

工农业生产中大量电动机需要由正弦交流电源供电,远距离输送电力需要升高或降低电压运用的是正弦交流电,广播通信及军事国防工程中要用到中高频的正弦交流信号。

正弦稳态电路分析也是三相电路、互感耦合电路、非正弦电流电路分析的基础。

3.1 正弦量的参数

正弦量的量值随时间按正弦规律变化,变化连续、平缓、正负值均衡。以正弦电流为例,波形如图 3-1 所示,其任意时刻之值称为瞬时值,表达式为

$$i = I_m \sin(\omega t + \phi_i) \quad \text{或} \quad i = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \quad (3-1)$$

其中,余弦函数比正弦函数超前 90° ,本书采用正弦函数表达式。瞬时值规定用小写字母表示,如 i 、 u 。图 3-1 设电流的参考方向(实线箭头)向右,在 $0 \sim t_1$ 时间内, $i > 0$, 则实际方向(虚线箭头)也向右,与参考方向相同;在 $t_1 \sim t_2$ 时间内, $i < 0$, 则实际方向向左,与参考方向相反。

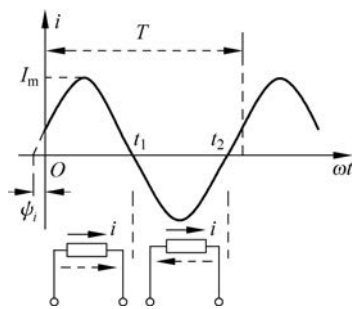


图 3-1 正弦电流的波形

3.1.1 正弦量三要素

在 $i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$ 中, I_m 为正弦量的最大值; ω 为角频率; ϕ_i 为初相位。 I_m 、 ω 、 ϕ_i 称为正弦量的三要素。如果已知最大值、角频率和初相位,则 $i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$ 唯一确定。

1. 最大值 I_m

最大值反映了正弦量的变化幅度,又称为振幅或峰值,用大写字母加下标 m 表示,如 U_m 、 I_{m1} 和 U_{m2} 等。

另一个常见的物理量为有效值,交流电的有效值是由其在电路中做功的热效应来定义的,如图 3-2 所示为两个相等的标准电阻 R ,一个通入已知大小的直流电流 I ,另一个通入交流电流 i ,在交流的一个周期时间 T 内若测得两个电阻产生的热量相等,即做功效果相等,那么该直流电流 I 的数值就定义为该交流电流的有效值。根据电阻产生热能的公式,有



$$\begin{cases} Q = I^2 R T = \int_0^T i^2 R dt \\ I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \end{cases} \quad (3-2)$$

式(3-2)适用于任何波形的周期电流,代入正弦电流 $i = I_m \sin \omega t$,得

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \times \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T dt - \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2\omega t dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \end{aligned}$$

即

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (3-3)$$

同理可定义电压、电动势有效值为

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

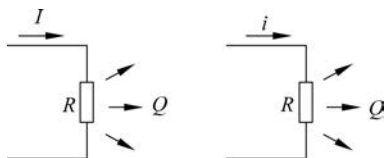


图 3-2 确定交流电流有效值的方法

可见,正弦交流量的最大值是其有效值的 $\sqrt{2}$ 倍。通常所说的民用交流电压 220V 是指有效值,其最大值约为 311V。确定电气设备的耐压值时,应按正弦电压的最大值来考虑。

我们平常所说的交流电压、电流,以及电气设备上的额定电压、额定电流,均指有效值,交流测量仪表所读出的指示值也是有效值。有效值用大写字母表示,如 U 、 I_1 、 U_2 等。

2. 角频率 ω

角频率 ω 反映了正弦量变化的快慢,定义为 $\omega = 2\pi f$,单位为 rad/s(弧度/秒),它与频率 f 、周期 T 有密切关系。频率 f 是正弦量每秒钟变化的次数,单位为赫兹(Hz)。而变化一次所需的时间称为周期 T ,显然 $T = 1/f$,周期的单位为秒(s)。

我国电力系统的供电频率是 50Hz,简称工频。不同技术领域所使用的正弦波的频率是不一样的,按照频率的高低,可分为低频、中频、高频等。

如图 3-3 所示为产生正弦交流电的同步发电机结构,其工作原理如图 3-4 所示,定子绕组通入直流励磁电流 I 后形成位置固定的磁极,该定子磁极做成特殊形状,使上下定子两极间的磁感应强度 B 在空间按正弦规律分布,如图 3-4(a)所示。原动机带动转子逆时针旋转,转子绕组切割定子磁场并在其

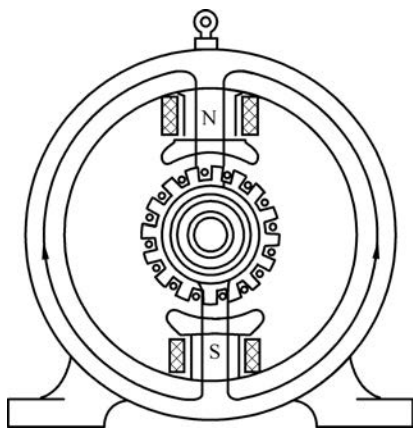


图 3-3 同步发电机的结构

中产生感应电动势,外接负载后产生感应电流。转子从 $\alpha=0$ 开始,逆时针转一圈,转子绕组切割到的磁场按图 3-4(b)变化一周,相应的感应电动势、感应电流也按正弦规律变化一周。若转子每秒旋转 f 圈,则感应电流频率为 f ,转子每圈划过空间的角度是 2π 弧度(即 360°),那么转子每秒划过空间的角度是 $2\pi f$ 弧度,这就是角频率 ω 的定义。工频信号的角频率 $\omega=2\pi\times 50=314\text{rad/s}$ 。

3. 初相位 ϕ_i

式(3-1)中的 $\omega t + \phi_i$ 称为正弦波的相位角或简称相位,相位反映了正弦量变化的进程。 ϕ_i 是在 $t=0$ 时正弦量的相位角,反映了正弦量的初始状态。

设图 3-4(a)所示发电机外接电阻负载,上次停机时若转子线圈的首端刚好停在 $\alpha=0$ 的“1”点,则下次开始运转时从“1”点起步,转子线圈流出的感应电流初始值为零,因为起步点的磁场为零,转子线圈切割不到磁感线,即初相位 $\phi_i=0$;但每次停机转子位置是随机的,线圈的首端可能停在圆周内的任意位置,如停在“4”点,转子下次一起步就切割到最强磁场,那么初相位 $\phi_i=90^\circ$;如停在“10”点,则初相位 $\phi_i=270^\circ$ 。

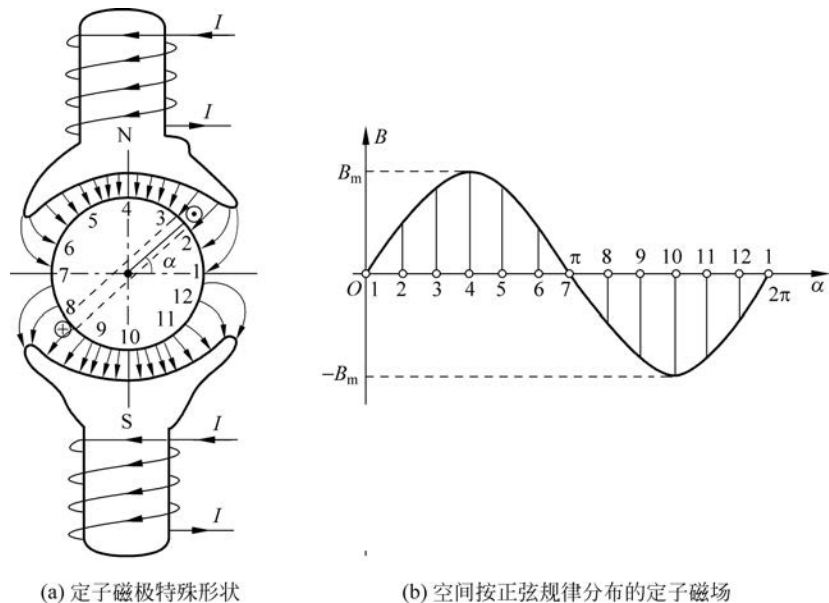


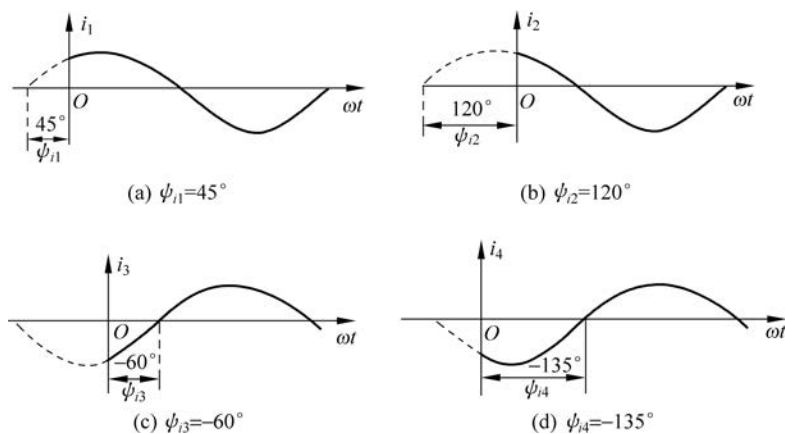
图 3-4 同步发电机的工作原理

正弦量波形图一个周期的起点是由负到正的过零点,若该起点在原点 O ,则正弦量的初始值为零,初相位 ϕ_i 也为零;若该起点在纵轴之前,则正弦量的初始值为正,初相位 ϕ_i 也为正,如图 3-5(a)、(b)所示, ϕ_i 从原点往前(左)读取;若该起点在纵轴之后,则正弦量的初始值为负,初相位 ϕ_i 也为负,如图 3-5(c)、(d)所示, ϕ_i 从原点往后(右)读取。这说明正弦量的初相位与计时起点有关。

为了确定正弦量初相位的正与负,习惯上用绝对值小于 180° 的角度来表示初相位,即

$$|\phi_i| \leq 180^\circ$$

若初相位的绝对值大于 180° ,作如下处理

图 3-5 正弦量初相位 ψ_i 的正与负

$$\psi_i \pm 360^\circ$$

这个角度仍等效于原角度,但绝对值就在 180° 以内。原初相位为负时加 360° ; 原初相位为正时减 360° ,如下:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t - 270^\circ) \text{ A}, \quad \psi_{i1} = -270^\circ + 360^\circ = 90^\circ, \text{ 初相位为正;}$$

$$i_2 = I_{m2} \cos(\omega t + 120^\circ) = I_{m2} \sin(\omega t + 210^\circ) \text{ A}, \quad \psi_{i2} = 210^\circ - 360^\circ = -150^\circ, \text{ 初相位为负。}$$

另外还要注意,角度的单位可以是度($^\circ$);也可以是弧度(rad),如 ωt 的乘积就是以弧度为单位的。因此要清楚弧度与度之间的换算关系,即

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.01744 \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{180}{3.14}\right)^\circ = 57.325^\circ$$

几个特殊值经常用到,如 $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\pi = 180^\circ$ 。



3.1.2 正弦量的相位差

比较多个同频率的正弦量时,每个正弦量出现最大值的时刻往往有先有后,它们之间存在相位差。相位差是同频率正弦量之间的相位之差,即初相位之差。如设

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

则 u 与 i 之间的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i \quad (3-4)$$

若 $\varphi = \psi_u - \psi_i > 0$, 则 u 超前于 i , 如图 3-6(a) 所示;

若 $\varphi = \psi_u - \psi_i < 0$, 则 u 滞后于 i , 如图 3-6(b) 所示;

若 $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$, 则 u 与 i 同相, 如图 3-6(c) 所示;

若 $\varphi = \psi_u - \psi_i = \pm 90^\circ$, 则 u 与 i 正交, 如图 3-6(d) 所示;

若 $\varphi = \psi_u - \psi_i = \pm 180^\circ$, 则 u 与 i 反相, 如图 3-6(e) 所示。

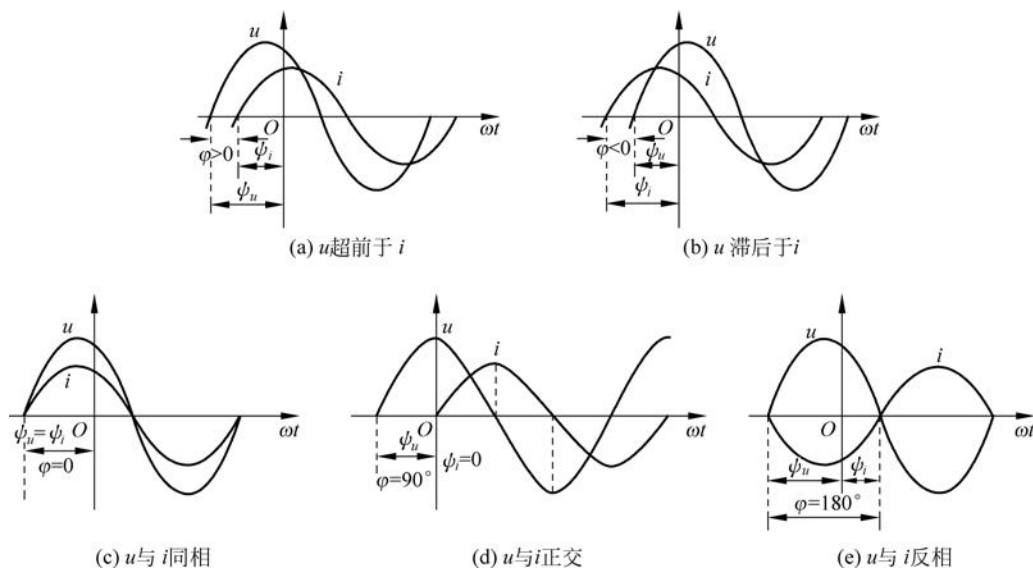


图 3-6 同频率正弦量之间的相位差

为了确定两个正弦量之间的超前或滞后关系,习惯上用绝对值小于 180° 的角度来表示相位差。即

$$\varphi = |\psi_1 - \psi_2| \leqslant 180^\circ \quad (3-5)$$

【例 3-1】 求下面两组正弦量的相位差。

$$(1) i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}, i_2 = I_{m2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ A};$$

$$(2) u_3 = U_{m3} \cos(\omega t - 120^\circ) \text{ V}, u_4 = -U_{m4} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ V}.$$

解 (1) $\varphi_{12} = \psi_{i1} - \psi_{i2} = 90^\circ - (-120^\circ) = 210^\circ$, 其绝对值大于 180° , 作如下处理得

$$\varphi_{12} = 210^\circ - 360^\circ = -150^\circ$$

表明 i_1 滞后 i_2 150° , 或 i_2 超前 i_1 150° 。

(2) u_3 为余弦波, 余弦波超前正弦波 90° , 作如下处理得

$$u_3 = U_{m3} \cos(\omega t - 120^\circ) = U_{m3} \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ V}, \quad \psi_{u3} = -30^\circ$$

u_4 表达式前有负号, 表示反相, 应在其初相位里加上(或减去) 180° , 即

$$u_4 = -U_{m4} \sin(\omega t - 90^\circ) = U_{m4} \sin(\omega t - 90^\circ + 180^\circ) = U_{m4} \sin(\omega t + 90^\circ),$$

$$\psi_{u4} = 90^\circ$$

$$\varphi_{34} = \psi_{u3} - \psi_{u4} = (-30^\circ) - 90^\circ = -120^\circ$$

结果表明 u_3 滞后 u_4 120° 。

【课后练习】

3.1.1 正弦电路中的电压、电流为

$$u_1(t) = 12\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}, \quad i_1(t) = 5.656 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ mA}$$

$$u_2(t) = 6\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}, \quad i_2(t) = -30\sqrt{2} \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ mA}$$

u_1 超前 i_1 (), u_2 超前 i_2 ()。并画出 u_1, i_1 的波形图。

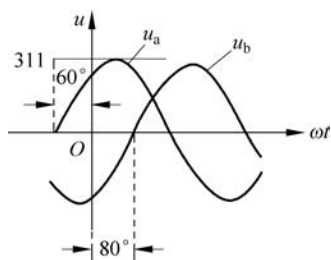


图 3-7 3.1.3 波形图

3.1.2 已知正弦电压 $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(3140t - 270^\circ) \text{ V}$, 其最大值 $U_m = (\quad) \text{ V}$ 、有效值 $U = (\quad) \text{ V}$ 、频率 $f = (\quad) \text{ Hz}$ 、周期 $T = (\quad) \text{ s}$ 、角频率 $= (\quad) \text{ rad/s}$ 、初相位 $= (\quad)$ 。计算它在 0.001 s 瞬时值 $= (\quad) \text{ V}$, 0.0005 s 时的瞬时值 $= (\quad) \text{ V}$ 。

3.1.3 写出如图 3-7 所示两个电压波形的瞬时值表达式。

$u_a = (\quad) \text{ V}$, $u_b = (\quad) \text{ V}$ 。

3.2 正弦量的计算方法

对正弦量进行计算, 如对瞬时值直接进行加减乘除运算, 则要用到诸多三角函数公式, 过程非常烦琐。

在讨论同一正弦交流电路的电流电压时, 由于各量的角频率相同, ω 一经给定不再变化。仅剩下有效值、初相位两个量需进行计算。

借用初等数学中的复数, 能很好地表达正弦量的有效值、初相位。



3.2.1 复数的主要表达形式

初等数学复数的虚数单位用 i 表示, 由于电路课程中 i 用来表示电流, 为不引起混淆, 本书中的虚数单位用 j 表示。复数可借助于复平面来表示, 复平面的实轴用 $+1$ 表示, 虚轴用 $+j$ 表示, 而 $j^2 = -1$, $j = \sqrt{-1}$, $\frac{1}{j} = \frac{j}{jj} = -j$ 。

复数的解析式主要有两种。

1. 复数的极坐标形式

$\dot{A} = A \angle \phi$, 如图 3-8 所示带箭头的直线。其中直线的长度 A 是复数的模, 指量值的大小, 恒为正; 直线与横轴正方向的夹角 ϕ 是复数的辐角, 表示该复数在复平面内的方位。

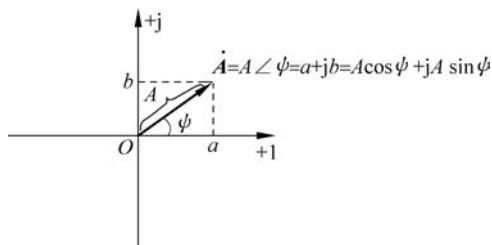


图 3-8 复数的表达形式

2. 复数的代数形式

$\dot{A} = a + jb$, 图 3-8 中直线在横轴上的投影 a 是复数的实部, 直线在纵轴上的投影 b 是复数的虚部。

两种解析式之间的等效变换关系如下:

极坐标形式变换为代数形式：复数的实部 $a = A \cos \psi$ ，复数的虚部 $b = A \sin \psi$ 。

代数形式变换为极坐标形式：复数的模 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，复数的辐角 $\psi = \arctan \frac{b}{a}$ 。

因此有关系式

$$\begin{cases} \dot{A} = A \angle \psi = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \arctan \frac{b}{a} \\ \dot{A} = A \cos \psi + jA \sin \psi = a + jb \end{cases} \quad (3-6)$$

复数的极坐标式与代数式之间的转换，可借助计算器进行。以 SHARP EL-501P 型计算器为例，面板上有 $\boxed{a}$ 、 $\boxed{b}$ 两个按键，角度单位键选择 DEG 指度，DEG 在显示屏顶部出现。如将 $3-j4$ 转换成 $5 \angle -53.13^\circ$ ，按键如图 3-9(a) 所示；将 $5 \angle -53.13^\circ$ 转换成 $3-j4$ ，按键如图 3-9(b) 所示。凡是输入负数，先单击数字，再单击“+/-”号。必须注意“模”恒为正数，其后不能单击“+/-”号。

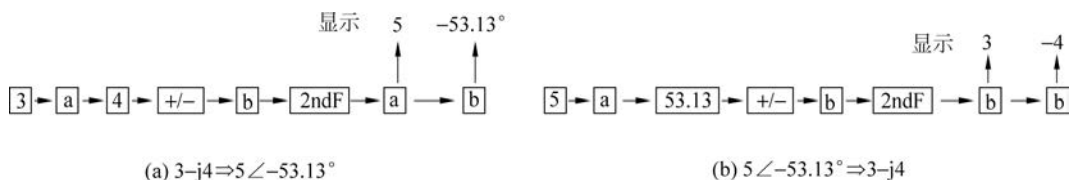


图 3-9 用计算器进行代数式与极坐标式互相转换

在转换过程中有以下特例：

$$1+j20=20.024 \angle 87.14^\circ \approx 20 \angle 90^\circ (\text{可忽略实部})$$

$$20+j1=20.024 \angle 2.86^\circ \approx 20 \angle 0^\circ (\text{可忽略虚部})$$

复数还有一种表达形式称为指数形式，如 $\dot{A} = A e^{j\psi}$ ，可以证明 $\dot{A} = A e^{j\psi}$ 与 $\dot{A} = A \angle \psi$ 相等。如 $5 \angle 80^\circ = 5 e^{j80^\circ}$ ， $10 \angle -90^\circ = 10 e^{-j90^\circ}$ 。本书不用“指数形式”。

3.2.2 用复数表示正弦量——相量

复数的极坐标表达形式有：直线长度；辐角（可在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 及 $0^\circ \sim -180^\circ$ 变化）。这刚好能借用来分别表示正弦量的有效值、初相位。

正弦量 $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i)$ 的角频率 ω 为确定值，在同一系统中恒定不变。可以直接写出该正弦量对应的复数极坐标式，称为相量。

$$\text{振幅相量} \quad \dot{I}_m = I_m \angle \psi_i = \sqrt{2} I \angle \psi_i$$

$$\text{有效值相量} \quad \dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \psi_i = I \angle \psi_i$$

本书多数计算采用有效值相量。从正弦量的瞬时值表达式得到相量的极坐标式后可转换成代数式，如

$$i_1 = 2.5\sqrt{2} \sin(\omega t + 32^\circ) A, \quad \dot{I}_1 = 2.5 \angle 32^\circ = 2.5(\cos 32^\circ + j \sin 32^\circ) = 2.12 + j1.32 A$$

$$i_2 = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ) A, \quad \dot{I}_2 = 10 \angle 120^\circ = 10(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = -5 + j8.66 A$$



$$i_3 = 50\sqrt{2} \sin(\omega t - 150^\circ) \text{ A}, \quad \dot{I}_3 = 50 \angle -150^\circ = -43.3 - j25 \text{ A}$$

$$i_4 = 3.9\sqrt{2} \sin(\omega t - 47^\circ) \text{ A}, \quad \dot{I}_4 = 3.9 \angle -47^\circ = 2.66 - j2.85 \text{ A}$$

这4个正弦量对应的相量如图3-10所示,在复平面中表示各相量几何位置的图形称为相量图。绘相量图时也可以隐去实轴和虚轴,即只需画出相量本身。正弦量的初相位不同,其相量处于复平面的象限也不同。需要特别指出,相量只用来表示正弦量,或代表正弦量进行计算,但不等于正弦量。

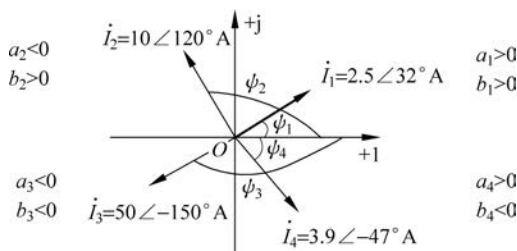


图 3-10 4 个不同象限的相量

图3-10中4个相量画在同一复平面上,可直观确定相互间的超前、滞后关系,依次为 $\dot{I}_4$ 超前 $\dot{I}_3$, $\dot{I}_1$ 超前 $\dot{I}_4$, $\dot{I}_2$ 超前 $\dot{I}_1$, $\dot{I}_3$ 超前 $\dot{I}_2$ 。两个箭头间夹角绝对值小于 180° 的相量进行比较,在逆时针前方的相量为超前相量。如要确定 $\dot{I}_3$ 与 $\dot{I}_1$ 间的超前、滞后关系,则

$$\varphi_{31} = \psi_3 - \psi_1 = (-150^\circ) - 32^\circ = -182^\circ$$

即

$$\varphi_{31} = -182^\circ + 360^\circ = 178^\circ$$

表明 $\dot{I}_3$ 超前 $\dot{I}_1$ 178° 。

这里所说的“相量”不是物理学中所述的“有大小有方向”的“向量”,只是借助了“向量”的图示方法,因此不能用“向量”这个词。

3.2.3 复数相量的运算规则

设有两个相量分别为 $\dot{I}_1 = a_1 + jb_1 = I_1 \angle \psi_1$, $\dot{I}_2 = a_2 + jb_2 = I_2 \angle \psi_2$,对两者进行计算的规则如下。

(1) 加法、减法运算:必须采用代数式,实部和虚部分别相加或相减。

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \quad (3-7)$$

相量的加减还可以用作图法进行,如例3-3所示。

(2) 乘法运算:采用极坐标式更方便,其乘积为“两个模相乘,两个辐角相加”。

$$\dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2 = I_1 \cdot I_2 \angle (\psi_1 + \psi_2) \quad (3-8)$$

(3) 除法运算:采用极坐标式更方便,其商为“两个模相除、分子的辐角减去分母的辐角”。

$$\dot{I}_1 / \dot{I}_2 = \frac{I_1}{I_2} \angle (\psi_1 - \psi_2) \quad (3-9)$$

(4) 两复数相等($\dot{I}_1 = \dot{I}_2$)的条件:

① 实部和虚部分别相等,即

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2 \quad (3-10)$$

② 模与辐角分别相等,即

$$I_1 = I_2, \quad \phi_1 = \phi_2 \quad (3-11)$$

3.2.4 基尔霍夫定律的相量形式



1. KCL 的相量形式

任一时刻,对电路中的任一结点有

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_k = 0 \quad \text{或} \quad \sum i = 0$$

当所讨论的电路所有电流、电压都是同频率的正弦量时,理论推导可证明 KCL 的相量形式也成立,为

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_k = 0 \quad \text{或} \quad \sum \dot{I} = 0$$

2. KVL 的相量形式

任一时刻,对电路中的任一回路有

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = 0 \quad \text{或} \quad \sum u = 0$$

同理,KVL 的相量形式也成立,为

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_k = 0 \quad \text{或} \quad \sum \dot{U} = 0$$

应该注意到,虽然 KCL、KVL 的相量形式都成立,但由于正弦量的相量不仅有模的大小,更重要的是有相位的不同,或者说在复平面上的方位不同,因此电流(或电压)的有效值之间是不满足 KCL、KVL。即

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_k \neq 0, \quad U_1 + U_2 + \cdots + U_k \neq 0$$

【例 3-2】 已知正弦电流 $i_1 = 2.5\sqrt{2}\sin(\omega t + 32^\circ)\text{A}$, $i_2 = 3.9\sqrt{2}\sin(\omega t - 47^\circ)\text{A}$ 。要求

(1) 计算 $i = i_1 + i_2$, 验证 $I \neq I_1 + I_2$ 。

(2) 用画相量图的方法,计算 $i = i_1 + i_2$, 观察 $I \neq I_1 + I_2$ 。

解 (1) 由两电流的瞬时值表达式直接写出它们的相量极坐标式为

$$\dot{I}_1 = 2.5\angle 32^\circ\text{A}, \quad \dot{I}_2 = 3.9\angle -47^\circ\text{A}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ &= 2.5\angle 32^\circ + 3.9\angle -47^\circ \\ &= 2.5(\cos 32^\circ + \text{j}\sin 32^\circ) + 3.9[\cos(-47^\circ) + \text{j}\sin(-47^\circ)] \\ &= (2.12 + \text{j}1.32) + (2.66 - \text{j}2.85) = 4.78 - \text{j}1.53 \\ &= 5.02\angle -17.75^\circ\text{A} \end{aligned}$$

相量计算结果 $\dot{I}$ 不是正弦量,转变成瞬时值表达式才是正弦量:

$$i = 5.02\sqrt{2}\sin(\omega t - 17.75^\circ)\text{A}$$

验证

$$I = 5.02\text{A} \neq I_1 + I_2 = 2.5 + 3.9 = 6.4\text{A}$$

(2) $\dot{I}_1$ 与 $\dot{I}_2$ 的相量图如图 3-11(a)所示,类似物理学中由两个分力求合力的方法,画出 $\dot{I}_1$ 与 $\dot{I}_2$ 形成的平行四边形的对角线,该对角线代表的相量就是 $\dot{I}_1$ 与 $\dot{I}_2$ 的和相量 $\dot{I}$ ——这种画图方法称为平行四边形法。

表征正弦量的相量可以在复平面上平移,平移时保持相量的大小和方向不变,就与原相量等效。图 3-11(b)中将 $\dot{I}_1$ 平移,接在 $\dot{I}_2$ 相量的箭首,那么由 $\dot{I}_2$ 的箭尾指向 $\dot{I}_1$ 箭首的相量就是和相量 $\dot{I}$ ——这种方法称为三角形法。只要作图准确,量取相量图中 $\dot{I}$ 的长度和角度就分别得到 $\dot{I}$ 的有效值和初相位。

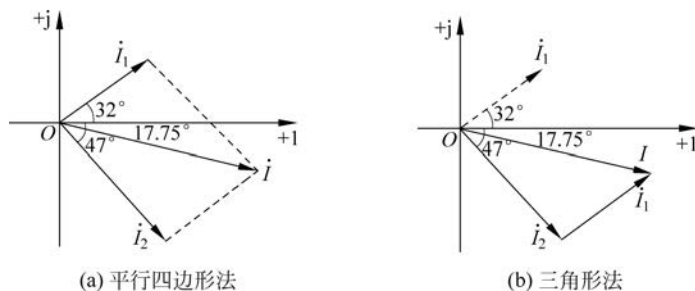


图 3-11 例 3-2 相量图

观察图 3-11(b)中三角形的三条边长可知 $I \neq I_1 + I_2$ 。

【例 3-3】 已知正弦电压 $u_1 = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)\text{V}$, $u_2 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 135^\circ)\text{V}$ 。要求

(1) 计算 $u = u_1 - u_2$, 验证 $U \neq U_1 - U_2$ 。

(2) 用画相量图的方法, 计算 $u = u_1 - u_2$, 观察 $U \neq U_1 - U_2$ 。

解 (1) 由两电压的瞬时值表达式直接写出它们的相量极坐标式为

$$\dot{U}_1 = 10 \angle 30^\circ = (8.66 + \text{j}5)\text{V}, \quad \dot{U}_2 = 5 \angle 135^\circ = (-3.54 + \text{j}3.54)\text{V}$$

则

$$\dot{U} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 12.2 + \text{j}1.46 = 12.3 \angle 7^\circ \text{V}$$

转变成瞬时值表达式

$$u = 12.3\sqrt{2} \sin(\omega t + 7^\circ)\text{V}$$

验证

$$U = 12.3\text{V} \neq U_1 - U_2 = 10 - 5 = 5\text{V}$$

(2) 根据 $\dot{U} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_1 + (-\dot{U}_2)$, $\dot{U}_1$ 减 $\dot{U}_2$ 就是 $\dot{U}_1$ 加上负的 $\dot{U}_2$, 可将减法转变为加法来做。将 $\dot{U}_2$ 旋转 180° 得到 $-\dot{U}_2$, 再用平行四边形法则画出 $\dot{U} = \dot{U}_1 + (-\dot{U}_2)$, 如图 3-12(a)所示。

观察图 3-12(a)中三角形的三条边长可知 $U \neq U_1 - U_2$ 。

平行四边形法还可以推广为多边形法, 如图 3-12(b)所示, 图中 $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 - \dot{U}_4$, $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$ 、 $\dot{U}_3$ 、 $(-\dot{U}_4)$ 四者相加依次首尾相连, 和相量 $\dot{U}$ 由第一个相量的箭尾指向最后一个相

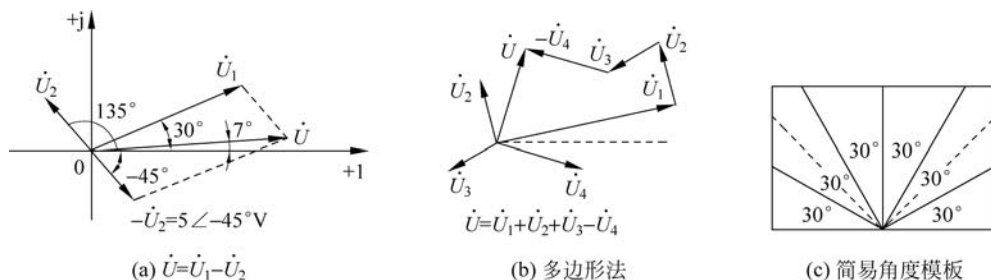


图 3-12 例 3-3 相量图

量的箭首。

相量图以有效值定长度,以初相位定方位,需准确画出角度。为方便量取角度,要求读者准备纸片折叠出 30° 、 60° 、 90° 等特殊角备用,如图 3-12(c) 所示。

3.2.5 复数计算示例

$$(1) -74.46 \angle -50^\circ = 74.46 \angle (-50^\circ + 180^\circ) = 74.46 \angle 130^\circ.$$

注意: 模不能带负号,模恒为正。负号等效于相位加或减 180° 。

$$(2) \frac{220 \angle 0^\circ - 213.8 \angle -22.8^\circ}{j20} = \frac{220 - (197.1 - j82.85)}{20 \angle 90^\circ} = 4.3 \angle -15.45^\circ.$$

$$(3) 5 + \frac{(3+j4) \times (-j4)}{(3+j4) - j4} = 5 + \frac{16 - j12}{3} = 10.33 - j4 = 11.08 \angle -21.2^\circ.$$

$$(4) 11.2 \angle 116.6^\circ - 10 \angle -180^\circ = (-5.01 + j10.01) + 10 = 4.99 + j10.01 = 11.18 \angle 63.5^\circ.$$

3.2.6 复数计算中的常用算子

在复数计算中,经常会遇到算子“ j ”“ $-j$ ”“ -1 ”,它们都是乘法因子,运算规律如下:

$j\dot{I} = \dot{I} \angle 90^\circ$: $\dot{I}$ 乘以 j , 相当于复平面上将 $\dot{I}$ 逆时针旋转 90° , 辐角加 90° 。

$-j\dot{I} = \dot{I} \angle -90^\circ$: $\dot{I}$ 乘以“ $-j$ ”, 相当于复平面上将 $\dot{I}$ 顺时针旋转 90° , 辐角减 90° 。

$-\dot{I} = \dot{I} \angle 180^\circ$: $\dot{I}$ 乘以“ -1 ”, 相当于复平面上将 $\dot{I}$ 旋转 180° , 辐角加或减 180° 。

【课后练习】

3.2.1 将下列瞬时值算式变换成复数相量算式,并且计算。

$$(1) u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 60 \sin 314t + 80 \cos 314t \text{ V}$$

振幅相量: $\dot{U}_m = \dot{U}_{m1} + \dot{U}_{m2} = (\quad) + (\quad) = (\quad) \angle 53.13^\circ \text{ V}$, 画出 $\dot{U}_m$ 、 $\dot{U}_{m1}$ 、 $\dot{U}_{m2}$ 的相量图。

$$(2) i(t) = 16\sqrt{2} \sin(10t - 30^\circ) - 12\sqrt{2} \sin(10t + 135^\circ) \text{ A}$$

有效值相量: $\dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = (\quad) - (\quad) = (\quad) \angle -36.42^\circ \text{ A}$, 画出 $\dot{I}$ 、 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 的相量图。

3.2.2 图 3-13 中 4 个电流相量有效值都为 10 A , 则 $\dot{I}_1 = (\quad) \text{ A}$, $\dot{I}_2 = (\quad) \text{ A}$,

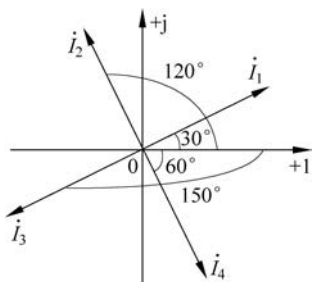


图 3-13 相量图

$$\dot{I}_3 = (\quad) \text{ A}, \dot{I}_4 = (\quad) \text{ A}.$$

3.2.3 填空题:

$$(1) \frac{120 \angle 0^\circ}{8 + j10} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(\quad)} = (\quad) \angle -51.3^\circ$$

$$(2) \frac{240 \angle 0^\circ}{25 - j15} = \frac{240 \angle 0^\circ}{(\quad) \angle (\quad)} = 8.24 \angle (\quad)^\circ$$

$$(3) \frac{(5 + j35)(2 - j38)}{5 + j35 + 2 - j38} = \frac{(\quad) \angle 81.9^\circ \times (\quad) \angle -87^\circ}{(\quad) \angle -23.2^\circ} = (\quad) \angle 18.1^\circ = (\quad) + j(\quad)$$

3.3 单一元件正弦交流电路的特性

单一元件有电阻、电感、电容三者,掌握三者的特性十分重要。



3.3.1 电阻元件的特性

1. 电阻元件的伏安关系

如图 3-14(a)所示,设电阻元件的端电压 $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \phi_u)$,根据欧姆定律,电流为

$$i = \frac{\sqrt{2}U}{R} \sin(\omega t + \phi_u) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \phi_i)$$

则电阻元件的伏安关系如下:

- (1) 电流、电压是同频率的正弦量。
- (2) 电流、电压的有效值关系: $I = U/R$, $I_m = U_m/R$ 。
- (3) 电流、电压的相位关系: $\phi_u = \phi_i$,二者同相。

2. 电阻元件伏安关系的相量形式

分别由电阻电流、电压的瞬时值表达式写出其相量表达式为

$$u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \phi_u) \Rightarrow \dot{U} = U \angle \phi_u$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \phi_i) \Rightarrow \dot{I} = I \angle \phi_i = \frac{U}{R} \angle \phi_u$$

则电阻元件伏安关系的相量形式为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} \quad (3-12)$$

式(3-12)就是相量形式的欧姆定律。电阻元件电流、电压的波形如图 3-14(b)所示,其中图 3-14(a)称为电阻元件的相量模型,相量图如图 3-14(c)所示。

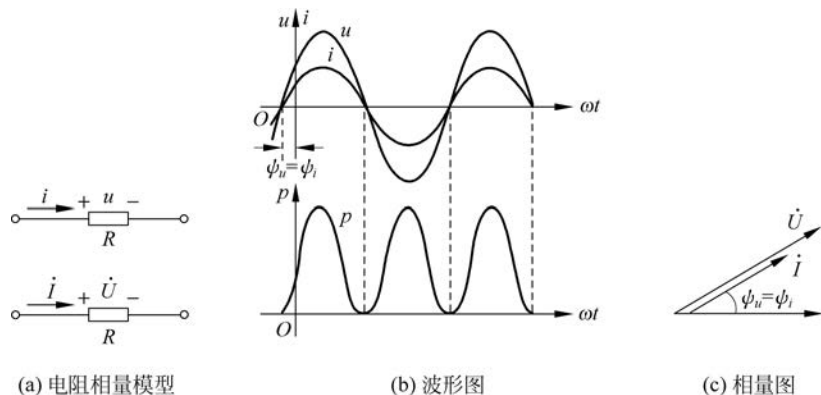
3. 电阻元件的功率

(1) 瞬时功率: 瞬时功率是电流、电压瞬时值的乘积,波形如图 3-14(b)所示。

$$p = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \phi_i) = UI[1 - \cos 2(\omega t + \phi_i)]$$

该式表明电阻元件的瞬时功率 p 总是大于或等于零,即电阻元件是耗能元件,功率不可能为负。

(2) 平均功率(又称有功功率): 有功功率是瞬时功率在一个周期的平均值,是用电设

图 3-14 电阻元件的 u 、 i 、 p 波形及相量图

备将电能转变成其他形式能而消耗掉的功率。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI [1 - \cos 2(\omega t + \phi_i)] \, dt = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

该式与直流电路中电阻功率的公式形式相同,但这里的 U 、 I 是电流、电压有效值。

【例 3-4】 图 3-14(a) 中,已知电阻 $R=100\Omega$ 、电压 $u=\sqrt{2}220\sin(314t+30^\circ)\text{V}$ 。计算电流 i 和平均功率 P 。

解 已知电压相量

$$\dot{U} = 220\angle 30^\circ \text{V}$$

求得电流相量为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{220\angle 30^\circ}{100} \text{A} = 2.2\angle 30^\circ \text{A}$$

电流的瞬时值表示式为

$$i = 2.2\sqrt{2}\sin(314t + 30^\circ) \text{A}$$

电阻的有功功率为

$$P = UI = 220 \times 2.2 = 484 \text{W}$$

3.3.2 电感元件的特性

1. 对电感元件的认识

电感元件是用来储存磁场能量的无源器件,如图 3-15 所示。在电子和电力系统中,电感元件有着广泛的应用,如电感器、变压器、电动机。



图 3-15 不同类型的电感



任何有电流通过的导线周围都有磁感线产生,如果将导线绕成多匝的线圈,电流 i 通过线圈时周围磁感线更密集,磁感线总量更大,其中存储有磁场能量 $W_L = \frac{1}{2}Li^2$, W_L 与电流的平方成正比。穿过每匝线圈的磁感线数量称为磁通 Φ ,穿过 N 匝线圈磁通的总和称为磁通链,磁通链用 Ψ 表示,单位为韦伯(Wb)。电感元件中的磁通链 Ψ 与每匝线圈磁通 Φ 的关系、与流过电流 i 的关系分别为

$$\begin{cases} \Psi(t) = N\Phi \\ \Psi(t) = Li(t) \end{cases} \quad (3-13)$$

式中,比例系数 L ——线圈的自感系数(固有参数),又简称为自感或电感,单位为亨利(H)或毫亨(mH)。

式(3-13)反映了电感元件的韦-安特性,线性电感的韦-安特性曲线是通过原点的直线,如图 3-15(b)所示。

电感的自感系数 L 定义为

$$L = \frac{\Psi(t)}{i(t)} \quad (3-14)$$

式(3-14)表明,“某线圈的自感系数较大”的意义是“流过单位电流激起的磁通链较多,其中储存的磁场能量 $W_L = \frac{1}{2}Li^2$ 也较强”。

自感系数取决于电感的结构尺寸及磁环境。增加线圈匝数、增加线圈横截面积、采用更高磁导率的骨架以及缩短螺线管长度,都可以提高自感系数。

市售电感的自感系数可从通信系统用的几个微亨到电力系统中的几十亨。也有固定电感和可变电感之分;线性电感与非线性电感之分。本书涉及的电感都属于线性电感,其 Ψ 与电流 i 的比值 L 为常数,骨架用非磁性材料构成,如塑料、陶瓷等。如骨架用铁磁材料,则自感系数会随电流非线性变化,其韦-安特性曲线如图 3-16(c)所示。电感元件在使用中不允许超过其额定电流。电感元件若串、并联,则计算等效电感的公式与电阻相同。

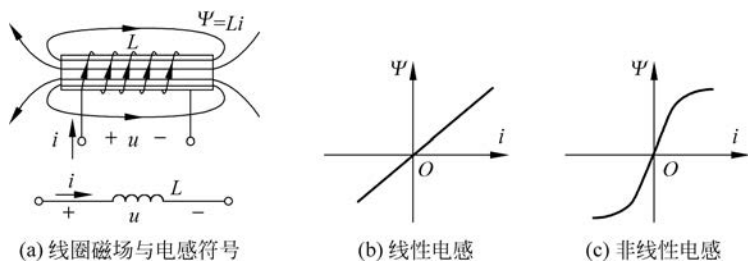


图 3-16 电感元件的韦-安特性曲线

2. 电感元件的伏安关系

根据物理学可知,线圈中的磁通链随时间发生变化,就会在线圈两端产生感应电动势,测量该线圈的两端有感应电压存在,磁通随时间的变化率决定了感应电压的大小。

$\Psi(t) = Li(t)$ 是电感元件的定义式,其中包含电流,但与电感电压无关,为确定电感元件的伏安关系,将该式两侧同时对时间 t 求变化率,准确地说对时间 t 求导数,得关联参考方向下电感元件的 VCR 式为

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{或} \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3-15)$$

该式表明,电感电压不是与该时刻的电流值本身成正比,而是与该时刻电流的变化率成正比,反映了电感元件是一个动态元件。电流变化越快,电压越高,电流若不发生变化,则磁通也不变化,即使电流值再大,电感电压也为零。若要求电流发生突变,如瞬间从 0 增至 5A,即电流变化率 $\rightarrow\infty$,则电感电压 $\rightarrow\infty$ 。

感应电压的方向总是要阻碍电流及磁通的变化,图 3-17(a)中当电流增加时,磁通也增加,这时感应电压的实际正极朝着正电荷流来的方向,由此产生的感应电流与正在增加的电流方向相反,推迟了电流的增加;图 3-17(b)中当电流减小时,磁通也减小,这时感应电压的实际正极朝着正电荷离开的方向,由此产生的感应电流与正在减小的电流方向相同,推迟了电流的减小。最终导致电流的变化迟于电压的变化。电感元件的感应电压起到了抑制电流变化的作用,这使空心电感做成的“高频扼流圈”用于电子工程,铁芯电感做成的“平波电抗器”用于电力工程。

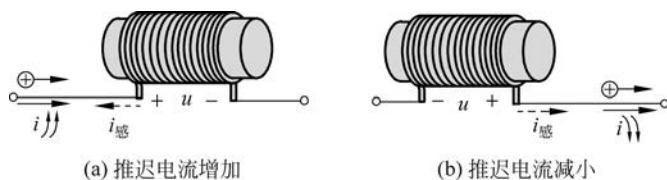


图 3-17 感应电压阻碍电流的变化

图 3-18(a)中,设电感电流

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

则根据电感元件的伏安关系得

$$u = L \frac{di}{dt} = \sqrt{2} \omega L I \cos \omega t = \sqrt{2} \omega L I \sin(\omega t + 90^\circ) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \phi_u)$$

电感电压超前电流 90° , 电流、电压之间的相位正交, 一个为零时, 另一个达到最大, 这与电阻元件有本质区别。

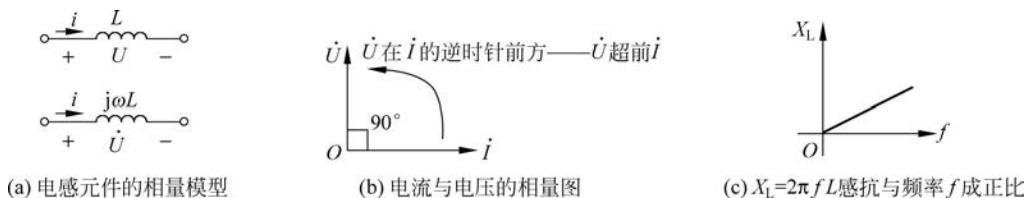


图 3-18 电感元件的 VCR 特性

3. 电感元件相量形式的 VCR 式

分别由电感电流、电压的瞬时值表达式写出其相量表达式为

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2} I \sin \omega t & \Rightarrow & \dot{I} = I \angle \phi_i = I \angle 0^\circ \\ u &= \sqrt{2} \omega L I \sin(\omega t + 90^\circ) & \Rightarrow & \dot{U} = U \angle \phi_u = \omega L I \angle 90^\circ = j\omega L \times \dot{I} \end{aligned}$$

则电感元件在关联参考方向下 VCR 式的相量形式为

$$\dot{U} = U \angle \psi_u = \omega L I \angle 90^\circ = j\omega L \times \dot{I} \quad \text{或} \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} \quad (3-16)$$

该式称为相量形式的欧姆定律,其中 $j\omega L$ 取代了原来欧姆定律中电阻的位置。 $j\omega L$ 称为复感抗, ωL 称为感抗,表征了电感元件对交流电流的阻碍作用,是电压与电流的有效值之比,用 X_L 表示,单位均为欧姆。注意区别两者。

感抗是电感电压与电流的有效值或振幅之比:

$$X_L = \omega L = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = 2\pi fL$$

复感抗是电感电压与电流的相量之比,其中包含了相位关系,“j”表明电感电压超前电流 90° 。

$$j\omega L = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = jX_L$$

复感抗不是相量,是一个计算用复数,字母顶端不打点。电感元件的相量模型如图 3-18(a)所示,图 3-18(b)为电流与电压的相量图, $\dot{U}$ 在 $\dot{I}$ 逆时针前方 90° ,称 $\dot{U}$ 超前。 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 若采用非关联参考方向,则式(3-16)变为

$$j\omega L = -\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

电感元件的感抗 X_L 不仅与自感系数 L 有关,还与信号频率 f 成正比,如图 3-18(c)所示。频率为零时,感抗为零,直流电不随时间变化,其电流与磁通的变化率均为零,故感应电压为零,因此直流电路中电感可用短路线替代,电感对直流电流没有阻碍作用;信号的频率增加, $f \uparrow X_L \uparrow$, 电流变化加快,感抗随之增加, $f \rightarrow \infty, X_L \rightarrow \infty$ 。因此人们常说“电感通直流阻交流扼高频”。

4. 电感元件的功率

1) 瞬时功率

瞬时功率是电压与电流瞬时值的乘积, u 、 i 、 p 的波形如图 3-19 所示。

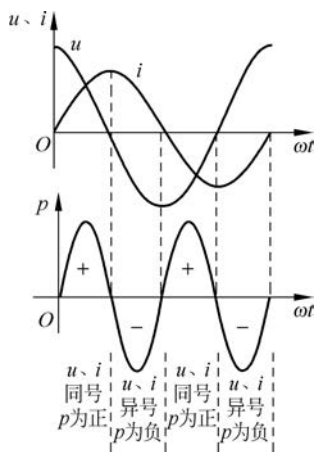


图 3-19 电感元件 u 、 i 、 p 的波形

$$p = u i = I_m \sin \omega t \times U_m \cos \omega t = 2UI \cos \omega t \sin \omega t = UI \sin 2\omega t$$

分析: ①在第一个和第三个 $1/4$ 周期, u 、 i 同号, p 为正值, i 从零增大到最大值, 由于 $W_L = \frac{1}{2} Li^2$, 所以电感元件吸收电源的能量, 作为磁场能储存起来。②在第二个和第四个 $1/4$ 周期, u 、 i 异号, p 为负值, i 从最大值减小到零, 储存的磁场能向外界释放发出。从瞬时功率的波形图可看到, 吸收与发出的能量相等, 因此电感元件是储能元件。

2) 平均功率(也称有功功率)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$$

该式表明电感元件的平均功率为零。电感不消耗电能, 整



个周期中并没有把电能转变成其他形式的能。

3) 无功功率

电感元件的无功功率定义为电感元件与外界电源之间能量往返交换的规模,其大小等于瞬时功率的最大值,用 Q_L 来表示,单位为乏(var)或千乏(kvar)。

$$Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L} \quad (3-17)$$

【例 3-5】 自感系数 $L = 19.1 \text{ mH}$ 的电感元件,接在 $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ) \text{ V}$ 的电源端。

(1) 计算复感抗、电流 i 和无功功率 Q_L 。

(2) 如果电源的频率增加为原频率的 2000 倍,其他不变,重新计算。

解 (1) 电感的复感抗

$$jX_L = j\omega L = j314 \times 19.1 \times 10^{-3} = j6\Omega$$

电源电压相量

$$\dot{U} = 220 \angle 30^\circ \text{ V}$$

根据相量欧姆定律

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{220 \angle 30^\circ}{6 \angle 90^\circ} \text{ A} = 36.67 \angle -60^\circ \text{ A}$$

电流瞬时值表达式

$$i = 36.67\sqrt{2} \sin(314t - 60^\circ) \text{ A}$$

无功功率

$$Q_L = UI = 220 \times 36.67 \text{ var} = 8067.4 \text{ var} = 8.07 \text{ kvar}$$

(2) 电源频率增加为原频率的 2000 倍时, $\omega' = 314 \times 2000 \text{ rad/s}$, 复感抗也增加 2000 倍, 则

$$jX'_L = j2000\omega L = j2000 \times 6 = j12 \text{ k}\Omega$$

电感电流下降 2000 倍, 即

$$\dot{I}' = \frac{\dot{U}}{jX'_L} = \frac{220 \angle 30^\circ}{12 \times 10^3 \angle 90^\circ} \text{ A} = 0.0183 \angle -60^\circ \text{ A}$$

电流瞬时值表示式为

$$i' = 0.0183\sqrt{2} \sin(314 \times 2000t - 60^\circ) \text{ A}$$

无功功率

$$Q'_L = UI' = 220 \times 0.0183 \text{ var} = 4.03 \text{ var}$$

计算表明, 电源的频率越高, 感抗越大, 电压有效值若不变, 电流越小。

5. 电感元件伏安关系的应用

汽车发动机的起动需要每个气缸的油气混合燃料在适当的时间里被点燃, 点燃由火花塞装置来实现, 火花塞是汽车发动机心脏的起搏器, 如图 3-20 所示。它的基本结构是一对由空气间隙隔开的电极, 两个电极分别接在点火电感线圈的两端, 通过在两个电极之间瞬间施加一个高达数千伏的电压, 形成横跨空气间隙的电火花, 点燃气缸中的油气混合燃料。不点火时, 汽车电池提供 12V 直流电压, 通过限流电阻与电感线圈串联, 形成一个稳定的电流; 点

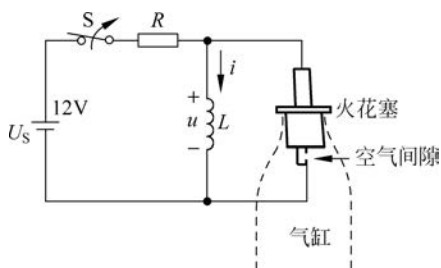


图 3-20 汽车点火电路

前电感线圈的电流值 i 为

$$i = \frac{12}{4} = 3\text{A}$$

假设开关 S 打开需要 $1\mu\text{s}$ 的时间,即电流从 3A 下降为零需要 $1\mu\text{s}$ 。则空气间隙两端的电压为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \approx L \frac{\Delta i_L}{\Delta t} = 6 \times 10^{-3} \times \frac{0 - 3}{1 \times 10^{-6}} = -18\text{kV}$$

类似的应用还有日关灯启辉点燃电路、燃气炉和燃气热水器中的高压打火电路等,均是利用电感电流突变产生的瞬时高压来工作的。



3.3.3 电容元件的特性

1. 对电容元件的认识

电容元件是利用储存电荷来储存电场能量的无源器件,如图 3-21 所示。各种类型的电容器如图 3-22 所示。和电感元件一样在电子和电力系统中应用广泛。

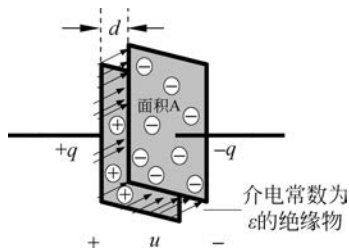


图 3-21 电容元件的构成



(a) 电解电容



(b) 瓷质电容

图 3-22 不同类型的电容器

两个彼此绝缘又互相靠近的导体,每个导体各引出一个电极,就构成一个电容器。实际电路中,只要两导体之间由绝缘材料隔开就组成一个电容,因此电容可能无处不在,这样的电容称为杂散电容。

若忽略电容器极板间所充绝缘物的漏电,两个导体由平行金属板来模拟,在一定频率范围内该电容器的电路模型就是理想电容元件。当有电压 u 加在电容元件的两极板之间时,两极板上分别储存有等量异号的电荷 $+q$ 与 $-q$,使正负极板间形成许多电场线,其中储存着电场能量 $W_C = \frac{1}{2}Cu^2$, W_C 与电容电压的平方成正比。电容元件所储存电荷用 q 表示,

常用单位为库仑(C),线性电容储存的电荷 q 与电压 u 成正比。即

$$q(t) = Cu(t) \quad (3-18)$$

式中: C ——电容元件的电容量(固有参数),简称电容,单位为法拉(F)或微法(μF)或皮法(pF), $1\text{F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{pF}$ 。

式(3-18)反映了线性电容元件的库-伏特性,其曲线是通过原点的直线,如图 3-23(b)所示。可变电容的电容 C 可根据需要发生变化,如图 3-23(c)所示。市售电容器的电容量可从通信系统用的几十皮法(pF)到电力系统中的几千微法(μF),还分为极性电容和非极性电容,极性电容一般为电解电容,电容量较大。

线性电容元件的电容量 C 定义为

$$C = \frac{q(t)}{u(t)} \quad (3-19)$$

该式表明,“某电容器的电容量较大”的意义是“施加单位电压能储存的电荷较多,其中储存的电场能量 $W_C = \frac{1}{2}Cu^2$ 也较强”。平行板电容器的电容量与两极板面积 A 成正比,与两极板间距离 d 成反比,即

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

式中: ϵ ——极板间绝缘物的介电常数。

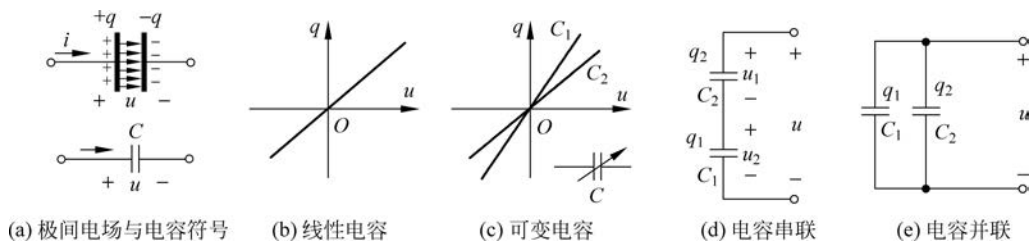


图 3-23 电容元件的库-伏特性曲线及串并联

电容元件在使用中不允许超过其额定电压,否则可能击穿极板间的绝缘层而损坏。当电容器的电容量足够而耐受电压的能力不够时,可将几个电容器串联,如图 3-23(d)所示。两个串联的电容所储存电荷相等,而总电压 u 等于两电容电压之和,即

$$u = u_1 + u_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q$$

则有

$$C = \frac{q}{u} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (3-20)$$

或

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (3-21)$$

该式表明,电容元件串联后等效电容减小了,可理解为两极板间距离 d 变大了。根据两串联电容所储存电荷相等还可推知

$$q = C_1 u_1 = C_2 u_2$$

则

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

该式表明,两电容串联时所加电压与电容量呈反比,电容量较小的所加电压更高。

当电容器所加电压符合额定值要求,但电容量不够时,可将几个电容器并联,如图 3-23(e) 所示。两个并联的电容其电压相等,总电荷 q 等于两电容所储存电荷之和,即

$$q = q_1 + q_2 = C_1 u + C_2 u = (C_1 + C_2) u$$

则有

$$C = \frac{q}{u} = C_1 + C_2 \quad (3-22)$$

该式表明,电容元件并联后等效电容增大了,可理解为总极板面积 A 增加了。

电容元件串、并联后,等效电容量的计算公式与电阻串、并联公式在形式上相反。

2. 电容元件的伏安关系

$q(t) = Cu(t)$ 是电容元件的定义式,其中包含电压,但与电容电流无关,为确定电容元件的伏安关系,将该式两侧同时对时间 t 求变化率,准确地说对时间 t 求导数,得到关联参考方向下电容元件的 VCR 式为

$$\frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \quad \text{或} \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (3-23)$$

根据第 1 章对电流的定义,通过导体横截面的电荷 q 对时间求导数就是流过该导体的电流。电容电流都是充放电电流,电荷在理想情况下不能越过两个极板间的绝缘物。充电时电流给极板带来电荷在先,然后才使 $q \uparrow, u \uparrow$; 放电时电流带走极板上电荷在先,才使 $q \downarrow, u \downarrow$; 因此电流的变化先于电压的变化,如图 3-24 所示。

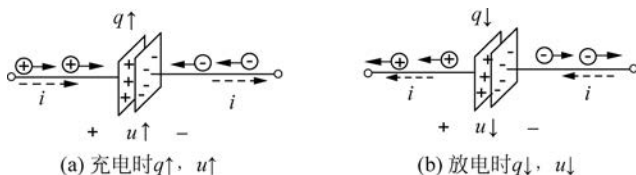


图 3-24 电容电流的变化先于电压的变化

式(3-23)表明,电容电流不是与该时刻的电压值本身成正比,而是与该时刻电压的变化率成正比,反映了电容元件也是动态元件。电压变化越快,电荷充放移动越快,电流越大;电容电压若不发生变化,电容器极板上的电荷量也不变,就不存在电荷的移动,即使电压再高,电容电流也为零;若要求电容电压突变,如从 5V 瞬间上升为 10V,即电压变化率 $\rightarrow \infty$,则电容电流 $\rightarrow \infty$ 。

图 3-25 中设电容电压

$$u = \sqrt{2} U \sin \omega t$$

则根据电容元件的伏安关系得

$$i = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2} \omega C U \cos \omega t = \sqrt{2} \omega C U \sin(\omega t + 90^\circ) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \phi_i)$$

应特别注意：电容元件的电流超前电压 90° ，这刚好与电感元件相反。电流、电压之间的相位也是正交，一个为零时，另一个达到最大。

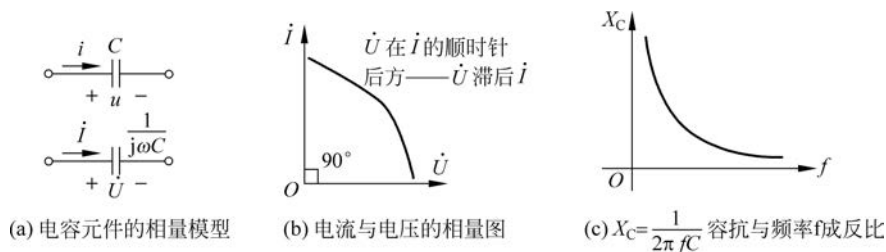


图 3-25 电容元件的 VCR 特性

3. 电容元件相量形式 VCR 式

分别由电容电压、电流的瞬时值表达式写出其相量表达式

$$u = \sqrt{2}U \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = U \angle \phi_u = U \angle 0^\circ$$

$$i = \sqrt{2}\omega CU \sin(\omega t + 90^\circ) \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = I \angle \phi_i = \omega CU \angle 90^\circ = j\omega C \times \dot{U} = \frac{\dot{U}}{1/j\omega C}$$

则电容元件在关联参考方向下 VCR 式的相量形式为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{1/j\omega C} \quad \text{或者} \quad \dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \times \dot{I} \quad (3-24)$$

该式也是相量形式的欧姆定律，其中 $\frac{1}{j\omega C}$ 取代了原来欧姆定律中电阻的位置。 $\frac{1}{j\omega C}$ 称为复容抗， $\frac{1}{\omega C}$ 称为容抗，单位均为欧姆。容抗表征了电容元件对正弦交流电流的阻碍作用，用 X_C 表示。注意区别两者：

容抗是电容电压与电流的有效值或振幅之比：

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{2\pi fC}$$

复容抗是电容电压与电流的相量之比，其中包含了相位关系，“ $-j$ ”表明了电容电压滞后电流 90° 。

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{j}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -jX_C$$

复容抗也是一个计算用复数，字母顶端不打点。图 3-25(a) 中下半部分的支路是电容元件的相量模型，电流与电压的相量图如图 3-25(b) 所示， $\dot{U}$ 在 $\dot{I}$ 顺时针后方 90° ， $\dot{U}$ 滞后于 $\dot{I} 90^\circ$ 。 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 若采用非关联参考方向，则式(3-24)变为

$$\frac{1}{j\omega C} = -\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

电容元件的容抗 X_C 不仅与电容量 C 成反比，还与频率 f 成反比，如图 3-25(c) 所示。频率为零时，直流电压不随时间变化，容抗无穷大，没有充放电现象，因此电容切断直流通路，

直流电路中电容可用开路替代; 信号频率增加, $f \uparrow X_C \downarrow$, 电容充放电速度加快, 容抗随之减小。因此电容元件与电感元件相反, 越是高频电流流过更畅通。因此人们常说“电容断直流阻交流通高频”。



4. 电容元件的功率

1) 瞬时功率

电容元件瞬时功率的波形如图 3-26 所示。

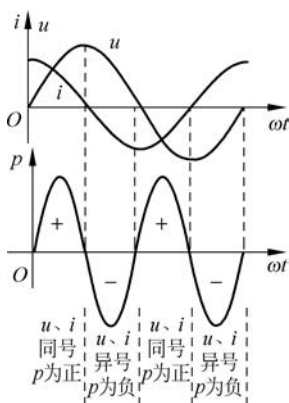


图 3-26 电容元件 u 、 i 、 p 的波形

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin \omega t \times I_m \cos \omega t \\ &= 2UI \cos \omega t \sin \omega t = UI \sin 2\omega t \end{aligned}$$

分析: (1) 在第一个和第三个 $\frac{1}{4}$ 周期, u 、 i 同号, p 为

正值, u 从零增到最大值, 由于 $W_C = \frac{1}{2}Cu^2$, 电容元件吸收电源的能量, 作为电场能储存起来。

(2) 在第二个和第四个 $\frac{1}{4}$ 周期, u 、 i 异号, p 为负值, u

从最大值减少到零时, 储存的能量向外界释放发出。从瞬时功率的波形图可看到, 吸收与发出的能量相等, 因此电容元件也是储能元件。

2) 平均功率(即有功功率)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$$

该式表明电容元件的平均功率为零。电容也不消耗电能, 整个周期中没有把电能转变成其他形式的能。

3) 无功功率

电容元件的无功功率是电容元件与外界电源之间能量往返交换的规模, 其大小也等于瞬时功率的最大值, 用 Q_C 来表示, 单位为乏(var)或千乏(kvar)。

$$Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C} \quad (3-25)$$

正弦电路的平均功率, 也称为有功功率, 是负载将电能转变成热能、光能、机械能而消耗的功率, 不可再生, 如电阻消耗的功率, 可理解为“实功”。而电感元件、电容元件的无功功率并没有转变成其他形式的能量, 每个周期在 L 、 C 中电能储存两次, 等量返还电源两次, 来回转换, 虽然电能没有被消耗, 但需要发电机来提供, 或者说这种转换占用了发电设备的容量, 使发电机不能被充分利用, 因负载并没有实际消耗这部分功率, 无功功率可理解为“虚功”。

但无功功率并不是“无用功”, 在电动机、继电器等电动设备中必须借助电感元件产生的磁场作为媒介, 才能将电能转变成机械能。从后面的学习可知, 其实电容元件可以为电感元件提供所需的无功功率, L 、 C 元件的无功功率具有互补的特性, 两者储存的能量可以由对方提供, 不足的才由电源提供。

【例 3-6】 电容量 $C = 10 \mu\text{F}$ 的电容器, 接在频率 $f = 50 \text{ Hz}$ 、 $u = 22\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ V}$ 的正弦交流电源上。

(1) 计算复容抗 Z_C 、电流 i 和无功功率 Q_C 。

(2) 如果电源的频率增加为原频率的 20 倍,其他不变,重新计算(1)。

(3) 画出电容电压与电流的相量图。

解 (1) 当频率 $f=50\text{Hz}$ 时,电源电压相量

$$\dot{U}=22\angle-120^\circ\text{V}$$

电容的复容抗

$$-jX_C=-j\frac{1}{\omega C}=-j\frac{1}{2\pi\times 50\times 10\times 10^{-6}}=-j318.3\Omega$$

根据相量欧姆定律,有

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{-jX_C}=\frac{22\angle-120^\circ}{-j318.3}=0.069\angle[-120^\circ-(-90^\circ)]=0.069\angle-30^\circ\text{A}$$

电流瞬时值表达式为

$$i=0.069\sqrt{2}\sin(\omega t-30^\circ)\text{A}$$

无功功率为

$$Q_C=I^2X_C=\frac{U^2}{X_C}=UI=22\times 0.069=1.52\text{var}$$

(2) 当频率增加为原频率的 20 倍时, $f'=50\times 20=1000\text{Hz}$ 。

电容的复容抗

$$-jX'_C=-j\frac{1}{\omega'C}=-j\frac{1}{2\pi\times 1000\times 10\times 10^{-6}}=-j15.92\Omega \quad (\text{容抗下降 20 倍})$$

电容电流的相量

$$\dot{I}'=\frac{\dot{U}}{-jX'_C}=\frac{22\angle-120^\circ}{-j15.92}=1.38\angle-30^\circ\text{A} \quad (\text{电流增加 20 倍})$$

电流瞬时值表达式为

$$i'=1.38\sqrt{2}\sin(\omega't-30^\circ)\text{A}$$

无功功率

$$Q'_C=I'^2X'_C=\frac{U^2}{X'_C}=UI'=22\times 1.38\text{var}=30.36\text{var}$$

计算表明,信号的频率越高,容抗越小,电压有效值若不变,电流越大。

(3) 电容电压与电流的相量图如图 3-27 所示。

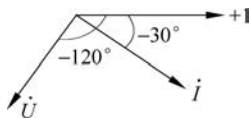


图 3-27 例 3-6 相量图

【课后练习】

3.3.1 如图 3-28 所示,已知电感元件 L 为 5mH ,接至有效值为 10V 、角频率为 $\omega=10^3\text{rad/s}$ 的正弦电压,电感电流有效值 $I=(\quad)\text{A}$,在波形图中补画电流波形,并画出电流、电压的相量图。

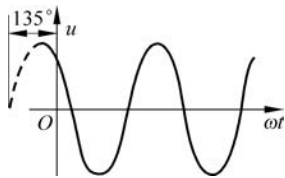


图 3-28 3.3.1 波形图

3.3.2 已知电容元件 C 为 $0.05\mu\text{F}$,接至有效值为 10V 、初相为 30° 、角频率为 $\omega=10^6\text{rad/s}$ 的正弦电压,电容元件的电流瞬时表达式为 $i=(\quad)\text{A}$,并画出电流、电压的相量图。

3.3.3 如图 3-29 所示电路中,各电容的电容量、交流电源的电压值和频率均相同,问哪个电流表的读数最大? 哪个为零?

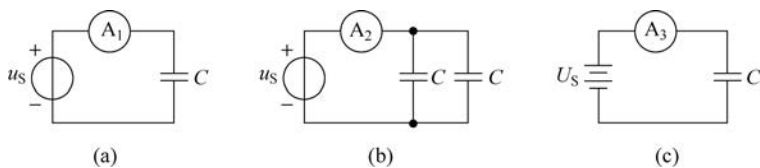


图 3-29 3.3.3 电路图

3.3.4 纯电感元件在交流电路中,判断下列表达式,正确填√,错误填×。

$$i = \frac{u}{X_L} (\quad), I = \frac{U}{\omega L} (\quad), i = \frac{u}{\omega L} (\quad), \dot{U} = j\omega L \dot{I} (\quad)。$$

3.3.5 纯电容元件在交流电路中,判断下列表达式,正确填√,错误填×。

$$I = \frac{U}{1/\omega C} (\quad), I = \frac{U}{\omega C} (\quad), \dot{U} = \dot{I} \frac{1}{j\omega C} (\quad), i = \frac{u}{1/\omega C} (\quad)。$$

3.3.6 RLC 串联电路在频率为 50Hz 时,容抗、感抗、电阻值如图 3-30(a) 所示,图 3-30(b) 频率上升到 150Hz,填写此时各阻抗值。

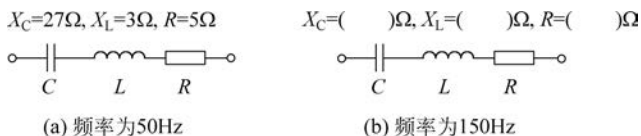


图 3-30 3.3.6 电路图

3.4 RLC 串联正弦交流电路分析

认识了正弦电路中单个无源元件,掌握了感抗、容抗各自的特性后,本节讨论正弦电路中电阻、电感、电容的串联电路,注意理解 R 、 L 、 C 如何形成一个矛盾的统一体。

3.4.1 RLC 串联电路的伏安关系

如图 3-31(a) 所示为电阻、电感、电容串联电路的相量模型,各元件电流相等,设 $\dot{I} = I \angle 0^\circ$,根据 KVL 定律有

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} = \dot{I} \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]$$

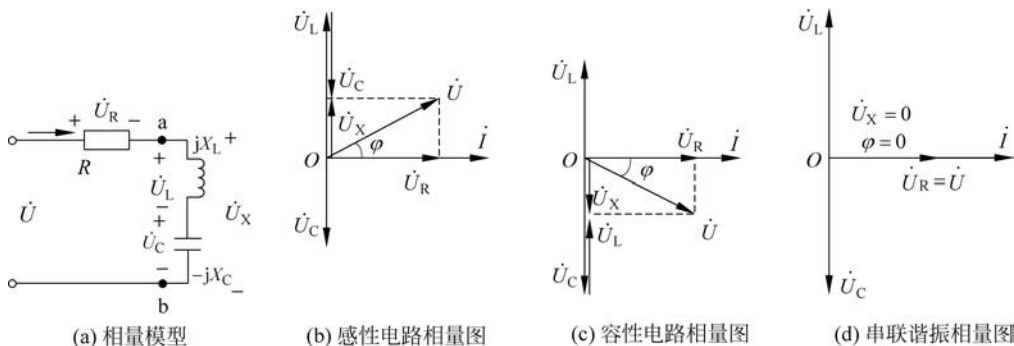


图 3-31 电阻、电感、电容串联电路及相量图

定义复阻抗 Z 为电压相量与电流相量之比,即

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle (\psi_u - \psi_i) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} \angle \arctan \frac{X}{R} = |Z| \angle \varphi \end{aligned} \quad (3-26)$$

复阻抗的实部是电阻

$$R = |Z| \cos \varphi$$

复阻抗的虚部称为电抗

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = |Z| \sin \varphi$$

复阻抗的模值简称阻抗,反映了 RLC 串联电路总电压与电流之间的大小关系

$$|Z| = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3-27)$$

复阻抗的辐角称为阻抗角,反映了总电压与电流之间的相位关系,是电压超前电流的相位

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (3-28)$$

式(3-26)也是相量欧姆定律。感抗 X_L 、容抗 X_C 本身恒为正值,但感抗与容抗之差的电抗 $X = X_L - X_C$ 却可能为正、为负或为零,三种情况下电路的性质有根本区别。

$\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_L$ 、 $\dot{U}_C$ 三者分别与电流同相、超前电流 90° 、滞后电流 90° ,相互间是矛盾的, $\dot{U}$ 最终取什么相位,取决于 ωL 与 $\frac{1}{\omega C}$ 及 R 的相对大小。

通过画出 3 种情况下的相量图,可直观分析 3 种不同电路的性质。设 $\dot{I} = I \angle 0^\circ$ 水平向右,感抗电压 $\dot{U}_L$ (朝上)与容抗电压 $\dot{U}_C$ 方向相反,两者的相量和为电抗电压 $\dot{U}_X$, $\dot{U}_X = \dot{U}_L + \dot{U}_C$,是 a、b 间的电压,电抗电压 $\dot{U}_X$ 与电阻电压 $\dot{U}_R$ 形成的平行四边形的对角线决定总电压 $\dot{U}$ 的相位和大小。

当 $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ 时, $X > 0$, $\dot{U}_X$ 朝上, ab 间等效为感抗, $\varphi > 0$, $\dot{U}$ 超前 $\dot{I}$, 为感性电路,如图 3-21(b)所示。

当 $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ 时, $X < 0$, $\dot{U}_X$ 朝下, ab 间等效为容抗, $\varphi < 0$, $\dot{U}$ 滞后 $\dot{I}$, 为容性电路,如图 3-31(c)所示。

当 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 时, $X = 0$, $\dot{U}_X = 0$, ab 间等效为短路, $\varphi = 0$, $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 同相,这时电路的状态称为串联谐振,为电阻性电路,如图 3-31(d)所示。

注意“感性电路”是感抗与电阻的串联组合,其阻抗角 $0 < \varphi < 90^\circ$,不同于“纯电感电路”,纯电感电路的阻抗角 $\varphi = 90^\circ$;同理,“容性电路”是容抗与电阻的串联组合,其阻抗角 $-90^\circ < \varphi < 0$,不同于“纯电容电路”,纯电容电路的阻抗角 $\varphi = -90^\circ$ 。



3.4.2 串联电路的电压三角形与阻抗三角形

如图 3-31(b)和(c)所示的相量图中有一个直角三角形,锐角 φ 是串联电路的阻抗角,斜边长度是总电压有效值 U , φ 的邻边长度是电阻电压有效值 U_R , φ 的对边长度是电抗电压有效值 U_X ,重画于图 3-32(a),称为串联电路的电压三角形。电压三角形的每条边除以 I ,就得到串联电路的阻抗三角形如图 3-32(b)所示,这两个三角形是相似三角形。因此有

$$\frac{U}{|Z|} = \frac{U_R}{R} = \frac{U_X}{X} = I \quad (3-29)$$

与图 3-32 两个三角形有联系的公式是

$$\begin{array}{l} \text{电压三角形} \\ \text{相联系的公式} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2} \\ U_R = U \cos \varphi \\ U_X = U \sin \varphi \\ \varphi = \arctan \frac{U_X}{U_R} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{阻抗三角形} \\ \text{相联系的公式} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ R = |Z| \cos \varphi \\ X = |Z| \sin \varphi \\ \varphi = \arctan \frac{X}{R} \end{array} \right.$$

式中都不是复数,仅指量的大小和正负,应用时注意 U 、 U_R 、 $|Z|$ 、 R 恒为正值,而 U_X 、 X 和 φ 有正有负,感性电路时为正;容性电路时为负。



图 3-32 串联电路的电压三角形与阻抗三角形

若电路仅为电阻与感抗串联,则有

$$Z = R + j\omega L = R + jX_L, \quad U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

若电路仅为电阻与容抗串联,则有

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - jX_C, \quad U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

若电路仅为感抗与容抗串联,则有

$$Z = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = jX, \quad U = |U_L - U_C|$$

若电路为容抗与容抗串联,则有

$$Z = -j\left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}\right) = -j(X_{C_1} + X_{C_2}), \quad U = U_{C_1} + U_{C_2}$$

以上 4 种情况的相量图分别如图 3-33(a)、(b)、(c)、(d)所示,求两元件串联后电压有效值的记忆方法:正交元件勾股弦;相反元件互相减;同阻抗角元件直接加。

【例 3-7】 有一个 RLC 串联电路, $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ) \text{ V}$, $R = 30\Omega$, $L = 254\text{mH}$, $C = 80\mu\text{F}$ 。计算:

(1) 感抗、容抗、电抗及复阻抗;

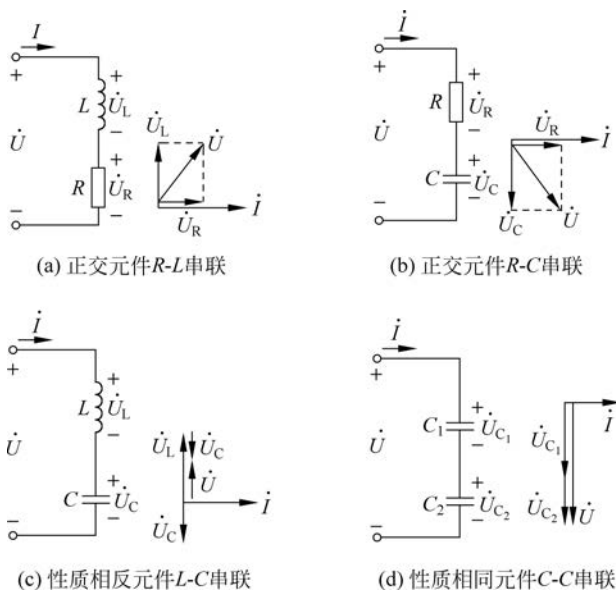


图 3-33 串联电路求电压有效值的记忆方法

- (2) 电流 i ;
 (3) 各分电压;
 (4) 验证 $U \neq U_R + U_L + U_C$, 并画出相量图。

解 (1) 感抗

$$X_L = \omega L = 314 \times 254 \times 10^{-3} = 80 \Omega$$

容抗

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 80 \times 10^{-6}} = 40 \Omega$$

电抗

$$X = X_L - X_C = 80 - 40 = 40 \Omega$$

复阻抗的模值

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \Omega$$

阻抗角

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = 53.1^\circ$$

复阻抗

$$Z = R + jX_L - jX_C = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 30 + j(80 - 40) = 50 \angle 53.1^\circ \Omega \quad (\text{感性})$$

(2) 根据相量欧姆定律

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220 \angle 30^\circ}{50 \angle 53.1^\circ} = 4.4 \angle -23.1^\circ \text{ A}$$

电流的瞬时值

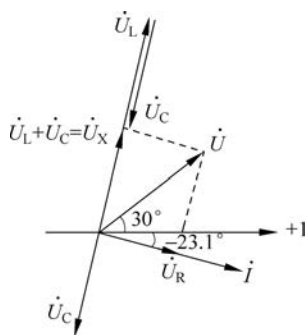


图 3-34 例 3-7 相量图

$$i = 4.4\sqrt{2} \sin(314t - 23.1^\circ) \text{ A}$$

(3) 电阻电压相量

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = 30 \times 4.4 \angle -23.1^\circ = 132 \angle -23.1^\circ \text{ V}$$

$$u_R = 132\sqrt{2} \sin(314t - 23.1^\circ) \text{ V}$$

电感电压相量

$$\dot{U}_L = Z_L \dot{I} = j\omega L \dot{I} = j80 \times 4.4 \angle -23.1^\circ = 352 \angle 66.9^\circ \text{ V}$$

$$u_L = 352\sqrt{2} \sin(314t + 66.9^\circ) \text{ V}$$

电容电压相量

$$\dot{U}_C = Z_C \dot{I} = -jX_C \dot{I} = -j40 \times 4.4 \angle -23.1^\circ = 176 \angle -113.1^\circ \text{ V}$$

$$u_C = 176\sqrt{2} \sin(314t - 113.1^\circ) \text{ V}$$

(4) 验证

$$U_R + U_L + U_C = 132 + 352 + 176 = 660 \text{ V} \neq U = 220 \text{ V}$$

计算结果中, $U_L > U$ (分电压大于总电压), 这在直流电路中不可能发生, 这是因为有两个性质对立的元件相串联, 电压内部平衡了一部分, 相量图如图 3-34 所示。

【例 3-8】 电子设备中, 经常要求电路的输出信号要将输入信号向前移相或向后移相。

图 3-35(a) 就是最简单的移相电路。已知输入信号 $u_1(t) = \sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$, 欲使输出电压 u_2 超前输入电压 u_1 60° , 求电感的自感系数 L 及输出电压 u_2 。

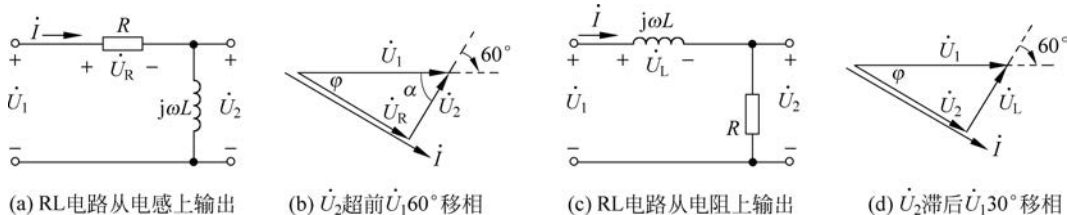


图 3-35 例 3-8 电路图、相量图

解 该电路为感性, 电压超前电流。图 3-35(b) 是相量图, 其中 $\dot{U}_1$ 设为参考相量, 水平向右画, 电流 $\dot{I}$ 滞后电压画到第四象限; $\dot{U}_R$ 与电流同相, 与 $\dot{I}$ 在同一方向上; $\dot{U}_2$ 超前电流 90° , $\dot{U}_2$ 接在 $\dot{U}_R$ 的箭尾画; $\dot{U}_R + \dot{U}_2 = \dot{U}_1$, 形成一个电压三角形。确定相位差须观察两个相量箭头间(或箭头延长线)的夹角, 因此 $\alpha = 60^\circ$, 则该电路总电压 $\dot{U}_1$ 超前电流 $\dot{I}$ 的角度(即阻抗角)为

$$\varphi = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

根据图 3-35(b) 的电压三角形, 得

$$\sin \varphi = \sin 30^\circ = \frac{U_2}{U_1}, \quad U_2 = U_1 \times \sin 30^\circ = 1 \times 0.5 = 0.5 \text{ V}$$

因此

$$u_2 = 0.5\sqrt{2} \sin(1000t + 60^\circ) \text{ V}$$

阻抗三角形与电压三角形为相似三角形,得

$$\tan\varphi = \tan 30^\circ = \frac{\omega L}{R}, \quad L = \frac{R \tan 30^\circ}{\omega} = \frac{1000 \times \tan 30^\circ}{1000} = 0.57 \text{ H}$$

图 3-35(a) 实现输出超前移相,超前移相范围 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, R 比 ωL 大得越多, $\dot{U}_2$ 比 $\dot{U}_1$ 相位超前越多。同是这个电路,若如图 3-35(c) 所示, R 与 L 交换位置,从 R 上输出电压 $\dot{U}_2$, $\dot{U}_1$ 与 $\dot{I}$ 未变,则 $\dot{U}_2$ 将滞后 $\dot{U}_1$ 30° , 实现输出滞后移相,滞后的移相范围 $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, 这时 R 比 ωL 大得越多, $\dot{U}_2$ 滞后 $\dot{U}_1$ 的相位越少。

移相也常用如图 3-36(a)、(b) 所示的 RC 串联电路来实现,二者哪个输出超前移相? 哪个输出滞后移相? 请自行画相量图分析。

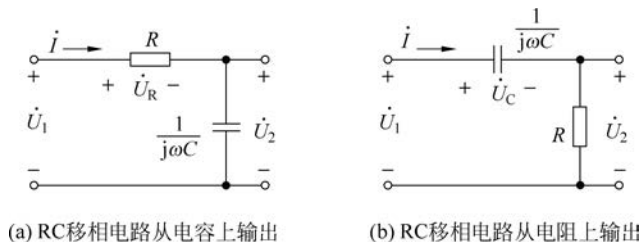


图 3-36 RC 移相电路

【例 3-9】 线圈参数包含绕线电阻 R 和自感系数 L , 为了测量 R 和 L , 图 3-37(a) 将一个电容与之串联, 将电源频率调至 $\omega = 2 \times 10^4 \text{ rad/s}$, 电压调至 $U_S = 14.14 \text{ V}$, 测得线圈电压 $U_{RL} = 22.4 \text{ V}$, 电容电压 $U_C = 10 \text{ V}$, 电流 $I = 1 \text{ mA}$, 求 R 和 L 分别为多少。

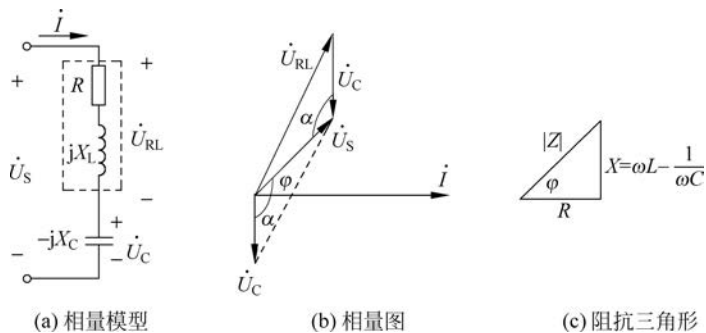


图 3-37 例 3-9 电路图、相量图

解 设 $\dot{I}$ 为参考相量, $\dot{U}_{RL}$ 超前电流画在第一象限, $\dot{U}_C$ 滞后电流 90° 垂直向下, $\dot{U}_{RL}$ 和 $\dot{U}_C$ 的相量和即为电源电压相量 $\dot{U}_S$ 。电压三角形是一个钝角三角形, 原因是虚线框中不是纯电阻元件。对该电压三角形运用余弦定理, 得

$$U_{RL}^2 = U_S^2 + U_C^2 - 2U_S U_C \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{U_{RL}^2 - U_S^2 - U_C^2}{-2U_S U_C} = \frac{22.4^2 - 14.14^2 - 10^2}{-2 \times 14.14 \times 10} = -0.71$$

$$\alpha = \arccos(-0.71) = 135^\circ$$

由相量图可读出该串联电路的阻抗角

$$\varphi = \alpha - 90^\circ = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

由已知条件得

$$|Z| = \frac{U_s}{I} = \frac{14.14}{1 \times 10^{-3}} = 14\,140\Omega, \quad X_C = \frac{U_C}{I} = \frac{10}{1 \times 10^{-3}} = 10\,000\Omega$$

根据阻抗三角形图 3-37(c), 得

$$R = |Z| \cos \varphi = 14\,141 \times \cos 45^\circ = 10\,000\Omega$$

$$X = |Z| \sin \varphi = 14\,141 \times \sin 45^\circ = 10\,000\Omega$$

$$X = X_L - X_C, \quad X_L = \omega L = X + X_C = 20\,000\Omega$$

所以

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{20\,000}{2 \times 10^4} = 1\text{H}$$

该例题结合电路的相量图, 用到了三角函数的余弦定理, 显示了正弦电路解题方法的多样性、灵活性, 甚至正弦定理、相似三角形对应边成比例, 都可应用。



3.4.3 多个阻抗串联的分压电路

阻抗也用符号“ $\square$ ”表示, 图 3-38(a) 中两个阻抗串联后的等效阻抗及分压公式, 与电阻电路有相同的结构。

等效阻抗

$$Z = Z_1 + Z_2$$

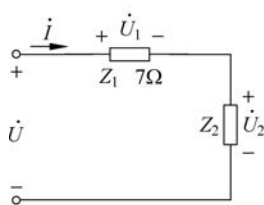
电流相量

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_1 + Z_2}$$

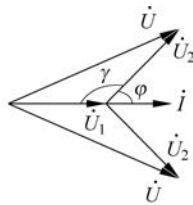
分压公式

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1 + Z_2} Z_1, \quad \dot{U}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1 + Z_2} Z_2$$

【例 3-10】 如图 3-38 所示电路中, 电压有效值 $U_1 = 7\text{V}$, $U_2 = 15\text{V}$, $U = 20\text{V}$, $Z_1 = 7\Omega$, 试计算阻抗 Z_2 。



(a) 两个阻抗串联



(b) 双解相量图

图 3-38 例 3-10 电路图、相量图

解 设电流 $\dot{I}$ 为参考相量, 则 $\dot{U}_1$ 与 $\dot{I}$ 同相, 即

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{\dot{U}_1}{7} = \frac{7 \angle 0^\circ}{7} = 1 \angle 0^\circ \text{A}$$

得

$$|Z_2| = \frac{U_2}{I} = \frac{15}{1} = 15\Omega$$

阻抗 Z_2 的性质未定,为感性阻抗或容性阻抗,都合乎题意,因此该题有双解。

先根据余弦定理求钝角 γ :

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{-2U_1U_2} = \frac{20^2 - 15^2 - 7^2}{-2 \times 15 \times 7} = -0.6$$

$$\gamma = \arccos(-0.6) = 126.87^\circ, \quad \varphi = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 126.87^\circ = 53.13^\circ$$

因此

$$Z = 15\angle 53.13^\circ\Omega \quad \text{或} \quad Z = 15\angle -53.13^\circ\Omega$$

【课后练习】



3.4.1 在 RLC 串联电路中,已知 $R=5\Omega$, $L=8\text{mH}$, $C=200\mu\text{F}$, 电源频率在 100Hz 时, $Z=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}=(\quad)\Omega=(\quad)\Omega$, 为 $(\quad)$ 性阻抗。

当电源频率在 1000Hz 时, $Z=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}=(\quad)\Omega=(\quad)\Omega$, 为 $(\quad)$ 性阻抗。

3.4.2 根据相量欧姆定律,计算并填空。

(1) $\dot{U}=120\angle-30^\circ\text{V}$, $\dot{I}=4\angle30^\circ\text{A}$, $Z=(\quad)+j(\quad)\Omega$ 。

(2) $\dot{U}=(160+j120)\text{V}$, $\dot{I}=(24-j32)\text{A}$, $Z=(\quad)+j(\quad)\Omega$ 。

(3) $\dot{U}=100\angle36.9^\circ\text{V}$, $Z=(4+j3)\Omega$, $\dot{I}=(\quad)\angle(\quad)^\circ\text{A}$ 。

(4) $u=50\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)\text{V}$, $Z=(2.5+j4.33)\Omega$, $i=(\quad)\text{A}$ 。

(5) $i=4\sin(\omega t+153^\circ)\text{A}$, $Z=(1+j17.3)\Omega$, $u=(\quad)\text{V}$ 。

3.4.3 电阻与电感串联支路接于 100V 正弦电压源,若 $R=\omega L=10\Omega$,则电阻电压 $U_R=(\quad)\text{V}$,电感电压 $U_L=(\quad)\text{V}$,该支路的阻抗角 $\varphi=(\quad)$ 。

3.4.4 在 RLC 串联电路中,当复阻抗虚部大于零时,电路呈 $(\quad)$ 性;当虚部小于零时,电路呈 $(\quad)$ 性;当虚部等于零时,电路呈 $(\quad)$ 性,此时阻抗角 $\varphi=(\quad)^\circ$,总电压和电流 $(\quad)$ 相,称电路发生了 $(\quad)$ 谐振。

3.4.5 如图 3-39 所示,电路中 $\dot{I}=2\angle0^\circ\text{A}$, $\dot{U}_S=(\quad)\text{V}$,并补全相量图。

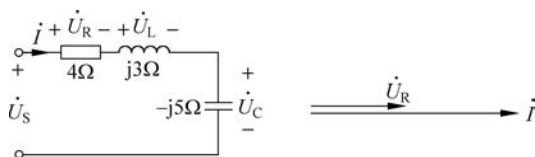


图 3-39 3.4.5 电路图、相量图

3.5 RLC 并联正弦交流电路分析

RLC 并联电路,也是正弦电路中最基础的单元电路,电流电压之间的关系与串联电路有相对应的特点,注意比较,联合记忆。



3.5.1 RLC 并联电路的伏安关系

图 3-40(a)为电阻、感抗、容抗并联的相量模型,各元件上的电压相等,设 $\dot{U} = U \angle 0^\circ$, 根据 KCL,有

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX_L} + \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \dot{U} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)$$

定义,容纳 $B_C = \omega C = \frac{1}{X_C}$,感纳 $B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{X_L}$,电纳 $B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L}$ 。

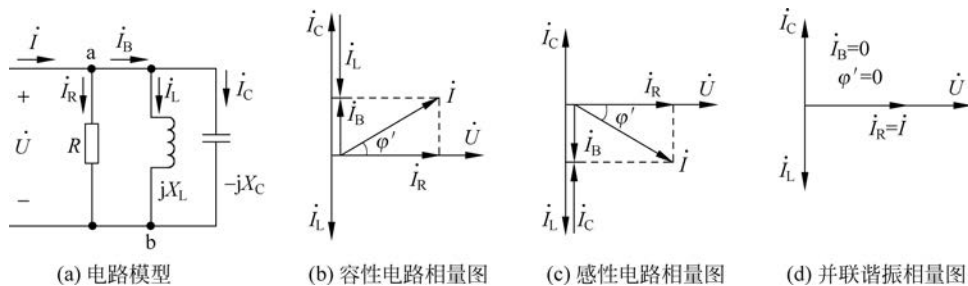


图 3-40 电阻、感抗、容抗并联电路及相量图

定义,复导纳 Y 为电流相量与电压相量之比,单位均为西门子(S),即

$$\begin{aligned} Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} &= \frac{I}{U} \angle (\psi_i - \psi_u) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \\ &= \sqrt{G^2 + B^2} \angle \arctan \frac{B}{G} = |Y| \angle \varphi' \end{aligned} \quad (3-30)$$

复导纳的实部是电导,则

$$G = \frac{1}{R} = |Y| \cos \varphi'$$

虚部是电纳,则

$$B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L} = |Y| \sin \varphi'$$

复导纳的模值简称导纳,反映了 RLC 并联电路总电流与电压之间的大小关系,即

$$\begin{aligned} |Y| &= \frac{I}{U} = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2} \\ &= \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{G^2 + B^2} \end{aligned} \quad (3-31)$$

复导纳的辐角称为导纳角,反映了总电流与电压之间的相位关系,是电流超前电压的相

位,即

$$\varphi' = \psi_i - \psi_u = \arctan \frac{B}{G} = \arctan \frac{\omega C - 1/\omega L}{G} \quad (3-32)$$

导纳角的定义与阻抗角相反。

容纳 B_C 、感纳 B_L 本身恒为正值,但容纳与感纳之差的电纳 $B = B_C - B_L$,却可能为正、为负或为零,三种情况使电路的性质出现根本区别。设 RLC 并联电路的电压 $\dot{U} = U \angle 0^\circ$, $\dot{I}_R$ 、 $\dot{I}_L$ 、 $\dot{I}_C$ 三者分别与电压同相、滞后电压 90° 、超前电压 90° ,相互间是矛盾的,那么 $\dot{I}$ 取什么相位,取决于 ωC 与 $1/\omega L$ 及 G 的相对大小。设 $\dot{U} = U \angle 0^\circ$ 水平向右画,感纳电流 $\dot{I}_L$ 朝下画,与容纳电流 $\dot{I}_C$ 方向相反,两者的相量和为电纳电流 $\dot{I}_B$, $\dot{I}_B = \dot{I}_L + \dot{I}_C$,是 a 点流向 b 点的电流。电纳电流 $\dot{I}_B$ 与电阻电流 $\dot{I}_R$ 形成的平行四边形的对角线决定总电流 $\dot{I}$ 的相位和大小。

当 $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ 时, $B > 0$, $\dot{I}_B$ 朝上, ab 间等效为容纳, $\varphi' > 0$, $\dot{I}$ 超前 $\dot{U}$, 为容性电路, 相量图如图 3-40(b) 所示。

当 $\omega C < \frac{1}{\omega L}$ 时, $B < 0$, $\dot{I}_B$ 朝下, ab 间等效为感纳, $\varphi' < 0$, $\dot{I}$ 滞后 $\dot{U}$, 为感性电路, 相量图如图 3-40(c) 所示。

当 $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ 时, $B = 0$, $\dot{I}_B = 0$, ab 间等效为开路, $\varphi' = 0$, $\dot{I}$ 与 $\dot{U}$ 同相, 为电阻性电路, 相量图如图 3-40(d) 所示。这时总电流 $\dot{I} = \dot{I}_R$, 电路发生了并联谐振, 整个电路就等效为一个电导 $G = \frac{1}{R}$ 。

3.5.2 并联电路的电流三角形与导纳三角形

如图 3-40(b) 和 (c) 所示, 相量图中有一个直角三角形, 锐角 φ' 是并联电路的导纳角, 斜边长度是总电流有效值 I , φ' 的邻边长度是电阻电流有效值 I_R , φ' 的对边长度是电纳电流有效值 I_B , 重画于图 3-41(a), 称为并联电路的电流三角形。

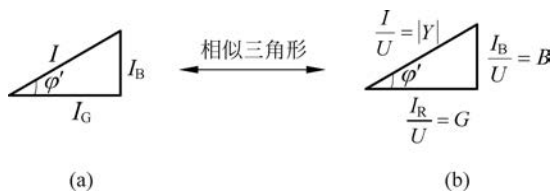


图 3-41 并联电路的电流三角形与导纳三角形

电流三角形每条边的长度除以 U 就得到并联电路的导纳三角形, 这两个三角形是相似三角形。因此有

$$\frac{I}{|Y|} = \frac{I_R}{G} = \frac{I_B}{B} = U \quad (3-33)$$



与图 3-41 两个三角形有联系的公式是

$$\begin{array}{l} \text{电流三角形} \\ \text{相联系的公式} \end{array} \begin{cases} I = \sqrt{I_G^2 + I_B^2} \\ I_G = I \cos \varphi' \\ I_B = I \sin \varphi' \\ \tan \varphi = \frac{I_B}{I_G} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{导纳三角形} \\ \text{相联系的公式} \end{array} \begin{cases} |Y| = \sqrt{G^2 + B^2} \\ G = |Y| \cos \varphi' \\ B = |Y| \sin \varphi' \\ \tan \varphi' = \frac{B}{G} \end{cases}$$

式中都不是复数, I 、 I_R 、 $|Y|$ 、 G 恒为正值, 而 I_B 、 B 和 φ' 有正有负, 容性电路时为正, 感性电路时为负。

若电路仅为电阻与感纳并联, 则有

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = G - jB_L, \quad I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

若电路仅为电阻与容纳并联, 则有

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C = G + jB_C, \quad I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

若电路仅为感纳与容纳并联, 则有

$$Y = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = jB, \quad I = |I_C - I_L|$$

若电路仅为感纳与感纳并联, 则有

$$Y = -j\left(\frac{1}{\omega L_1} + \frac{1}{\omega L_2}\right) = -j(B_{L_1} + B_{L_2}), \quad I = I_{L_1} + I_{L_2}$$

以上 4 种情况的相量图分别如图 3-42(a)、(b)、(c)、(d) 所示, 求两元件并联后电流有效值的记忆方法: 正交元件勾股弦; 相反元件互相减; 同导纳角元件直接加。

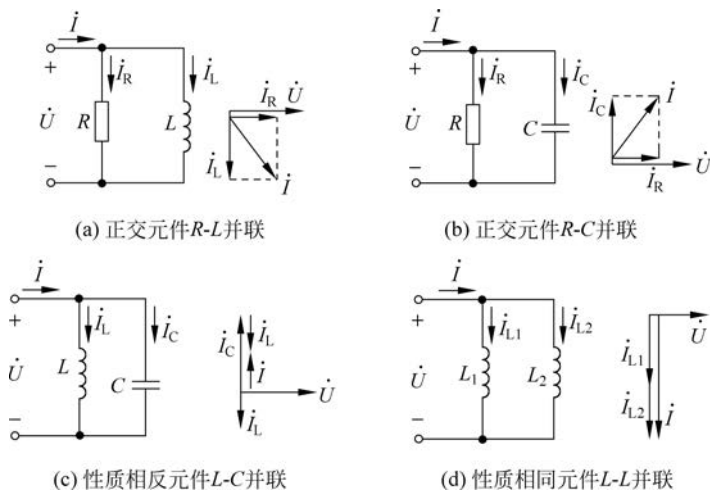


图 3-42 并联电路求电流有效值的记忆方法

【例 3-11】 RLC 并联电路如图 3-43(a) 所示。已知 $I_S = 5.4\text{A}$, (1) 求电路的复导纳; (2) 求电流源两端的电压及其他支路电流的瞬时值, 画出相量图。

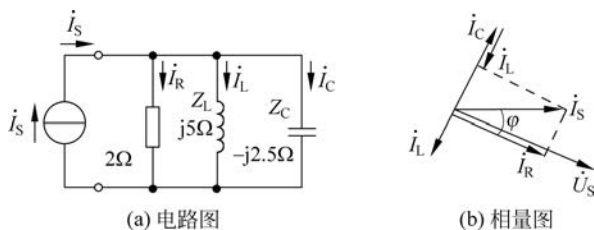


图 3-43 例 3-11 电路图及其相量图

解 (1) 求复导纳, 注意单条支路的复导纳就是其复阻抗的倒数, 各条支路的复导纳之和就是电路总的复导纳。

$$Y = G + jB_C - jB_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/j\omega C} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{-j2.5} + \frac{1}{j5} = 0.54 \angle 21.8^\circ \text{ S}$$

(2) 设电源电流为参考相量 $\dot{I}_S = 5.4 \angle 0^\circ \text{ A}$, 则电源电压的相量为

$$\dot{U}_S = \frac{\dot{I}_S}{Y} = \frac{5.4 \angle 0^\circ}{0.54 \angle 21.8^\circ} = 10 \angle -21.8^\circ \text{ V}$$

电源电压的瞬时值为 $u = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 21.8^\circ) \text{ V}$, 其他支路的电流相量及瞬时值分别为

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_S}{R} = \frac{10 \angle -21.8^\circ}{2} = 5 \angle -21.8^\circ \text{ A}, \quad i_R = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 21.8^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_S}{-jX_C} = \frac{10 \angle -21.8^\circ}{-j2.5} = 4 \angle 68.2^\circ \text{ A}, \quad i_C = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 68.2^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_S}{jX_L} = \frac{10 \angle -21.8^\circ}{j5} = 2 \angle -111.8^\circ \text{ A}, \quad i_L = 2\sqrt{2} \sin(\omega t - 111.8^\circ) \text{ A}$$

【例 3-12】 如图 3-44 所示电路, 安培表读数分别为 $I_R = 3 \text{ A}$, $I_L = 10 \text{ A}$, $I_C = 6 \text{ A}$ 。已知 $f = 50 \text{ Hz}$, $L = 0.08 \text{ H}$, 求 U 、 I 、 C 。

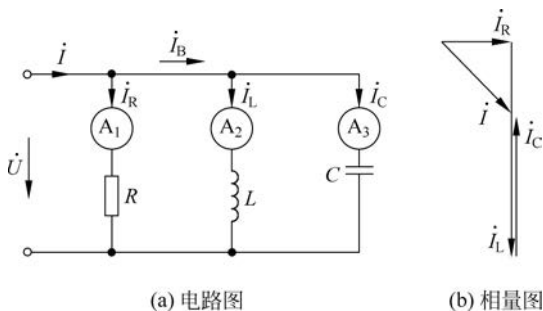


图 3-44 例 3-12 电路图及其相量图

解 先设 $\dot{I}_R = 3 \angle 0^\circ \text{ A}$, 则

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = 3 \angle 0^\circ + 10 \angle -90^\circ + 6 \angle 90^\circ = 5 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

并联电路各元件电压相等, 有

$$U = U_L = \omega L I_L = 314 \times 0.08 \times 10 = 251.2 \text{ V}$$

求得电容支路的容纳

$$B_C = \omega C = \frac{I_C}{U} = \frac{6}{251.2} = 0.024 \text{ S}$$

求得电容量

$$C = \frac{0.024}{\omega} = \frac{0.024}{314} = 76.43 \mu\text{F}$$



3.5.3 多个阻抗并联的分流电路

多个阻抗并联的电路如图 3-45 所示,其等效阻抗及分流公式,与电阻电路有相同的结构。

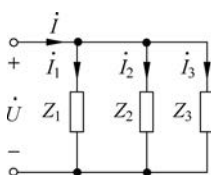


图 3-45 三个阻抗并联

等效阻抗

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

仅两个阻抗并联时,有

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

分流公式为

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{i}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} \times \frac{1}{Z_1}$$

仅两个阻抗并联时,有

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{i}}{Z_1 + Z_2} \times Z_2$$

【例 3-13】 如图 3-46 所示,已知 $R_1 = 3\Omega$, $X_1 = 4\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $X_2 = 6\Omega$ 。 $u = 220\sqrt{2}\sin(314t + 10^\circ)\text{V}$, 试求 i_1 、 i_2 和 i 。

解

$$Z_1 = R_1 + jX_1 = (3 + j4)\Omega, \quad Z_2 = R_2 - jX_2 = (8 - j6)\Omega$$

根据阻抗并联公式

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(3 + j4) \times (8 - j6)}{3 + j4 + 8 - j6} = \frac{5\angle 53^\circ \times 10\angle -37^\circ}{11.18\angle -10.3^\circ} = 4.47\angle 26.3^\circ \Omega$$

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 10^\circ}{4.47\angle 26.3^\circ} = 49.2\angle -16.3^\circ \text{ A}, \quad i = 49.2\sqrt{2}\sin(314t - 16.3^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220\angle 10^\circ}{3 + j4} = 44\angle -43^\circ \text{ A}, \quad i_1 = 44\sqrt{2}\sin(314t - 43^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220\angle 10^\circ}{8 - j6} = 22\angle 47^\circ \text{ A}, \quad i_2 = 22\sqrt{2}\sin(314t + 47^\circ) \text{ A}$$

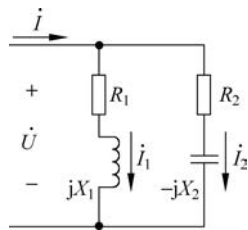


图 3-46 例 3-13 电路图

【课后练习】



3.5.1 如图 3-47 所示电路中,电流表 A 的读数为 $12\sqrt{2}\text{A}$,求:

- (1) 电流表 A_1 的读数()A,电流表 A_2 的读数()A。
- (2) 电路的复导纳为 $Y=(\quad)\text{S}$,导纳角 $\varphi'=(\quad)$ 。
- (3) $U_1=(\quad)\text{V}$ 。

3.5.2 在 RLC 并联电路中,当复导纳虚部大于零时,电路呈()性;当虚部小于零时,电路呈()性;当虚部等于零时,电路呈()性,导纳角 $\varphi'=(\quad)$,此时电路中的总电流、电压()相,称电路发生了()谐振。

3.5.3 在 RLC 并联电路中,测得电阻上通过的电流为 3A,电感上通过的电流为 8A,电容上通过的电流是 4A,总电流是()A,电路呈()性。

3.5.4 如图 3-48 所示, $R=X_L=X_C$,已知安培表 A_1 的读数为 3A,则安培表 A_2 的读数应为(), A_3 的读数应为(),电路呈()性。

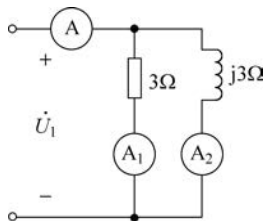


图 3-47 3.5.1 电路图

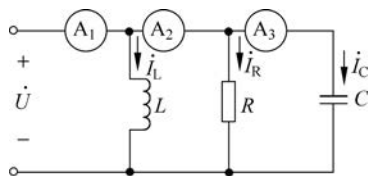


图 3-48 3.5.4 电路图

3.6 复杂正弦交流电路的分析



RLC 串并联连接可组成实际电气设备的电路模型,如电机模型、输电线模型、滤波器模型和通信线路模型等,用于分析与设计。相量图是正弦电路分析的辅助工具,需熟练掌握。

3.6.1 阻抗串并联电路及其相量图

【例 3-14】如图 3-49 所示,已知 $R_1=5\Omega$, $R_2=3\Omega$, $j\omega L=j4\Omega$, $-j\frac{1}{\omega C}=-j4\Omega$, $\dot{I}_S=30\angle 60^\circ\text{A}$ 。求:

- (1) 电路的等效阻抗 Z 。
- (2) 电流源两端电压相量 $\dot{U}_S$ 和两支路电流 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 。
- (3) 画出相量图。

解 (1) 等效阻抗

$$\begin{aligned}
 Z &= R_1 + (R_2 + j\omega L) // -j\frac{1}{\omega C} \\
 &= \left[5 + \frac{(3+j4)(-j4)}{3+j4-j4} \right] = 5 + \frac{16-j12}{3} = 10.33 - j4 = 11.08\angle -21.2^\circ\Omega
 \end{aligned}$$



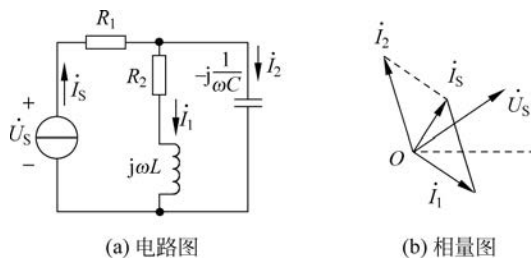


图 3-49 例 3-14 电路图、相量图

(2) 已给定 $\dot{I}_S$ 的初相位为 60° , 其他相量的相位依此而定, 则

$$\dot{U}_S = Z\dot{I}_S = 11.08 \angle -21.2^\circ \times 30 \angle 60^\circ = 332.4 \angle 38.8^\circ \text{ V}$$

应用分流公式得

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I}_S = \frac{-j4}{3 + j4 - j4} \times 30 \angle 60^\circ = 40 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{I}_S = \frac{3 + j4}{3} \times 30 \angle 60^\circ = 50 \angle 113.1^\circ \text{ A}$$

(3) 相量图如图 3-49(b) 所示。

【例 3-15】 定性画出如图 3-50(a) 所示电路的相量图。该电路有 3 个电流、3 个电压, 画出这 6 个相量。

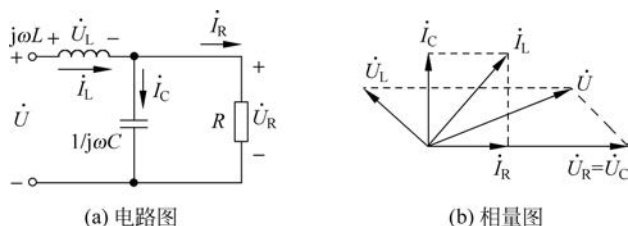


图 3-50 例 3-15 电路图、相量图

解 设电阻分支电流 $\dot{I}_R$ 为参考相量。 $\dot{U}_R$ 与 $\dot{I}_R$ 同方向, $\dot{I}_C$ 是纯电容电流, 超前 $\dot{U}_R 90^\circ$ 。 $\dot{I}_R$ 与 $\dot{I}_C$ 形成的平行四边形确定总电流 $\dot{I}_L$ 的方向。 $\dot{U}_L$ 是纯电感电压, 超前 $\dot{I}_L 90^\circ$ 。 $\dot{U}_L$ 与 $\dot{U}_R$ 形成的平行四边形确定总电压 $\dot{U}$ 的方向。其中电阻与纯电容并联, 电流三角形是直角三角形; 而电感是与容性阻抗串联, 电压三角形是钝角三角形。电路中凡是有三岔路口, 就会形成一个电流三角形; 凡是有串联环节, 就会形成一个电压三角形。

【例 3-16】 如图 3-51(a) 所示, $I_1 = 10 \text{ A}$, $I_2 = 10\sqrt{2} \text{ A}$, $U = 200 \text{ V}$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_2 = X_L$, 试求 I 、 X_C 、 X_L 及 R_2 。

解 这种阻抗值未定, 仅知电流、电压有效值的情况, 可借助相量图确定相位。

设 $\dot{I}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$, 则 $\dot{U}_2$ 滞后 $\dot{I}_1 90^\circ$; 第二条支路 $R_2 = X_L$, 阻抗角 45° , 所以 $\dot{I}_2$ 滞后 $\dot{U}_2 45^\circ$, 则有

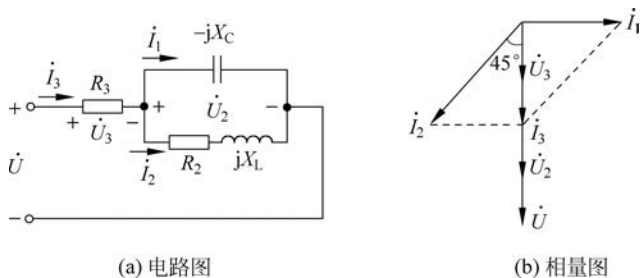


图 3-51 例 3-16 电路图、相量图

$$\dot{I}_2 = 10\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10 \angle 0^\circ + 10\sqrt{2} \angle -135^\circ = 10 \angle -90^\circ \text{ A}$$

进一步推知

$$\dot{U}_3 = R_3 \dot{I}_3 = 5 \times 10 \angle -90^\circ = 50 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$\dot{U}_3$ 与 $\dot{U}_2$ 同相, 则

$$\dot{U} = \dot{U}_3 + \dot{U}_2 = 200 \angle -90^\circ \text{ V} \quad (\text{三个电压均同相})$$

则有

$$\dot{U}_2 = \dot{U} - \dot{U}_3 = 200 \angle -90^\circ - 50 \angle -90^\circ = 150 \angle -90^\circ \text{ V}$$

进一步

$$-jX_C = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{150 \angle -90^\circ}{10 \angle 0^\circ} = -j15 \Omega$$

在第二条支路中

$$R_2 = X_L$$

$$U_{R_2} = U_{X_L}, \quad U_2 = \sqrt{U_{R_2}^2 + U_{X_L}^2} = \sqrt{2U_{X_L}^2}, \quad U_{X_L} = U_{R_2} = \frac{U_2}{\sqrt{2}}$$

$$R_2 = X_L = \frac{U_{X_L}}{I_2} = \frac{U_2 / \sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{150}{10 \times 2} = 7.5 \Omega$$

3.6.2 复杂正弦电路分析方法

第 2 章所述各种计算方法、电路定理可应用于正弦电路的计算, 仅需将正负数的四则混合运算换成复数的四则混合运算即可。

【例 3-17】 如图 3-52(a) 所示, $u_S = 5\sqrt{2} \sin 5t \text{ V}$, 用戴维南定理求 u_{ab} 。

解 先画出图 3-52(b), 求开路电压

$$\dot{U}_{OC} = \frac{j5}{5 + j5} \times 5 \angle 0^\circ = \frac{j25}{5 + j5} \text{ V}$$

再求等效阻抗

$$Z_0 = -j1 + 5 // j5 = -j1 + \frac{5 \times j5}{5 + j5} = 2.5 + j1.5 \Omega$$

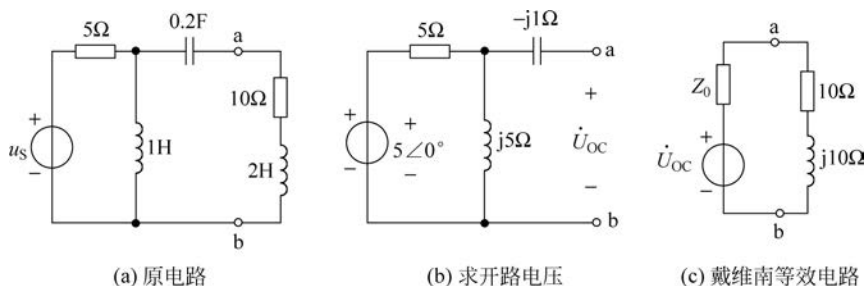


图 3-52 例 3-17 电路图

画出戴维南等效电路如图 3-52(c)所示,再用分压公式求 $\dot{U}_{ab}$, 即

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dot{U}_{OC}}{Z_0 + 10 + j10} \times (10 + j10) = \frac{10 + j10}{12.5 + j11.5} \times \frac{j25}{5 + j5} = 2.94 \angle 47.4^\circ \text{ V}$$

$$u_{ab} = 2.94\sqrt{2} \sin(5t + 47.4^\circ) \text{ V}$$

【例 3-18】 如图 3-53(a)所示电路,已知 $\dot{I}_2$, 求电压 $\dot{U}$, 并画出相量图。

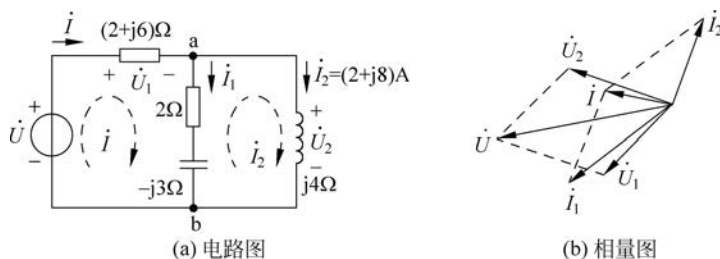


图 3-53 例 3-18 电路图、相量图

解一 倒推法解题思路, 则

$$\dot{I}_2 \Rightarrow \dot{U}_2 = j4\dot{I}_2 \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{2-j3} \Rightarrow \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \Rightarrow \dot{U}_1 = (2+j6)\dot{I} \Rightarrow \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$\dot{U}_2 = j4\dot{I}_2 = j4(2+j8) = 4\angle 90^\circ \times 8.25\angle 75.96^\circ = 33\angle 165.96^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{2-j3} = \frac{33\angle 165.96^\circ}{3.6\angle -56.3^\circ} = 9.17\angle 222.26^\circ = (-6.78 - j6.16) \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (-6.78 - j6.16) + (2 + j8) = -4.78 + j1.84 = 5.12\angle 158.95^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_1 = (2+j6)\dot{I} = 6.32\angle 71.57^\circ \times 5.12\angle 158.95^\circ = 32.56\angle 230.52^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 32.56\angle 230.52^\circ + 33\angle 165.96^\circ = (-20.7 - j25.13) + (-32 + j8) \\ &= 55.41\angle -162^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

解二 列写网孔电流方程来计算, 即

$$\begin{cases} [(2+j6) + (2-j3)]\dot{I} - (2-j3)\dot{I}_2 = \dot{U} \\ -(2-j3)\dot{I} + [(2-j3) + j4]\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$\dot{I}_2$ 已知而 $\dot{U}$ 未知, 两个方程可求出两个未知量

$$(4 + j3)\dot{I} - (2 - j3)(2 + j8) = \dot{U} \quad ①$$

$$-(2 - j3)\dot{I} + (2 + j)(2 + j8) = 0 \quad ②$$

由式②得

$$\dot{I} = \frac{(2 + j)(2 + j8)}{(2 - j3)} = -4.78 + j1.84 = 5.12 \angle 158.95^\circ \text{ A}$$

将 $\dot{I}$ 代入式①得

$$\dot{U} = (4 + j3) \times 5.12 \angle 158.95^\circ - (2 - j3)(2 + j8) = 55.41 \angle -162^\circ \text{ V}$$

解三 列写“弥尔曼方程”来计算, 即

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\frac{\dot{U}}{2 + j6}}{\frac{1}{2 + j6} + \frac{1}{2 - j3} + \frac{1}{j4}} = j4 \times \dot{I}_2 = j4 \times (2 + j8) = 33 \angle 165.96^\circ \text{ V}$$

直接解得

$$\dot{U} = (2 + j6) \times \left(\frac{1}{2 + j6} + \frac{1}{2 - j3} + \frac{1}{j4} \right) \times 33 \angle 165.96^\circ = 55.41 \angle -162^\circ \text{ V}$$

【例 3-19】 如图 3-54 所示为复杂正弦电路, 列出用结点电压法求 $\dot{U}_{12}$ 的方程组。

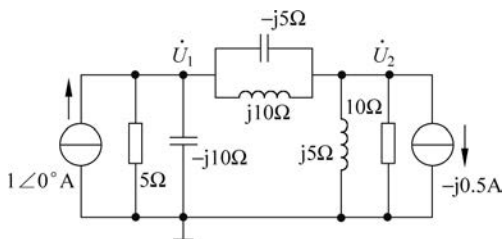


图 3-54 例 3-19 电路图

解 设参考结点后, 给其余结点电压命名。结点电压方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{-j5} + \frac{1}{j10} \right) \dot{U}_1 - \left(\frac{1}{-j5} + \frac{1}{j10} \right) \dot{U}_2 = 1 \\ - \left(\frac{1}{-j5} + \frac{1}{j10} \right) \dot{U}_1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{-j5} + \frac{1}{j10} \right) \dot{U}_2 = j0.5 \end{cases}$$

整理, 得

$$\begin{cases} (0.2 + j0.2) \dot{U}_1 - j0.1 \dot{U}_2 = 1 \\ -j0.1 \dot{U}_1 + (0.1 - j0.1) \dot{U}_2 = j0.5 \\ \dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 \end{cases}$$

【例 3-20】 如图 3-55(a) 所示, $I = 2 \text{ A}$, $U = U_C = U_P = 30 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, 求电容值 C 及无源网络 P 的串联等效电路参数。

解 这种题型缺少电路参数, 必须借助相量图进行分析。设 $\dot{I} = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$, 则 $\dot{U}_C = 30 \angle -90^\circ \text{ V}$, 那么

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I} = \frac{30}{2} = 15 \Omega, \quad C = \frac{1}{15\omega} = \frac{1}{15 \times 314} = 212.3 \mu\text{F}$$

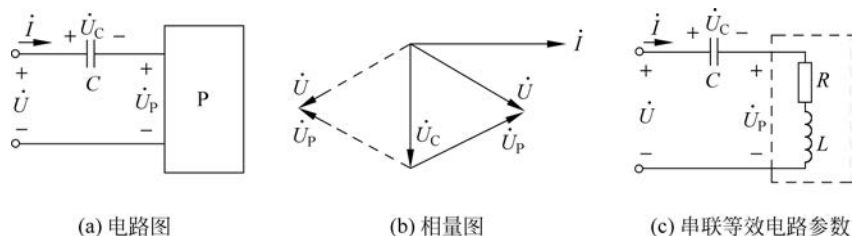


图 3-55 例 3-20 电路图、相量图

$\dot{U} = \dot{U}_C + \dot{U}_P$, 而 $\dot{U}$ 、 $\dot{U}_C$ 、 $\dot{U}_P$ 三者均为 30V , 则三者必然组成一个等边三角形。 $\dot{U}$ 、 $\dot{U}_P$ 两电压的相位只有如图 3-55(b) 所示的两种可能, 因为 P 为无源网络, $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 的相位差的绝对值不会超过 90° , 所以虚线所示不可能, 则

$$\dot{U} = 30 \angle -30^\circ \text{V}, \quad \dot{U}_P = 30 \angle 30^\circ \text{V} \quad (\text{P 的阻抗角 } 30^\circ \text{ 为感性阻抗})$$

$$Z_P = \frac{\dot{U}_P}{\dot{I}} = \frac{30 \angle 30^\circ}{2 \angle 0^\circ} = 15 \angle 30^\circ = 12.99 + j7.5 \Omega$$

其中, 串联等效电路的参数为

$$R = 12.99 \Omega, \quad X_L = \omega L = 7.5 \Omega, \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{7.5}{314} = 23.9 \text{mH}$$



3.6.3 阻抗与导纳的等效变换

同一个无源电路 P, 可以用阻抗来表述, $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$; 也可以用导纳来表述, $Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}$ 。两者互为倒数, 对相同的外电路是等效的, 如图 3-56 所示。

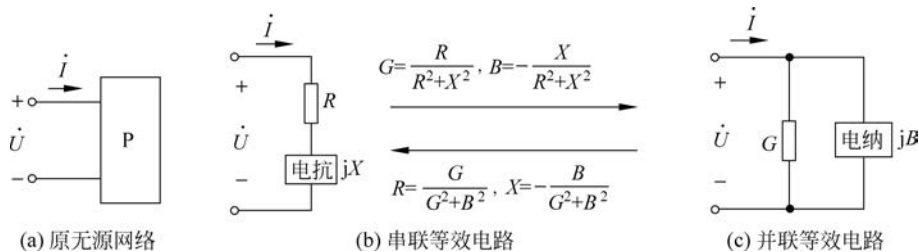


图 3-56 阻抗与导纳的等效变换

已知 Z 求 Y , 则

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} \\ &= \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB \\ \varphi' &= -\varphi \end{aligned}$$

其中,

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad (3-34)$$

已知 Y 求 Z , 则

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{(G + jB)(G - jB)} \\ &= \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2} = R + jX \\ \varphi &= -\varphi' \end{aligned}$$

其中,

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2} \quad (3-35)$$

注意,感性阻抗 X 为正,而感性电纳 B 为负;同理,容性阻抗 X 为负,而容性电纳 B 为正。阻抗角 φ 是电压超前电流的相位,而导纳角 φ' 是电流超前电压的相位,定义是相反的。

【例 3-21】 图 3-57(a) 有两条无源支路并联接于 $f = 50\text{Hz}$ 的交流电源上,其中 $R_1 = 8\Omega$, $jX_L = j10\Omega$, $R_2 = 25\Omega$, $-jX_C = -j15\Omega$ 。试求:

- (1) 等效阻抗及串联等效电路的参数 R 、 L (或 C)。
- (2) 等效导纳及并联等效电路的参数 R' 、 L' (或 C')。

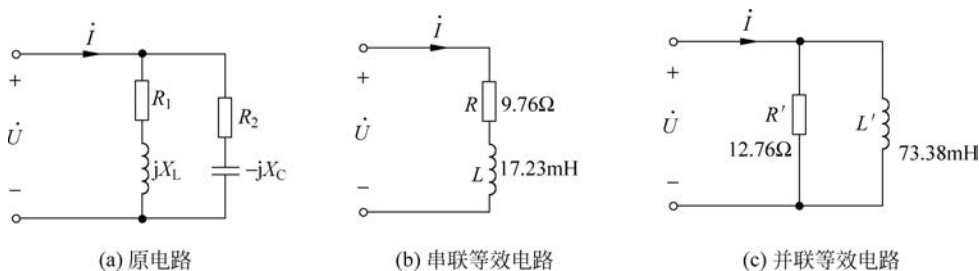


图 3-57 例 3-21 电路图

解 (1) 串联等效电路

$$\begin{aligned} Z = R + jX &= \frac{(R_1 + jX_L) \times (R_2 - jX_C)}{(R_1 + jX_L) + (R_2 - jX_C)} = \frac{(8 + j10) \times (25 - j15)}{(8 + j10) + (25 - j15)} \\ &= 11.16 \angle 29^\circ = (9.76 + j5.41)\Omega \end{aligned}$$

为感性,其中等效电阻 $R = 9.76\Omega$,等效电感

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{5.41}{314} = 17.23\text{mH}$$

(2) 并联等效电路

$$\begin{aligned} Y = G + jB &= \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} \\ &= \frac{9.76}{9.76^2 + 5.41^2} - j \frac{5.41}{9.76^2 + 5.41^2} \\ &= 0.0896 \angle -29^\circ \text{S} \end{aligned}$$

再根据两条支路的导纳之和等于总导纳重求 Y ,与上式计算结果比较

$$Y = G + jB = \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{1}{8 + j10} + \frac{1}{25 - j15}$$

$$= 0.0896 \angle -29^\circ = (0.0784 - j0.0434) \text{ S}$$

结果一致。其中等效电阻

$$R' = \frac{1}{G} = \frac{1}{0.0784} = 12.76 \Omega$$

因为

$$B_L = \frac{1}{\omega L'} = 0.0434 \text{ S}$$

所以等效电感

$$L' = \frac{1}{0.0434\omega} = \frac{1}{0.0434 \times 314} = 73.38 \text{ mH}$$

可见串、并联等效电路之间有

$$G = 0.0784 \text{ S} \neq \frac{1}{R} = \frac{1}{9.76 \Omega}, \quad B = -0.0434 \text{ S} \neq -\frac{1}{X} = -\frac{1}{5.14 \Omega}$$

并且 G 与 B (或 R 与 X) 还都与频率有关, 频率不同等效参数会发生变化。

【课后练习】

3.6.1 如图 3-58 所示, 已知 $\dot{U}_2 = 6 \angle 45^\circ \text{ V}$, 求 $\dot{U}$ 过程如下:

$$(1) \dot{I}_L = \frac{\dot{U}_2}{2 + j6} = \left(\frac{\quad}{\quad} \right) = (\quad) \text{ A}$$

$$(2) \dot{U}_3 = (2 + j6 + j3) \dot{I}_L = (\quad) \times (\quad) = (\quad) \text{ V}$$

$$(3) \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_3}{-j3} = \left(\frac{\quad}{-j3} \right) = (\quad) \text{ A}$$

$$(4) \dot{I} = \dot{I}_C + \dot{I}_L = (\quad) + (\quad) = (\quad) \text{ A}$$

$$(5) \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_3 = (\quad) + (\quad) = (\quad) \text{ V}$$

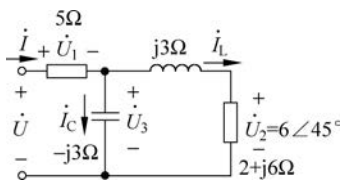


图 3-58 3.6.1 电路图

3.6.2 如图 3-59 所示, 已知 $R = X_C = 5 \Omega$, $U_{AB} = U_{BC}$, 且 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 同相。

$$(1) Z_{BC} = \frac{5(-j5)}{(\quad) + (\quad)} = \frac{1}{\frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}} = (\quad) \Omega。$$

(2) 以 $\dot{U}_{BC}$ 为参考相量, 画出电路的相量图。

(3) 由 $U_{AB} = U_{BC}$ 可知 $|Z| = |Z_{BC}| = (\quad) \Omega$ 。

(4) 从相量图可知 U_{AB} 超前 $\dot{I}$ ($\quad$)。

(5) 阻抗 $Z = (\quad) \Omega$ 。

3.6.3 如图 3-60 所示,在正弦电流电路中,若 $U_R = U_L = 10\text{V}$,则 $U = (\quad)\text{V}$ 。

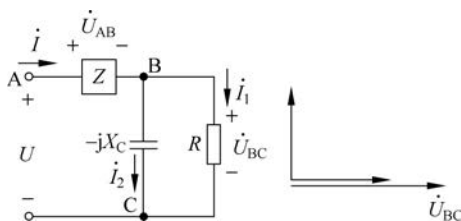


图 3-59 3.6.2 电路图、相量图

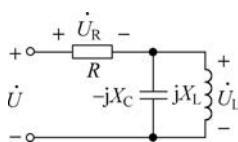


图 3-60 3.6.3 电路图

3.6.4 如图 3-61 所示, $\dot{U}_C = 1\angle 0^\circ\text{V}$, 填写 $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 。

(1) $\dot{I}_1 = \frac{1\angle 0^\circ}{(\quad)}\text{A} = (\quad)\text{A}$ 。

(2) $\dot{I}_2 = \frac{1\angle 0^\circ}{(\quad)}\text{A} = (\quad)\text{A}$ 。

(3) $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (\quad) + (\quad) = (\quad)\text{A}$ 。

(4) $\dot{U}_{RL} = \dot{I}(2 + j2) = (\quad)\text{V}$ 。

(5) $\dot{U} = \dot{U}_{RL} + \dot{U}_C = (\quad) + (\quad) = (\quad)\text{V}$ 。

3.6.5 如图 3-62 所示,在正弦电流电路中,若 $\dot{U}_C = 100\angle 0^\circ\text{V}$,填写 $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$,并作电路的相量图。

(1) $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (\quad) + (\quad) = (\quad)\text{A}$ 。

(2) $\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C = (\quad) + (\quad) = (\quad)\text{V}$ 。

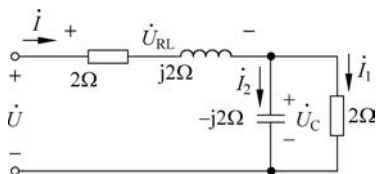


图 3-61 3.6.4 电路图

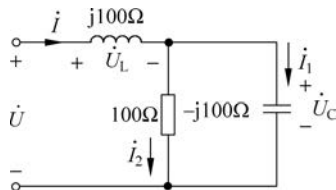


图 3-62 3.6.5 电路图

3.7 正弦电流电路中的谐振

含有电感、电容的无源电路在正弦电源激励下,一般电流与电压之间会存在相位差。但在某些特定条件下,若等效复阻抗(或复导纳)的虚部为零,则电流与电压同相,称为谐振。谐振在电子技术中有着广泛的应用。



3.7.1 RLC 串联谐振

1. RLC 串联谐振为电压谐振

如图 3-63 所示, 串联电路的复阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \angle \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = |Z| \angle \varphi$$

当 ω 、 L 、 C 三者之间满足谐振条件时虚部为零, 则

$$X_L = X_C$$

即

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (3-36)$$

这时发生串联谐振, 其谐振阻抗与阻抗角为

$$Z_0 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R, \quad \varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = 0$$

ω_0 称为串联谐振角频率, 且

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3-37)$$

f_0 称为串联谐振频率, 且

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

要使电路发生谐振, 可以改变 ω 、 L 或者 C 来实现。

串联谐振电路有以下特点:

- (1) 电压 $\dot{U}$ 与电流 $\dot{I}$ 同相位, 阻抗角 $\varphi = 0^\circ$, 电路呈现纯电阻性。
- (2) 复阻抗值最小, 其虚部为零, 则

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R$$

- (3) 在电源电压有效值恒定时, 电流最大, 即

$$I = I_0 = U/R$$

- (4) 电抗电压 $\dot{U}_X = \dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$, 图 3-63 中 A、B 两点间相当于短路。 $\dot{U}_L$ 、 $\dot{U}_C$ 二者大小相等, 相位相反, 互相抵消。如图 3-63(b) 相量图所示。

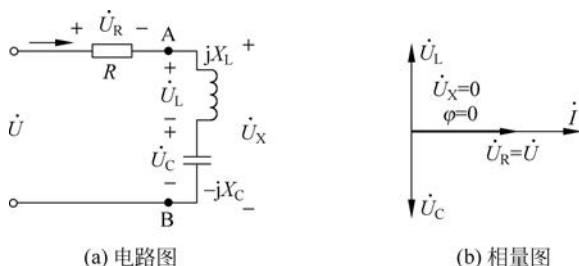


图 3-63 RLC 串联电路图及其相量图

(5) 可能产生过电压现象,则

$$U_L = U_C = \omega_0 L I_0 = \omega_0 L \frac{U}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \times U = \frac{1}{\omega_0 C R} \times U = Q \times U$$

定义 Q 为串联谐振电路的品质因数,即

$$Q = \frac{\omega_0 L (\text{谐振时感抗})}{R (\text{电阻})} = \frac{U_L}{U} \quad \text{或} \quad Q = \frac{1/\omega_0 C (\text{谐振时容抗})}{R (\text{电阻})} = \frac{U_C}{U} \quad (3-38)$$

该式表明,谐振时电感和电容元件的端电压是电源电压的 Q 倍,若 $X_L = X_C \gg R$,则 $U_L = U_C \gg U$,因此称 RLC 串联谐振为电压谐振。

电力系统的输电电压很高,因此输电线路不允许出现串联谐振状态,否则产生的更高电压将击穿设备绝缘,酿成事故。

电子线路中,串联谐振用于信号接收机(如收音机)的调谐电路选择电台频道,是电压谐振的典型运用,如图 3-64 所示。天线将接收到的各种频率的微弱无线电信号,经磁棒感应到右侧的 RLC 串联电路上,其 $Q = 50 \sim 200$ 设计得很大,只有一个频率满足谐振条件的电台信号被扩大 Q 倍,从电容两端送至放大电路去处理,放大电路的输入阻抗很大,相当于开路。如 $L = 500 \mu\text{H}$, $C = 20 \sim 270 \text{pF}$ 可变,选择的频率范围是 $433.16 \sim 1592.4 \text{kHz}$,刚好是收音机的中波频段。

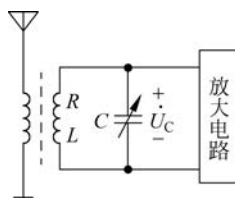


图 3-64 收音机的调谐电路

另外定义电路谐振时的感抗 X_L 、容抗 X_C 为特性阻抗,用 ρ 表示,即

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3-39)$$

那么特性阻抗 ρ 与电阻的比值就是品质因数 Q ,即

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R \omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3-40)$$

2. RLC 串联电路阻抗性质随频率的变化规律

RLC 串联电路阻抗模值与频率的关系为

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

阻抗角与频率的关系为

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}$$

画出两者随频率变化的曲线如图 3-65 所示。阻抗的性质由电抗 X 的正、负决定,当 $\omega < \omega_0$ 时, $X = X_L - X_C < 0$,阻抗为容性, $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$; 当 $\omega = \omega_0$ 时, $X = 0$,阻抗为电阻性, $\varphi = 0^\circ$; 当 $\omega > \omega_0$ 时, $X > 0$,阻抗为感性, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ 。

3. RLC 串联电路的谐振曲线

RLC 串联电路由电压有效值恒定而频率变化的电源激励,测量不同频率下的电流 I ,并以 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 为横轴, $\frac{I}{I_0}$ 为纵轴绘制谐振曲线,如图 3-66(a)所示。根据理论推导,有



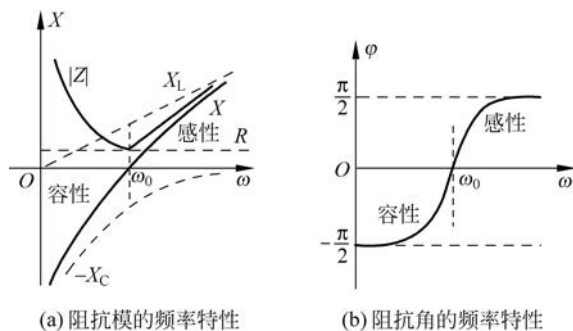


图 3-65 RLC 串联电路阻抗及电抗的频率特性

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U / \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}{U/R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

进一步整理得 I 与 I_0 比值的变化规律为

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{R^2} \left(\frac{1}{\omega_0 L} \omega L - \frac{1}{\omega_0 L \omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{R^2} \left(\frac{\omega L}{\omega_0 L} - \frac{\omega_0 C}{\omega C}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \end{aligned} \quad (3-41)$$

由于感抗和容抗都是 ω 的函数,所以即使输入电压 U 不变,输出电流 I 也会随着 ω 改变, $\omega = \omega_0$ 时, $\frac{I}{I_0} = 1$ 最大;当 $\omega \neq \omega_0$ 时, $\frac{I}{I_0} < 1$ 迅速下降。这说明频率偏离谐振点后 I 出现衰减, ω 偏离 ω_0 越多, I 衰减越大。RLC 串联电路的这一特点,使有多个频率不同的正弦信号同时激励时,只有 $\omega = \omega_0$ 的正弦信号能输出较强信号;所有 $\omega \neq \omega_0$ 的正弦信号均被衰减抑制,反映了网络对信号频率具有选择性。观察图 3-66(a)可知:电路的品质因数 Q 越大,谐振曲线越尖锐,频率偏离谐振点后 I 衰减越快,选择性越好。因此图 3-66 又称为选频曲线。

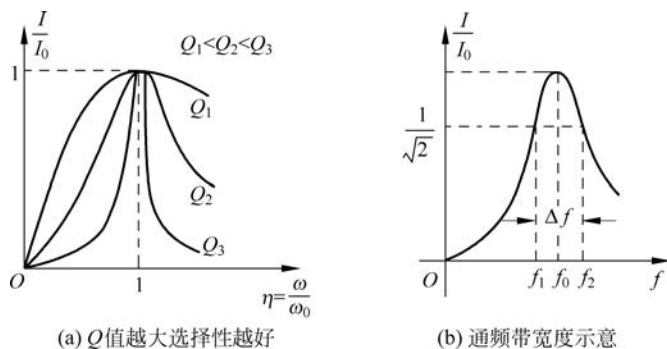


图 3-66 RLC 串联电路的谐振曲线

选频曲线上,规定 $I/I_0 = 1/\sqrt{2} = 0.707$ 这一纵坐标对应的两个频率点之间的频率范围称为通频带(或带宽): $\Delta f = f_2 - f_1$ 。通频带的含意是:只有这一频率范围内的输出信号较强。通频带用于衡量电路对不同频率信号的选择或放大能力。

类似收音机的调谐电路,要求调台准确,不串音,必须选择性好。但对于类似放大音乐信号用的音频电路,却要求通频带越宽越好,使高频与低频信号能同时得到放大。同一电路的 Q 值与通频带相互制约。

理论和实践证明:谐振曲线的通频带宽度 $\Delta f = f_2 - f_1$ 与品质因数 Q 值的关系为

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (3-42)$$

Q 值越大,通频带越窄; Q 值越小,通频带越宽。

【例 3-22】 RLC 串联电路中,已知 $L = 20\text{mH}$, $C = 200\text{pF}$, $R = 100\Omega$, 输入电压 $U = 10\text{V}$ 。求电路谐振频率 f_0 , 特性阻抗 ρ , 品质因数 Q 及谐振时的 U_R 、 U_L 、 U_C 。

解

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^{-12}}} = 500 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 79.6 \text{ kHz}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{20 \times 10^{-3}}{200 \times 10^{-12}}} = 10 \text{ k}\Omega$$

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{10\,000}{100} = 100$$

$$U_R = U = 10\text{V}, \quad U_L = U_C = QU = 1000\text{V}$$

【例 3-23】 一个电容与参数为“ $R = 1\Omega$, $L = 2\text{mH}$ ”的线圈串联,接在角频率 $\omega = 2500\text{rad/s}$ 的 10V 电压源上,求电容 C 为何值时电路发生谐振? 求谐振电流 I_0 、电容两端电压 U_C 、线圈两端电压 U_{RL} 及品质因数。并求出该电路的通频带 Δf 。

解 串联谐振发生在感抗等于容抗之时,得

$$C = 1/\omega_0^2 L = 1/2500^2 \times 0.002 = 80\mu\text{F}$$

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\sqrt{0.002/80 \times 10^{-6}}}{1} = 5, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{10}{1} = 10\text{A}$$

$$U_C = QU = 5 \times 10 = 50\text{V}, \quad U_{RL} = \sqrt{10^2 + 50^2} \approx 51\text{V}$$

求电路的通频带

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{2500/2\pi}{5} = 79.62\text{Hz}$$

3.7.2 RLC 并联谐振

如图 3-67 所示,并联电路的复导纳为



$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \angle \arctan \frac{B_C - B_L}{G} = |Y| \angle \varphi'$$

当 ω 、 L 、 C 三者之间满足谐振条件时, 导纳的虚部为零, 则

$$B_C = B_L$$

即

$$\omega C = \frac{1}{\omega L}$$

这时发生并联谐振。其谐振导纳与导纳角分别为

$$Y_0 = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G = \frac{1}{R}, \quad \varphi' = \arctan \frac{B_C - B_L}{G} = 0$$

谐振角频率 ω_0 和谐振频率 f_0 分别为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

与 RLC 串联谐振时公式一致。

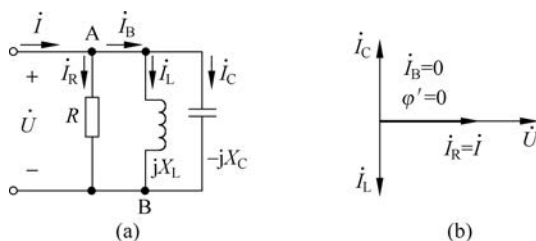


图 3-67 RLC 串联谐振电路图、相量图

并联谐振电路有以下特点:

- (1) 电流 $\dot{I}$ 与电压 $\dot{U}$ 同相位, 导纳角 $\varphi' = 0^\circ$, 电路呈现纯电阻性。
- (2) 复导纳值最小, 其虚部为零, 即

$$Y_0 = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G$$

- (3) 在电源电流有效值恒定时, 电压最高

$$U = U_0 = IR$$

- (4) $\dot{I}_B = \dot{I}_C + \dot{I}_L = 0$, 如图 3-67 所示, A、B 两点间相当于开路, 阻抗无穷大。 $\dot{I}_C$ 、 $\dot{I}_L$ 二者大小相等, 相位相反, 互相抵消。如图 3-67(b) 相量图所示。

- (5) 可能产生过电流现象

$$I_L = I_C = \frac{U_0}{\omega_0 L} = \frac{IR}{\omega_0 L} = \frac{1/\omega_0 L}{G} \times I = \frac{\omega_0 C}{G} \times I = QI \quad (3-43)$$

定义, Q 为并联谐振电路的品质因数, 即

$$Q = \frac{I_C}{I} = \frac{\omega_0 C (\text{谐振时容纳})}{G (\text{电导})} = \frac{1/\omega_0 L (\text{谐振时感纳})}{G (\text{电导})} = \frac{R}{\omega_0 L}, \quad G = \frac{1}{R} \quad (3-44)$$

可见电感和电容支路的电流等于电源电流的 Q 倍, 因此并联谐振称为电流谐振。若 $B_L = B_C \gg G$, 则 $I_L = I_C \gg I$ 。RLC 并联谐振时品质因数 Q 的计算公式与串联谐振时分子分母颠倒。



3.7.3 电感线圈与电容并联发生谐振

任意一个无源网络, 只要列出其复阻抗(或复导纳)表达式, 令其虚部为零均可推导出谐振条件。以图 3-68(a) 电路为例。

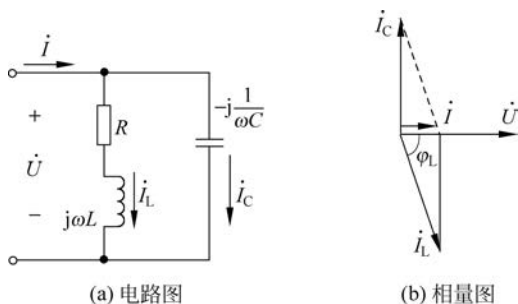


图 3-68 电感线圈与电容并联发生谐振

该电路复导纳

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{R + j\omega L} + \frac{1}{-j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R - j\omega L}{(R + j\omega L) \cdot (R - j\omega L)} + j\omega C \\
 &= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)
 \end{aligned}$$

令其虚部为零, 则谐振条件为

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

得谐振角频率

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - R^2 C}{L^2 C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} \quad (3-45)$$

谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

式(3-45)表明, 只有在 $1 - \frac{R^2 C}{L} > 0$ 即 $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, f_0 才为实数, 才可能发生谐振。

在电子线路中, 常见电感线圈与电容并联的电路, R 值很小仅是电感线圈的绕线电阻, 满足 $R \ll \omega_0 L$, 如 $10R \approx \omega_0 L$, 则在式(3-45)中设 $R \rightarrow 0$, 则有

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

与 RLC 并联电路的谐振频率一致。这种谐振电路的特点如下:

(1) 谐振时电路的导纳最小

$$Y_0 = G = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

则阻抗最大为

$$Z_0 = \frac{R^2 + \omega_0^2 L^2}{R} = \frac{L}{RC} = \frac{1}{G} \quad (3-46)$$

上式考虑到 $R \ll \omega_0 L$, 分子中忽略 R^2 而得到。注意, 该电路中等效电导 $G \neq \frac{1}{R}$ 。

(2) 特性阻抗与串联谐振电路定义一样

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(3) 品质因数定义为谐振时的容纳与等效电导之比, 为

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 C (\text{谐振时容纳})}{G (\text{谐振时等效电导})} = \frac{\omega_0 C}{CR/L} \\ &= \frac{\omega_0 L (\text{线圈感抗})}{R (\text{线圈电阻})} \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} \end{aligned} \quad (3-47)$$

并且 $R \ll \omega_0 L$ 时, $\dot{I}_L \approx -\dot{I}_C$, $\dot{I}_C$ 、 $\dot{I}_L$ 二者近似大小相等, 相位相反, 有

$$Q = \frac{\omega_0 CU}{GU} = \frac{I_C}{I} \approx \frac{I_L}{I} \quad (3-48)$$

因此两支路电流 I_C 、 I_L 都是总电流的 Q 倍, 也是电流谐振, 其相量图如图 3-68(b) 所示。

(4) 谐振时的等效阻抗与品质因数 Q 成正比, 即

$$Z_0 = \frac{L}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \sqrt{\frac{L}{C}}$$

谐振电路在工业传感器设计中得到应用。图 3-69(a) 中, 金属极板 A 、 B 组成一个电容器, 改变极距 d 就改变了电容量 C ; 图 3-69(b) 中, 线圈绕在非磁性材料上, A 铁芯在垂直方向上位移 δ , 引起自感系数 L 变化。两图中的 C 或者 L 若处于某按谐振原理工作的电路中时, 改变了 C 或者 L , 谐振频率就要变化, 测出谐振频率, 就测出了位移。因此可以做成位移传感器或距离传感器。

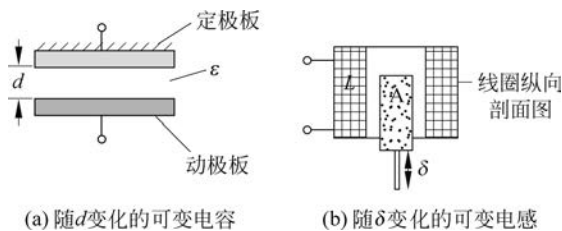


图 3-69 谐振电路中的电容传感器及电感传感器

【例 3-24】 如图 3-68 所示, 已知电路的谐振角频率为 $\omega_0 = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$, $Q = 100$, 谐振时电路等效阻抗等于 $2 \text{ k}\Omega$, 已知满足 $R \ll \omega_0 L$ 的条件。

(1) 试求线圈参数 R 、 L 和 C 。

(2) 若谐振时由有效值为 10mA 的电流源激励,求线圈电流。

解 (1) 根据

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

得

$$\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{100}{5} \times 10^6 = 2 \times 10^{-5}$$

谐振阻抗

$$Z_0 = \frac{L}{RC}$$

所以

$$C = \frac{L/R}{Z_0} = \frac{2 \times 10^{-5}}{2000} = 0.01 \mu\text{F}$$

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{(5 \times 10^6)^2} \times 0.01 \times 10^{-6} = 4 \mu\text{H}$$

$$R = \frac{L}{Z_0 C} = \frac{4 \times 10^{-6}}{2000 \times 10^{-8}} = 0.2 \Omega$$

而此时

$$\omega_0 L = 5 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-6} = 20 \Omega$$

(2) 线圈电流

$$I_L \approx Q I_0 = 100 \times 0.01 = 1 \text{ A} = 1000 \text{ mA}$$

【课后练习】

3.7.1 已知 RLC 串联谐振电路的谐振频率 $f_0 = 700 \text{ kHz}$, 电容 $C = 2000 \text{ pF}$, 通频带宽度 $\Delta f = 10 \text{ kHz}$, 电路电阻 $R = (\quad) \Omega$, 品质因数 $Q = (\quad)$ 。

3.7.2 填空。

(1) RLC 并联电路在 f_0 时发生谐振, 当频率增加到 $2f_0$ 时, 电路性质呈电()性。

(2) RLC 串联电路在 f_0 时发生谐振, 当频率增加到 $2f_0$ 时, 电路性质呈电()性。

(3) L 与 C 并联支路谐振后阻抗为(), 因此总电流为()。

(4) L 与 C 串联支路谐振后阻抗为(), 因此总电压为()。

3.7.3 判断下列说法的正确与错误, 对的填√, 错的填×。

(1) 串联谐振电路的特性阻抗 ρ 在数值上等于谐振时的感抗与线圈绕线电阻的比值。()

(2) 谐振电路的品质因数越高, 电路选择性越好, 因此实用中 Q 值越大越好。()

(3) RLC 串联谐振在 L 和 C 两端可能出现过电压现象, 因此称为电压谐振。()

(4) RLC 并联谐振在 L 和 C 支路上可能出现过电流现象, 因此称为电流谐振。()

(5) 串联谐振电路不仅广泛应用于电子技术中, 也广泛应用于电力系统中。()

(6) 电感线圈与电容并联发生谐振时,总电流最小,也属于电流谐振()。

3.7.4 已知如图 3-70 所示电路中的电压 $\dot{U}=8\angle 30^\circ\text{V}$, 电流 $\dot{I}=2\angle 30^\circ\text{A}$, $-jX_C=(\quad)\Omega$ 和 $R=(\quad)\Omega$ 。

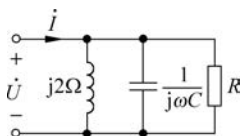


图 3-70 3.7.4 电路图

3.8 正弦电流电路的功率

发电厂、电力公司以经营电能为盈利手段;各个用户、居民家庭购买电能维系生产与生活。电网将深入城市乡村所有枝节末梢,在那里进行着功率交换,将电能变换成其他形式的能而消耗掉,如机械能、光能、热能、化学能。用电方吸收电功率、发电厂发出电功率,双方功率必须达到平衡。由于正弦电路中既有耗能元件,又有两种特性的储能元件,使各元件间的功率关系比直流电路复杂,基本概念有瞬时功率、有功功率、视在功率、无功功率、功率三角形、功率因数、复功率。

功率计算是本章的重点,无功功率在理解上是本章的难点,而电力系统的正常运行与无功功率有密切关系。

3.8.1 瞬时功率

正弦电路的瞬时功率 p 是随时间变化的周期量,图 3-71(a)中代表负载的无源二端网络的电压和电流取关联参考方向,设

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t, \quad u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi)$$

则瞬时功率为

$$p = ui = 2UI \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

瞬时功率的单位为伏安($\text{V} \cdot \text{A}$)。该式第一项“ $UI \cos \varphi$ ”为常数,第二项以 2 倍于电压角频率交变的正弦量,使得每周期有 2 次短时间内功率变为负值,这时该无源网络向外发出功率。

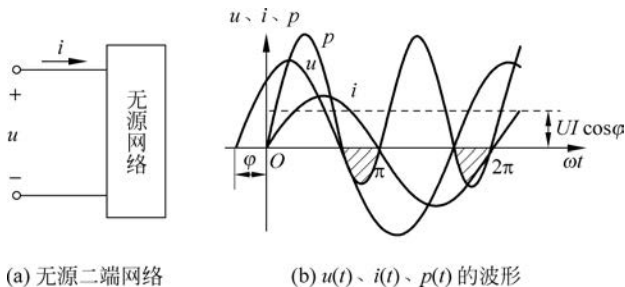


图 3-71 正弦电流电路的瞬时功率

观察 p 的波形可见: $u(t)$ 或 $i(t)$ 为零时, $p(t)$ 为零; $u(t)$ 、 $i(t)$ 同号时, $p(t)$ 为正,网络吸收功率; $u(t)$ 、 $i(t)$ 异号时, $p(t)$ 为负,网络发出功率。该无源网络与电源之间有能量的往返交换传送,一个周期内正值 p 曲线与横轴包围的面积是电路吸收的电能;负值 p 曲线与横轴包围的面积(阴影部分)是电路释放的电能。前者更大,说明该无源网络总体是消耗电能的。

3.8.2 有功功率

由于瞬时功率中的第二项是正弦函数,平均值为零,所以平均功率就等于第一项,即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)] \, dt = UI \cos \varphi \quad (3-49)$$

平均功率又称为有功功率,单位为瓦(W)或千瓦(kW),指电路将电能转变成热能、光能、机械能而消耗掉的功率。若本书中直呼“功率”则指“有功功率”。

3.8.3 视在功率

定义有功功率的最大值为视在功率(意为表观功率),即电流与电压有效值的乘积,恒为正,单位为伏安(V·A)或千伏安(kV·A),用 S 表示,即

$$S = UI$$

还可以写成

$$S = UI = I^2 |Z| = \frac{U^2}{|Z|} \quad (3-50)$$

或

$$S = UI = \frac{I^2}{|Y|} = U^2 |Y| \quad (3-51)$$

该两式与直流电路中电阻元件的功率表达式有相同的结构, $|Z|$ 取代了原来 R 的位置, $|Y|$ 取代了原来 G 的位置。

有功功率与视在功率的关系为

$$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi \quad (3-52)$$

或

$$\frac{P}{S} = \frac{P}{UI} = \cos \varphi$$

视在功率并不是电路吸收而消耗的功率,只有当 $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ 时有功功率才等于视在功率。

额定视在功率反映了设备的容量,为电流、电压额定有效值的乘积。

$$S_N = U_N I_N$$

设备运行中不允许超过这 3 个额定值。

3.8.4 功率三角形及无功功率

图 3-72(a)是无源二端网络的串联等效电路,假设电路为感性,其相量图如图 3-72(b)所示,其中 $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_X$ 、 $\dot{U}$ 组成的电压三角形每条边长乘以电流 I ,得到功率三角形,如图 3-72(c)所示。

功率三角形的斜边是视在功率 S ; 阻抗角 φ 的邻边是有功功率

$$P = UI \cos \varphi = U \cos \varphi I = U_R I = I^2 R$$

因此有功功率就是电阻吸收的功率,只有电阻才吸收有功功率。定义 φ 的对边为无功功率,用 Q 表示,单位为乏(var)或千乏(kvar),用来表征该无源网络与电源之间能量往返交换

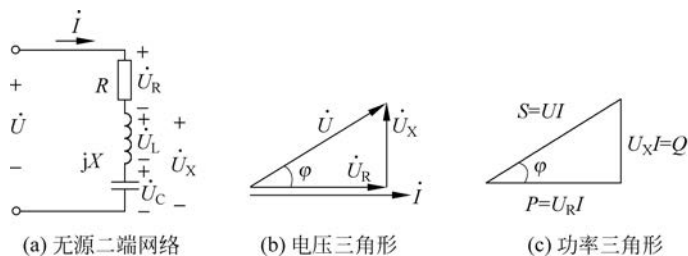


图 3-72 由电压三角形演变为功率三角形

传送的规模,即

$$Q = UI \sin \varphi = U \sin \varphi I = U_X I = I^2 X \quad (3-53)$$

因此无功功率就是电抗元件的功率。

电路为感性时, $\varphi > 0^\circ$, $\sin \varphi > 0$, $Q > 0$, 该电路吸收无功功率;

电路为容性时, $\varphi < 0^\circ$, $\sin \varphi < 0$, $Q < 0$, 该电路发出无功功率。

无功功率与视在功率的关系为

$$Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi \quad (3-54)$$

或

$$\frac{Q}{S} = \frac{Q}{UI} = \sin \varphi \quad (3-55)$$

图 3-72(a) 中的电抗 $X = X_L - X_C$, 将该式等号两边同时乘以 I^2 , 则有

$$I^2 X = I^2 X_L - I^2 X_C = Q_L - Q_C = U_X I = Q \quad (3-56)$$

可见电路的无功功率是电感无功功率与电容无功功率之差, 因此可认为电感是消耗无功功率的元件, 电容是发出无功功率的元件, 二者性质相反。

假设 X 由感抗、容抗串联而成, 流过同一个电流, 图 3-73 画出了二者的瞬时功率波形, 可以清楚看到, 电感功率为正值吸收电能时, 电容功率为负值在释放电能; 电感功率为负值释放电能时, 电容功率为正值在吸收电能。电能有磁场能、电场能两种形态, 分别储存于电感与电容之中, 二者可以就近互相交换, 补足对方所需, 互补的结果使电路的无功功率减小。互补后仍存在的无功功率, 才需要与电源进行交换。

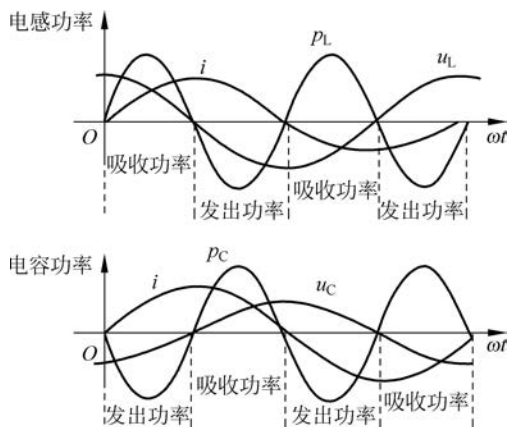


图 3-73 电感与电容串联的瞬时功率波形对比



3.8.5 功率因数

有功功率 $P=UI\cos\varphi$, P 是在视在功率 S 的基础上打了一个折扣 $\cos\varphi$ 。 $\cos\varphi$ 称为功率因数(工程上又称为力率),用 λ 表示,即

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{UI} \quad (3-57)$$

$\cos\varphi$ 是正弦电路中一个重要的物理量。无源网络的阻抗角 $|\varphi| \leq 90^\circ$, 其功率因数 $0 \leq \lambda \leq 1$, 恒为正值; 若所述二端网络中包含独立电源成为有源网络, 那么电压与电流之间的相位差角可能 $|\varphi| > 90^\circ$, 这时功率因数 $\cos\varphi < 0$ 为负值, 那么该有源网络向外发出有功功率。

根据功率三角形, P 、 Q 、 S 三者之间的关系为

$$P = S\cos\varphi, \quad Q = S\sin\varphi = P\tan\varphi, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

功率因数

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

这时阻抗角 φ 又称为功率因数角, 是电压超前电流的相位。

$$\varphi = \pm \arccos \frac{P}{S} = \arctan \frac{Q}{P} \quad (3-58)$$

$\varphi > 0$ 时是感性网络, 工程上俗称为“滞后”网络, 指电流滞后电压; $\varphi < 0$ 时是容性网络, 工程上俗称为“超前”网络, 指电流超前电压。

可以证明, 一个由多元件多支路组成的无源网络, 其有功功率等于各个电阻元件吸收的有功功率之和, 也等于各条支路吸收的有功功率之和, 即

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + \cdots \quad (3-59)$$

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 + \cdots \quad (3-60)$$

其无功功率等于全部电感的无功功率与全部电容的无功功率之差, 还等于各条支路吸收的无功功率之和, 即

$$Q = (I_{L1}^2 \omega L_1 + I_{L2}^2 \omega L_2 + \cdots) - \left(I_{C1}^2 \frac{1}{\omega C_1} + I_{C2}^2 \frac{1}{\omega C_2} + \cdots \right) \quad (3-61)$$

X 有正有负, 即

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3 + \cdots \quad (3-62)$$

$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_2 I_2 \sin\varphi_2 + U_3 I_3 \sin\varphi_3 + \cdots \quad (3-63)$$

但一定注意: 总视在功率一般不等于各条支路视在功率之和, 即

$$S \neq S_1 + S_2 + S_3 + \cdots \quad (3-64)$$

同一电路的阻抗三角形、电压三角形、功率三角形互为相似三角形, 如图 3-74 所示各对应边成比例, 其比例式可用于计算。其中,

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \frac{U_X}{U_R} \quad (3-65)$$

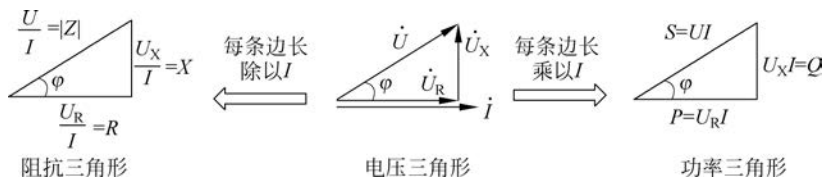


图 3-74 阻抗三角形、电压三角形、功率三角形互为相似三角形

【例 3-25】 RLC 并联电路如图 3-75(a)所示,已知电源电压 $\dot{U}=120\angle 0^\circ\text{V}$, 频率为 50Hz, 试求各支路中的电流 $\dot{I}_R$ 、 $\dot{I}_L$ 、 $\dot{I}_C$ 及总电流 $\dot{I}$; 求出电路的 $\cos\varphi$ 、 S 、 P 和 Q ; 画出相量图。

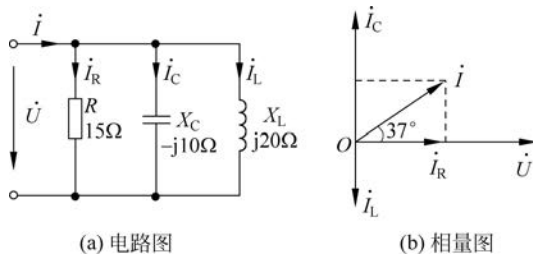


图 3-75 例 3-25 电路图、相量图

解 $\dot{U}=120\angle 0^\circ\text{V}$,

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{120\angle 0^\circ}{15} = 8\angle 0^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \frac{120\angle 0^\circ}{-j10} = j12\text{A}, \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{120\angle 0^\circ}{j20} = -j6\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L = 8 + j12 - j6 = 10\angle 37^\circ\text{A} \quad (\text{电流超前电压, 为容性电路})$$

$$\lambda = \cos\varphi = \cos(-37^\circ) = 0.8$$

$$S = UI = 1200\text{VA}$$

$$P = S\cos\varphi = 1200 \times 0.8 = 960\text{W}$$

$$Q = S\sin(-37^\circ) = 1200 \times (-0.6) = -720\text{var}$$

相量图如图 3-75(b)所示。

【例 3-26】 两个电路元件串联, 接到 120V、50Hz 电源时, 消耗无功功率 60var, 功率因数是 0.6, 问这两个是什么元件? 参数是多少?

解 先求功率因数角

$$\varphi = \arccos 0.6 = 53.13^\circ$$

无功功率为正, 电路应为感性。根据功率三角形, 有

$$P = \frac{Q}{\tan\varphi} = \frac{60}{\tan 53.13} = 45\text{W}$$

再求视在功率

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{45^2 + 60^2} = 75\text{V} \cdot \text{A}$$

计算电路电流

$$I = \frac{S}{U} = \frac{75}{120} = 0.625\text{A}$$

有功功率是电阻吸收的,即

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{45}{0.625^2} = 115.2\Omega$$

无功功率是电感吸收的,即

$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{60}{0.625^2} = 153.6\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{153.6}{314} = 0.489\text{H}$$

【例 3-27】 图 3-76(a)中在 220V 的电力线路上,并接 20 只 40W 功率因数为 0.5 的日光灯,还并接有 100 只 40W 的白炽灯,白炽灯是纯电阻负载,求:

- (1) 线路总的有功功率、无功功率、视在功率、功率因数和功率因数角。
- (2) 线路总电流有效值。
- (3) 线路总的复阻抗。

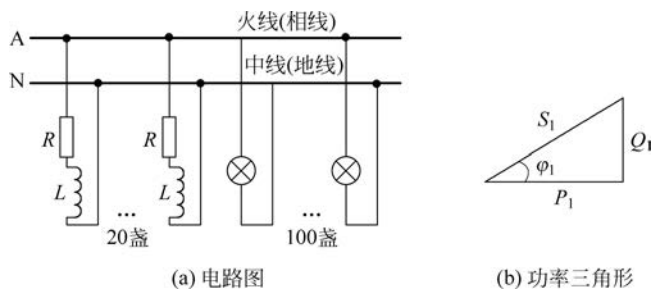


图 3-76 例 3-27 电路图、功率三角形

解 (1) 第一部分电路是 20 只日光灯并联,日光灯用到镇流器是电感线圈。

已知

$$P_1 = 40 \times 20 = 800\text{W}, \quad \cos\varphi_1 = 0.5$$

则有

$$\varphi_1 = \arccos 0.5 = 60^\circ$$

根据图 3-76(b)的功率三角形得

$$Q_1 = P_1 \tan\varphi_1 = 800 \times \tan 60^\circ = 1385.64\text{var}$$

第二部分电路是 100 只白炽灯并联,白炽灯是纯电阻负载,功率因数为 1。

则有

$$P_2 = 40 \times 100 = 4000\text{W}, \quad Q_2 = 0$$

所以

$$P = P_1 + P_2 = 800 + 4000 = 4800\text{W}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 1385.64\text{var}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 4996\text{V} \cdot \text{A}$$

电力线路的总功率因数和功率因数角分别为

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{4800}{4996} = 0.96, \quad \varphi = \arccos 0.96 = 16.26^\circ$$

(2) 线路总电流有效值

$$I = \frac{S}{U} = \frac{4996}{220} = 22.71 \text{ A}$$

(3) 线路总的复阻抗

$$Z = \frac{U}{I} \angle \varphi = \frac{220}{22.71} \angle 16.26^\circ = 9.67 \angle 16.26^\circ \Omega$$

在供电系统中,有时需要对功率进行测量。电动系功率表的测量机构有两个线圈,固定线圈通入被测电流 $\dot{I}$, 可动线圈通入与被测电压 $\dot{U}$ 成正比同相位的小电流, 两个电流产生的磁场相互作用使可动线圈带动指针偏转, 如图 3-77(a) 所示。其中电流线圈内阻很小可看成短路; 电压线圈支路中串入一个大电阻 R_V , 使分流很小, 可看成开路。该功率表的读数正比于图中被测 RL 串联电路的平均功率, 即

$$W = kUI \cos \varphi$$

式中, k ——仪表比例系数。

由于电流流向不同产生的磁场方向也不同, 因此两个线圈都要规定电流的流入端——称为发电机端, 用“*”号标注。测量时, 两“*”号端相连后共同接向电源的正极端。功率表具有相敏特性, 偏转角度不仅与电流、电压有效值乘积成正比, 还与两者相位差角的余弦成正比。功率表也可以做成电子式数字显示的, 接线方法相同。

【例 3-28】 图 3-77 用三表法测量电感线圈的自感系数 L 和绕线电阻 R , 电源频率为 50 Hz, 电压表读数为 100 V, 电流表读数为 2 A, 功率表读数为 120 W, 计算 R 和 L 。

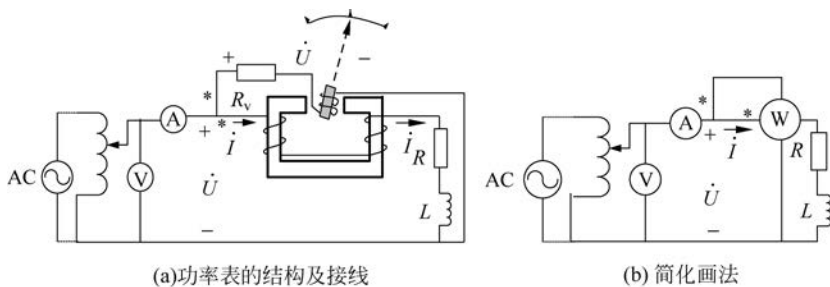


图 3-77 例 3-28 电路图

解 电感线圈阻抗的模值为

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{100}{2} = 50 \Omega$$

根据功率表的读数

$$P = UI \cos \varphi = 100 \times 2 \cos \varphi = 120 \text{ W}$$

得功率因数及功率因数角

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{120}{100 \times 2} = 0.6, \quad \varphi = \arccos 0.6 = 53.1^\circ$$

则有

$$Z = R + jX_L = \frac{U}{I} \angle \varphi = 50 \angle 53.13^\circ = 30 + j40 \Omega$$

所以

$$R = 30\Omega, \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{40}{314} = 0.127\text{H}$$

3.8.6 复功率



正弦电路运算采用复数十分快捷,但前述有关功率的概念 P 、 Q 、 S 、 φ 都不是复数量,为营造全复数化运算的环境,定义一个新的计算用复数——复功率 $\bar{S}$,单位为伏安($\text{V} \cdot \text{A}$)或千伏安($\text{kV} \cdot \text{A}$),其模值为视在功率 S ,辐角为功率因数角 φ ;其实部为有功功率 P ,虚部为无功功率 Q 。

$$\bar{S} = S \angle \varphi = P + \text{j}Q = \sqrt{P^2 + Q^2} \angle \arctan \frac{Q}{P} \quad (3-66)$$

它不代表正弦量的相量,所以 $\bar{S}$ 顶部不打点。

为使复功率 $\bar{S}$ 与电压、电流相量直接相关,电路的 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 在关联参考方向下吸收的复功率为

$$\bar{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI \angle (\psi_u - \psi_i) = P + \text{j}Q \quad (3-67)$$

$\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 在非关联参考方向下,吸收的复功率则为

$$\bar{S} = -\dot{U} \dot{I}^* = -UI \angle (\psi_u - \psi_i) = P + \text{j}Q$$

必须注意的是:复功率 $\bar{S}$ 不等于电压相量乘以电流相量,而是电压相量乘以电流相量的共轭复数。两共轭复数的概念是“模相等辐角互为相反数”,即若 $\dot{I} = I \angle \psi_i = 30 \angle 25^\circ \text{A}$,则其共轭复数为 $\dot{I}^* = I \angle -\psi_i = 30 \angle -25^\circ \text{A}$,只有这样定义,复功率的辐角才等于功率因数角 $\varphi = \psi_u - \psi_i$ 。目的是要产生“ $-\psi_i$ ”。

根据复数运算规则,以下等式成立:

$$\bar{S} = \dot{U} \dot{I}^* = Z \dot{I} \dot{I}^* = Z I^2 = (R + \text{j}X) I^2 \quad (3-68)$$

$$\bar{S} = \dot{U} (Y \dot{U})^* = \dot{U} \dot{U}^* Y^* = U^2 Y^* = U^2 (G + \text{j}B)^* \quad (3-69)$$

复功率中各量的意义小结见表 3-1。

表 3-1 复功率中各量的意义

二端网络	图形	复功率计算公式	有功功率 P	无功功率 Q
$\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 关联参考方向		$\bar{S} = \dot{U} \dot{I}^* = P + \text{j}Q$	$P > 0$ 吸收有功功率	$Q > 0$ 吸收无功功率(感性无功)
			$P < 0$ 发出有功功率	$Q < 0$ 发出无功功率(容性无功)
$\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 非关联参考方向		$\bar{S} = -\dot{U} \dot{I}^* = P + \text{j}Q$	$P > 0$ 吸收有功功率	$Q > 0$ 吸收无功功率(感性无功)
			$P < 0$ 发出有功功率	$Q < 0$ 发出无功功率(容性无功)

【例 3-29】 如图 3-78(a) 所示电路, 已知 $R_1 = 40\Omega$, $jX_L = j157\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $-jX_C = -j114\Omega$, 电源电压 $\dot{U} = 220\angle 0^\circ\text{V}$, 频率 $f = 50\text{Hz}$ 。试计算:

- (1) 各支路电流 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 和总电流 $\dot{I}$ 。
- (2) 三条支路的复功率 $\bar{S}_1$ 、 $\bar{S}_2$ 和 $\bar{S}$ 。
- (3) 对题目所给的独立电系统, 验证 $P_1 + P_2 + P = 0$, $Q_1 + Q_2 + Q = 0$, $\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S} = 0$ 。

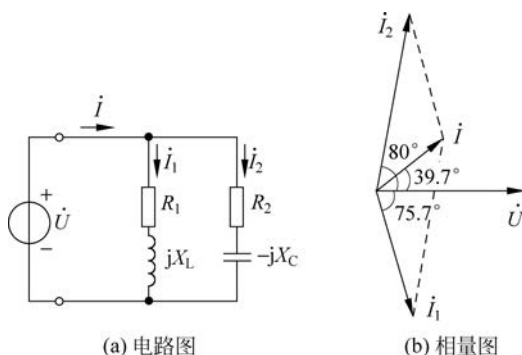


图 3-78 例 3-29 电路图、相量图

解 (1) 计算各支路电流 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 和总电流 $\dot{I}$, 即

$$Z_1 = R_1 + jX_L = 40 + j157 = 162\angle 75.7^\circ\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220\angle 0^\circ}{162\angle 75.7^\circ} = 1.36\angle -75.7^\circ\text{A}$$

$$Z_2 = R_2 - jX_C = 20 - j114 = 115.7\angle -80^\circ\Omega$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220\angle 0^\circ}{115.7\angle -80^\circ} = 1.9\angle 80^\circ\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1.36\angle -75.7^\circ + 1.9\angle 80^\circ = 0.87\angle 39.7^\circ\text{A}$$

(2) 计算三条支路的复功率 $\bar{S}_1$ 、 $\bar{S}_2$ 和 $\bar{S}$, 即

$$\begin{aligned}\bar{S}_1 &= \dot{U}\dot{I}_1^* = P_1 + jQ_1 = 220\angle 0^\circ \times 1.36\angle 75.7^\circ = 299.2\angle 75.7^\circ \\ &= (73.9 + j289.93)\text{V} \cdot \text{A}, \text{无源感性}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_2 &= \dot{U}\dot{I}_2^* = P_2 + jQ_2 = 220\angle 0^\circ \times 1.9\angle -80^\circ = 418\angle -80^\circ \\ &= (72.58 - j411.65)\text{V} \cdot \text{A}, \text{无源容性}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S} &= -\dot{U}\dot{I}^* = P + jQ = -220\angle 0^\circ \times 0.87\angle -39.7^\circ = 191.4\angle 140.3^\circ \\ &= (-147.26 + j122.26)\text{V} \cdot \text{A}, \text{有源感性}\end{aligned}$$

(3) 验证功率守恒, 即

$$P_1 + P_2 + P = 73.9 + 72.58 - 147.26 \approx 0\text{W}$$

$$Q_1 + Q_2 + Q = 289.93 + (-411.65) + 122.26 \approx 0\text{var}$$

$$\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S} = (73.9 + j289.93) + (72.58 - j411.65) + (-147.26 + j122.26) \\ \approx 0 \text{ V} \cdot \text{A}$$

在电力系统中,电源与负载之间的有功功率、无功功率时刻都要保持平衡(即复功率平衡),由调度自动化系统来保证功率平衡的实现。调度自动化系统是智能电网的核心,由计算机系统控制。

全电网用电的有功功率增加时,电网频率 f 有下降的趋势(f 与发电机转速大小相关联),表明电源输出的有功功率少于电力负荷消耗的功率,调度自动化系统会调度运行机组增发有功或调度备用发电机组并网发电;相反,电网用电的有功功率减少时,频率 f 有上升的趋势,表明有功功率过量,调度自动化系统会指挥某些发电机组减发有功或直接将某些机组退出运行。

另外,全电网消耗的无功功率增加时,电网电压 U 有下降的趋势(U 与发电机励磁电流大小相关联),表明电源输出的无功功率不够,调度自动化系统会指挥投入更多的无功电源(电容器组、同步调相机等)或调高发电机励磁电流;相反,无功功率过剩,电网电压 U 有升高的趋势,这时需要切断过多无功电源或降低发电机励磁电流。如此才能确保全电网功率的动态平衡。

前述各节运用的符号和算式中,有些量顶部打点、有些不打;有时可用有效值(模值)运算,有时需要用复数运算,初学者容易混淆,使用的原则如下:

- (1) 表示正弦量的相量 $\dot{U}$ 、 $\dot{i}$ 才打点;计算用复数 Z 、 Y 、 $\bar{S}$ 不打点。
- (2) 正弦量的加减运算,不能用有效值进行。
- (3) 直接相乘或相除的计算可用模值进行,但结果仅得到模值,不能算出角度;用复数相乘或相除,可同时得到模值和角度。
- (4) 与电压三角形、阻抗三角形、功率三角形、导纳三角形、电流三角形的三边长度有关的计算,用数量大小,不用相量。

【例 3-30】 如图 3-79 所示供电系统由两条电源支路共同供电,计算每条支路的复功率。

解 图示电路的弥尔曼方程为

$$\dot{U}_A = \frac{\frac{240\angle 0^\circ}{2} + \frac{160\angle 45^\circ}{j1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j1} + \frac{1}{1-j1}} = 231.65\angle 0.68^\circ \text{ V}$$

$$\dot{i}_{S1} = \frac{240\angle 0^\circ - \dot{U}_A}{2} = \frac{240\angle 0^\circ - 231.65\angle 0.68^\circ}{2} = 4.34\angle -18.14^\circ \text{ A, 电流值很小}$$

$$\dot{i}_{S2} = \frac{160\angle 45^\circ - \dot{U}_A}{j1} = \frac{160\angle 45^\circ - 231.65\angle 0.68^\circ}{j1} = 162\angle 47.05^\circ \text{ A, 电流值极大}$$

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_A}{1-j1} = \frac{231.65\angle 0.68^\circ}{1-j1} = 163.8\angle 45.68^\circ \text{ A, 负载电流几乎全由电源 2 支路提供}$$

电源 1 支路的电流 $\dot{i}_{S1}$ 与结点电压 $\dot{U}_A$ 为非关联参考方向,则

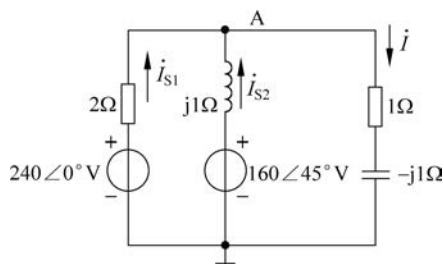


图 3-79 例 3-30 电路图

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{S1} &= -\dot{U}_A \dot{I}_{S1}^* = -231.65 \angle 0.68^\circ \times 4.34 \angle 18.14^\circ \\
 &= -1005.36 \angle 18.82^\circ = P_{S1} + jQ_{S1} \\
 &= -951.61 - j324.33 \text{ V} \cdot \text{A}
 \end{aligned}$$

电源 1 支路发出有功功率,发出无功功率(容性无功)。

电源 2 支路的电流 $\dot{I}_{S2}$ 与 $\dot{U}_A$ 也为非关联参考方向,则

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{S2} &= -\dot{U}_A \dot{I}_{S2}^* = -231.65 \angle 0.68^\circ \times 162 \angle -47.05^\circ \\
 &= -37\,527.3 \angle -46.37^\circ = P_{S2} + jQ_{S2} \\
 &= -25\,893.78 + j27\,162.66 \text{ V} \cdot \text{A}
 \end{aligned}$$

电源 2 支路发出有功功率,吸收无功功率(感性无功)。

负载支路的电流 $\dot{I}$ 与 $\dot{U}_A$ 为关联参考方向

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_Z &= \dot{U}_A \dot{I}^* = 231.65 \angle 0.68^\circ \times 163.8 \angle -45.68^\circ \\
 &= 37\,944.27 \angle -45^\circ = P_Z + jQ_Z = 26\,830.65 - j26\,830.65 \text{ V} \cdot \text{A}
 \end{aligned}$$

负载支路吸收有功功率,发出无功功率(容性无功)。

验证功率守恒,即

$$P_{S1} + P_{S2} + P_Z = -951.61 - 25\,893.78 + 26\,830 \approx 0 \text{ W}$$

$$Q_{S1} + Q_{S2} + Q_Z = -324.33 + 27\,162.66 - 26\,830.65 \approx 0 \text{ var}$$

以上表明,两条电源支路共同供电时,若两电源参数相差较大,电压值低的电源输出电压极大,而另一个很小,负载不能在两个电源上均分。实际运行中,必须避免这种情况,两电源参数要一致。若其中一个电源出现故障,也会出现参数偏差,因此供电电源在现场要有自动装置监测其参数的变化。

【例 3-31】 如图 3-80 所示电源带有三条负载支路,求电源输出的电流 $\dot{I}_S$ 。

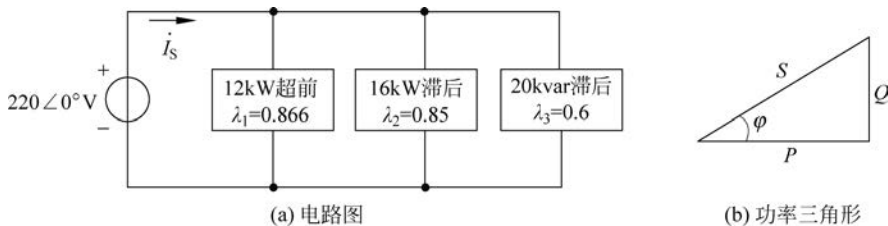


图 3-80 例 3-31 电路图、功率三角形

解 (1) 负载 1 功率因数——超前,为容性负载。其功率因数角为负

$$\varphi_1 = -\arccos 0.866 = -30^\circ$$

无功功率为负

$$Q_1 = P_1 \tan(-30^\circ) = -12 \times 0.577 = -6.93 \text{ kvar}$$

(2) 负载 2 功率因数——滞后,为感性负载。其功率因数角为正

$$\varphi_2 = \arccos 0.85 = 31.79^\circ$$

无功功率为正

$$Q_2 = P_2 \tan 31.79^\circ = 16 \times 0.62 = 9.92 \text{ kvar}$$

(3) 负载 3 功率因数——滞后, 为感性负载。其功率因数角为正

$$\varphi_3 = \arccos 0.6 = 53.13^\circ$$

无功功率为正, 求有功功率

$$P_3 = \frac{Q_3}{\tan 53.13^\circ} = \frac{20}{1.33} = 15 \text{ kW}$$

(4) 三条负载支路的总有功功率

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 12 + 16 + 15 = 43 \text{ kW}$$

三条负载支路的总无功功率

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -6.93 + 9.92 + 20 = 22.99 \text{ kvar}$$

表明负载总体为感性负载。

三条负载支路的总视在功率

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{43^2 + 22.99^2} = 48.76 \text{ kV} \cdot \text{A}$$

三条负载支路的总功率因数角

$$\varphi = \arcsin \frac{Q}{S} = \arcsin \frac{22.99}{48.76} = 28.13^\circ \quad \text{或} \quad \arccos \frac{P}{S} = \arccos \frac{43}{48.76} = 28.13^\circ$$

电源输出电流的有效值为

$$I_S = \frac{S}{U} = \frac{48\,760}{220} = 221.6 \text{ A}$$

该电流滞后电源电压 28.13° , 所以

$$\dot{I}_S = 221.6 \angle -28.13^\circ \text{ A}$$

该题在解答过程中反复借助了功率三角形的概念, 每条支路有各自的功率三角形, 总体电路有总体功率三角形。

3.8.7 最大功率传输

正弦电路中传输的最大功率, 指的是最大有功功率, 由图 3-81 分析负载获得最大功率的条件。

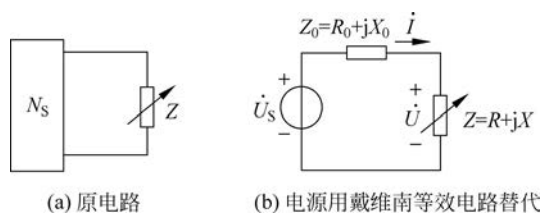


图 3-81 负载共轭匹配传输最大功率

根据戴维南定理, 有源二端网络 N_S 对于外电路可以用戴维南电路来等效, 如图 3-81(b) 所示。设 $Z_0 = R_0 + jX_0$ 不可改变, 而负载 $Z = R + jX$ 可变, 则负载吸收的有功功率为

$$P = I^2 R = \left(\frac{U_S}{\sqrt{(R + R_0)^2 + (X + X_0)^2}} \right)^2 R$$

理论与实践均证明 P 取最大值的条件是

$$R = R_0, \quad X = -X_0 \quad \text{即} \quad Z = Z_0^* = R_0 - jX_0 \quad (3-70)$$

式中, Z 等于 Z_0 的共轭复数, 称为共轭匹配。

此时负载获得的最大功率为

$$P_{\max} = I^2 R = \frac{U_S^2 R_0}{(R_0 + R_0)^2 + (-X_0 + X_0)^2} = \frac{U_S^2}{4R_0} \quad (3-71)$$

显然此时有功功率的传输效率只有 50%。电力线路传输的电功率巨大, 不能采用共轭匹配方式供电, 否则浪费巨大, 应该尽量使电源内阻抗 Z_0 减小。

【课后练习】

3.8.1 求以下 4 种情况的复功率。

(1) $P = 269 \text{ W}, Q = -150 \text{ var}$ (容性); $\bar{S}_1 = (\quad) \text{ V} \cdot \text{A}$ 。

(2) $S = 600 \text{ V} \cdot \text{A}, Q = 450 \text{ var}$ (感性); $\bar{S}_2 = (\quad) \text{ V} \cdot \text{A}$ 。

(3) $Q = -2000 \text{ var}$, 功率因数 0.9 (超前); $\bar{S}_3 = (\quad) \text{ V} \cdot \text{A}$ 。

(4) $U_S = 220 \text{ V}, P = 1 \text{ kW}, |Z| = 40 \Omega$ (滞后); $\bar{S}_4 = (\quad) \text{ V} \cdot \text{A}$ 。

3.8.2 关联参考方向下, 复功率的计算公式为(), 其实部是()功率, 单位是(); 虚部是()功率, 单位是(); 模对应的是()功率, 单位是()。

3.8.3 每只日光灯的功率因数为 0.5, 当 N 只日光灯相并联时, 总的功率因数为(); 若再与 M 只白炽灯并联, 则总功率因数将()。

3.8.4 某无源网络吸收功率 $P = 500 \text{ W}$ 、功率因数 $\lambda = \cos \varphi = 0.5$ (容性), 如网络的端口电压相量 $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则端口电流 $\dot{I} = (\quad) \text{ A}$ 及网络吸收的无功功率 $Q = (\quad) \text{ var}$ 。

3.8.5 已知无源二端网络, $\dot{U} = 2 \angle 60^\circ \text{ V}, \dot{I} = 3 \angle -30^\circ \text{ A}$, 两者取关联参考方向, 网络吸收的视在功率为() $\text{ V} \cdot \text{A}$ 、有功功率为() W 、无功功率为() var , 该元件是()。

3.8.6 已知某无源二端网络, $\dot{U} = 40 \angle 0^\circ \text{ V}, \dot{I} = 2 \angle 36.87^\circ \text{ A}$, 则等效复阻抗为感性还是容性? 功率因数角为多少? 功率因数为多少? 并填写如图 3-82 所示各三角形的三边。

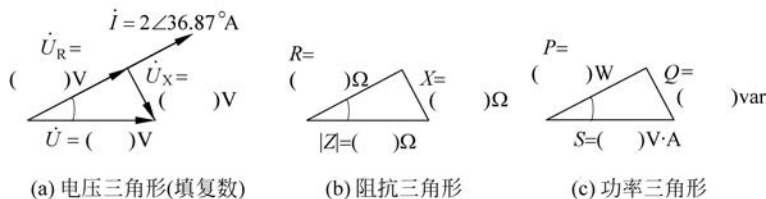


图 3-82 3.8.6 附图

3.9 功率因数的提高

功率因数是企事业用电单位重要的经济技术指标, 有关电费支出的额度和生产成本的高低, 供用电双方均十分重视。



3.9.1 提高功率因数的意义

供电线路用户侧的功率因数是一个重要的用电参数,关系到供用电双方的经济效益。图 3-83 是感性负载的供电线路示意图, r 为供电导线的电阻,电流通过时, r 上会产生功率损耗 ΔP 、电压损失 ΔU 。

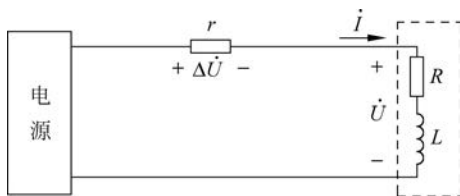


图 3-83 感性负载的供电线路示意图

当负载所需有功功率和额定电压一定时,输电线电流与功率因数成反比。

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{P}{U} \times \frac{1}{\cos \varphi}$$

电流增大会使输电线上的功率损耗 ΔP 增大。 ΔP 与功率因数的平方成反比。

$$\Delta P = I^2 r = \left(\frac{P}{U \cos \varphi} \right)^2 r = \frac{P^2 r}{U^2} \times \frac{1}{\cos^2 \varphi} \quad (3-72)$$

电流增大还会使输电线上的电压损失 ΔU 增大。 ΔU 与功率因数成反比。

$$\Delta U = I r = \frac{P}{U \cos \varphi} r = \frac{P r}{U} \times \frac{1}{\cos \varphi} \quad (3-73)$$

如果已建一个容量为 S_N 的电源点,它能提供的有功功率为

$$P = S_N \cos \varphi \leq S_N$$

如果已建有有功功率需求为 P_N 的工业园区,和它配套的电源点容量为

$$S = \frac{P_N}{\cos \varphi} \geq P_N$$

可见,提高负载功率因数,可降低 ΔP 、 ΔU 、减少导线的用铜量、提高电源设备利用率。

3.9.2 提高功率因数的方法



电力负载多为感性,如变压器、电动机、家用电器、电焊机等。其中电感元件储存磁场能,磁场能为负载所必需。如在电动机中,转子与定子之间并无电的直接联系,而输入定子的电能转换为电动机转子输出的机械能就靠转子与定子之间的磁场来传递并转换,但磁场能并不被吸收,而是储存后又释放与电源进行能量往返交换,形成无功功率。就地提供无功功率的方法就是电感性负载与电容性负载并联,容性负载发出的无功功率可就近提供给感性负载,减少了感性负载和电源间能量交换。常见容性负载有电力电容器和同步电动机两种。

图 3-84(a)以在感性负载两端并联电容器为例,介绍提高功率因数的方法。如图 3-84(b)所示相量图中, $\dot{U}$ 为参考相量,没并联电容前 $\dot{I} = \dot{I}_L$, $\dot{I}_L$ 滞后 $\dot{U}$ 的相位为 φ_L (角度大)。并联

电容后,由于电容电流 $\dot{I}_C$ 超前电压 90° ,总电流 $\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C$ 减小了,整体电路的功率因数角由 φ_L 减小为 φ_2 ,达到了提高功率因数的目的。应注意到:并联电容前后感性支路本身的工作状态并不发生任何变化。感性支路的电流和有功功率不变,由于电容元件的有功功率为零,所以整体电路的有功功率也不变。发生变化的是:电路的总电流、视在功率、功率因数角均减小了。

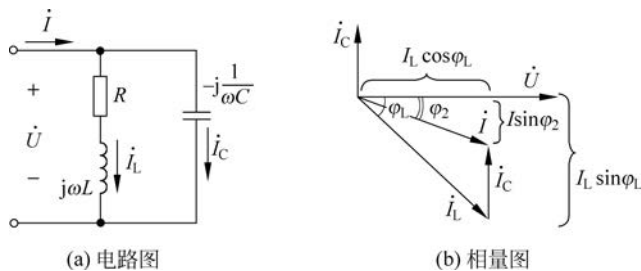


图 3-84 并联电容提高感性负载的功率因数

观察图 3-84(b)得到

$$I_C = I_L \sin \varphi_L - I \sin \varphi_2 = \frac{P}{U \cos \varphi_L} \sin \varphi_L - \frac{P}{U \cos \varphi_2} \sin \varphi_2 = \frac{P}{U} (\tan \varphi_L - \tan \varphi_2)$$

又因为

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{U}{1/\omega C} = U\omega C$$

令上两式相等,得

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_L - \tan \varphi_2) \quad (3-74)$$



【例 3-32】 某单相变压器额定电压 $U_N = 220\text{V}$, 额定容量 $S_N = 50\text{kV} \cdot \text{A}$ 。若负载功率因数 $\cos \varphi_1 = 0.6$, 可供给负载多少有功功率? 若将负载功率因数提高到 $\cos \varphi_2 = 0.9$, 可提供多少有功功率?

解 负载 $\cos \varphi_1 = 0.6$ 时, 变压器可提供的有功功率为

$$P_1 = S_N \cos \varphi_1 = 50 \times 0.6 = 30\text{kW}$$

若将负载的功率因数提高到 $\cos \varphi_2 = 0.9$, 则

$$P_2 = S_N \cos \varphi_2 = 50 \times 0.9 = 45\text{kW}$$

表明不需要增加供给, 就能多提供 15kW 有功功率。



要适当选择并联电容的电容值, C 值增大, I_C 增大, 整体电路若仍在感性范围内时, 总电流 I 和功率因数角 φ_2 随之减小, 如图 3-85(a) 所示; 当功率因数角调整到 $\varphi_2 = 0^\circ$ 时, 功率因数为 1, 总电流 I 最小, 称为全补偿, 这时电路发生了谐振, 使总电流与电压同相, 如图 3-85(b) 所示; 但再增大 C 值, $\dot{I}$ 将超前于 $\dot{U}$, 整体电路变为容性, 称为过补偿, 这时 C 增大, 功率因数反而下降, 负载向电源倒送无功功率, 是不应该出现的现象, 如图 3-85(c) 所示。电容适当补偿后整体电路仍为弱感性 (φ_2 为正值, 但很小), 称为欠补偿, 是常见的情形。

实际供电过程中, 负载时刻变化, 要做到全补偿不易跟踪, 并且全补偿需要的电容值 C 很大, 投资过大不可取。采用单片计算机在线监测负载功率因数, 根据功率因数变化, 自动

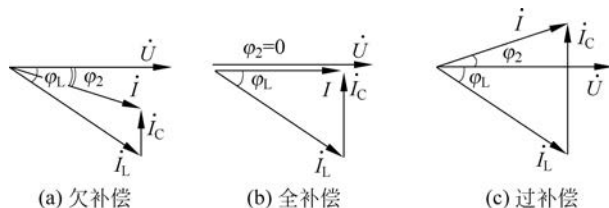


图 3-85 电容对感性负载的欠补偿、全补偿和过补偿

计算并投切电容器组的容量,可保证功率因数位于弱感性 $0.90 \sim 0.95$ 。

【例 3-33】 如图 3-84 所示电路,电网电压 $U = 220\text{V}$,频率 $f = 50\text{Hz}$,电路的总功率 $P = 2\text{kW}$,未接电容器支路前,电路的功率因数 $\cos\varphi = 0.5$,接通电容器支路后,功率因数提高到 $\cos\varphi' = 0.866$ (感性)。试求电阻 R 、电感 L 及电容 C 。

解 未接电容器前的功率因数角及电流

$$\cos\varphi = 0.5, \quad \varphi = \arccos 0.5 = 60^\circ$$

$$I_L = \frac{P}{U \cos\varphi} = \frac{2000}{220 \times 0.5} = 18.2\text{A}$$

并联电容器后的功率因数角及总电流

$$\cos\varphi' = 0.866, \quad \varphi' = \arccos 0.866 = 30^\circ$$

$$I = \frac{P}{U \cos\varphi'} = \frac{2000}{220 \times 0.866} = 10.5\text{A}$$

设

$$\dot{U} = 220 \angle 0^\circ \text{V}$$

则

$$\dot{I} = I \angle -\varphi = 10.5 \angle -30^\circ \text{A}, \quad \dot{I}_L = I_L \angle -\varphi = 18.2 \angle -60^\circ \text{A}$$

$$R + jX_L = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_L} = \frac{220 \angle 0^\circ}{18.2 \angle -60^\circ} = 12.1 \angle 60^\circ = 6.05 + j10.5 \Omega$$

所以

$$R = 6.05 \Omega, \quad X_L = 10.5 \Omega, \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{10.5}{314} = 0.033\text{H}$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan\varphi - \tan\varphi') = \frac{2000}{314 \times 220^2} (\tan 60^\circ - \tan 30^\circ) = 152 \mu\text{F}$$

【例 3-34】 一台同步电动机吸收功率 20kW ,和一台异步电动机并联,后者功率因数 0.7 (滞后),吸收功率 50kW 。设同步电动机工作于超前功率因数,它需要提供多少无功功率才能使总功率因数提高到 0.9 (滞后)? 同步电动机本身的功率因数是多少?

解 异步电动机的视在功率为

$$S_2 = \frac{P_2}{\lambda_2} = \frac{50}{0.7} = 71\text{kV} \cdot \text{A}$$

异步电动机的无功功率为

$$Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} = \sqrt{71^2 - 50^2} = 50\text{kvar}$$

功率因数 0.9(滞后)对应的功率因数角为

$$\varphi_{\text{总}} = \arccos 0.9 = 25.8^\circ$$

总功率因数提高到 0.9(滞后)时的总无功功率为

$$Q_{\text{总}} = (P_1 + P_2) \tan \varphi_{\text{总}} = (20 + 50) \tan 25.8^\circ = 33.84 \text{ kvar}$$

同步电动机应提供的无功功率为

$$Q_1 = Q_{\text{总}} - Q_2 = 33.84 - 50 = -16.16 \text{ kvar}$$

无功功率为负表明是发出无功。同步电动机本身的功率因数为

$$\lambda_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{20}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 16.16^2}} = 0.78 \text{ (超前)}$$

【例 3-35】 功率为 1.1kW 的感应电动机,接在 220V、50Hz 的电路中,电动机需要的电流为 10A,求:

(1) 电动机的功率因数;

(2) 若在电动机两端并联一个 79.5μF 的电容器,电路的功率因数为多少?

解 (1) 原来的功率因数

$$\cos \varphi_1 = \frac{P}{UI} = \frac{1.1 \times 1000}{220 \times 10} = 0.5, \quad \varphi_1 = 60^\circ$$

(2) 并联电容器以后,有

$$C = \frac{P}{U^2 \omega} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$

其中新的功率因数角 φ_2 未知,整理后得

$$\tan \varphi_2 = \tan \varphi_1 - \frac{CU^2 \omega}{P} = \tan 60^\circ - \frac{79.5 \times 10^{-6} \times 220^2 \times 314}{1100} = 0.632$$

新的功率因数角为

$$\varphi_2 = \arctan 0.632 = 32.3^\circ$$

新的功率因数为

$$\lambda_2 = \cos 32.3^\circ \approx 0.845$$

【课后练习】

3.9.1 无源二端网络的功率因数与频率()关。有一 RL 串联电路,当频率增高时,其功率因数()。

3.9.2 两个负载相并联,若 $Z_1 = 5.2 - j3\Omega$, $Z_2 = 15.6 + jX\Omega$,那么 X 为() Ω 时,两条支路的视在功率可以直接相加。

3.9.3 判断下列说法的正确与错误,正确的填√,错误的填×。

(1) 负载通过串联电容提高功率因数,会使负载电压偏离电源电压(这也是负载的额定电压),负载不能正常工作。()

(2) 感性负载的功率因数为 0.9~0.95,处于弱感性,符合电力公司要求。()

(3) 感性负载并联电容器后处于过补偿状态下,电费较低。()

(4) 与感性负载相并联的电容越大,功率因数越高。()

3.9.4 某单相电动机,供电电压 220V,供电频率 50Hz, $\cos \varphi = 0.8$, $P = 100\text{kW}$,求:

(1) 电动机的串联等效参数 R 和 L 。

(2) 为使供电电流最小,要并联多大的电容。

习题

3-1-1 正弦电流的表达式为 $i = 20\sin(314t - 120^\circ)\text{A}$,画出其波形图。

3-1-2 若 $i_1 = 10\sin(\omega t + 30^\circ)\text{A}$, $i_2 = 20\sin(\omega t - 10^\circ)\text{A}$,则 i_1 的相位比 i_2 超前多少角度?

3-1-3 如图 3-86 所示波形图。

(1) 写出 u_A 和 u_B 的表达式。

(2) 试指出各正弦量的振幅值、有效值、初相、角频率、频率、周期及两者之间的相位差各为多少?

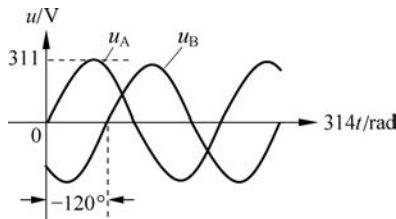


图 3-86 题图 3-1-3

3-2-1 将下列复数转化为极坐标形式。

(1) $\dot{A}_1 = 8 + j6$ (2) $\dot{A}_2 = -6 + j8$

(3) $\dot{A}_3 = -8 - j8$ (4) $\dot{A}_4 = j10$

(5) $\dot{A}_5 = -4$ (6) $\dot{A}_6 = 2.78 - j9.2$

3-2-2 将下列复数转化为代数形式。

(1) $\dot{A}_1 = 10 \angle -60^\circ$ (2) $\dot{A}_2 = 220 \angle 115^\circ$ (3) $\dot{A}_3 = 30 \angle 90^\circ$

(4) $\dot{A}_4 = 17.5 \angle -180^\circ$ (5) $\dot{A}_5 = 18 \angle -90^\circ$ (6) $\dot{A}_6 = 18 \angle -135^\circ$

3-2-3 已知复数 $\dot{A} = 4 + j5$, $\dot{B} = 6 - j2$ 。试求 $\dot{A} + \dot{B}$, $\dot{A} - \dot{B}$, $\dot{A} \times \dot{B}$ 和 $\dot{A} \div \dot{B}$ 。

3-2-4 已知复数 $\dot{A} = 17 \angle 24^\circ$ 和 $\dot{B} = 6 \angle -65^\circ$,试求 $\dot{A} + \dot{B}$, $\dot{A} - \dot{B}$, $\dot{A} \times \dot{B}$ 和 $\dot{A} \div \dot{B}$ 。

3-2-5 已知正弦电压相量 $\dot{U}_1 = (60 + j80)\text{V}$, $\dot{U}_2 = 100\sqrt{2} \angle 36.87^\circ\text{V}$, $\dot{U}_3 = (80 - j150)\text{V}$,若 $\omega = 300\text{rad/s}$,写出各相量对应的正弦量瞬时值表达式,说明它们的超前、滞后关系,并画出相量图。

3-2-6 如图 3-87 所示,已知 $\dot{I}_1 = 0.18 \angle -20.03^\circ\text{A}$, $\dot{I}_2 = 0.57 \angle 69.96^\circ\text{A}$,求 $\dot{I}$ 并画出相量图。

3-2-7 如图 3-88 所示,已知 $\dot{U}_S = 100 \angle 0^\circ\text{V}$, $\dot{U}_R = 60 \angle -53.13^\circ\text{V}$, $\dot{U}_C = 160 \angle -143.13^\circ\text{V}$,求 $\dot{U}_L$ 并画出相量图。

3-3-1 电容元件如图 3-89 所示,已知 u_C 求 i_C 。

(1) $u_C = 100\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ)\text{V}$ 。

(2) $u_C = 2e^{-100t}\text{V}$ 。

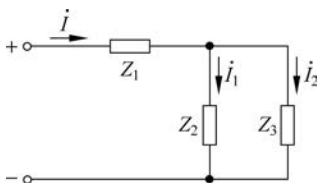


图 3-87 题图 3-2-6

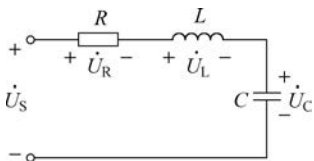


图 3-88 题图 3-2-7

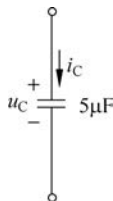


图 3-89 题图 3-3-1

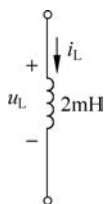


图 3-90 题图 3-3-2

3-3-2 电感元件如图 3-90 所示, 已知 i_L 求 u_L 。

(1) $i_L = 100 + 50e^{-2t} \text{ A}$ 。

(2) $i_L = 5\sqrt{2} \sin(314t - 45^\circ) \text{ A}$ 。

3-3-3 在 $1\mu\text{F}$ 的电容器两端加上 $u = 70.7\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ) \text{ V}$ 的正弦电压, 求通过电容器的电流有效值及电流瞬时值表达式。若所加电压的有效值与初相不变, 而频率增加为 100Hz 时, 通过电容器中的电流有效值又是多少? 前后两次无功功率分别为多少?

3-3-4 一个 $L = 127\text{mH}$ 的电感元件, 外加电源电压为 $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(314t - 120^\circ) \text{ V}$, 试求:

(1) 电感电流瞬时值表达式和无功功率, 并画出电压、电流相量图。

(2) 如果电源的频率变为 150Hz , 电压有效值不变, 电流有效值和无功功率又各为多少?

3-4-1 如图 3-91 所示, 若电流为 $i = 2\sin(2t - 30^\circ) \text{ A}$, 求 A、B 两元件的参数。

3-4-2 如图 3-92 所示, ω 多大时 u_0 的值为零?

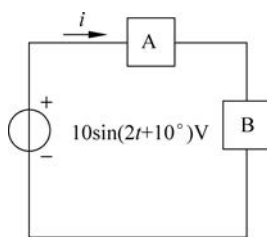


图 3-91 题图 3-4-1

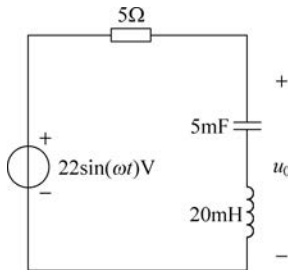


图 3-92 题图 3-4-2

3-4-3 已知交流接触器的线圈电阻为 200Ω , 电感量为 7.3H , 接到工频 220V 的电源上。求线圈中电流的有效值。如果误将此接触器接到 $U = 220\text{V}$ 的直流电源上, 线圈中的电流又为多少? 如果此线圈允许通过的电流为 0.1A , 将产生什么后果?

3-4-4 如图 3-93 所示, 在 RLC 串联交流电路中, $R = 30\Omega$, $L = 12\text{mH}$, $C = 5\mu\text{F}$, 电源电压 $u = 100\sqrt{2} \sin(5000t) \text{ V}$, 求: (1) 求 i 和 u_R 、 u_L 、 u_C 。(2) 画相量图。

3-4-5 电阻 $R = 40\Omega$ 和一个 $25\mu\text{F}$ 的电容器串联后, 接到 $u = 100\sqrt{2} \sin 50t \text{ V}$ 的电源上。试求电路中的电流 $\dot{I}$ 并画出相量图。

3-4-6 已知 RLC 串联电路的参数为 $R = 20\Omega$, $L = 0.1\text{H}$, $C = 30\mu\text{F}$, 当信号频率分别为 50Hz 、 1000Hz 时, 电路的复阻抗各为多少? 两个频率下阻抗的性质如何?

3-4-7 如图 3-94 所示, 图(a)中电压表读数分别为 $V_1 = 30\text{V}$, $V_2 = 40\text{V}$; 图(b)中电压表读数分别为 $V_1 = 15\text{V}$, $V_2 = 60\text{V}$, $V_3 = 80\text{V}$ 。求两图中电源电压的有效值 U_S 。设 $\dot{I}$ 为参考相量, 画出相量图。

3-4-8 如图 3-95 所示, 电路中电流表的读数为 12A 。求电压表 V_1 、 V_2 、 V_3 、 V_4 、 V 的

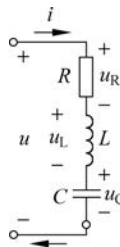


图 3-93 题图 3-4-4

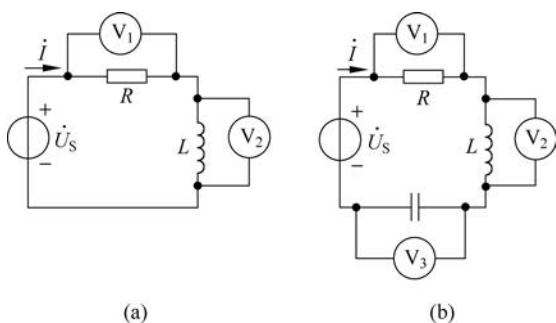


图 3-94 题图 3-4-7

读数分别为多少。设 $\dot{I}$ 为参考相量,画出各量的相量图。

3-4-9 如图 3-96 所示, $Z = (40 + j30)\Omega$, $U_2 = 200\text{V}$, 求电压有效值 U_1 为多少?

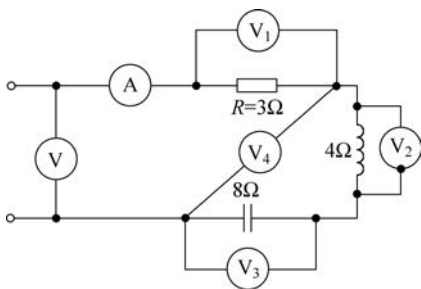


图 3-95 题图 3-4-8

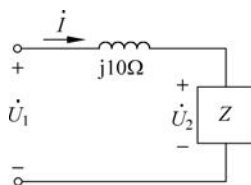


图 3-96 题图 3-4-9

3-4-10 如图 3-97 所示, 电流相量 $\dot{I} = 5\angle 0^\circ\text{A}$, 电容电压 U_C 为 25V , 总电压 $u = 50\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ)\text{V}$, 则阻抗 Z 为多少?

3-4-11 如图 3-98 所示, 在伏安法测量电感线圈的电路中当 $f_1 = 50\text{Hz}$ 时, 电压表及电流表的读数分别是 60V 及 10A ; 当 $f_2 = 100\text{Hz}$ 时, 电压表及电流表的读数分别是 60V 及 6A 。试求 R 及 L 。

3-4-12 如图 3-99 所示, $U = 150\text{V}$, $U_1 = 80\text{V}$, $U_2 = 200\text{V}$, $f = 50\text{Hz}$, $X_C = 80\Omega$ 。试求 R 及 L 的值。

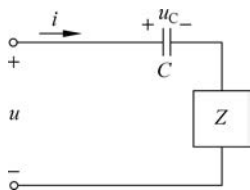


图 3-97 题图 3-4-10

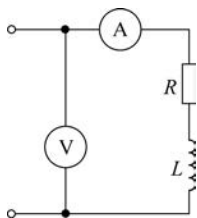


图 3-98 题图 3-4-11

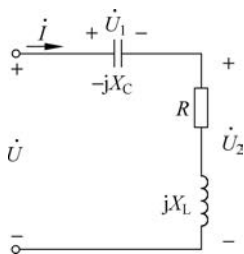


图 3-99 题图 3-4-12

3-5-1 如图 3-100 所示, 求 $i(t)$ 和 $u(t)$ 。

3-5-2 如图 3-101 所示,端电压有效值 $\dot{U}=24\angle 0^\circ\text{V}$,求电流相量 $\dot{I}$ 、 $\dot{I}_2$ 、 $\dot{I}_3$ 、 $\dot{I}_4$ 。画出所有各量的相量图。

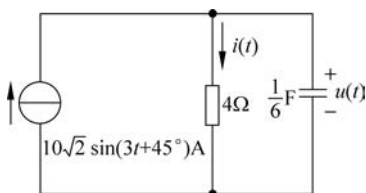


图 3-100 题图 3-5-1

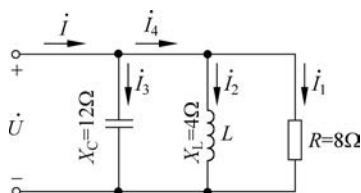


图 3-101 题图 3-5-2

3-5-3 如图 3-102 所示,已知 $\omega=10\text{rad/s}$, $-jX_C=-j100\Omega$ 。若开关 S 断开及闭合时电流表读数不变,求 L (提示:两次总阻抗的模值不变)。

3-5-4 如图 3-103 所示,在正弦电流电路中电流表的读数分别为 $A_1=5\text{A}$, $A_2=20\text{A}$, $A_3=25\text{A}$ 。求:

- (1) 电流表 A 的读数。
- (2) 如果维持电流表 A_1 的读数不变,而把电源的频率提高一倍,再求电流表 A 的读数。

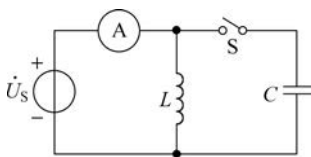


图 3-102 题图 3-5-3

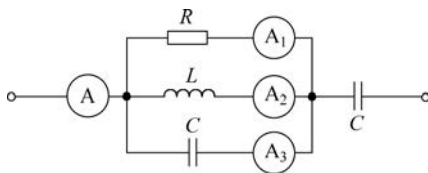


图 3-103 题图 3-5-4

3-5-5 如图 3-104 所示,求 $i(t)$ 和 $u(t)$ 。

3-6-1 如图 3-105 所示, $R=10\Omega$, $L=20\text{mH}$, $C=10\mu\text{F}$, $R_1=50\Omega$, $\dot{U}=100\angle 0^\circ\text{V}$, $\omega=1000\text{rad/s}$ 。试求各支路电流,并画出相量图。

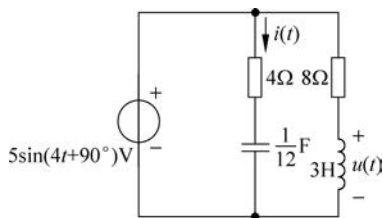


图 3-104 题图 3-5-5

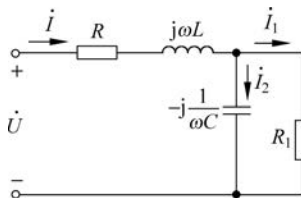


图 3-105 题图 3-6-1

3-6-2 如图 3-106 所示, $\omega L > \frac{1}{\omega C_2}$, $I_1=4\text{A}$, $I_2=3\text{A}$,求电流 I 。并判断电路为感性还是容性。

3-6-3 如图 3-107 所示, $u=8\sin\omega t\text{V}$, $i=4\sin(\omega t-30^\circ)\text{A}$, $\omega=1\text{rad/s}$, $L=2\text{H}$,求无源二端网络 N 的等效导纳。

3-6-4 如图 3-108 所示, $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10\Omega$ 时, 求整个电路的等效阻抗, 并转换成等效导纳来表示。

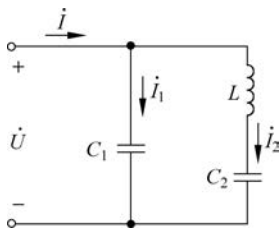


图 3-106 题图 3-6-2

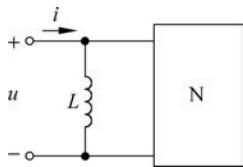


图 3-107 题图 3-6-3

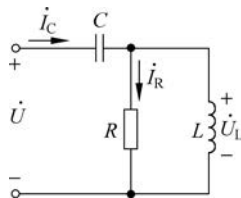


图 3-108 题图 3-6-4

3-6-5 如图 3-109 所示, ω 取下列值时分别求 $i_0(t)$: $\omega = 2\text{rad/s}$; $\omega = 10\text{rad/s}$; $\omega = 20\text{rad/s}$ 。

3-6-6 如图 3-110 所示, $\dot{I} = 31.5\angle 24^\circ\text{A}$, $\dot{U} = 50\angle 60^\circ\text{V}$, 求阻抗 Z_1 。

3-6-7 如图 3-111 所示, 若 $i_S(t) = 5\sin(10t + 40^\circ)\text{A}$, 求结点电压 $\dot{U}_A$ 及 $i_0(t)$ 。

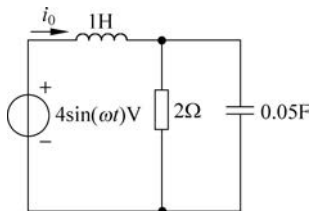


图 3-109 题图 3-6-5

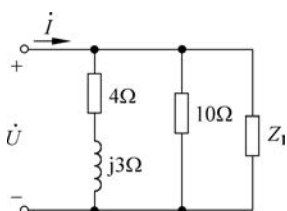


图 3-110 题图 3-6-6

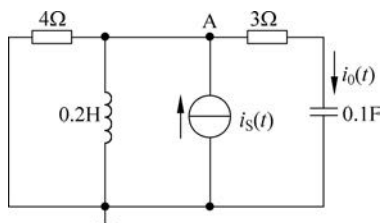


图 3-111 题图 3-6-7

3-6-8 列出如图 3-112 所示电路的网孔电流方程。

3-6-9 列出如图 3-113 所示电路的结点电压方程。

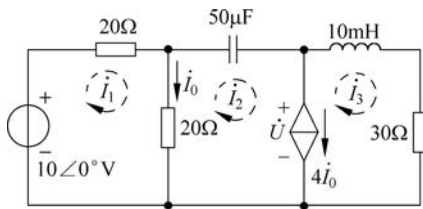


图 3-112 题图 3-6-8

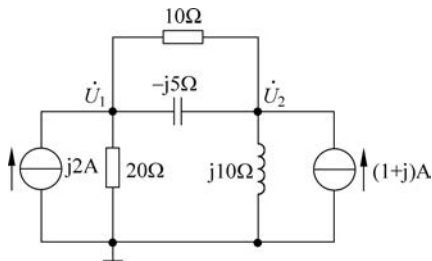


图 3-113 题图 3-6-9

3-6-10 如图 3-114 所示, 求 a、b 端的戴维南等效电路。

3-6-11 如图 3-115 所示, $u = 30\sin\omega t\text{V}$, $i = 5\sin\omega t\text{A}$, $\omega = 2000\text{rad/s}$, 若无源二端网络 N 可看作 RC 串联, 求 R 、 C 的参数。

3-7-1 一个串联谐振电路的特性阻抗为 200Ω , 品质因数为 200, 谐振时的角频率为 1000rad/s , 试求 R 、 L 和 C 的值。

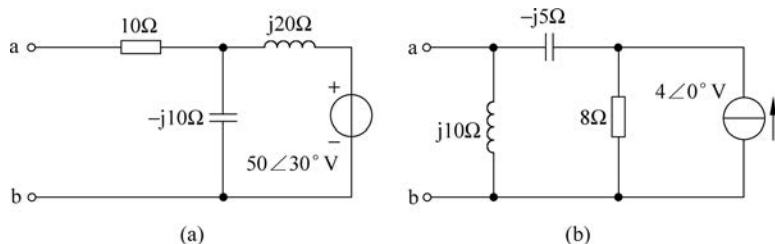


图 3-114 题图 3-6-10

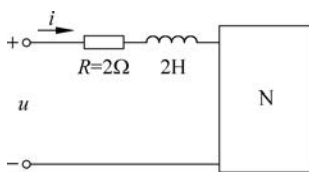


图 3-115 题图 3-6-11

3-7-2 已知串联谐振电路的谐振频率 $f_0 = 700\text{kHz}$, 电容 $C = 2000\text{pF}$, 通频带宽度 $\Delta f = 20\text{kHz}$, 试求电路的品质因数及电阻。

3-7-3 已知一串联谐振电路的参数 $R = 10\Omega$, $L = 0.13\text{mH}$, $C = 558\text{pF}$, 外加电压 $U = 10\text{mV}$ 。试求电路在谐振时的电流、品质因数及电感和电容上的电压。

3-7-4 有 $L = 50\mu\text{H}$, $R = 3.2\Omega$ 的线圈和一电容 C 并联, 调节电容的大小使电路在 720kHz 发生谐振, 问这时电容为多大? 回路的品质因数为多少?

3-7-5 如图 3-116 所示电路中, $\dot{U} = 2\angle 0^\circ\text{V}$ 保持不变。

(1) 当开关 S 闭合时电流表读数将如何变化? 用谐振的概念解释之。

(2) 在开关 S 处, 接入数字电压表, 其读数为多少? 画相量图解释之。

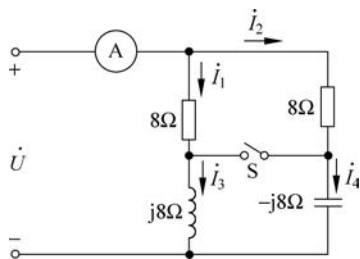


图 3-116 题图 3-7-5

3-7-6 如图 3-117 所示电路中, RL 串联电路与 C 并联接于工频电路中, 已知 $U = 200\text{V}$, $R = 10\Omega$, $L = 0.318\text{H}$ 。问 C 为何值时发生谐振? 谐振时电路中的电流 i 为多少? (提示: $R \ll \omega_0 L$ 基本满足, 可简化计算。)

3-8-1 如图 3-118 为某无源电路。试求其有功功率、无功功率和功率因数。并说明该无源二端网络阻抗的性质是感性还是容性。

(1) 电压、电流相量为 $\dot{U} = 10\angle 53.13^\circ\text{V}$, $\dot{I} = 2\angle 0^\circ\text{A}$;

(2) 电压、电流相量为 $\dot{U} = 48\angle 70^\circ\text{V}$, $\dot{I} = 8\angle 100^\circ\text{A}$ 。

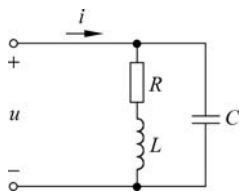


图 3-117 题图 3-7-6

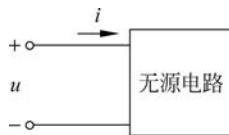


图 3-118 题图 3-8-1

3-8-2 如图 3-119 所示, 在正弦电流电路中, $U_1 = 25\text{V}$, 总功率 $P = 225\text{W}$, 求 $\dot{I}$ 、 X_L 、 $\dot{U}_2$

及电路的总无功功率 Q , 画出电流、电压相量图。

3-8-3 已知 RLC 串联电路中, 电阻 $R = 16\Omega$, 感抗 $X_L = 30\Omega$, 容抗 $X_C = 18\Omega$, 电路端电压为 220V , 试求电路中的有功功率 P 、无功功率 Q 、视在功率 S 及功率因数 $\cos\varphi$ 。

3-8-4 如图 3-120 所示, $i_s = \sqrt{2}\sin(10^4 t)\text{A}$, $Z_1 = (10 + j50)\Omega$, $Z_2 = -j50\Omega$ 。求 Z_1 、 Z_2 吸收的复功率。

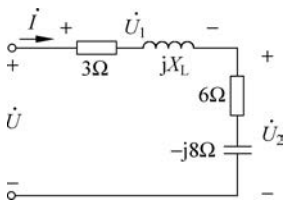


图 3-119 题图 3-8-2

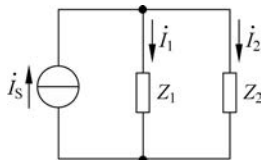


图 3-120 题图 3-8-4

3-8-5 如图 3-121 所示, $R_1 = 100\Omega$, $X_L = 300\Omega$, $R_2 = 200\Omega$, $X_C = 400\Omega$, $\dot{U} = 100\sqrt{2}\angle 45^\circ\text{V}$ 。分别求三条支路的复功率, 并验证复功率守恒。

3-8-6 有一变压器向两个车间并联供电, 它们的视在功率及功率因数分别为 $S_1 = 1000\text{kV}\cdot\text{A}$, $\lambda_1 = 0.866$; $S_2 = 500\text{kV}\cdot\text{A}$, $\lambda_2 = 0.6$ (均为感性负载), 变压器输出端的额定电压为 6000V 。试求变压器输出端的电流及功率因数。

3-8-7 将 RL 串联电路接到 220V 的直流电源时功率为 1.2kW , 将其接到 220V 的工频电源时功率为 0.6kW , 试求它的 R 、 L 。

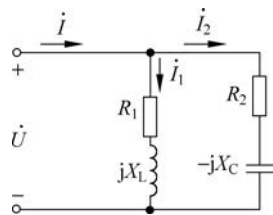


图 3-121 题图 3-8-5

3-9-1 如图 3-122 所示, 功率为 60W , 功率因数为 0.5 的日光灯负载与功率为 100W 的白炽灯各 50 只并联在 220V 的正弦电源上 (电源频率为 50Hz)。如果要把电路的功率因数提高到 0.92 , 应并联多大的电容? 并联电容后总电流减少为多少?

3-9-2 日光灯可视作 R 、 L 串联负载, 接到 220V 、 50Hz 的电源上。若并联的电容值调至 $5\mu\text{F}$ 时, 总电流达到最小值 0.18A , 求日光灯支路本身的电流为多少安? 画出相量图。

3-9-3 如图 3-123 所示, 已知工频电源电压 $\dot{U} = 100\angle 0^\circ\text{V}$, 感性负载 Z 的有功功率 $P = 6\text{W}$, 无功功率 $Q = 8\text{var}$ 。如果要使电路的功率因数 $\lambda = 1$, 应并联多大电容?

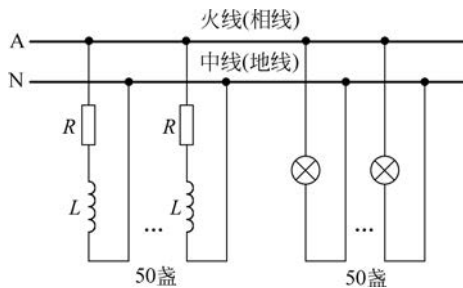


图 3-122 题图 3-9-1

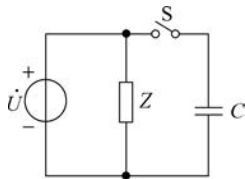


图 3-123 题图 3-9-3

3-9-4 某负载的复功率为 $\bar{S} = (9000 + j7000) \text{ kV} \cdot \text{A}$, 电压为 6 kV , 频率为 50 Hz 。现有一台变压器, 其额定容量为 $10\,000 \text{ kV} \cdot \text{A}$, 此变压器能否满足负载的要求? 至少应与负载并联多大的电容才能使变压器不超载运行?



习题答案