

## 线性系统的反馈控制

综合是与分析相反的一个概念。分析问题时,所面对的是已知的系统结构和参数及已知的外输入作用,而有待研究的是系统运动的定性行为(如能控性、能观测性、稳定性等)和定量的变化规律。但在综合问题中,情况恰好相反,这里已知的是系统的结构和参数,以及所期望的系统运动形式或其某些特征,所要确定的是需要施加于系统的外输入作用即控制作用的规律。通常,这种规律常取为反馈的形式。无论在抗扰动或抗参数变动方面,反馈系统的性能都远优越于非反馈系统。

本章将以状态空间描述和状态空间方法为基础,直接在时间域内来讨论线性反馈系统的综合问题;并且将主要讨论在不同形式的性能指标下线性定常系统的反馈控制规律的综合方法。显然,对综合问题的整个研究,都是建立在系统分析的基础之上的,其中需要用到在系统的分析中引入的许多概念及引导出的相应的结果与方法。

### 重要知识点

1. **循环矩阵**: 如果  $n$  阶实数方阵  $A$  的最小多项式就是其特征多项式,则称  $A$  为循环矩阵。

循环矩阵具有以下性质:

① 在循环矩阵的若当标准型中,每个特征值只对应一个若当块(含标量作为特例);或者说,每个特征值的几何重数都是 1。

② 如果矩阵  $A$  的特征值两两互异,则  $A$  必为循环矩阵。

③  $n$  阶矩阵  $A$  的循环性是指,存在向量  $b$ ,使得  $\text{rank}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\} = n$ ,即系统  $(A, b)$  能控。

④ 若多输入系统  $(A, B)$  能控,其中  $B$  是  $n \times p$  的  $p \geq 2$ ,则对几乎任意的  $p$  维列向量  $\rho$ ,构造的单输入系统  $(A, B\rho)$  能控。

⑤ 若多输入系统  $(A, B)$  能控,其中  $B$  是  $n \times p$  的  $p \geq 2$ ,但  $A$  不是循环矩阵,则对几乎任意的  $p \times n$  常值矩阵  $K, A - BK$  是循环矩阵。

2. **状态反馈极点配置的条件**: 当面对极点配置的任务时,由于不同的性能指标往往对应不同的极点,因此,期望能够对闭环极点进行任意配置是自然的要求。这里的“任意”,也不是绝对的,具体含义如下:

① 期望极点中的复数必须以共轭的形式成对出现。

② 极点的实部和虚部的数值任意。

③ 极点的代数重数任意。

④ 任何期望极点的几何重数不得超过控制输入的维数,否则闭环系统不能控,开环系统自然也就不能控。例如把一个能控的单输入  $n$  ( $n \geq 2$ ) 阶系统的极点配置为 1,几何重数是  $n$ ,这是做不到的。

系统  $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$  可由状态反馈  $u(t) = -Kx(t) + v(t)$  任意配置极点的充

分必要条件是：该系统能控。

3. 状态反馈极点配置算法一：标准型法。这个算法的前提条件是，系统完全能控；核心思想是，系统极点和特征多项式（及其系数）一一对应，从而，可以通过配置特征多项式系数来配置极点。

极点配置算法：

第1步，检验系统  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$  是否能控。若是，进行下一步；若否算法终止。

$$\text{第2步，求解变换矩阵 } \mathbf{P}, \text{ 以及 } \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

第3步，按照式

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s - \lambda_1^*) \times (s - \lambda_2^*) \times \cdots \times (s - \lambda_n^*) \\ &= s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \end{aligned}$$

计算期望极点对应的特征多项式。

第4步，按照式

$$\bar{\mathbf{k}} = [a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}^* - a_{n-1}]$$

计算得到行向量  $\bar{\mathbf{k}}$ 。

第5步，计算  $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{P}$ ，得所求的状态反馈增益向量。

对于能控的多输入系统，根据循环矩阵的性质⑤和④，总可以把状态反馈极点配置问题转化为单输入的情形，得到反馈增益矩阵  $\mathbf{K}$ 。

4. 状态反馈极点配置算法二：特征多项式法。这个算法的前提条件和标准型法相同，也是系统完全能控；核心思想是，借鉴标准型法并利用 Cayley-Hamilton 定理进行改进，最终用能控性判别矩阵和期望闭环多项式构造出状态反馈增益。

极点配置算法：

第1步，检验系统  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$  是否能控。若是，则进行下一步；若否，则算法终止。

第2步，按照式  $\mathbf{p}_1 = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]^{-1}$  计算得到行向量  $\mathbf{p}_1$ 。

第3步，按照式

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s - \lambda_1^*) \times \cdots \times (s - \lambda_n^*) \\ &= s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \end{aligned}$$

计算期望极点对应的特征多项式  $f^*(s)$ 。

第4步，按照式

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{p}_1[(a_0^* \mathbf{E}_n + a_1^* \mathbf{A} + \cdots + a_{n-1}^* \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) - \\ &\quad (a_0 \mathbf{E}_n + a_1 \mathbf{A} + \cdots + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n)] \\ &= \mathbf{p}_1 f^*(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

计算得行向量  $\bar{\mathbf{k}}$ 。

5. 状态反馈极点配置算法三：矩阵方程法。这个算法同时适用于单输入和多输入系统。前提条件是：第一，系统能控；第二，期望的闭环极点和开环极点没有重复。核心思想是：利用相似矩阵特征值系统的原理建立矩阵方程（本质是线性方程组），再由方程的解构

造出状态反馈增益矩阵。

算法步骤如下：

第1步,检验系统  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$  是否能控。若是,则进行下一步;若否,则算法终止。

第2步,检验  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$  是否为矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值。可通过判断  $\mathbf{A} - \lambda_i^* \mathbf{E}_n$  的秩是否等于  $n$  来进行。若  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$  都不是  $\mathbf{A}$  的特征值,则进行下一步;若否,则算法终止。

第3步,选取  $n$  阶实数矩阵  $\mathbf{H}$ ,使其特征值为期望极点  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ 。如可按照

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s - \lambda_1^*) \times \cdots \times (s - \lambda_n^*) \\ &= s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \end{aligned}$$

计算期望特征多项式,再建立伴侣矩阵形式的  $\mathbf{H}$ 。

第4步,选取  $p \times n$  矩阵  $\bar{\mathbf{K}}$ ,使得系统  $(\bar{\mathbf{K}}, \mathbf{H})$  能观测。

第5步,求解关于未知  $n \times n$  矩阵  $\mathbf{T}$  的矩阵方程

$$\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{H} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}$$

第6步,若系统为单输入,进行下一步;若系统为多输入,但  $\mathbf{T}$  可逆,进行下一步;否则,返回第4步,选取另一个满足  $(\bar{\mathbf{K}}, \mathbf{H})$  能观测的  $\bar{\mathbf{K}}$ 。

第7步,计算  $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1}$ ,即所求的状态反馈增益矩阵。

6. 状态反馈极点配置算法四:待定参数法。这个算法的前提条件是:控制矩阵的秩是1,因此主要针对单输入系统;核心思想是:把状态反馈增益向量的分量视为待定参数,计算系统的特征多项式。这个多项式的系数必然依赖控制参数。把这个多项式和期望极点对应的特征多项式作比较,即对应项系数相等,建立关于控制参数的方程组,进而解得控制参数。

考虑单输入线性定常控制系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$\mathbf{x}(t)$  是  $n$  维状态向量,  $u(t)$  是标量控制输入。给定  $n$  个期望的闭环系统极点

$$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$$

求反馈增益向量  $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n]$  对应的状态反馈控制律

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{k}\mathbf{x}(t) + v(t)$$

使得相应的闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}v(t)$$

具有极点  $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$ 。

闭环系统矩阵  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$  的特征多项式为

$$f(s, \mathbf{k}) = \det[s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})] = s^n + a_{n-1}(\mathbf{k})s^{n-1} + \cdots + a_1(\mathbf{k})s + a_0(\mathbf{k})$$

其中  $a_0(\mathbf{k}), a_1(\mathbf{k}), \dots, a_{n-1}(\mathbf{k})$  都是关于  $k_1, k_2, \dots, k_n$  的函数。

期望的闭环系统极点  $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$  对应的期望特征多项式为

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s - \lambda_1^*) \times (s - \lambda_2^*) \times \cdots \times (s - \lambda_n^*) \\ &= s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \end{aligned}$$

$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$  为闭环系统的极点当且仅当  $f(s, \mathbf{k}) = f^*(s)$ , 即对应项系数相同。于是得方程组

$$a_0(k) = a_0^*, a_1(k) = a_1^*, \dots, a_{n-1}(k) = a_{n-1}^*$$

求解这个关于  $k_1, k_2, \dots, k_n$  方程组, 进而得到控制参数。

这个方法不需要系统能控的前提, 对期望极点和开环极点也没有要求, 反馈增益唯一取决于方程组解的情况, 即唯一解、无解和无穷多解等情况。

由式  $f(s, k)$  的行列式计算可知,  $a_0(k), a_1(k), \dots, a_{n-1}(k)$  都是关于  $k_1, k_2, \dots, k_n$  的多项式, 而多项式的最高次数等于控制矩阵的秩。因此, 只有当系统为单输入或控制矩阵秩为 1 的时候, 所得方程组才是线性的。否则, 多项式系数对比后, 必然得到多元高次方程组, 理论上可以采用结式(resultant)消元法得到精确解, 但计算复杂度非常高。总的说来, 多元高次方程组没有有效解法。

7. 基于状态反馈和输入非奇异变换的输入输出解耦。考虑多输入-多输出线性定常控制系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$\mathbf{x}(t)$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}(t)$  是  $l$  维控制向量,  $\mathbf{y}(t)$  是  $m$  维控制向量。

要实现系统解耦, 需要对系统附加以下三个条件。

(1) 系统输入输出维数相等, 即  $l = m$ , 且  $\text{rank} \mathbf{B} = \text{rank} \mathbf{C} = m$ , 即输入矩阵和输出矩阵分别是列线性无关和行线性无关。

如果输入矩阵列线性相关, 则说明个输入分量之间不是线性独立的, 因此有些输入分量可以由其余分量的线性组合代替。

(2) 控制律采用整体反馈和输入变换相结合的方式, 即

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}\mathbf{v}(t)$$

其中  $\mathbf{v}(t)$  是新的  $m$  维控制输入向量,  $\mathbf{R}$  是  $m \times m$  的输入变换矩阵,  $\mathbf{F}$  是  $m \times n$  的状态反馈增益矩阵。控制律简记为  $\{\mathbf{F}, \mathbf{R}\}$ , 与被控系统构成的闭环系统为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BF})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BR}\mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

(3) 输入变换矩阵  $\mathbf{R}$  可逆。否则输入矩阵  $\mathbf{BR}$  不是列线性无关的, 不符合(1), 导致设计无法进行。

闭环系统的传递函数矩阵是

$$\mathbf{G}_C(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BF})^{-1}\mathbf{BR}$$

若存在控制律即矩阵对  $\{\mathbf{F}, \mathbf{R}\}$ , 使得

$$\mathbf{G}_C(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & g_{mm}(s) \end{bmatrix}$$

即为对角矩阵, 且  $g_{mm}(s) \neq 0$ , 则称系统是可解耦的。

8. 可解耦条件和控制律设计。步骤如下:

第 1 步, 按照

$$\alpha_i = \begin{cases} \min\{k \mid \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \neq 0, 1 \leq k \leq n\} \\ n, \mathbf{c}_i \mathbf{A}^r \mathbf{B} \neq 0, r = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

计算解耦阶常数  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ ;

第2步, 计算解耦判别矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{\alpha_1 - 1} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}^{\alpha_m - 1} \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

第3步, 若矩阵  $\mathbf{D}$  不可逆, 则不能实现解耦; 若矩阵  $\mathbf{D}$  可逆, 则可以实现解耦, 且解耦控制律为

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{\alpha_1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}^{\alpha_m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}(t)$$

且解耦后的系统传递函数为

$$\mathbf{G}_C(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{\alpha_m}} \end{bmatrix}$$

在实现解耦控制的同时, 使得每个输出分量  $y_i(t)$  是对应输入分量  $v_i(t)$  的  $\alpha_i$  阶积分。因此称为积分型解耦系统。

9. 结合极点配置的解耦控制。积分型解耦系统虽然实现了输入输出的解耦, 但由于系统极点为 0, 显然不能满足动态性能要求。

在积分型解耦系统的基础上, 进一步考虑极点配置, 比如要求第  $i$  个输入-输出满足

$$y_i(s) = \frac{1}{s^{\alpha_i} + \beta_{i, \alpha_i - 1} s^{\alpha_i - 1} + \dots + \beta_{i, 1} s + \beta_{i, 0}} v_i(s)$$

其中

$$f_i(s) = s^{\alpha_i} + \beta_{i, \alpha_i - 1} s^{\alpha_i - 1} + \dots + \beta_{i, 1} s + \beta_{i, 0}$$

为期望极点对应的特征多项式。亦即, 要求闭环传递函数矩阵为

$$\bar{\mathbf{G}}_C(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{f_m(s)} \end{bmatrix}$$

设计步骤如下:

第1步, 按照

$$\alpha_i = \begin{cases} \min\{k \mid \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \neq 0, 1 \leq k \leq n\} \\ n, \mathbf{c}_i \mathbf{A}^r \mathbf{B} \neq 0, r = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

计算解耦阶常数  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ ;

第2步,计算解耦判别矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{a_1-1} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}^{a_m-1} \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

第3步,若矩阵 $\mathbf{D}$ 不可逆,则不能实现解耦;若矩阵 $\mathbf{D}$ 可逆,则可以实现解耦,且解耦控制律为

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{D}^{-1} \bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 f_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{c}_2 f_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m f_m(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}(t)$$

且解耦后的系统传递函数为

$$\mathbf{G}_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{f_m(s)} \end{bmatrix}$$

需要注意的是,期望极点的数目要受到解耦阶常数 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ 的限制,这一点体现在

$$y_i(s) = \frac{1}{s^{a_i} + \beta_{i,a_i-1}s^{a_i-1} + \dots + \beta_{i,1}s + \beta_{i,0}} v_i(s)$$

或者

$$f_i(s) = s^{a_i} + \beta_{i,a_i-1}s^{a_i-1} + \dots + \beta_{i,1}s + \beta_{i,0}$$

中。

10. 开环状态观测器: 在系统  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), t \geq 0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$  中, 假设系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征

值都具有负实部。利用其参数和信号构造如下系统

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 是状态向量,原系统的输入 $\mathbf{u}(t)$ 是观测器系统的输入向量, $\bar{\mathbf{y}}(t)$ 为可测输出向量。

对于观测器系统的状态方程来说,虽然其系统矩阵、输入矩阵和原系统相同,但系统初态未必相同,因此就状态向量而言不能说是同一系统;这里输出向量也就是状态向量。状态向量通过对状态方程的积分获得,初值可以人为设定。

开环观测器要求原系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值都具有负实部,有时并不满足;即便满足,状态渐近观测的动态过程(也有快速性和平稳性等要求)完全由矩阵 $\mathbf{A}$ 决定,显然无法调节。

11. 系统  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), t \geq 0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$  的闭环观测器是

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}[\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)] \\ \bar{\mathbf{y}}(t) &= \bar{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

或者等价的形式

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) &= \bar{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

其中  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  是状态向量, 原系统的输入  $\mathbf{u}(t)$ 、输出  $\mathbf{y}(t)$  都是观测器系统的输入向量,  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  为可测输出向量。

待定矩阵  $\mathbf{L}$  称为观测器增益矩阵, 矩阵  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$  是观测器的系统矩阵, 其特征值称为观测器极点。

观测器系统的状态向量通过对状态方程的积分获得, 初始状态通常取为  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ 。

与开环观测器相同, 输出方程通常并不明确列出。但必须注意, 输出方程中  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  前面没有矩阵  $\mathbf{C}$ , 否则  $\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(t)$ , 不可能是  $\mathbf{x}(t)$  的渐近观测, 因为维数都不一样。

可以通过选取观测器增益矩阵  $\mathbf{L}$  任意配置观测器极点的充分必要条件是: 原系统能观测。

同时, 矩阵  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$  的极点配置, 可以参照系统  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$  的状态反馈极点配置来进行处理; 对于单输出系统, 若选用待定参数法, 则不用考虑对偶和矩阵、向量的转置。

要注意, 观测器极点必须全部具有负实部。具体的极点位置, 要考虑渐近观测的快速性、平稳性等要求。

闭环观测器也称为基本观测器。显然, 与系统代数等价的系统都可以作为观测器。

**12. 降维闭环状态观测器** 前面讲的开环观测器和闭环观测器, 作为动态系统其阶次都与原系统相同, 称为全维 (full order) 状态观测器。正如在观测器一般概念中提到的, 某些状态变量可以通过输出直接得到。例如, 如输出方程是  $y(t) = x_1(t)$ , 则状态变量  $x_1(t)$  就不必通过渐近估计获取了, 只需要把输出方程不能直接提供的状态变量估计出来就可以了。这就是所谓降维 (reduced order) 状态观测器的基本思想。

降维状态观测器减少了观测器中积分器的数目, 降低了复杂度和成本, 提高了可靠性。

**13. 分离原理:** 考虑线性定常控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

和状态反馈控制律

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

$\mathbf{x}(t)$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}(t)$  是  $p$  维控制向量,  $\mathbf{y}(t)$  是  $q$  维输出向量,  $\mathbf{v}(t)$  是新的  $p$  维控制向量,  $\mathbf{K}$  是状态反馈增益。闭环系统是

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

若状态向量  $\mathbf{x}(t)$  不能获取时, 考虑建立其基本状态渐近观测器

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$$

然后控制律调整为

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}(t)$$

即用观测器  $\bar{x}(t)$  代替原系统状态  $x(t)$ 。

控制律  $u(t) = -K\bar{x}(t) + v(t)$  和被控系统的闭环系统是

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix}$$

引入状态的可逆变换

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ E_n & -E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \bar{x}(t) \end{bmatrix}$$

的变换后的闭环系统状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

变换后的状态方程表明,闭环系统的极点由系统  $\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$  的极

点和观测器  $\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$  的极点组成,而且这两组极点互不影响。这就是分离原理。

利用分离原理可以分别设计系统的控制欲观测问题。先按照闭环动态要求,确定  $A - BK$  的极点和  $K$ ,再按照状态观测的动态要求确定  $A - LC$  的极点和观测器增益矩阵  $L$ 。

这里分离原理是从基本观测器推导的。实际上,对于降维等任何一种状态观测器,分离原理都成立。

14. 基于观测器反馈系统的传递函数矩阵 考虑经可逆状态变换后的闭环系统状态空间描述,其传递函数矩阵为

$$G_B(s) = [C \quad 0] \left\{ s \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= C[sE_n - (A - BK)]^{-1} B$$

这也正是闭环系统  $\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$  的传递函数矩阵。

## 习题、解答与评注

5.1 判断下列系统能否用状态反馈任意的配置特征值。

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

解 (1)  $U_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank} U_c = 2$ , 系统完全能控, 所以可以用状态反馈任意配置特征值。

$$(2) U_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} U_c = 2 < 3, \text{系统不完全能控},$$

所以不能通过状态反馈任意配置特征值。

评注 系统的完全能控性是通过状态反馈任意配置极点的充要条件。

### 5.2 已知系统

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = x_2$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = x_3$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = -x_1 - x_2 - x_3 + 3u$$

试确定线性状态反馈控制律, 使闭环极点都是一3, 并画出闭环系统的结构图。

解 根据题意, 期望特征多项式为

$$\alpha^*(s) = (s+3)^3 = s^3 + 9s^2 + 27s + 27$$

把状态方程写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

令  $u = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3]\mathbf{x}$ , 并代入系统的状态方程, 可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1-3k_1 & -1-3k_2 & -1-3k_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

特征多项式为  $\alpha(s) = s^3 + (1+3k_3)s^2 + (1+3k_2)s + (1+3k_1)$ , 通过比较系数得

$$1+3k_3=9, \quad 1+3k_2=27, \quad 1+3k_1=27$$

解得

$$k_1 = \frac{26}{3}, \quad k_2 = \frac{26}{3}, \quad k_3 = \frac{8}{3}$$

于是

$$u = -\begin{bmatrix} \frac{26}{3} & \frac{26}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

闭环系统的结构图如下

### 5.3 给定系统的传递函数为

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+8)}$$

试确定线性状态反馈律, 使闭环极点为  $-2, -4, -7$ 。

解 根据题意, 理想特征多项式为

$$\alpha^*(s) = (s+2)(s+4)(s+8) = s^3 + 13s^2 + 50s + 56$$

由传递函数

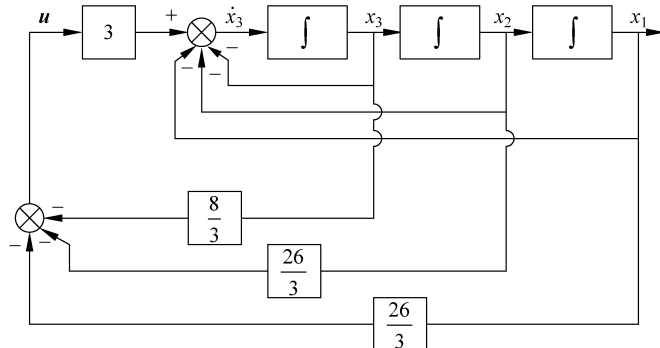


图 5.1 状态反馈相关配置结构图

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+8)} = \frac{1}{s^3 + 12s^2 + 32s}$$

可写出原系统的能控标准型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -32 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

令  $u = -[k_1 \ k_2 \ k_3]x$ , 并代入原系统的状态方程, 可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -32 - k_2 & -12 - k_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

其特征多项式为

$$\alpha(s) = s^3 + (12 + k_3)s^2 + (32 + k_2)s + 3k_1$$

通过比较系数得

$$k_1 = 56, \quad 32 + k_2 = 50, \quad 12 + k_3 = 13$$

于是得到控制律

$$u = -[56 \ 18 \ 1] \mathbf{x}$$

**评注** 题目给定传递函数要求状态反馈配置极点。为了解决状态变量的存在问题, 为此可以建立任意与传递函数对应的状态方程。由于不涉及输出, 因此输出方程没有列出。

**5.4** 给定单输入线性定常系统为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

试求出状态反馈  $u = -kx$ , 使得闭环系统的特征值为  $\lambda_1^* = -2, \lambda_2^* = -1+j, \lambda_3^* = -1-j$ 。

**解** 易知系统为完全能控, 故满足可配置条件。系统的特征多项式为

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s+6 & 0 \\ 0 & -1 & s+12 \end{bmatrix} = s^2 + 18s^2 + 72s$$

进而计算期望特征多项式

$$\alpha^*(s) = \prod_{i=1}^3 (s - \lambda_i^*) = (s+2)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

于是,可求得

$$\bar{\mathbf{k}} = [\alpha_0^* - \alpha_0 \quad \alpha_1^* - \alpha_1 \quad \alpha_2^* - \alpha_2] = [4 \quad -66 \quad -14]$$

再来计算变换阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 18 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其逆矩阵

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}$$

从而,所要确定的反馈增益阵  $\mathbf{k}$  即为

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{Q} = [4 \quad -66 \quad -14] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix} = [-14 \quad 186 \quad -1220]$$

**评注** 若被控系统不是能控标准型,就要引入变换  $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{Q}$ 。

### 5.5 给定系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试问能否用状态反馈将传递函数变为

$$G_k(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \quad \text{和} \quad G_k(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

若有可能,试分别求出状态反馈增益阵  $\mathbf{k}$ ,并画出结构图。

**解** 当给定任意一个有理真分式传递函数  $G(s)$  时,都可以得到它的一个能控标准型实现,利用这个能控标准型可任意配置闭环系统的极点。

对于传递函数  $G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$ ,所对应能控标准型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

利用前述极点配置方法,通过状态反馈  $u = -[18 \quad 21 \quad 5]\mathbf{x}$  能将极点配置为  $-2, -2, -3$ ,此时

零极抵消后,所对应的闭环传递数为  $G_k(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$ 。同理,通过状态反馈  $u =$

$-[3 \quad 4 \quad 1]\mathbf{x}$  能将极点配置为  $1, -1, -3$ ,此时所对应的闭环传递函数即为

$$G_k(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+3)}.$$

**评注** 在系统完全能控的前提下,状态反馈可以任意改变系统的极点。因此,若系统同时具有有限零点,则状态反馈可以对任何已有零点造成对消,从而是系统降维。状态反馈不直接改变零点,但能通过改变极点造成零极对消,或者说,状态反馈能够间接改变零点。状态反馈显然不能增加系统的零点。

对应的闭环系统结构图分别如图 5.2 和图 5.3 所示。

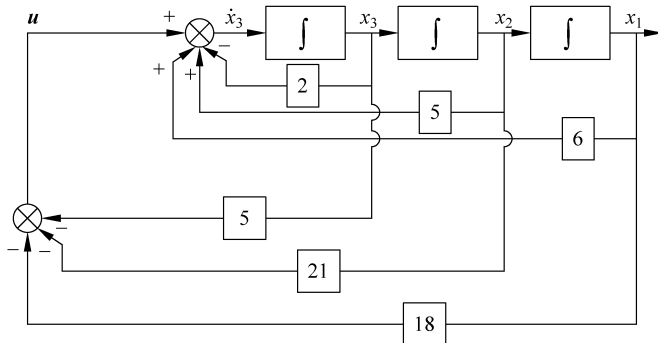


图 5.2 闭环极点为  $-2, -2, -3$  的状态反馈结构图

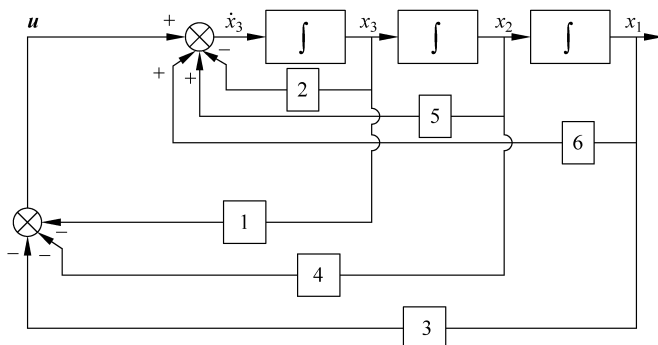


图 5.3 闭环极点为  $1, -1, -3$  的状态反馈结构图

**5.6** 判断下列系统能否用状态反馈和输入变换实现解耦控制。

$$(1) G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{s^2+2} & \frac{2}{s^2+s+1} \\ \frac{4s+1}{s^2+2s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解

$$(1) d_1 = \min\{2, 2\} - 1 = 1, \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, d_2 = \min\{1, 1\} - 1 = 0, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{非奇异, 所以能用状态反馈和输入变换实现解耦控制。}$$

(2) 因为

$$\mathbf{c}_1 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

所以  $d_1 = d_2 = 0, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。又因为  $\mathbf{E}$  非奇异, 所以能用状态反馈和输入变换实现解耦控制。

**评注** 判断能否实现输入输出解耦, 既可以从传递函数出发判断, 也可以从状态空间描述出发判断。

**5.7** 给定系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

系统能否用状态反馈和输入变换实现解耦? 若能, 试定出实现积分型解耦的  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{L}$ 。

$$\text{解 } \mathbf{c}_1 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d_1 = 0;$$

$$\mathbf{c}_2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d_2 = 0;$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{c}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{c}_2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解耦控制律为

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{v} = -\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$$

5.8 给定双输入-双输出的线性定常受控系统为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

试判定该系统用状态反馈和输入变换实现解耦?若能,试定出实现积分型解耦的 $\bar{\boldsymbol{K}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 。最后将解耦后子系统的极点分别配置到 $\lambda_{11}^* = -2, \lambda_{12}^* = -4$ 和 $\lambda_{21}^* = -2 + j, \lambda_{22}^* = -2 - j$ 。

**解** 易知,该系统完全能控能。

(1) 判定能否解耦。因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{B} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0] \\ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{AB} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0] \\ \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{B} &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0] \\ \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{AB} &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1]\end{aligned}$$

于是可知 $d_1=1, d_2=1$ ;  $\boldsymbol{E}_1 = [1 \ 0], \boldsymbol{E}_2 = [0 \ 1]$ 。因为 $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 非奇异,因此可进行解耦。

(2) 导出积分型解耦系统。计算

$$\boldsymbol{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取

$$\bar{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 确定状态反馈增益矩阵  $\tilde{\mathbf{K}}$ 。令

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{10} & k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{20} & k_{21} \end{bmatrix}$$

则可得

$$\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ -k_{10} & -k_{11} & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -k_{20} & -k_{21} \end{bmatrix}$$

对解耦后的两个子系统分别求出期望特征多项式

$$f_1^*(s) = (s+2)(s+4) = s^2 + 6s + 8$$

$$f_2^*(s) = (s+2-j)(s+2+j) = s^2 + 4s + 5$$

进而,可求出  $k_{10}=8, k_{11}=6, k_{20}=8, k_{21}=4$ ,从而

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

(4) 确定受控系统实现解耦控制和极点配置的控制矩阵对  $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}\}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{L}\bar{v} - \mathbf{K}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{L}\bar{v} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{L}(\bar{v} - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{L}\bar{v} - \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{L}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{L}\bar{v} - (\mathbf{K} + \mathbf{L}\tilde{\mathbf{K}})\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} + \mathbf{E}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

(5) 确定出解耦后闭环系统的状态空间方程和传递函数矩阵

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}})\mathbf{x} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{L}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}_{KL}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 6s + 8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \end{bmatrix}$$

5.9 给定系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

- (1) 设计一个具有特征值为 $-3, -4, -5$ 的全维状态观测器;
- (2) 设计一个具有特征值为 $-3, -4$ 的降维状态观测器;
- (3) 画出结构图。

解 (1) 方法 1

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}^T) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ 2 & s+1 & 0 \\ 3 & -1 & s+1 \end{vmatrix} = s^3 + 3s^2 + 6s + 6$$

$$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 6$$

观测器的期望特征多项式为

$$\alpha^*(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

$$a_1^* = 12, \quad a_2^* = 47, \quad a_3^* = 60$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^T = [a_3^* - a_3 \quad a_2^* - a_2 \quad a_1^* - a_1] = [54 \quad 41 \quad 9]$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T] \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}^T = \tilde{\mathbf{E}}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{23}{2} & -\frac{5}{2} & -9 \end{bmatrix}$$

状态观测器的状态方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{EC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ey}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11.5 \\ -2.5 \\ -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 11.5 \\ -2.5 \\ -9 \end{bmatrix} y \\
&= \begin{bmatrix} -12.5 & -13.5 & -3 \\ 2.5 & 1.5 & 1 \\ 10 & 9 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 11.5 \\ -2.5 \\ -9 \end{bmatrix} y
\end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned}
\det[\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C})] &= \det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 + \mathbf{E}_1 & 2 + \mathbf{E}_2 & 3 \\ \mathbf{E}_2 & \lambda + 1 + \mathbf{E}_2 & -1 \\ \mathbf{E}_3 - 1 & \mathbf{E}_3 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \\
&= \lambda^3 + (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + 3)\lambda^2 + (2\mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_3 + 6)\lambda + (2\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2 - 4\mathbf{E}_3 + 6)
\end{aligned}$$

与期望特征多项式比较系数得

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 &= 12 \\
2\mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_3 + 6 &= 47 \\
2\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2 - 4\mathbf{E}_3 + 6 &= 60
\end{aligned}$$

解方程组得

$$\mathbf{E}^T = \begin{bmatrix} 23 & -5 & -9 \\ 2 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

(2) 令  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ , 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{b}u = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

降维观测器的期望特征多项式为

$$\alpha^*(s) = (s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12$$

设  $\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix}$ , 则有  $(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{21}) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 2\bar{e}_1 - 1 & \bar{e}_1 - 1 \\ 2\bar{e}_2 + 1 & \bar{e}_2 - 1 \end{bmatrix}$

于是

$$\begin{aligned}
\det[s\mathbf{E} - (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{21})] &= \det \begin{bmatrix} s - 2\bar{e}_1 & 1 - \bar{e}_1 \\ -2\bar{e}_2 - 1 & s - \bar{e}_2 + 1 \end{bmatrix} \\
&= s^2 + (2 - 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2)s + \bar{e}_2 - 3\bar{e}_1 + 2
\end{aligned}$$

比较系数知  $\bar{e}_1=7, \bar{e}_2=1$ , 于是降维状态观测器的方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{W}} &= (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{21})\mathbf{W} + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u} + [\bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{22} + (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{21})\bar{\mathbf{E}}]\mathbf{y} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W} + \begin{bmatrix} -13 \\ -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 105 \\ 22 \end{bmatrix} \mathbf{y}\end{aligned}$$

(3) 闭环系统结构图如图 5.4 和图 5.5 所示。

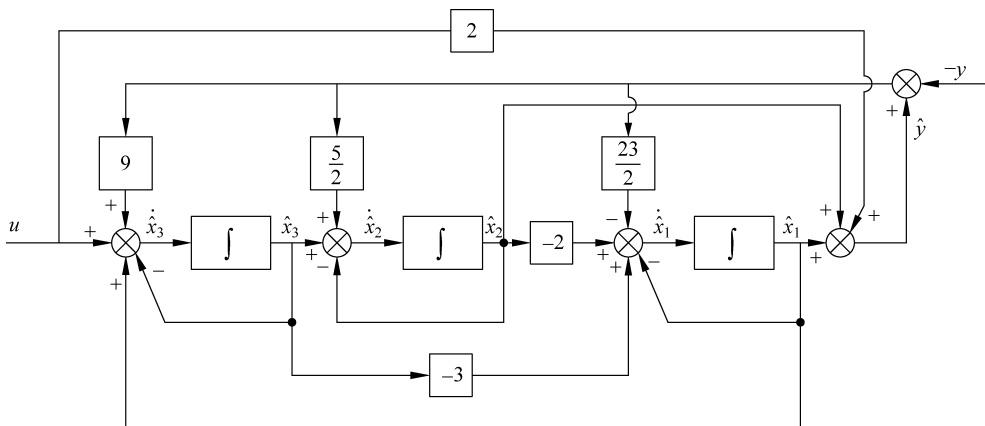


图 5.4 全维状态观测器结构图

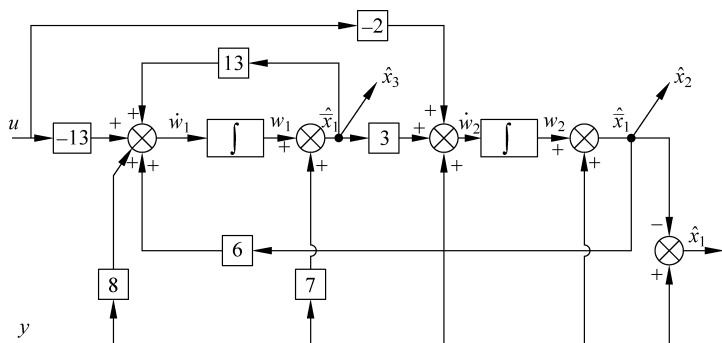


图 5.5 降维状态观测器结构图

5.10 给定系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

- (1) 确定一个状态反馈增益阵  $\mathbf{k}$ , 使闭环系统的极点为  $-3$  和  $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
- (2) 确定一个全维状态观测器, 并使观测器的特征值为  $-5$ ;
- (3) 确定一个降维状态观测器, 并使其特征值为  $-5$ ;
- (4) 分别画出闭环系统的结构图;
- (5) 求出闭环传递函数。

解 (1) 系统的特征多项式为

$$\alpha(s) = s(s+1)(s+2) = s^3 + 3s^2 + 2s$$

将系统按能控标准型实现,得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

依题意知期望特征多项式为

$$\alpha^*(s) = (s+3) \left( s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = s^3 + 4s^2 + 4s + 3$$

引入状态反馈  $u = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3]\mathbf{x}$ , 则应有

$$k_1 = 3, \quad k_2 + 2 = 4, \quad k_3 + 3 = 4$$

于是求得状态反馈  $u = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3]\mathbf{x} = -[3 \quad 2 \quad 1]\mathbf{x}$ 。

(2) 期望特征多项式为

$$\begin{aligned} \alpha^*(x) &= (s+5)^3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125 \\ \det[\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C})] &= \det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] \right\} \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda + \mathbf{E}_1 & -1 & 0 \\ \mathbf{E}_2 & \lambda & -1 \\ \mathbf{E}_3 & 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 + (\mathbf{E}_1 + 3)\lambda^2 + (3\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + 2)\lambda + (2\mathbf{E}_1 + 3\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) \end{aligned}$$

与期望特征多项式比较系数得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 + 3 &= 15 \\ 3\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + 2 &= 75 \\ 2\mathbf{E}_1 + 3\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 &= 125 \end{aligned}$$

解方程组得

$$\mathbf{E}^T = [12 \quad 37 \quad -10]$$

状态观测器的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{E}y \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 \\ 37 \\ -10 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] \right\} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 12 \\ 37 \\ -10 \end{bmatrix} y \\ &= \begin{bmatrix} -12 & 1 & 0 \\ -37 & 0 & 1 \\ 10 & -2 & -3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 12 \\ 37 \\ -10 \end{bmatrix} y \\ (3) \text{ 令 } \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \text{ 则有} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{Pb}u = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \mathbf{cP}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

依题意可知降维观测器的期望特征多项式为

$$\alpha^*(s) = (s+5)^2 = s^2 + 10s + 25$$

设  $\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix}$ , 则有  $(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{21}) = \left\{ \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -\bar{e}_1 \\ 1 & & -\bar{e}_2 \end{bmatrix}$

于是

$$\begin{aligned} \det[s\mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{21})] &= \det \begin{bmatrix} s+3 & 2+\bar{e}_1 \\ -1 & s+\bar{e}_2 \end{bmatrix} \\ &= s^2 + (\bar{e}_2 + 3)s + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_1 + 2 \end{aligned}$$

比较系数知  $\bar{e}_1 = 2, \bar{e}_2 = 7$ , 于是降维状态观测器的方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} &= (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{21})\mathbf{W} + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{B}}_2)u + [\bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{22} + (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{A}}_{21})\bar{\mathbf{E}}]y \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{W} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -34 \\ -47 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

(4) 闭环系统的结构图分别如图 5.6 和图 5.7 所示。

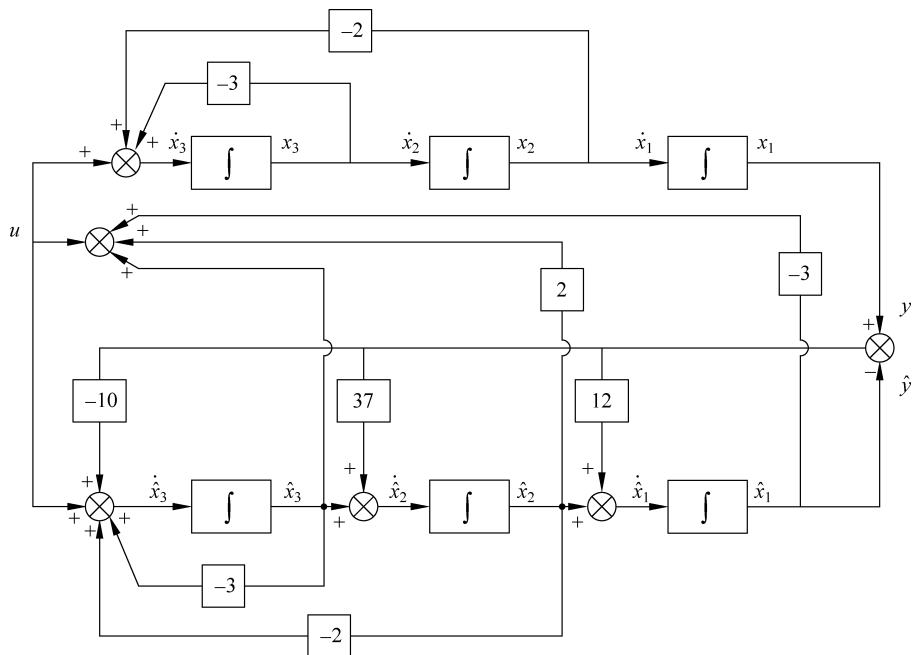


图 5.6 带有全维状态观测器的闭环系统的结构图

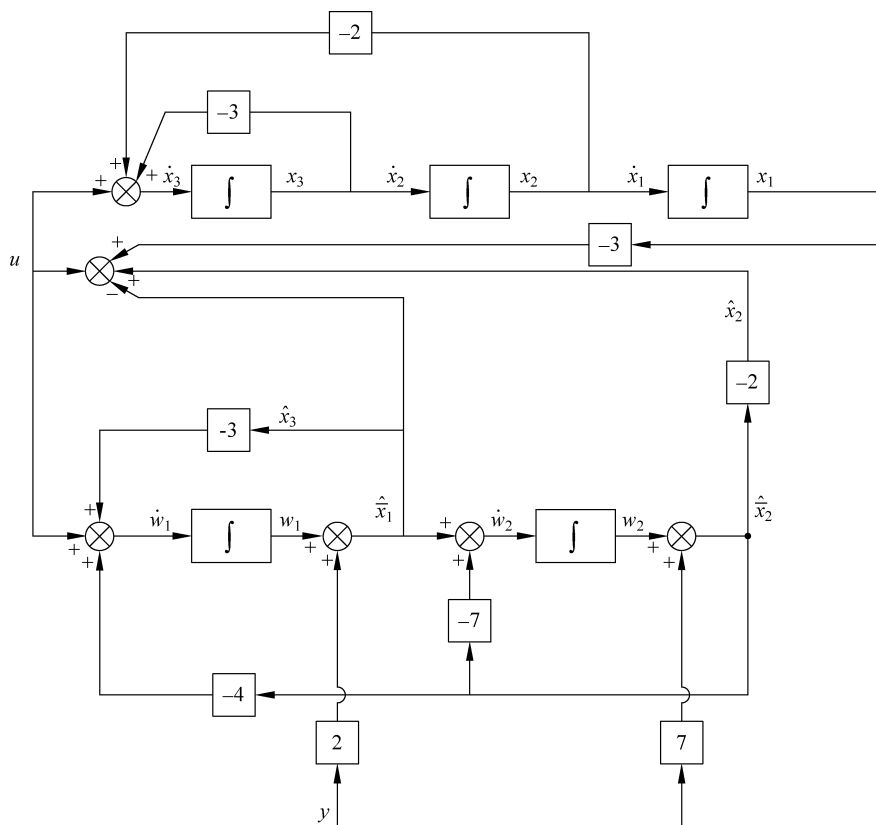


图 5.7 带有降维状态观测器的闭环系统的结构图

(5) 闭环传递函数。由于观测器不改变原闭环系统的传递函数, 所以其传递函数仍为

$$G(s) = c(sE - (A - kb))^{-1}b = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 4s + 3}$$

5.11 给定受控系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

(1) 设计状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$  使得闭环特征值为  $\lambda_1^* = -1, \lambda_{2,3}^* = -1 \pm j, \lambda_4^* = -2$ ;

(2) 设计降维状态观测器使观测器的特征值为  $\lambda_1 = -3, \lambda_{23} = -3 \pm j2$ ;

(3) 确定重构状态  $\hat{\mathbf{x}}$  和由  $\hat{\mathbf{x}}$  构成的状态反馈规律。

解 (1) 期望的闭环特征多项式为:

$$f^*(s) = (s+1)(s+1-j)(s+1+j)(s+2) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4$$

令  $\mathbf{K} = -[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$ , 则可得

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 - 2 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & 4 - k_3 & -k_4 \end{bmatrix}$$

和

$$f(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K}) = s^4 + (k_4 - k_2)s^3 + (k_3 - k_1 - 4)s^2 + 2k_2s + 2k_1$$

由比较  $f(s)$  和  $f^*(s)$ , 即可定出

$$\mathbf{K} = -[2 \quad 5 \quad 16 \quad 10]$$

(2) 设计降维状态观测器使观测器的特征值为  $\lambda_1 = -3, \lambda_{23} = -3 \pm j2$ 。

已知  $\text{rank } \mathbf{C} = 1$ , 且对于给定的动态方程不需要引入变换。此时有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_{11} &= \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{12} = [1 \quad 0 \quad 0] \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{B}}_1 &= \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

理想特征多项式为

$$\bar{f}(s) = (s + 3)(s + 3 - j2)(s + 3 + j2) = s^3 + 9s^2 + 31s + 39$$

再令  $\bar{\mathbf{L}}$  为

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

则可得到

$$\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12} = \begin{bmatrix} -l_1 & -2 & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 \\ -l_3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$f_L(s) = \det(s\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}}_{22} + \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12}) = s^3 + l_1s^2 - (2l_2 + 4)s - (2l_3 + 4l_1)$$

由比较  $\bar{f}(s)$  和  $f_L(s)$ , 可以得出

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 9 \\ -\frac{35}{2} \\ \frac{-75}{2} \end{bmatrix}$$

进一步可计算得到

$$\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 0 \\ \frac{35}{2} & 0 & 1 \\ \frac{75}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12})\bar{\mathbf{L}} + (\bar{\mathbf{A}}_{21} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{11}) = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{12})\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -46 \\ 120 \\ \frac{535}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_2 - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{B}}_1 = \bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

从而降维状态观测器为

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 0 \\ \frac{35}{2} & 0 & 1 \\ \frac{75}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} -46 \\ 120 \\ \frac{535}{2} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

(3) 确定重构状态  $\hat{\mathbf{x}}$  和由  $\hat{\mathbf{x}}$  构成的状态反馈规律。其中,估计状态  $\hat{\mathbf{x}}$  为

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} y \\ \mathbf{z} + \bar{\mathbf{L}}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\mathbf{L}} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ -17.5 & 0 & 1 & 0 \\ -37.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

而由  $\hat{\mathbf{x}}$  构成的状态反馈为

$$u = v + [2 \quad 5 \quad 16 \quad 10] \hat{\mathbf{x}}$$

这里  $v$  为标量参考输入。

**5.12** 已知受控系统的系数矩阵为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

利用 MATLAB 设计状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$  使闭环极点为  $-1, -2 \pm j$ 。

**解** 程序如下:

```
>> A=[1 0 -1;2 -1 0;0 2 1];
B=[1 1 0]';
P=[-1 -2+i -2-i];
syms k1 k2 k3 s;
K=[k1 k2];
eg=Simple(det(s*diag(diag(ones((size(A)))))-A+B*K))
f=1;
for i=1:3
f=Simple(f*(s-P(i)));
end
f=f-eg;
[k1 k2 k3]=solve(jacobian(f,'s'),subs(f,'s',0))
```

%运行结果:

k1 =

$$\begin{array}{l} 2 \\ k_2 = \\ 4 \\ k_3 = \\ 5 \end{array}$$

由运行结果显示可知系统状态反馈矩阵为  $\mathbf{K} = [2 \quad 4 \quad 5]$ 。

**5.13** 给定的状态方程模型如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

利用 MATLAB 设计状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$  使系统闭环极点为  $-1, -3, -1 \pm j$ 。

**解** 直接运用 Ackermann 公式来计算系统状态反馈矩阵。

程序如下：

```
>> A=[1 0 0 -1;0 2 -1 0;0 2 0 1;1 0 2 0];
b=[1 0 1 0]';
P=[-1 -3 -1-j -1+j];
K=acker(A,b,P)
A-b*K
```

%运行结果：

```
K = ~
-4.0000 -38.8000 12.0000 -0.4000
```

**5.14** 已知系统的系数矩阵如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

利用 MATLAB 设计状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$  使闭环极点为  $-1, -2, -5, -3 \pm 2j$ , 并计算闭环系统状态系数矩阵。

**解** 程序如下：

```
A=[0 1 -1 0 1;0 -2 0 -1 0;-2 -1 0 0 1;3 0 1 -1 0;2 0 0 0 1];
B=[1 1 0 -3 0]';
P=[-1 -2 -5 -3+2j -3-2j];
K=acker(A,b,P)
A-b*K
```

%运行结果：

```
K = 13.41 0.13 0.98 0.51 22.66
ans =
```

$$\begin{array}{ccccc} -13.41 & 0.87 & -1.98 & -0.51 & -21.66 \\ -13.41 & -2.13 & -0.98 & -1.51 & -22.66 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 43.22 & 0.39 & 3.93 & 0.54 & 67.99 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

由运行结果知状态反馈矩阵为

$$\mathbf{K} = [13.41 \quad 0.13 \quad 0.98 \quad 0.51 \quad 22.66]$$

闭环系统状态系数矩阵为

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -13.41 & 0.87 & -1.98 & -0.51 & -21.66 \\ -13.41 & -2.13 & -0.98 & -1.51 & -22.66 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 43.22 & 0.39 & 3.93 & 0.54 & 67.99 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**5.15** 某多输入-多输出系统状态方程如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用 MATLAB 完成下面工作:

- (1) 试求解其传递函数矩阵;
- (2) 设计解耦控制器, 有可能的话进行极点配置。

**解**

- (1) 求解原系统的传递函数。

```
A=[0 1 0;1 0 1;-1 -1 2];
B=[1 0;0 0;0 1];
C=[1 0 0;0 1 1];
D=zeros(2,2);
[num2,den2]=ss2tf(A,B,C,D,2)
[num1,den1]=ss2tf(A,B,C,D,1)
```

%运行结果:

```
num2 =
    0    0    1    0
    0    1    0    0
den2 = 1    3    1    0
num1 =
    0    1    3    0
    0    1   -1    0
den1 = 1    3    1    0
```

即

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s} \begin{bmatrix} s^2 + 3s & s \\ -s & s^2 \end{bmatrix}$$

(2) 解耦控制器设计。

程序如下：

```
[m,n]=size(C);
D0=C(1,:) * B;
a(1)=0;
for i=2:m
    for j=0:n-1
        D0=[D0;C(i,:) * A^j * B]
    end
    if rank(D0)==i
        a(i)=j
        break
    else
        D0=D0(1:i-1,:)
    end
end
R=inv(D0);
L=C(1,:) * A^(a(1)+1);
for i=2:m
    L=[L;C(i,:) * A^(a(i)+1)]
end
F1=R * L
B1=B * R
A1=A-B * F1
[numd1,dend1]=ss2tf(A1,B1,C,D,1)
[numd2,dend2]=ss2tf(A1,B1,C,D,2)
```

%运行结果：

```
D0 =
     1     0
     0     1
a = 0     0
L =
     0     0     1
    -1    -1    -3
F1 =
     0     0     1
    -1    -1    -3
B1 =
     1     0
     0     0
     0     1
     0     0    -1
A1 =
     0     0     1
     0     0     0
```

```

numd1 =
    0    1    0    0
    0    0    0    0
dend1 = 1    0    0    0
numd2 =
    0    0    0    0
    0    1    0    0
dend2 = 1    0    0    0

```

即

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^3} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 解耦系统极点配置。

程序如下：

```

beta1=-2;
beta2=-3;
beta=[beta1,beta2];
L=zeros(size(C));
for i=1:m
    L(i,:)=C(i,:)*A-beta(i)*C(i,:)
end
F2=R*L
A2=A-B*F2
B2=B*R
[numdp1,dendp1]=ss2tf(A2,B2,C,D,1)
[numdp2,dendp2]=ss2tf(A2,B2,C,D,2)

```

%运行结果：

```

L =
    2    2    1
    0    0    0
L =
    2    2    1
   -1   -1    0
F2 =
    2    2    1
   -1   -1    0
A2 =
   -2   -2   -1
    0    0    1
    0    0   -3
B2 =
    1    0
    0    0
    0    1
numdp1 =
    0    1    3    0
    0    0    0    0

```

$$\begin{aligned} \text{dendp1} &= 1 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \\ \text{numdp2} &= \\ &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ &\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ \text{dendp2} &= 1 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \end{aligned}$$

即解耦后的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 6s} \begin{bmatrix} s^2 + 3s & 0 \\ 0 & s^2 + 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^3 - 2s^2 + 3} \begin{bmatrix} s^2 - 2s + 1 & 1 \\ -4 & s^2 + s - 1 \end{bmatrix}$$

传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^3 + s^2} \begin{bmatrix} s^2 + s & 0 \\ 0 & s^2 + s \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解耦后的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 3 & 0 \\ 0 & s^2 + 3s + 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$