第 5 章

函　　数

函数是极其重要的数学概念，它与二元关系有着密切的联系. 本章首先从关系的概念出发引入函数的定义，然后讨论函数的单射、满射和双射的性质，最后介绍与函数相关的复合与求逆运算.

5.1　函数的定义及其性质

5.1.1　函数的定义

函数是一种特殊的二元关系. 先给出函数的定义.

定义 5.1　设 f 是二元关系，如果对于任意 $x \in \mathrm{dom}f$，都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}f$，使得 xfy 成立，则称 f 为**函数**(或者**映射**). 这时也称 y 为 f 在 x 的**值**，记作 $y=f(x)$.

注意，在上述定义中，符号 $y=f(x)$ 既反映了 y 与 x 的对应关系，也反映了对应的唯一性. 与此不同的是，在关系 R 中，如果与 x 对应的有 y 和 z，$y \neq z$，那么为了表示 y 与 x 的对应关系，只能写 $\langle x,y\rangle \in R$ 或者 xRy，不能写 $y=f(x)$.

函数是一种特殊的关系，关系又是集合，因此函数的相等可以用集合的相等来定义.

定义 5.2　设 f，g 为函数，则

$$f=g \Leftrightarrow f \subseteq g \land g \subseteq f$$

根据上述定义，如果两个函数 f 和 g 相等，一定满足下面两个条件：

(1) $\mathrm{dom}f = \mathrm{dom}g$.

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}f = \mathrm{dom}g$ 都有 $f(x)=g(x)$.

例如，函数 f 与 g 的对应关系分别是：$f(x)=(x^2-1)/(x+1)$，$g(x)=x-1$，那么 f 与 g 不相等，因为 $\mathrm{dom}f$ 是不等于 -1 的实数构成的集合，而 $\mathrm{dom}g$ 是实数集合.

在所有函数中，从一个集合到另一个集合的函数是一类非常重要的函数. 后面讨论的函数基本上都是这类函数.

定义 5.3　设 A，B 为集合，如果

$$f \text{ 为函数，} \mathrm{dom}f=A\text{，} \mathrm{ran}f \subseteq B$$

则称 f 为**从 A 到 B 的函数**，记作 $f: A \to B$.

例 5.1　下面是一些函数的例子.

(1) $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$，$f(x)=x+1$ 是从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的函数.

(2) $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(x)=x^2+2x-1$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数.

(3) $h:A\to P(A), h(x)=\{x\}$是从集合 A 到幂集 $P(A)$的函数.

(4) 设 $V=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是 n 项任务的集合,其中每项任务的执行时间都是正整数. 函数 $t:V\to\mathbf{N}$ 表示一个调度方案,对于任务 a_i, $t(a_i)=t_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 其中 t_i是第 i 项任务的开始时间.

下面考虑对 $f:A\to B$ 函数的计数. 设$|A|=m$,$|B|=n$,m, $n>0$,那么有多少个不同的从 A 到 B 的函数呢? 考虑某个从 A 到 B 的函数 f,f 应该具有下述形式:

$$f=\{\langle a_1,b_{i1}\rangle,\langle a_2,b_{i2}\rangle,\cdots,\langle a_m,b_{im}\rangle\}$$

其中 m 个有序对的第二元素选自 B 集合,每个有 n 种不同的选择,每一种选法对应了一个函数,总共有 n^m 种选法,因此有 n^m 个不同的函数. 使用 B^A 的符号表示所有函数的集合,那么有下述定义.

定义 5.4 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A,符号化表示为

$$B^A=\{f \mid f:A\to B\}$$

若$|A|=m$, $|B|=n$, $m,n\neq 0$,则$|B^A|=n^m$.

例 5.2 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求 B^A.

解 $B^A=\{f_0,f_1,\cdots,f_7\}$, 其中:

$$f_0=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$
$$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$
$$f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$
$$f_3=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$
$$f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$
$$f_5=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$
$$f_6=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$
$$f_7=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$

下面给出一些重要函数的实例.

定义 5.5 (1) 设 $f:A\to B$,如果存在 $c\in B$ 使得对所有的 $x\in A$ 都有 $f(x)=c$,则称 $f:A\to B$ 是**常函数**.

(2) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的**恒等函数**,对所有的 $x\in A$ 都有 $I_A(x)=x$.

(3) 设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$, $\langle B,\preccurlyeq\rangle$为偏序集,$f:A\to B$,如果对任意的 x_1, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$,就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$,则称 f 为**单调递增**的;如果对任意的 x_1, $x_2\in A$,$x_1\prec x_2$,就有 $f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为**严格单调递增**的. 类似地,也可以定义单调递减和严格单调递减的函数.

(4) 设 A 为集合, 对于任意的 $A'\subseteq A$, A'的**特征函数** $\chi_{A'}:A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_{A'}(a)=1 \qquad a\in A'$$
$$\chi_{A'}(a)=0 \qquad a\in A-A'$$

(5) 设 R 是 A 上的等价关系, 令

$$g:A\to A/R$$
$$g(a)=[a] \qquad \forall a\in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的**自然映射**.

例 5.3　(1) 给定偏序集$\langle P(\{a,b\}),R_{\subseteq}\rangle$，$\langle\{0,1\},\leqslant\rangle$，其中$R_{\subseteq}$为包含关系，$\leqslant$为一般的小于或等于关系. 令 $f:P(\{a,b\})\to\{0,1\}$，$f(\varnothing)=f(\{a\})=f(\{b\})=0$，$f(\{a,b\})=1$，则 f 是单调递增的，但不是严格单调递增的.

(2) 设 $A=\{a,b,c\}$，A 的每一个子集 A' 都对应于一个特征函数，不同的子集对应于不同的特征函数. 例如：

$$\chi_{\varnothing}=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},\chi_{\{a,b\}}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}$$

(3) 给定集合 A 和 A 上的等价关系 R，就可以确定一个自然映射 $g:A\to A/R$. 不同的等价关系确定不同的自然映射，如果 $A=\{1,2,3\}$，对于等价关系 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$，对应的自然映射是

$$g:A\to A/R,g(1)=g(2)=\{1,2\},\ g(3)=\{3\}$$

而对于恒等关系 I_A，自然映射是

$$g:A\to A/I_A,\ g(1)=\{1\},\ g(2)=\{2\},\ g(3)=\{3\}$$

在算法分析与设计中经常用到定义在正整数集合上的函数 $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{Z}^+$. 例如，二分检索算法最坏情况下的时间复杂度 $f(n)=O(\log n)$[①]，插入排序算法最坏情况下的时间复杂度为 $O(n^2)$，等等. 这里的 n 表示输入规模，检索问题中的 n 表示被检索的线性表中的元素个数，排序问题中的 n 则表示被排序的数组中的元素个数. 函数 $f(n)$ 代表算法所做基本运算的次数. 在二分检索和排序中的基本运算是比较运算. 一般说来，对于规模为 n 的各种输入情况，算法所做基本运算的次数是不一样的. 考虑二分检索，如果输入的 n 个元素是 $1,2,\cdots,n$，而被检索的元素恰好就是处在中间的那个数，那么通过 1 次比较，算法就结束了，然后输出这个数在数组中的位置. 如果被检索的数是其他数，那么必须通过更多次的比较，才能得到结果. 所谓最坏情况就是对同样长度的数组所做的比较运算次数最多的情况. 对于二分搜索，每比较 1 次，需要检索的数的个数就减少一半，至多经过 $\log n+1$ 次比较就可以得到结果. 因此，表示基本运算次数的函数的阶是 $\log n$，使用大 O 记号，记作 $O(\log n)$. 如果基本运算的次数与输入规模 n 无关，是个常数，则记作 $O(1)$. 对于同一个问题可以设计各种不同的算法，排序算法就有插入排序、快速排序、归并排序、堆排序等许多算法. 哪种算法效率更高？这依赖于它们的复杂度函数的阶. 阶越高，效率就越低. 不难看出，当 n 增加时，复杂度函数 n^2 显然比 $n\log n$ 增长得更快. 这意味着插入排序比归并排序在 n 较大时效率要低，因此估计算法复杂度函数的阶在算法分析中是经常要做的工作. 关于这方面的应用将在第 10 章和第 13 章给予更详细的介绍.

5.1.2　函数的像与完全原像

函数是特殊的关系，因此关系的各种运算（如并、交、补、求定义域、值域等）都适合于函数. 除此之外，对于从 A 到 B 的函数，还可以求集合的像和完全原像.

定义 5.6　设函数 $f:A\to B$，$A_1\subseteq A$，$B_1\subseteq B$.

(1) A_1 在 f 下的像 $f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$，当 $A_1=A$ 时，$f(A)$ 称为函数的**像**.

(2) B_1 在 f 下的**完全原像** $f^{-1}(B_1)=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$.

---

① 在算法分析中经常使用 $\log n$ 来表示 $\log_2 n$. 由于 $\log n=\ln n/\ln 2$，因此有 $\log n=\Theta(\ln n)$. 这个等式的含义是：$\log n=O(\ln n)$ 且 $\ln n=O(\log n)$，即 $\ln n$ 与 $\log_2 n$ 的阶相等.

这里要注意函数的值与函数的像之间的区别,函数值 $f(x)\in B$,而像 $f(A_1)\subseteq B$. 一般说来,对于 $A_1\subseteq A$,$f^{-1}(f(A_1))\neq A_1$,但是 $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$. 同样地,对于 $B_1\subseteq B$,也有 $f(f^{-1}(B_1))\subseteq B_1$. 例如:

$$A=\{1,2,3\},\ B=\{a,b,c\},\ A_1=\{1\},\ B_1=\{b,c\},\ f=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$

那么

$$f^{-1}(f(A_1))=f^{-1}(\{a\})=\{1,2\},\quad A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$$
$$f(f^{-1}(B_1))=f(\{3\})=\{b\},\quad f(f^{-1}(B_1))\subset B_1$$

5.1.3 函数的性质

函数的性质指的是函数 $f:A\to B$ 的满射、单射、双射的性质. 下面给出这些性质的定义.

定义 5.7 设 $f:A\to B$,

(1) 若 $\mathrm{ran}f=B$,则称 $f:A\to B$ 是**满射**的.

(2) 若 $\forall y\in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$,则称 $f:A\to B$ 是**单射**的.

(3) 若 $f:A\to B$ 既是满射又是单射的,则称 $f:A\to B$ 是**双射**的.

对于单射函数也有另外一个等价的定义. 设 $f:A\to B$,对于 $x_1,x_2\in A$,如果 $x_1\neq x_2$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$,那么称 $f:A\to B$ 为单射的. 一般函数从自变量到值的对应规则既允许一对一,也允许多对一;而单射函数只允许一对一的对应,因此,单射函数也称作一对一的函数.

例 5.4 判断下面函数是否为单射、满射、双射的,为什么?

(1) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=-x^2+2x-1$.

(2) $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$,$f(x)=\ln x$,$\mathbf{Z}^+$ 为正整数集.

(3) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$,$f(x)=\lfloor x\rfloor$.

(4) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=2x+1$.

(5) $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$,$f(x)=(x^2+1)/x$,其中 $\mathbf{R}^+$ 为正实数集.

解 (1) f 在 $x=1$ 取得极大值 0,因此,不是满射的;$f(0)=f(2)=-1$,因此,不是单射的.

(2) f 是单调上升的,是单射的. 但不满射,$\mathrm{ran}f=\{\ln 1,\ \ln 2,\ \cdots\}$.

(3) $\mathrm{ran}f=\mathbf{Z}$,f 是满射的. f 不是单射的,因为 $f(1.4)=f(1.1)=1$.

(4) f 是满射、单射、双射的,因为它是单调函数并且 $\mathrm{ran}f=\mathbf{R}$.

(5) f 有极小值 $f(1)=2$,且当 $x\to 0$ 和 $+\infty$ 时,$f(x)$ 都趋于 $+\infty$,因此,它既不是单射的,也不是满射的.

判断函数 $f:A\to B$ 是否为满射、单射、双射的依据是定义. 判断满射就是检查 B 中的每个元素是否都是函数值. 如果在 B 中找到不是函数值的元素,那么 f 就不是满射的. 判断单射的方法就是检查不同的自变量是否对应于不同的值. 对于普通的初等函数,可以通过其图像的单调性质来确定. 如果函数图像是严格单调上升(或者严格单调下降),那么函数是单射的.

例 5.5 对给定的 A,B 和 f,判断是否构成函数 $f:A\to B$. 如果是,说明 $f:A\to B$ 是否为单射、满射、双射的;如果不是,请说明理由,并根据要求进行计算.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9,10\}$, $f=\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 4,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 5,9\rangle\}$.

(2) A,B 同(1), $f=\{\langle 1,7\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 1,9\rangle,\langle 5,10\rangle\}$.

(3) A,B 同(1), $f=\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,9\rangle\}$.

(4) $A=B=\mathbf{R}$, $f(x)=x^3$.

(5) $A=B=\mathbf{R}^+$, $f(x)=x/(x^2+1)$.

(6) $A=B=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y,x-y\rangle$, 令 $L=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbf{R}\wedge y=x+1\}$, 计算 $f(L)$.

(7) $A=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $B=\mathbf{N}$, $f(\langle x,y\rangle)=|x^2-y^2|$. 计算 $f(\mathbf{N}\times\{0\})$, $f^{-1}(\{0\})$.

解 (1) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$ 既不是单射的,也不是满射的. 因为 $f(3)=f(5)=9$, 且 $7\notin \mathrm{ran}f$.

(2) 不能构成 $f:A\to B$, 因为 f 不是函数. $\langle 1,7\rangle\in f$ 且 $\langle 1,9\rangle\in f$, 与函数定义矛盾.

(3) 不能构成 $f:A\to B$, 因为 $\mathrm{dom}f=\{1,2,3,4\}\neq A$.

(4) 能构成 $f:A\to B$, 且 $f:A\to B$ 是双射的.

(5) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$ 既不是单射的,也不是满射的. 因为该函数在 $x=1$ 取极大值 $f(1)=1/2$. 函数不是单调的,且 $\mathrm{ran}f\neq\mathbf{R}^+$.

(6) 能构成 $f:A\to B$, 且 $f:A\to B$ 是双射的. $f(L)=\{\langle 2x+1,-1\rangle \mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}\times\{-1\}$.

(7) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$ 既不是单射的,也不是满射的. 因为 $f(\langle 1,1\rangle)=f(\langle 2,2\rangle)=0$, $2\notin\mathrm{ran}f$. 且

$$f(\mathbf{N}\times\{0\})=\{n^2-0^2 \mid n\in\mathbf{N}\}=\{n^2 \mid n\in\mathbf{N}\}$$
$$f^{-1}(\{0\})=\{\langle n,n\rangle \mid n\in\mathbf{N}\}$$

例 5.6 设 $f_1, f_2, f_3, f_4\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, 且

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$
$$f_2(x)=x$$
$$f_3(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbf{Z}\\ 1 & x\notin\mathbf{Z}\end{cases}$$
$$f_4(x)=1$$

令 E_i 是由 f_i 导出的等价关系, $i=1,2,3,4$, 即 $xE_iy\Leftrightarrow f_i(x)=f_i(y)$. 令 S 是 4 个划分的集合 $\{\mathbf{R}/E_1, \mathbf{R}/E_2, \mathbf{R}/E_3, \mathbf{R}/E_4\}$, 在 S 上如下定义划分之间的加细关系 T:

$$\langle \mathbf{R}/E_i, \mathbf{R}/E_j\rangle\in T\Leftrightarrow\forall x(x\in\mathbf{R}/E_i\to\exists y(y\in\mathbf{R}/E_j\wedge x\subseteq y))$$

即对于 $\mathbf{R}/E_i$ 的任何划分块 x, 都存在 $\mathbf{R}/E_j$ 的划分块 y 使得 y 包含 x, 那么 $\langle\mathbf{R}/E_i, \mathbf{R}/E_j\rangle$ 属于 T, 即划分 $\mathbf{R}/E_i$ 是划分 $\mathbf{R}/E_j$ 的加细. 不难证明 T 是 S 上的偏序.

(1) 画出偏序集 $\langle S,T\rangle$ 的哈斯图.

(2) $g_i: \mathbf{R}\to\mathbf{R}/E_i$ 是自然映射, 求 $g_i(0)$, $i=1,2,3,4$.

(3) 对每个 i, 说明 g_i 的性质(单射、满射、双射).

解 (1) 因为 E_2 是恒等关系, 对应的划分 $\mathbf{R}/E_2$ 具有无数个划分块, 每块只含有 1 个元素, 是最细的划分, 因此在加细关系的偏序集中为最小元. E_4 是全域关系, 对应的划分 $\mathbf{R}/E_4$ 只有 1 个划分块, 是最粗的划分, 因此在加细关系的偏序集中是最大元. E_1 对应的划

分$\mathbf{R}/E_1$ 有 2 个划分块,所有的非负实数构成一块,所有的负数构成另一块. 因此 $\mathbf{R}/E_1$ 比$\mathbf{R}/E_2$ 粗,比 $\mathbf{R}/E_4$细,介于它们之间. 类似地,E_3对应的划分 $\mathbf{R}/E_3$也由两块构成,所有的整数在一块,其他的实数在另一块. 它也介于 $\mathbf{R}/E_1$ 和 $\mathbf{R}/E_3$之间. 不难看出,$\mathbf{R}/E_1$ 与 $\mathbf{R}/E_3$之间不存在加细关系,它们是不可比的. 因此哈斯图如图 5.1 所示.

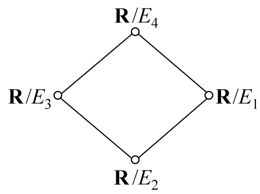

图 5.1

(2) $g_i(0)$是所有与 0 等价的元素构成的集合,$i=1,2,3,4$. 因此

$$g_1(0)=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x\geqslant 0\},\ g_2(0)=\{0\},$$
$$g_3(0)=\mathbf{Z},\ g_4(0)=\mathbf{R}$$

(3) g_1, g_2, g_3, g_4都是满射的;其中 g_2 是双射的.

例 5.7 对于给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f: A\to B$.

(1) $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$.

(2) 设 A,B 为实数区间,其中 $A=[0,1]$, $B=[1/4,1/2]$.

(3) $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{N}$.

(4) 设 A,B 为实数区间,其中 $A=[\pi/2,3\pi/2]$, $B=[-1,1]$.

解 (1) $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. $B=\{f_0,f_1,\cdots,f_7\}$,其中:

$$f_0=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}$$
$$f_1=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$
$$f_2=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}$$
$$f_3=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$
$$f_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}$$
$$f_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$
$$f_6=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}$$
$$f_7=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

令 $f: A\to B$,且满足

$$f(\varnothing)=f_0,\ f(\{1\})=f_1,\ f(\{2\})=f_2,\ f(\{3\})=f_3,$$
$$f(\{1,2\})=f_4,\ f(\{1,3\})=f_5,\ f(\{2,3\})=f_6,\ f(\{1,2,3\})=f_7$$

(2) 令 $f: [0,1]\to[1/4,1/2]$, $f(x)=(x+1)/4$.

(3) 将 $\mathbf{Z}$ 中元素以下列顺序排列并与 $\mathbf{N}$ 中元素对应.

$$\begin{array}{llllllll}
\mathbf{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbf{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots
\end{array}$$

则这种对应所表示的函数是

$$f: \mathbf{Z}\to\mathbf{N},\quad f(x)=\begin{cases}2x & x\geqslant 0\\ -2x-1 & x<0\end{cases}$$

(4) 令 $f: [\pi/2,3\pi/2]\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$.

例 5.8 设 $f: \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$

$$f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y,x-y\rangle$$

证明 f 既是满射的，也是单射的.

证明　任取 $\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，存在 $\left\langle\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right\rangle$ 使得

$$f\left(\left\langle\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right\rangle\right)=\langle u,v\rangle$$

因此，f 是满射的.

对于任意的 $\langle x,y\rangle$，$\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}f(\langle x,y\rangle)=f(\langle u,v\rangle)&\Rightarrow\langle x+y,x-y\rangle=\langle u+v,u-v\rangle\\&\Rightarrow x+y=u+v,x-y=u-v\Rightarrow x=u,y=v\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle\end{aligned}$$

因此，f 是单射的.

5.2　函数的复合与反函数

函数可以进行各种运算，复合运算和求反函数的运算是最重要的运算.

5.2.1　函数的复合

函数的复合就是关系的合成，所有关系合成的性质对于函数复合都是成立的，这里只讨论有关函数复合的一些特殊性质. 先给出关于函数复合运算的定理. 这个定理说明两个函数复合以后还是函数，同时给出了复合函数的定义域与函数值的计算规则.

定理 5.1　设 f，g 是函数，则 $f\circ g$ 也是函数，且满足

(1) $\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x\mid x\in\mathrm{dom}f\land f(x)\in\mathrm{dom}g\}$.

(2) $\forall x\in\mathrm{dom}(f\circ g)$ 有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

证明　先证明 $f\circ g$ 是函数. 因为 f，g 是关系，所以 $f\circ g$ 也是关系. 若对某个 $x\in\mathrm{dom}(f\circ g)$ 有 $xf\circ gy_1$ 和 $xf\circ gy_2$，则

$$\begin{aligned}&\langle x,y_1\rangle\in f\circ g\land\langle x,y_2\rangle\in f\circ g\\\Rightarrow&\ \exists t_1(\langle x,t_1\rangle\in f\land\langle t_1,y_1\rangle\in g)\land\exists t_2(\langle x,t_2\rangle\in f\land\langle t_2,y_2\rangle\in g)\\\Rightarrow&\ \exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\land\langle t_1,y_1\rangle\in g\land\langle t_2,y_2\rangle\in g)\quad(f\text{ 为函数})\\\Rightarrow&\ y_1=y_2\quad(g\text{ 为函数})\end{aligned}$$

所以 $f\circ g$ 为函数.

再证明结论(1)和结论(2). 任取 x，

$$\begin{aligned}&x\in\mathrm{dom}(f\circ g)\\\Rightarrow&\ \exists t\exists y(\langle x,t\rangle\in f\land\langle t,y\rangle\in g)\\\Rightarrow&\ \exists t(x\in\mathrm{dom}f\land t=f(x)\land t\in\mathrm{dom}g)\\\Rightarrow&\ x\in\{x\mid x\in\mathrm{dom}f\land f(x)\in\mathrm{dom}g\}\end{aligned}$$

任取 x，

$$\begin{aligned}&x\in\mathrm{dom}f\land f(x)\in\mathrm{dom}g\\\Rightarrow&\ \langle x,f(x)\rangle\in f\land\langle f(x),g(f(x))\rangle\in g\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle x, g(f(x))\rangle \in f\circ g$$
$$\Rightarrow x \in \mathrm{dom}(f\circ g) \wedge f\circ g(x) = g(f(x))$$

所以(1)和(2)得证.

从这个定理可知,复合函数 $f\circ g$ 的定义域可能小于 f 的定义域,而它的值域也可能小于 g 的值域. 它们之间的关系满足:

$$\mathrm{dom}(f\circ g) \subseteq \mathrm{dom}f, \mathrm{ran}(f\circ g) \subseteq \mathrm{ran}g$$

推论 1 设 f,g,h 为函数, 则$(f\circ g)\circ h$ 和 $f\circ(g\circ h)$都是函数, 且

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$$

证明 由上述定理和关系合成运算的可结合性得证.

推论 2 设 $f: A\to B$, $g: B\to C$, 则 $f\circ g: A\to C$, 且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x) = g(f(x))$.

证明 由上述定理知 $f\circ g$ 是函数, 且

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(f\circ g) &= \{x \mid x \in \mathrm{dom}f \wedge f(x) \in \mathrm{dom}g\}\\ &= \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B\} = A\end{aligned}$$
$$\mathrm{ran}(f\circ g) \subseteq \mathrm{ran}g \subseteq C$$

因此 $f\circ g: A\to C$, 且 $\forall x\in A$ 有 $f\circ g(x) = g(f(x))$.

下面考虑函数的单射、满射、双射的性质与函数复合运算之间的关系.

定理 5.2 设 $f: A\to B$, $g: B\to C$.

(1) 如果 $f: A\to B$, $g: B\to C$ 都是满射的, 则 $f\circ g: A\to C$ 也是满射的.

(2) 如果 $f: A\to B$, $g: B\to C$ 都是单射的, 则 $f\circ g: A\to C$ 也是单射的.

(3) 如果 $f: A\to B$, $g: B\to C$ 都是双射的, 则 $f\circ g: A\to C$ 也是双射的.

证明 (1) 任取 $c\in C$, 由 $g: B\to C$ 的满射性, $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$. 对于这个 b, 由 $f: A\to B$ 的满射性, $\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 由合成定理有

$$f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了 $f\circ g: A\to C$ 是满射的.

(2) 假设存在 $x_1, x_2\in A$ 使得

$$f\circ g(x_1) = f\circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

因为 $g: B\to C$ 是单射的, 故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于 $f: A\to B$ 也是单射的, 所以 $x_1=x_2$. 从而证明 $f\circ g: A\to C$ 是单射的.

(3) 由(1)和(2)得证.

定理 5.2 说明函数的复合运算能够保持函数单射、满射、双射的性质. 但这个定理的逆命题不为真, 即如果 $f\circ g: A\to C$ 是单射(或满射、双射)的, 不一定有 $f: A\to B$ 和 $g: B\to C$ 都是单射(或满射、双射)的. 考虑集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, $C=\{c_1,c_2,c_3\}$. 令

$$f = \{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle\}$$
$$g = \{\langle b_1,c_1\rangle,\langle b_2,c_2\rangle,\langle b_3,c_3\rangle,\langle b_4,c_3\rangle\}$$

$$f\circ g=\{\langle a_1,c_1\rangle,\langle a_2,c_2\rangle,\langle a_3,c_3\rangle\}$$

那么 $f: A\to B$ 和 $f\circ g: A\to C$ 都是单射的，但 $g: B\to C$ 不是单射的. 考虑集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，$C=\{c_1,c_2\}$. 令

$$f=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_2\rangle\}$$
$$g=\{\langle b_1,c_1\rangle,\langle b_2,c_2\rangle,\langle b_3,c_2\rangle\}$$
$$f\circ g=\{\langle a_1,c_1\rangle,\langle a_2,c_2\rangle,\langle a_3,c_2\rangle\}$$

那么 $g: B\to C$ 和 $f\circ g: A\to C$ 是满射的，但 $f: A\to B$ 不是满射的.

下面考虑恒等函数在复合运算中的作用.

定理 5.3　设 $f: A\to B$，则 $f=f\circ I_B=I_A\circ f$.

定理 5.3 的证明可以采用集合相等的证明方法，这个证明留给读者思考.

推论　设 $f: A\to A$，则 $f=f\circ I_A=I_A\circ f$.

任何 A 上的函数 f 与 I_A 进行复合都等于 f，就像普通加法与 0 相加或者普通乘法与 1 相乘一样. 这里的 0，1 和 I_A 都称为相关运算的单位元，关于单位元的性质将在后面第 14 章给出详细的介绍. 推论说明了 I_A 是 A 上的函数复合运算的单位元.

5.2.2　反函数

下面考虑函数的求逆运算. 任给函数 f，它的逆 f^{-1} 不一定是函数，只是一个二元关系. 任给单射函数 $f: A\to B$，则 f^{-1} 是函数，且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 A 的双射函数，但不一定是从 B 到 A 的双射函数. 对于双射函数 $f: A\to B$，容易证明 $f^{-1}: B\to A$ 是从 B 到 A 的双射函数.

定理 5.4　设 $f: A\to B$ 是双射的，则 $f^{-1}: B\to A$ 也是双射的.

证明　因为 f 是函数，所以 f^{-1} 是关系，且

$$\mathrm{dom}f^{-1}=\mathrm{ran}f=B,\qquad \mathrm{ran}f^{-1}=\mathrm{dom}f=A$$

对于任意的 $x\in B=\mathrm{dom}\ f^{-1}$，假设有 y_1，$y_2\in A$ 使得 $\langle x,y_1\rangle\in f^{-1}\wedge\langle x,y_2\rangle\in f^{-1}$ 成立，则由逆的定义有 $\langle y_1,x\rangle\in f\wedge\langle y_2,x\rangle\in f$. 根据 f 的单射性可得 $y_1=y_2$，从而证明了 f^{-1} 是函数，且由 $\mathrm{ran}f^{-1}=A$ 知 f^{-1} 是满射的.

若存在 x_1，$x_2\in B$ 使得 $f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_2)=y$，从而有

$$\langle x_1,y\rangle\in f^{-1}\wedge\langle x_2,y\rangle\in f^{-1}$$
$$\Rightarrow\langle y,x_1\rangle\in f\wedge\langle y,x_2\rangle\in f\Rightarrow x_1=x_2\qquad(\text{因为 } f \text{ 是函数})$$

从而证明了 f^{-1} 的单射性.

对于双射函数 $f: A\to B$，称 $f^{-1}: B\to A$ 是它的**反函数**.

例 5.9　设 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 3\\ -2 & x<3\end{cases}$$
$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$，$g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数，求出它们的反函数.

解

$$f\circ g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$$
$$f\circ g(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\geqslant 3\\ 0 & x<3\end{cases}$$

$$g \circ f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geqslant 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 不是双射的，不存在反函数；$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是双射的，它的反函数是

$$g^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad g^{-1}(x) = x - 2$$

函数 f 的反函数具有下述性质.

定理 5.5 设 $f: A \to B$ 是双射的，则

$$f^{-1} \circ f = I_B, \qquad f \circ f^{-1} = I_A$$

证明 根据定理 5.4 可知 $f^{-1}: B \to A$ 也是双射的. 由合成基本定理可知 $f^{-1} \circ f: B \to B$，$f \circ f^{-1}: A \to A$，且它们都是恒等函数.

对于双射函数 $f: A \to A$，根据上述定理有 $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$.

关系和函数是离散数学的基本概念，在离散系统建模中有着重要的应用. 下面给出几个例子.

例 5.10 关系代数(relation algebra).

关系代数是关系数据库的基础. 一个通讯录可以看作一个简单的关系数据库，其中的分组，如同学组、同事组、朋友组等都可以看作不同的关系. 每个关系都是若干元组的集合，元组 $\langle A_1, A_2, \cdots, A_n \rangle$ 代表该关系有 n 个属性. 例如，通讯录的朋友组 R 可能含有下述信息：〈2，李明，50，融创大厦 A 座 502，13341556347，liming@hotmail.com.cn〉，该信息是由编号、姓名、年龄、地址、手机号、E-mail 6 个属性构成的六元组. 表 5.1 给出了具有 4 条信息的关系 R.

表 5.1

编　号	姓　名	年　龄	地　　址	手　机　号	E-mail
1	张晓光	34	科斯公司市场部	13520145678	zhxg@gmail.com.cn
2	李　明	50	融创大厦 A 座 502	13341556347	liming@hotmail.com.cn
3	王　恒	43	求实中学	13124567336	wheng@qq.com.cn
4	石海生	27	大华公司网络中心	13822253689	Shihs@hotmail.com.cn

为了得到相关的查询结果，数据库中定义了几种基本操作：并、交、差、笛卡儿积、选择、投影. 设 R 与 S 是具有相同属性的 m 元关系，其中的 m 个属性记作 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，这些基本操作说明如下：

(1) $R \cup S$ 的元组既含有 R 的元组，也含有 S 的元组.

(2) $R \cap S$ 的元组是同时存在于 R 和 S 中的元组.

(3) $R - S$ 的元组只在 R 中但不在 S 中.

投影 $\pi_{A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}}(R)$ 是从 m 阶笛卡儿积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ 到 n 阶笛卡儿积 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_n}$ 的部分映射，$\pi_{A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}}(R)$ 表示只选取 R 中属性为 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_n}$ 的列. 例如，对表 5.1 中的关系 R 进行投影运算，$\pi_{\text{姓名}, \text{手机号}, \text{E-mail}}(R)$ 的查询结果如表 5.2 所示.