R_d = R_3 \quad (3.309)$$

即

$$\tau_2 = R_3 C_1 \quad (3.310)$$

所以完整传递函数为:

$$G(s) = -\frac{R_1}{R_2} \frac{1 + s(R_2 + R_3)C_1}{1 + sR_3C_1} = G_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.311)$$

其中

$$G_0 = -\frac{R_1}{R_2} \quad (3.312)$$

$$\omega_z = \frac{1}{(R_2 + R_3)C_1} \quad (3.313)$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_3 C_1} \quad (3.314)$$

图 3.126 和图 3.127 分别为 Mathcad 计算程序和 SPICE 仿真测试电路,两者结果完全一致。如果最终数据有所不同,则计算方程存在差错。

$$R_1 := 100\text{k}\Omega \quad R_2 := 22\text{k}\Omega \quad R_3 := 2.2\text{k}\Omega \quad C_1 := 47\text{nF} \quad \parallel (x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$G_0 := -\frac{R_1}{R_2} = -4.54545 \quad 20 \cdot \log(|G_0|) = 13.15155\text{dB}$$

$$R_d := R_3 = 2.2\text{k}\Omega \quad \tau_2 := R_d \cdot C_1$$

$$R_n := R_2 + R_3 = 24.2\text{k}\Omega \quad \tau_1 := R_n \cdot C_1$$

$$\omega_p := \frac{1}{\tau_2} = 9.67118 \times 10^3 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 1.53922\text{kHz}$$

$$\omega_z := \frac{1}{\tau_1} = 879.19817 \frac{1}{s} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 139.92873\text{Hz}$$

$$G_1(s) := G_0 \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_2}$$

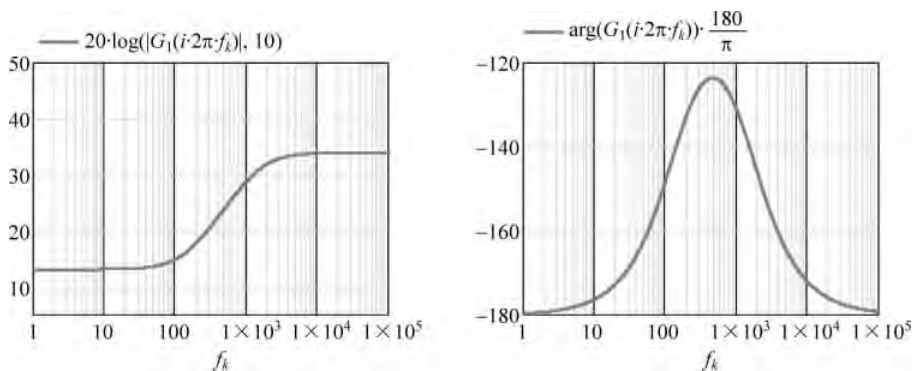


图 3.126 运放电路的 Mathcad 计算程序及响应曲线

10. 习题 10

该电路包含单一储能元件,因此为 1 阶电路网络。当 C_1 无穷大(短路)时输出响应为零(V_{out} 短路),因此该电路不存在零点,传递函数表达式为:

$$G(s) = G_0 \frac{1}{1 + s\tau_2} \quad (3.315)$$

计算直流增益时将电容 C_1 移除,具体电路如图 3.128 所示。假设该电路采用理想运算放大器,只有 I_1 为环路电流。运放反相引脚虚地,所以 I_1 计算公式为:

$$I_1 = \frac{V_{\text{in}}}{R_2} \quad (3.316)$$

以及

$$V_{\text{out}} = -I_1 R_1 \quad (3.317)$$

将式(3.316)和式(3.317)组合得:

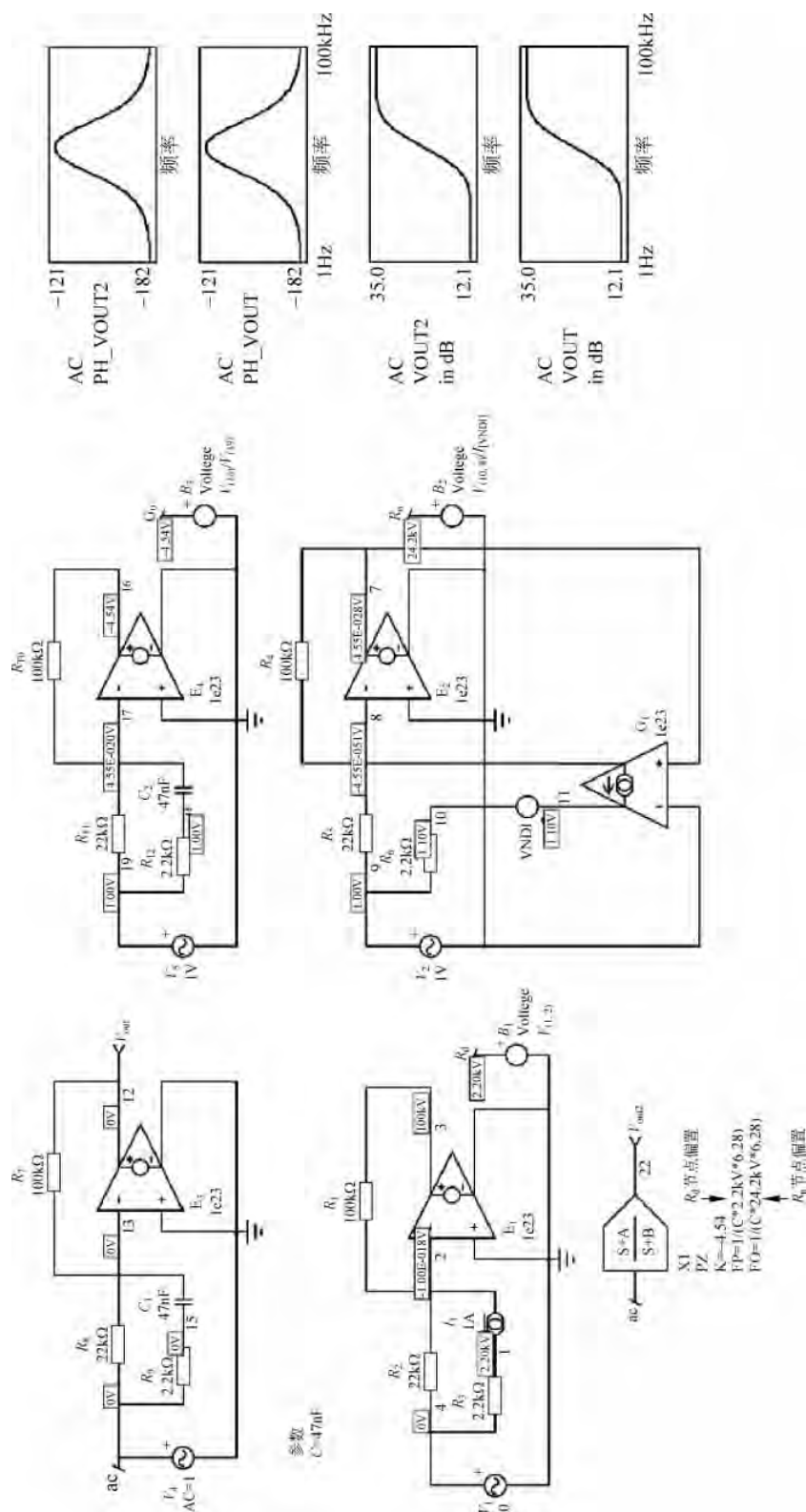
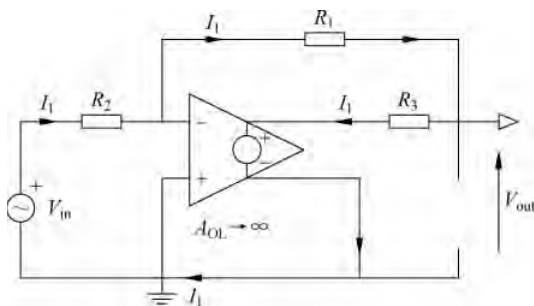


图 3.127 SPICE 仿真测试电路

图 3.128 尽管存在电阻 R_3 , 但反相放大器增益保持不变

$$G_0 = -\frac{R_1}{R_2} \quad (3.318)$$

由上述分析可得, 电阻 R_3 对直流增益不起作用。当电流 I_1 通过电阻 R_3 时, 运算放大器的工作点轻微改变。将激励电压源设置为 0V, 通过电容端口计算电路时间常数, 此时电路如图 3.129 所示。

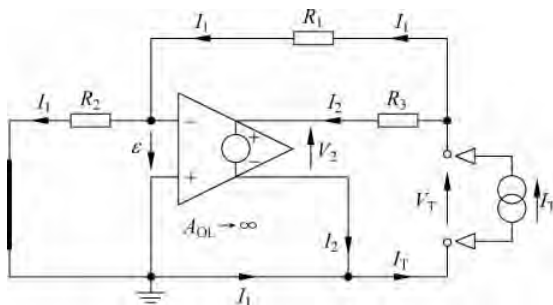


图 3.129 将激励电压源设置为 0V, 通过电容端口计算电路时间常数

首先由电流关系式可得:

$$I_T = I_1 + I_2 \quad (3.319)$$

假设运算放大器开环增益 A_{OL} 无穷大, 则误差电压 ϵ 为:

$$\epsilon = -I_1 R_2 \quad (3.320)$$

此时输出电压 V_2 的计算式为:

$$V_2 = A_{OL} \cdot \epsilon = -I_1 R_2 A_{OL} \quad (3.321)$$

流入电阻 R_3 的电流为:

$$I_2 = \frac{V_T - V_2}{R_3} = \frac{V_T + I_1 R_2 A_{OL}}{R_3} \quad (3.322)$$

电流 I_1 的定义式为:

$$I_1 = \frac{V_T + \epsilon}{R_1} \quad (3.323)$$

将式(3.323)代入式(3.320)整理得:

$$I_1 = \frac{V_T - I_1 R_2}{R_1} \quad (3.324)$$

将式(3.324)重新整理并提取因式 V_T 得:

$$I_1 = \frac{V_T}{R_1 + R_2} \quad (3.325)$$

从式(3.319)中提取 I_2 并且将其代入式(3.322)得:

$$I_T - I_1 = \frac{V_T + I_1 R_2 A_{OL}}{R_3} \quad (3.326)$$

利用定义式(3.325)代替 I_1 , 然后提取因式 I_T 和 V_T , 将式(3.326)整理为:

$$I_T R_3 = V_T \left(1 + \frac{R_2 A_{OL}}{R_1 + R_2} + \frac{R_3}{R_1 + R_2} \right) \quad (3.327)$$

阻抗 R_d 的计算为:

$$R_d = \frac{V_T}{I_T} = \frac{R_3}{1 + \frac{R_2 A_{OL}}{R_1 + R_2} + \frac{R_3}{R_1 + R_2}} \quad (3.328)$$

当运算放大器开环增益无穷大时 R_d 变为 0, 即:

$$R_d |_{A_{OL} \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.329)$$

此时时间常数 τ_2 也为 0, 所以式(3.315)中传递函数表达式简化为:

$$G(s) \approx -\frac{R_1}{R_2} \quad (3.330)$$

所以输出电容对电路无影响。图 3.130 为 Mathcad 程序及计算结果。当运放开环增益为 10 000 时电阻 R_d 为 260m Ω , 并且极点设置于高频: 交流响应在 6.1MHz 极点之前保持平坦。图 3.131 为利用 SPICE 软件进行偏置点计算, 所得阻抗值与 Mathcad 计算结果完全一致。最后在特定工作点对电路进行交流仿真分析, 所得极点为 6.1MHz, 具体如图 3.132 所示。

$$R_1 := 100\text{k}\Omega \quad R_2 := 22\text{k}\Omega \quad R_3 := 470\Omega \quad C_1 := 100\text{nF} \quad \parallel(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$A_{OL} := 10\,000$$

$$R_d := \frac{R_3}{1 + \frac{R_2 \cdot A_{OL}}{R_1 + R_2} + \frac{R_3}{R_1 + R_2}} = 0.26049\Omega \quad G_0 := \frac{R_1}{R_2} \quad 20 \cdot \log(|G_0|) = 13.15155\text{dB}$$

$$\tau_2 := R_d \cdot C_1 \quad \omega_p := \frac{1}{\tau_2} = 3.8389 \times 10^7 \frac{1}{s} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 6.1098\text{MHz} \quad G_1(s) := G_0 \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_2}$$

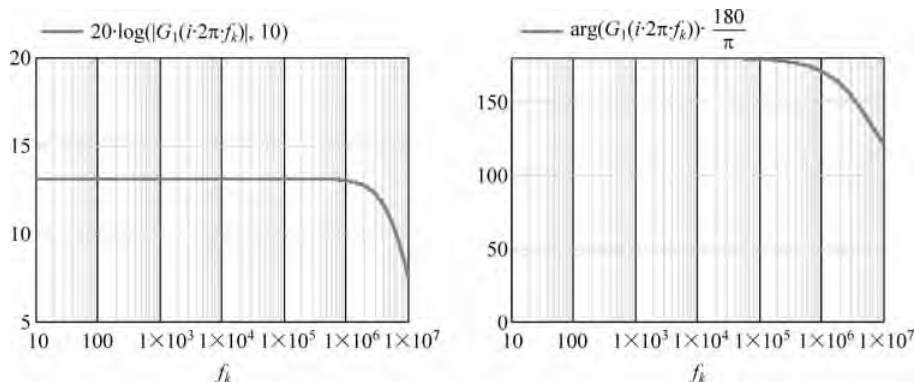


图 3.130 Mathcad 计算所得电容 C_1 驱动电阻值很小: 整个频率范围内响应平坦

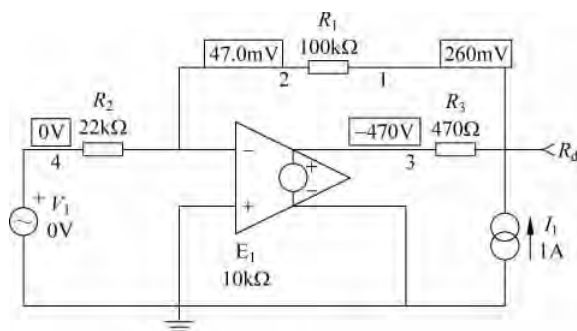


图 3.131 利用 SPICE 软件计算电阻 $R_d = 260\text{m}\Omega$ (由 1A 电流源对节点 1 进行驱动, 电压为 260mV)

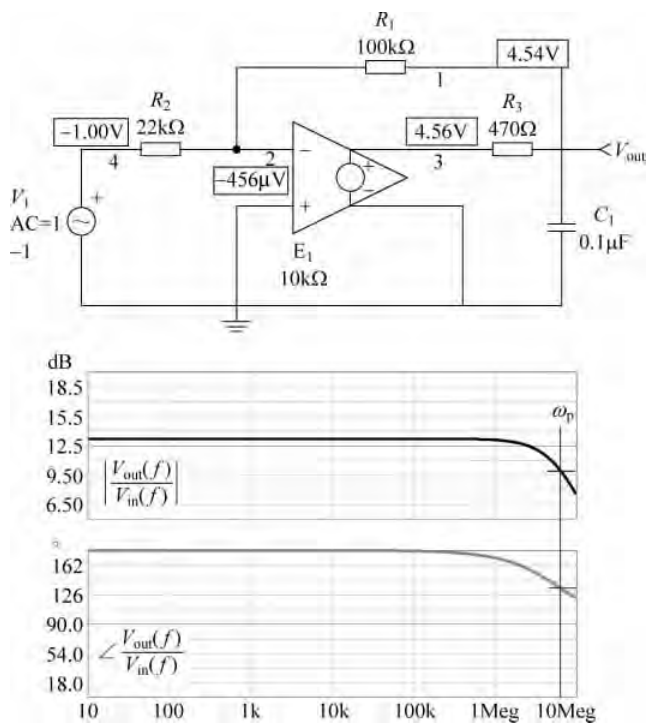


图 3.132 交流响应与 Mathcad 动态曲线相匹配, 极点频率为 6.1MHz

当驱动大容量电容负载时, 通常采用上述电路使运算放大器稳定。由于运算放大器的闭环输出阻抗为感性, 所以当负载为容性时可能导致电路不稳定。当运算放大器的输出端串联电阻 R_3 时, 运放输出与负载电容通过 R_3 进行隔离, 使电路保持稳定。相关具体技术请参考文献[11]和[12]。

参考文献

1. <http://www.solved-problems.com/circuits/circuits-articles/839/turning-sources-off/> (last accessed 12/12/2015).

2. <http://users.ece.gatech.edu/mleach/papers/superpos.pdf> (last accessed 12/12/2015).
3. Middlebrook R D. Null Double Injection and the Extra Element Theorem[J]. IEEE Transactions on Education, 1989, 32(3), 167-180.
4. Vorpérián V. Fast Analytical Techniques for Electrical and Electronic Circuits[M]. London: Cambridge University Press, 2002:4.
5. Hajimiri A. Generalized Time- and Transfer-Constant Circuit Analysis[J]. Transactions on Circuits and Systems, 2009, 57 (6), 1105-1121.
6. <http://www.rdmiddlebrook.com/> (last accessed 12/12/2015).
7. <http://www.edn.com/electronics-blogs/outside-the-box-/4404226/Design-oriented-circuit-dynamics> (last accessed 12/12/2015).
8. <http://www.analogdesign.be/> (last accessed 12/12/2015).
9. https://groups.yahoo.com/neo/groups/Design-Oriented_Analysis_D-OA/info (last accessed 12/12/2015).
10. <https://sites.google.com/site/frankwiedmann/loopgain> (last accessed 12/12/2015).
11. Pachchigar M. Compensation Techniques for Driving Large-Capacitance Loads with High-Speed Amplifiers [OL]. http://www.eetimes.com/document.asp?doc_id=1272424 (last accessed 20/12/2015).
12. Feucht D. Designing Dynamic Circuits[J]. Analog Circuit Design, 2010, 2: 150-158.