

第3章

静态电磁场

静态电磁场是时变电磁场的特殊形式,其电场和磁场都不随时间变化。静止的电荷产生静电场,导电媒质中恒定电流产生恒定的磁场,两者可以独立存在,不需要相互依存。人类认识电磁学是从研究静电现象开始(如库仑定律),随着对宏观电磁现象本质的不断揭示(如毕奥萨伐尔定律、安培环路定律、法拉第电磁感应定律等),麦克斯韦方程组成为认识宏观电磁现象的理论基础,因而学习静态电磁场是研究时变电磁场的基础。本章主要研究静态电磁场中电场和磁场满足的基本方程、边界条件和基本规律,并对电容、电导、电感及电场能量、磁场能量等重要概念进行介绍和分析,为进一步学习其他内容提供理论基础。

3.1 静电场

静电场是由相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷(静电荷)产生,是对电荷有作用力的一种矢量场。从微观上看,所有带电粒子都是运动着的,因而它所产生的电场也是随时间变化的。但是,当这种变化在所观测的时间内引起的宏观效果可以忽略时,我们就认为电荷是静止的。在日常生活中,与静电场相关的静电现象普遍存在,如静电感应、静电放电等现象。在媒质空间中,研究静电场就要研究静电场的分布与变化,这取决于静电荷的分布及周围媒质的特性。描述静电场的基本物理量是电场强度 $\mathbf{E}$,考虑到媒质特性的影响时,引入电位移矢量 $\mathbf{D}$ 。

3.1.1 静电场的基本方程

我们知道微分形式的麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \end{cases}$$

考虑到静态电磁场是时变电磁场的特例,电场和磁场不随时间变化,得到 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$,则得到静态电磁场满足的方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \end{cases}$$

对于静电场而言,与恒定电流的磁场满足的方程无关,因而静电场满足的基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (3.1.2)$$

式中, ρ_f 为自由电荷体密度(C/m^3)。上式表明, 静电场是有源无旋场。实际应用中, 经常考虑矢量场宏观特征表现, 可以采用矢量的通量和环量描述, 依据高斯散度定理和斯托克斯定理, 可以得到静电场基本方程的积分形式:

$$\iint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = q \quad (3.1.3)$$

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.1.4)$$

式(3.1.3)称为静电场的高斯定理, q 为闭合曲面所包围的总自由电荷量, 它表示穿出任意闭合面上电位移矢量的通量。式(3.1.4)表明电场强度沿任意闭合路径的环量为0, 静电场是无旋场(保守场)。在均匀、线性、各向同性媒质(简单媒质)中, 电场强度与电位移矢量之间满足本构关系

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.1.5)$$

上式称为本构关系, ϵ 称为介电常数, 也称为电容率, 单位是 F/m 。

3.1.2 静电场的边界条件

当静电场中有介质存在时, 在介质的不均匀处出现束缚电荷, 在导体的表面产生感应电荷, 这些束缚电荷和感应电荷又产生电场, 改变原来的电场分布, 使得界面两侧的电场出现不连续, 因而微分形式的静电场方程不能用在分界面上, 只能用积分形式的静电场方程。当遇到两种介质时, 就需要建立不同介质分界面两侧电场的关系, 这就是边界条件。如图 3.1.1 所示, 分界面两侧的电场强度和电位移矢量都可以分解为与分界面平行的切向分量和与分界面垂直的法向分量, $\mathbf{e}_n$ 为分界面的法向单位矢量。

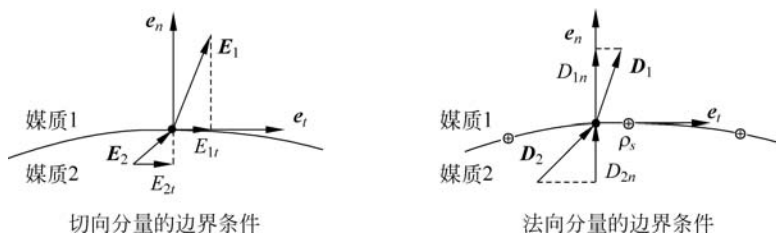


图 3.1.1 静电场边界示意图

与时变电磁场的边界条件推导类似, 推导分界面两侧的电位移矢量的关系时, 跨分界面取一个很小的圆柱形封闭面, 其上下端面与分界面平行, 无限靠近分界面, 柱高 h 为无限小量, 如图 3.1.2 所示。应用静电场高斯定理得到

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (3.1.6)$$

考虑到封闭柱面的两个底面 S_1 和 S_2 的面积 ΔS 很小, 每个底面上的电场可以看作相同的而其圆柱侧面积为无限小量, 其通量也是无限小量, 因而

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \approx D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S \quad (3.1.7)$$

因为柱高 h 为无限小量, 如果 ρ_s 为分界面上的自由电荷面密度, 则圆柱形封闭曲面包围的电荷量为

$$q = \rho_{sf} \Delta S$$

因此得到 $D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S = \rho_{sf} \Delta S$, 即

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{sf} \quad (3.1.8)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_{sf} \quad (3.1.9)$$

式(3.1.8)表明, $\mathbf{D}$ 场的法向分量在通过存在面电荷的分界面时是不连续的——不连续的量等于面电荷密度。

同理, 为了推导分界面两侧电场强度的关系, 跨分界面上取一很小的矩形闭合路径, 如图 3.1.3 所示, 矩形路径的上下两边与分界面平行, 分别在分界面两侧, 长度 Δl 很小, 在每一条边上的电场可以认为是相同的, 矩形的高度 h 为无限小量, 电场沿着闭合路径的积分为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

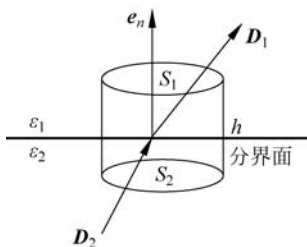


图 3.1.2 电位移矢量 $\mathbf{D}$ 的边界条件

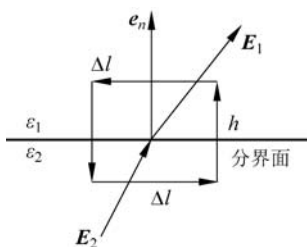


图 3.1.3 电场强度 $\mathbf{E}$ 的边界条件

由此得到分界面两侧的电场强度为

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad (3.1.10)$$

其矢量形式为

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (3.1.11)$$

式(3.1.10)表明, 穿过分界面的 $\mathbf{E}$ 场的切线分量是连续的。

假定媒质 2 是理想导体, 媒质 1 是理想介质, 静电场条件下, 理想导体内部电场为 0, 内部也不存在自由电荷, 自由电荷只可以驻留在理想导体的表面, 因此理想导体表面(与理想介质分界面)边界条件为

$$\begin{cases} E_{1t} = 0 \\ \rho_{sf} = D_{1n} \end{cases} \quad (3.1.12)$$

上式说明, 导体表面电场与理想导体表面垂直(只有法向分量), 在理想导体表面存在自由电荷面密度 ρ_{sf} , 且面电荷密度等于导体表面的电位移量的法向分量, 此式常用于计算面电荷 ρ_{sf} 。由于介质没有自由电荷, 所以在电磁工程一般认为两种理想介质的分

界面无自由电荷,密度 $\rho_{sf}=0$ 。

【例 3-1】 电荷按体密度 $\rho_f = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ 分布于一个半径为 a 的球形区域内,其中 ρ_0 为常数,试计算球内、外的电场。

解: 电场明显地具有球面对称性, $\mathbf{E}$ 沿半径方向,且只是 r 的函数。所以高斯面必为一同心的球面。我们必须分两个区域求 $\mathbf{E}$ 场,如图 3.1.4 所示。

(1) 在 $0 \leq r \leq a$ 区域内。

在球内建立一个 $r < a$ 假想的高斯面 S_i ; 在此面 $\mathbf{E}$ 是径向的,且大小为常量。

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E_r, \quad d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r dS$$

总流出 $\mathbf{E}$ 通量为

$$\oiint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r 4\pi r^2$$

高斯面内总电荷为

$$\begin{aligned} Q &= \iiint_V \rho_f dv = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) r'^2 dr' \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right) \text{ (V/m)} \end{aligned}$$

得到

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right) \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

(2) 在 $r > a$ 的区域内。

在球外建立一个 $r > a$ 假想的高斯面 S_i ; 在此面上, $\mathbf{E}$ 仅有径向分量,且大小为常量。则高斯面内总的电荷量为

$$Q = \iiint_V \rho_f dV = 4\pi \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) r'^2 dr' = 4\pi\rho_0 \frac{2a^2}{15}$$

得到

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2}$$

由此可见, $\mathbf{E}$ 是随 r 的变化而变化。所以在给定的电荷分布具有对称性时,试着应用高斯定理求解问题。

3.1.3 电位函数

在静电学中,电位又称电势。其定义为:处于电场中某个位置的单位电荷所具有的电势能。电位只有大小,没有方向,是一个标量,其数值只有相对意义,不具有绝对意义。

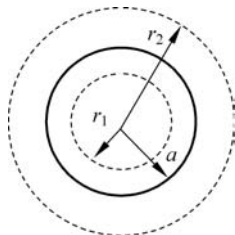


图 3.1.4 球形电荷分布的电场强度



视频 3-1

根据静电场微分方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.1.13)$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla u = 0$ 可知, 电场强度可以表示为一个标量的梯度, 这个标量记作 Φ , 该标量就是电位, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (3.1.14)$$

此处之所以取负号是为了使 Φ 有明确的物理意义, 电位的梯度是一个矢量, 其方向表示电位增加的方向, 而电场的方向是从正电荷指向负电荷, 刚好与之相反。

1. 电位函数的计算

对于点电荷 q , 位于 r' 点, 则空间任一点的电场强度(根据库仑定律)为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

电场强度可以变为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \Phi$$

所以,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \quad (3.1.15)$$

式中, C 是一个任意常数, 因而求出的电位函数的值也就不唯一了。对于线分布、面分布、体分布电荷, 应用叠加原理, 通过积分的方法可以求出它们的电位函数

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_c \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{R} dl' + C \quad (3.1.16)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_{sf}(\mathbf{r}')}{R} dS' + C \quad (3.1.17)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{R} dV' + C \quad (3.1.18)$$

其中,

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

在电位函数的求解过程中, 零电位点的选取往往是一个非常重要的问题。零电位点的选取有一个原则: 对于有限区域分布的电荷, 一般取无穷远处为电位零点; 如果电荷分布延伸到无穷远处, 则零电位点要视具体情况而定, 通常选在有限距离处。

下面通过考察单位正电荷在电场作用下做功, 分析标量电位 Φ 的物理意义。设单位正电荷在电场 $\mathbf{E}$ 的作用下从 A 点到 B 点, 其做功为

$$W = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.1.19)$$

根据 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, 代入上式得到

$$W = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \frac{\partial\Phi}{\partial l} dl = - \int_A^B d\Phi = \Phi(A) - \Phi(B)$$

上式表明, 单位正电荷在电场 $\mathbf{E}$ 的作用下, 从 A 点移动到 B 点, 电场力所做的功等于位移起点的标量场值 $\Phi(A)$ 减去终点的标量场值 $\Phi(B)$ 。将电场和重力场相比较, 电场对应的标量 Φ 相当于重力场中的势能, 反映了电场的做功能力。换句话说, 电场中某一点的标量场 Φ 表示单位正电荷在该点具有的电势能, 因此, 标量场 Φ 称为电势或电位。两点之间的电位差, 就等于单位正电荷在电场 $\mathbf{E}$ 作用下从其中一点移动到另一点时电场力所做的功, 称为电压。

根据上式, 电场中 A 点的电位为

$$\Phi(A) = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \Phi(B)$$

当 B 点为电位零点, 即选 B 点为电位参考点, $\Phi(B) = 0$, 有

$$\Phi(A) = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.1.20)$$

上式说明, 在电场中任一点的电位等于把单位正电荷从该点沿任意路径移到电位参考点时, 电场力所做的功。在同一电场中, 选取不同的电位参考点时, 电位不同。

对于电场给定两点 P 和 Q , 两点之间的电位差

$$U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.1.21)$$

上式说明, 电场中选取的电位参考点并不影响所要计算的电压和对应的电场强度。电位参考点视情况而定。在电荷分布在有限区域时, 一般选取无限远处为电位参考点; 而在电荷分布延伸到无限远处时, 可在有限区域中选取电位参考点。在工程上, 由于大地的电位相对稳定, 一般选取大地为电位参考点(零电位)。

2. 电位函数满足的方程

在各向同性的均匀线性媒质中, ϵ 为常数, 静电场满足

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

由于 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, 代入上式, 得到

$$\nabla \cdot (-\nabla\Phi) = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

所以有

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (3.1.22)$$

上式称为静电场电位的泊松方程。

当 $\rho_f = 0$ 时, 即在无源区(无自由体电荷分布), 满足

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.1.23)$$

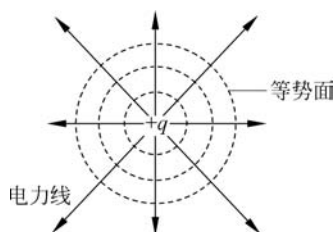


图 3.1.5 点电荷的等位面

上式称为静电场电位的拉普拉斯方程。当已知电荷分布时,求解以上偏微分方程即可以求出电位函数的解。电位函数可以用等位面形象描述,等位面是相邻电位差相等的一系列等位面,电场较强处,等位面间距小;电场强度较弱时,等位面间距大。根据电场与电位的关系,电场方向总是与等位面的法线方向一致,即电场总与等位面处处垂直,并指向电位减少的一侧。如图 3.1.5 所示,正点电荷的等势面是同心球面。

泊松或拉普拉斯方程满足的边界条件有两个:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (3.1.24)$$

即在不同媒质分界面上,电位函数连续。同时,因为可以得到电位的法向导数满足的边界条件

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \rho_{sf} \quad (3.1.25)$$

其中法向导矢量的方向从媒质 2 指向媒质 1。在介质与导体分界面上,假设导体为媒质 2,因为导体内 $D_{2n}=0$,上式可以简化为

$$-\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \rho_{sf}$$

此式常用于计算导体表面的面电荷密度。

3. 电偶极子

电偶极子是两个等量异号点电荷组成的系统。如图 3.1.6 所示建立球坐标系,原点在电偶极子中心, z 轴与电偶极子轴重合,下面求解的是远离电偶极子的电场。

设电位参考点在无穷远处,空间任一点 p 点的电位为

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.1.26)$$

利用余弦定理,可得

$$r_1 = \left[r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 - rl \cos\theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = \left[r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 + rl \cos\theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

因为 $r \gg l$,利用二项式展开,略去高阶小项,得

$$r_1 \approx r - \frac{l}{2} \cos\theta$$

$$r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos\theta$$

得到远区电位的表达式

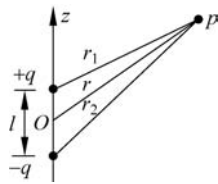


图 3.1.6 电偶极子示意图

$$\Phi \approx \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} \quad (3.1.27)$$

为了反映电偶极子的强度,定义电偶极矩,或称为电偶极子的电矩

$$\mathbf{p} = ql \quad (3.1.28)$$

其中, l 由负电荷指向正电荷, 电位可以表示为

$$\Phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} \quad (3.1.29)$$

进一步可以求出电偶极子的远区电场表达式

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} (\mathbf{e}_r 2\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \quad (3.1.30)$$

图 3.1.7 给出了电偶极子的电力线和等位面的分布情况, 其电场和电位具有两个特点:

(1) $\mathbf{E}$ 只有 E_r 和 E_θ 分量, 没有 E_φ 分量, 而且两分量与坐标 φ 无关(轴对称)。

(2) 电位与距离的平方成反比, 电场强度与距离的立方成反比。而单个点电荷的电位与距离成反比, 电场强度与距离的平方成反比。这是因为对观察者来说, 电偶极子的两个符号相反的点电荷相距很近, 它们的电位和电场有一部分相互抵消。

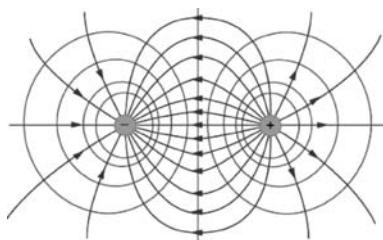


图 3.1.7 电偶极子电力线及等位面

如果电偶极子的中心不在坐标原点, 而在空间任一点, 其矢径为 $\mathbf{r}'$, l 也不平行于 z 轴, 则空间任一点的电位函数为

$$\Phi = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.1.31)$$

3.1.4 电容

在线性介质中, 一个孤立导体的电位(电位参考点在无限远处)与导体所带的电量成正比。导体所带电量 q 与其电位的比值定义为孤立导体的电容, 记为 C , 即

$$C = \frac{q}{\Phi} \quad (3.1.32)$$

电容的单位是 F。孤立导体的电容与导体的几何形状、尺寸及周围介质的特性有关, 而与导体的电量无关。

我们考虑一个半径为 a , 带电量为 q 的导体球放在介电常数为 ϵ 的无限大均匀介质中, 其电容为多少呢? 如果取坐标原点为球心, 很容易得到空间距离球心为 r 处的电位

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

半径为 a 导体球的电位为

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon a}$$

孤立导体球的电容为

$$C = \frac{q}{\Phi} = 4\pi\epsilon a$$

可以看到,其比值与导体的大小及周围的介质有关,与电场无关,从而也就与导体所带电量无关。孤立导体这一性质也可以推广到一般的导体系统中。

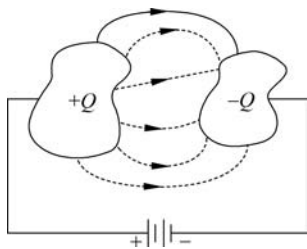


图 3.1.8 两导体系统的电容

在线性介质中,如图 3.1.8 所示,定义两个导体之间电容为导体的带电量与两导体之间的电位差之比为,即

$$C = \frac{Q}{|\Phi_1 - \Phi_2|} \quad (3.1.33)$$

两导体之间的电容与导体的几何形状、尺寸及周围介质的特性有关,而与导体的电量无关。孤立导体的电容可以看成两导体系统中一个导体在无限远处情况下的电容。

电容的概念不仅适用于电容器,一根导线与地之间也有电容,反映了两个导体中一个导体对另一个导体电场的影响,体现了两个导体之间电场耦合的程度。

【例 3-2】 两块平行板平行放置,每一块极板的面积都为 S ,极板之间填充厚度为 d_1 和 d_2 的两层介质,介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ,忽略边缘效应,求它们之间的电容。

解: 假设两导电板之间的电压为 V ,正极板上的电荷面密度分别为

$$\rho_{s1} = D_{1n} = \epsilon_1 E_1 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} V$$

由于忽略边缘效应,电荷均匀分布,正极板上的电量为

$$q = \rho_{s1} S = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} V$$

电容为

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}$$



视频 3-2

3.1.5 电场能量

所谓电场能量是指物体因带电而具有的能量。如果把许多带电微元从远处聚集成一定的带电体系时,需要克服电力做功,相应的能量就转化为带电体的电场能量。由于电力做功与路径无关,带电体的电能只与其中各带电微元的相对位置及零点的选取有关,所以电场能量又称为电势能。

如果两个点电荷 q_1 和 q_2 分别位于 M 和 N 点,两点相距 r_{12} ,组成带电体,如图 3.1.9 所示。首先将 q_1 移动到 M 点,因无电场,不受力,无须做功。再将 q_2 从无穷远移到与 q_1 相距 r_{12} 的 N 点,在此过程中,克服 q_1 产生的静电场 E_1 对 q_2 的作用力 F_{12} 所做的

功 W_1 即为两点电荷之间的互能,

$$\begin{aligned} W_1 &= -\int_{\infty}^N \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\infty}^N \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} \\ &= -q_2 \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

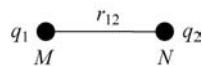


图 3.1.9 两点电荷相互作用

式中,由于电场力 $\mathbf{F}_{12}$ 做功与路径无关。为了便于积分,将 q_2 沿 q_1 与 q_2 的连线从无穷远移到与 q_1 相距为 r_{12} 处。因为 q_1 产生的静电场 $\mathbf{E}_1$ 在 q_2 所在位置的电位 ϕ_{12} ,对于由彼此相隔一定距离的点电荷组成的带电体,其静电势能应包括两部分:一是各个点电荷的自能;二是各个点电荷之间的相互作用能(简称互能)。自能是将电荷微元聚集形成各点电荷时克服电力所做的功。互能是把已经形成的各个点电荷从远处移近到相隔一定距离时,克服彼此间电力所做的功。

$$\phi_{12} = \int_N^{\infty} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_{12}}^{\infty} \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{12}} \quad (3.1.35)$$

互能可以表示为

$$W_1 = q_2 \phi_{12} \quad (3.1.36)$$

若将 q_1 和 q_2 移动的次序颠倒,同理可以得到

$$W_1 = q_1 \phi_{21} \quad (3.1.37)$$

ϕ_{21} 是 q_2 产生的静电场 $\mathbf{E}_2$ 在 q_1 所在位置的电位

$$\phi_{21} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} \quad (3.1.38)$$

因此两个点电荷互能可以表示为

$$W_1 = \frac{1}{2} (q_1 \phi_{21} + q_2 \phi_{12}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} \quad (3.1.39)$$

同理,可以扩展为多个点电荷体系的互能,假设有个点电荷 $(q_1, q_2, \dots, q_n)$,每个点电荷所在位置处的电位为 Φ_i ,其含义是 n 个点电荷体系中除了 q_i 外,其余 $n-1$ 个点电荷产生的电场在 q_i 所在位置的电位

$$\Phi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \phi_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{q_j}{r_{ji}} \quad (3.1.40)$$

n 个点电荷体系的互能表示为

$$W_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \Phi_i \quad (3.1.41)$$

当带电体的电荷连续分布时,可以将带电体无限分割为无穷多个电荷微元 dq ,将求和改为积分,得到电势能为

$$W_e = \frac{1}{2} \int \Phi dq \quad (3.1.42)$$

Φ 的含义是,带电体除了 dq 之外的其余全部电荷产生的静电场在 dq 所在位置的电位。若带电体内的电荷为线分布、面分布、体分布,电荷的线密度、面密度、体密度分别为

ρ_l 、 ρ_{sf} 和 ρ_f , 得到连续电荷分布的静电势能表达式

$$W_e = \frac{1}{2} \int \Phi \rho_l dl \quad (3.1.43)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iint \Phi \rho_{sf} ds \quad (3.1.44)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \Phi \rho_f dV \quad (3.1.45)$$

dl 、 ds 、 dV 分别是带电体的线元、面元和体积元, 积分范围遍及所有存在电荷的地方, 若只有一个带电体, 给出的就是自能。

带电体具有静电势能, 上述表达式都是用电荷、电势表示。静电势能否用电场来表示呢? 根据前面讨论, 有电场的地方一定就有电能, 因而电场的能量可以用电能密度来表示, 记为 w_e , 该电能密度为空间坐标的函数。空间某一点的电能密度等于以该点为中心的邻域内单位体积的电场能量, 单位为 J/m^3 。如果已经知道区域 V 中的电场能量密度 w_e , 可以计算出区域 V 中的电能为

$$W_e = \iiint_V w_e dV \quad (3.1.46)$$

电场能量密度与电场强度有直接的关系, 下面简单进行推导。如图 3.1.10 所示, 由 n 个导体组成的带电系统, 其电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \iint \Phi_i \rho_{sf} ds \quad (3.1.47)$$

取一个包围 n 个导体的无限大封闭面, 其上并无电荷分布, 因此对上式面积分求和中加上无限大封闭面 S_{n+1} , 其值不变, 即

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \iint \Phi_i \rho_{sf} ds = \frac{1}{2} \oint \Phi \rho_{sf} ds \quad (3.1.48)$$

上式中封闭面积分包括了左边求和中的 $n+1$ 个曲面, 考虑到导体表面上的面电荷分布为

$$\rho_{sf} = D_n$$

如图 3.1.10 所示曲面 S 的法线方向 e_n , 上式可以改写为

$$W_e = -\frac{1}{2} \oint_S \Phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.1.49)$$

利用高斯定理, 将封闭面积分转化为体积分

$$\begin{aligned} W_e &= -\frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) dV \\ &= -\frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{D} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{D}) dV \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

体积 V 被 S 曲面包围, 也就是除了导体之外的整个区域。在场区 V 中, 自由电荷体密度为 0, 即 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, 考虑到

$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, 所以上式可以变为

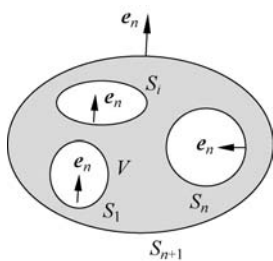


图 3.1.10 多导体系统的电场能量计算用图

$$W_e = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (3.1.51)$$

电能密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (3.1.52)$$

【例 3-3】 一均匀带电球, 半径为 a , 电荷体密度为 ρ_0 , 计算其电场能量。

解: 利用高斯定理, 可以计算出带电导体球的电场强度和电位分布

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \mathbf{e}_r, & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, & r \geq a \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2), & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r}, & r \geq a \end{cases}$$

所以电场能量为

$$W_e = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_0^a \left(\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_a^{+\infty} \left(\frac{a^3}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \right] = \frac{4\pi \rho_0^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

或

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \Phi \rho dV = \int_0^a \frac{\rho_0^2}{12\epsilon_0} (3a^2 - r^2) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho_0^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

3.2 恒定电流的电场

在导电媒质中, 电荷在电场作用下定向移动就形成电流。恒定电流(直流)是不随时间变化的电流。如果在一个导体回路中有恒定电流, 回路中必然有一个推动电荷流动的电场, 这是有别于静电场之外的另外一种不随时间变化的电场, 这个电场是由外电源产生, 称为恒定电流的电场。恒定电流的电场主要研究导电媒质中恒定电场的基本方程、边界条件及绝缘电阻等, 研究的主要对象是电流密度和电场强度矢量。

3.2.1 恒定电场的基本方程

在导电媒质内部, 恒定电场分布不随时间变化, 由麦克斯韦方程组可以得到方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

上式表明, 电荷仍是产生恒定电场的源, 恒定电场仍然是无旋场。该微分方程与静

电场基本方程相同,区别在于导电媒质中产生恒定电场的源是运动电荷,而静电场的源是静止电荷。由于导电媒质中的电流是恒定电流,其电荷分布不随时间变化,即 $\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$ 。

根据电荷守恒定律可知

$$\oiint_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\iiint_\tau \frac{\partial \rho_f}{\partial t} d\tau = 0 \quad (3.2.1)$$

其物理意义是,单位时间内流入任一闭合面 s 的电荷等于流出该面的电荷,因而电流线是连续的闭合曲线其微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0 \quad (3.2.2)$$

该式说明,在导电媒质中,恒定电流的电场是一个无源场,电流密度的散度与电荷分布无关。为了与静电场有所区别,用电流密度分析恒定电场更为方便,恒定电流的电场满足的基本方程的微分形式为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

其相应的积分形式为

$$\begin{cases} \oiint_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = 0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

在导电媒质中,大量自由电子在场力作用下作定向运动的过程中,不断与较重的离子或中性分子发生不规则的碰撞,由此形成传导电流的电子运动速度应当是平均速度。电荷在导电媒质中平均速度与作用于它的电场强度呈正比。定量分析表明 $\mathbf{J}_f$ 与 $\mathbf{E}$ 呈正比关系:

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} \quad (3.2.5)$$

上式称为导电媒质的本构方程(或媒质特性方程),又称为欧姆定律的微分形式。比例常数 σ 是媒质的宏观本构参数,称为电导率,单位为 S/m(西门子/米)。

同样,在恒定电场中引入标量电位函数 ϕ ,电场强度与电位关系满足 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$,可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\sigma \nabla^2 \phi = 0$$

即得到导电媒质中电位函数满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.2.6)$$

这是一个标量偏微分方程,在某些情况下比直接求解电场强度矢量更为简单。

3.2.2 恒定电流电场的边界条件

当恒定电流通过具有不同电导率 σ_1 和 σ_2 的两种导电媒质的分界面时,在分界面上, $\mathbf{J}_f$ 和 $\mathbf{E}$ 各自满足的关系称为恒定电场的边界条件。边界条件可由恒定电场基本方程的积分形式导出,见图 3.2.1。

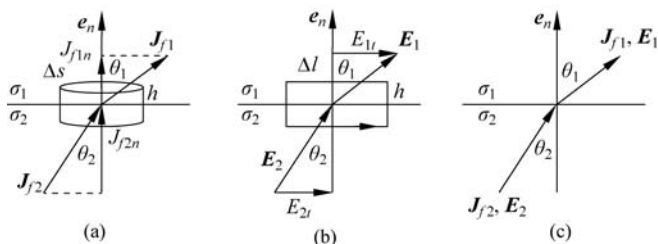


图 3.2.1 恒定电场的边界条件

将电流连续性方程的积分形式应用于图 3.2.1(a)中的圆柱形闭合面上得到

$$\oint_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = J_{f1n} \Delta s - J_{f2n} \Delta s = 0$$

所以得到

$$J_{f1n} = J_{f2n} \quad (3.2.7)$$

上式说明,在分界面上电流密度 $\mathbf{J}_f$ 的法向分量是连续的,根据 $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$,得

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

或

$$\sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad (3.2.8)$$

将式(3.2.4)积分形式应用图 3.2.1(b)中于矩形闭合路径上得到

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

即

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (3.2.9)$$

说明分界面上的电场强度的切向分量是连续的。拓展得到

$$\frac{J_{f1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{f2t}}{\sigma_2}$$

及

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (3.2.10)$$

根据边界条件,又可以写成

$$\sigma_1 E_1 \cos \theta_1 = \sigma_2 E_2 \cos \theta_2$$

和

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

两式相除得到

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (3.2.11)$$

由于两种导电媒质的电导率不同, θ_1 和 θ_2 必然不同。上式表明,分界面上电流线或电力线发生弯折。

综上所述,在一般情况下,当恒定电流通过电导率不同的两种导电媒质分界面时,电

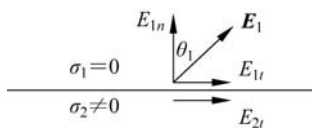


图 3.2.2 理想介质与导体分界面的电场

流和电场都要发生突变,这时分界面上必有电荷分布。如图 3.2.2 所示,理想介质和导体表面的边界条件,根据边界条件可知,电力线不再垂直导体表面,与法线方向的夹角为 θ_1 。

再比如在两种金属媒质的分界面上(通常认为金属的介电常数为 ϵ_0),根据边界条件

$$D_{1n} - D_{2n} = \epsilon_0 E_{1n} - \epsilon_0 E_{2n} = \rho_{sf}$$

所以得到

$$\rho_{sf} = \epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = \epsilon_0 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) E_{2n} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) E_{1n} \quad (3.2.12)$$

所以,只要 $\sigma_2 \neq \sigma_1$,分界面上必然有一层自由面电荷。如果导电媒质不均匀,即使在同一种导电媒质中也会有体电荷集聚。

3.2.3 恒定电流的电场与静电场的比拟

理想介质中无源区的静电场与导体内电源外的恒定电流的电场在许多方面有相似之处,具体情况如表 3.2.1 所示。

表 3.2.1 恒定电流的电场与静电场的比较

比较项目	导电媒质中的恒定电场	理想介质中的静电场
基本方程	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
本构关系	$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$
边界条件	$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ $\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{J}_{f1} - \mathbf{J}_{f2}) = 0$	$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ $\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0$
电位函数满足的方程及边界条件	$\nabla^2 \phi = 0$ $\phi_1 = \phi_2$ $\sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$	$\nabla^2 \phi = 0$ $\phi_1 = \phi_2$ $\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$
常用物理量之间的关系	$I = \oint_s \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s}$ $U = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ $G = \frac{I}{U}$	$Q = \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$ $U = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ $C = \frac{Q}{U}$
对偶量表	电场强度 $\mathbf{E}$ 电流密度 $\mathbf{J}_f$ 电导率 σ 电位函数 ϕ 电位差 U 电流强度 I 电导 G	电场强度 $\mathbf{E}$ 电位移矢量 $\mathbf{D}$ 介电常数 ϵ 电位函数 ϕ 电位差 U 电量 Q 电容 C



视频3-3

可以看出,两种场的基本方程是相似的,只要把 $\mathbf{J}_f$ 和 $\mathbf{D}$, σ 和 ϵ 互换,一个场的基本方程就变为另外一个场的基本方程。两种场的电位函数具有相同的定义,而且满足拉普拉斯方程。如果 $\mathbf{J}_f$ 和 $\mathbf{D}$ 分别在导电媒质和电介质中满足相同边界条件,根据唯一性定理,两个场的电位函数必有相同的解。也就是说,两种场的等位面分布相同,恒定电场的电流线与静电场的电位移线分布相同。这给我们一个启示,在相同的边界条件,如果已知一种场的解,只要对照表将相应的物理量置换一下,就可以得到另一种场的解。例如,当几个导体的几何形状很复杂难于用分析方法计算导体间的电位时,可以把导体放入电导率较小的电解液中,各导体分别接到交流电源以维持它们的电位,另用探针测出等电位的各点就可以得到一系列等位面,这种方法称为静电比拟法。

在许多实际问题中,金属电极之间,如电容器极板之间,同轴线的内导体与外导体之间常常需要填充不导电的材料作电绝缘。虽然绝缘材料的电导率远小于金属材料的电导率,但毕竟不等于 0。因此,在电极之间加上直流电压时,总会有微小的电流通过绝缘体。这种微弱的电流称为漏电流,漏电流与两极之间的电压之比称为漏电导,即

$$G = \frac{I}{U} \quad (3.2.13)$$

漏电导的倒数又称为漏电阻,又称为绝缘电阻。

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I} \quad (3.2.14)$$

计算绝缘电阻的方法有三种。

(1) 利用电阻的计算公式

$$R = \int_l \frac{dl}{\sigma s} \quad (3.2.15)$$

式中, dl 是沿电流方向上的长度元; s 是垂直于电流方向的面积,它可能是坐标变量的函数。

(2) 利用拉普拉斯求出电位 ϕ ,依次求出电场强度 $\mathbf{E}$,电流密度 $\mathbf{J}_f$,电流强度 I ,然后利用定义式求出绝缘电阻,其相应公式为

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \mathbf{E} = -\nabla \phi \\ \mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} \\ I = \iint_s \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} \\ R = \frac{U}{I} \end{cases} \quad (3.2.16)$$

当极板具有某种对称关系时,也可以假设一个电极 1 通过绝缘材料到电极 2 的电流 I ,然后依次利用下列公式求解:

$$\begin{cases} J_f = \frac{I}{s} \\ E = \frac{J_f}{\sigma} \\ U = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ R = \frac{U}{I} \end{cases} \quad (3.2.17)$$

(3) 利用在相同的边界条件下,静电场与恒定电场的相似性,可以得出两导体间的电容和电导之间的关系,从电容可以算出电导或从电导求出电容。由静电场理论可知,两导体之间充满介电常数 ϵ 的电介质时,导体间的电容为

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\oiint_s \rho_s ds}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\epsilon \oiint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (3.2.18)$$

式中, s 是紧靠并包围导体 1 的闭合曲面,线积分是从导体 1 沿着任意路径到导体 2 的积分。如果导体间充满漏电的媒质,并设电导率为 σ ,由电导的定义式得到

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oiint_s \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\sigma \oiint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

可见

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

所以,绝缘电阻为

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma C} \quad (3.2.19)$$

在工程应用中,常常需要设备与大地之间有良好的接地。为此,通常把称为接地器的金属物体(如金属球、金属板或金属网等)埋入大地,并将设备上需要接地的点通过导线和接地器连接。电流在大地中所遇到的电阻称为接地电阻,实际上是两个相隔很远的接地器之间土壤的电阻。由于接地器附近电流流通的截面最小,所以接地电阻主要集中在接地器附近。有时为了计算方便,同时又能保证可靠的精度,可以认为电流从接地器流向无限远处。

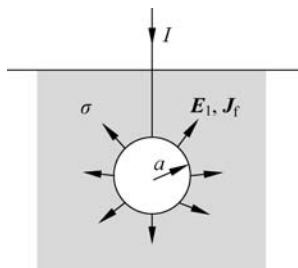


图 3.2.3 接地电阻示意图

如图 3.2.3 所示,深埋地下的半径为 a 的铜球,其接地电阻可用如下方法求出。由于铜球埋得较深,可以忽略地面的影响。铜的电导率远大于土壤的电导率,电流线基本垂直于铜球表面,因此电流密度矢量线具有球对称分布特征。土壤中任一点的电流密度为

$$\mathbf{J}_f = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

其电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}_f}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \mathbf{e}_r$$

假定电流流向无限远处,则电压为

$$U = \int_a^{+\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_a^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{I}{4\pi\sigma a}$$

所以接地电阻为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma a}$$

为了使得设备与地有良好的接地,要求接地电阻越小越好。从上式可以看出,增大接地器的表面积和接地器附近的土壤中渗入电导率高的物质(如盐),都可以减少接地电阻。

【例 3-4】 计算同轴电缆单位长度的绝缘电阻 R_1 。同轴电缆的内导体(芯线)半径是 a ,外导体(外壳)半径是 b ,内外导体之间充满一种介电常数为 ϵ 、电导率为 σ 的绝缘材料。

解: 假设同轴电缆的内外导体间加一直流电压 U ,由于绝缘材料的电导率 σ 不等于 0 而产生漏电流。考虑到轴对称性,漏电流沿径向,而且在绝缘材料中的同一个同轴圆柱面上的电流密度 $\mathbf{J}_f$ 的大小相等,所以

$$\mathbf{J}_f = \frac{I}{2\pi\rho \times 1} \mathbf{e}_\rho$$

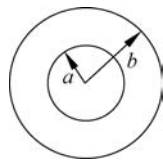


图 3.2.4 示意图

其中, I 是通过半径为 ρ 的单位长度同轴圆柱面的漏电流。由 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, 可得

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}_f}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma\rho} \mathbf{e}_\rho$$

内外导体之间的电压 U 为

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_\rho d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma} \ln \frac{b}{a}$$

所以,单位长度的绝缘电阻是

$$R_1 = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{b}{a}$$

【例 3-5】 一个有两层媒质 ϵ_1, ϵ_2 的平行板电容器,两层媒质都具有电导率,分别为 σ_1 和 σ_2 ,电容器极板面积为 S 。在外加电压 U 时,求通过电容器的(漏)电流和两层介质分界面上的自由电荷密度。

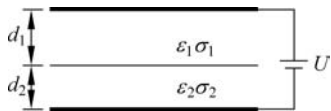


图 3.2.5 平行板电容器示意图

解: 设通过电容器的电流为 I ,则两种媒质中的电流密度为

$$J_1 = J_2 = \frac{I}{S} = J_f$$

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$$

所以,两种媒质中的电场为

$$E_1 = \frac{J_f}{\sigma_1}, \quad E_2 = \frac{J_f}{\sigma_2}$$

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2} \right) J_f = \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2} \frac{I}{S}$$

所以,

$$I = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} S U$$

$$J_f = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$$

利用 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, 得到

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}_f}{\sigma}$$

所以,

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} J_f, \quad D_2 = \epsilon_2 E_2 = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_f$$

而 $D_{1n} - D_{2n} = \rho_{sf}$, 所以,

$$\rho_{sf} = D_1 - D_2 = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) J_f = \frac{\sigma_2 \epsilon_1 - \sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$$

为什么在媒质分界面上存在电荷? 因为两种媒质均为有耗媒质(导电媒质), 在接通电源后的暂态过程中电荷聚集在媒质分界面上。

3.3 恒定电流的磁场

导体中有恒定电流通过时, 在导体内部和它的周围媒质中, 不仅有恒定电场, 同时还有不随时间变化的磁场, 称为恒定电流的磁场。恒定电流的磁场是与静电场性质完全不同的场, 但在分析方法上有许多共同之处, 本节首先给出恒定磁场满足的基本方程, 然后引出矢量磁位的概念, 并给出不同媒质分界面上的边界条件, 最后分析导体回路的电感和恒定磁场的储能问题。

3.3.1 恒定磁场的基本方程和边界条件

恒定磁场是时变电磁场的特例, 可以由麦克斯韦方程微分形式直接得到恒定磁场满足的基本方程, 即

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3.2)$$

对简单媒质, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 之间满足本构关系 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, μ 是媒质的磁导率, μ_r 是

媒质的相对磁导率,其中真空或空气的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。

依据高斯定理和斯托克斯定理,可以得到式(3.3.1)的积分形式

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (3.3.3)$$

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (3.3.4)$$

式(3.3.3)为安培环路定律的积分形式,式中积分路径 l 是围绕 S 面的围线,而 I 为通过 S 的总电流。路径 l 的走向和电流流动的方向服从右手螺旋法则,安培环路定律表明在自由空间中,磁场强度绕任何一个闭合路径的环量等于流过该路径所围面积的总电流。应用安培环路定理可求电流或磁力线具有特殊对称性(柱对称)分布的问题。式(3.3.4)为磁通连续性定律,表明不存在磁流源,磁通线总是自身闭合的;或者说穿过任何封闭面总的流出磁通量为 0。综合恒定磁场的基本方程可以得出:恒定磁场是有旋场,恒定电流是恒定磁场的旋涡源;恒定磁场是无源有旋场。

在两种不同媒质分界面上,场量 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别满足一定的边界条件。恒定磁场的边界条件可以由式(3.3.3)和式(3.3.4)的积分方程得到,也可以由时变电磁场一般形式的边界条件得到。

磁感应强度的边界条件可参照图 3.3.1 所示,在不同磁介质的分界面上作一个很小的圆柱形闭合面,它的顶面和底面分别在介质 1 和介质 2 中,且无限地靠近分界面,即柱面的高度 h 趋于 0。假如分界面的法线方向是由介质 2 指向介质 1, $\mathbf{e}_n$ 是法向单位矢量。将磁通连续性定律应用到此闭合曲面上,可以得到

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.3.5)$$

或

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (3.3.6)$$

上式说明,在分界面上磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的法向分量总是连续的。由于 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 当 $\mu_1 \neq \mu_2$ 时, $H_{1n} \neq H_{2n}$, 即磁场强度的法向分量是不连续的。

磁场强度的边界条件参照图 3.3.2 所示,紧贴分界两侧作一个很小的矩形闭合路径 l , 并设它所围面积 s 与穿过它的传导电流方向垂直。由于与传导电流的正交性,分界面两侧的 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 也是在 s 面上。矩形闭合路径的长度 Δl 很小,可以认为它上面的 $\mathbf{H}$ 是常量。宽度 h 趋于 0, $\mathbf{H}$ 在它上面的线积分可以忽略不计。依据安培环路定律的积分形式得到

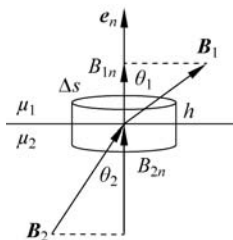


图 3.3.1 磁感应强度的边界条件

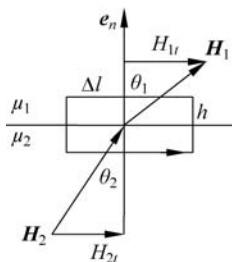


图 3.3.2 $\mathbf{H}$ 的边界条件

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{sf} \quad (3.3.7)$$

或

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_{sf} \quad (3.3.8)$$

上式说明,当分界面上有传导电流时,磁场强度 $\mathbf{H}$ 的切向分量是不连续的。在此条件下,磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的切向分量也不连续。

3.3.2 矢量磁位

根据磁通连续性定律, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 根据矢量恒等式, $\mathbf{B}$ 可以用一个矢量函数 $\mathbf{A}$ 的旋度来表示,即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.3.9)$$

$\mathbf{A}$ 称为矢量磁位。根据毕奥—萨伐尔定律,基于电流体密度的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{J}_f(\mathbf{r}') \right] d\tau' \quad (3.3.10)$$

将被积函数展开

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{J}_f(\mathbf{r}') = \nabla \times \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{J}_f(\mathbf{r}')$$

由于上式第二项为 0, 原因是场源区的旋度运算为 0, 所以得到

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \nabla \times \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \nabla \times \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \nabla \times \mathbf{A}$$

式中,体积分是对源点坐标积分,所以旋度运算符号可以提到积分符号之外。可以得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (3.3.11)$$

同理,可以得到面电流分布和细导线电流回路情况下的矢量磁位表示式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{s'} \frac{\mathbf{J}_{sf}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' \quad (3.3.12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.3.13)$$

根据亥姆霍兹定理,如果要确定一个 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 矢量场,不仅要知道该矢量的旋度,还要知道该矢量的散度,如果边界条件也给定,这个矢量场就可以唯一确定。对于矢量磁位 $\mathbf{A}$ 而言,其旋度为磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。下面我们来确定其散度,即

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau' \quad (3.3.14)$$

由于右端的体积分是对源点坐标进行积分,所以对场点运算的散度符号可以移入到积分号内。可以证明

$$\nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = -\nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

式中, ∇ 是场点运算; ∇' 是源点运算,其中 $\nabla' \cdot \mathbf{J}_f(\mathbf{r}') = 0$ 。可以得到

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau'$$

上式右端的微分和积分都是对源点坐标运算,应用高斯散度定理,可以得到

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \oiint_{s'} \frac{\mathbf{J}_{sf}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' \quad (3.3.15)$$

其中, s' 是限定电流分布区域的闭合曲面。对于恒定电流分布在有限区域情况下,将闭合曲面 s' 任意扩大,除了原有的 $\mathbf{J}_f(\mathbf{r}') \neq 0$ 的体积外,扩大区域的体积内没有电流分布,因而扩大区域的体积分为0,扩大区域后并不影响原有的体积分的结果。因而可以把积分区域扩大到无穷远处,在无穷远处的闭合面上,显然有

$$\mathbf{J}_{sf}(\mathbf{r}') = 0$$

因此可以得到

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.3.16)$$

引进矢量磁位 $\mathbf{A}$ 后,计算磁感应强度 $\mathbf{B}$ 更为简单了。同样,在计算磁通量时,可以得到

$$\Phi = \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_s \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.3.17)$$

上式用到了斯托克斯定理, l 表示面积 s 边缘的闭合曲线。因为磁通量的单位是韦伯,所以矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的单位是 Wb/m。在计算磁通量时,计算矢量磁位的环量往往比计算 $\mathbf{B}$ 的面积分更方便。

由矢量磁位满足的关系式,可以推导出在空间任意一点上满足的微分方程。根据式

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla^2 \left[\frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \right] = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \nabla^2 \left[\frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \mathbf{J}_f(\mathbf{r}') \nabla^2 \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau' \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

式中, $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 分别是场点和源点的位置矢径; $\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')$ 与场点坐标无关。被积函数的二阶微分运算有两种情况:

(1) 当场点在电流分布区域 τ' 之外,这时 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \neq 0$, 得到

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = 0$$

可以得到

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.3.19)$$

称为矢量磁位 $\mathbf{A}$ 满足拉普拉斯方程。

(2) 当场点在电流分布区域 τ' 之内,在积分过程中,总会有场点与源点重合的情况,即 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$, 则被积函数趋于无穷大,使得积分结果无意义。这时可以利用 δ 函数计算积分的数值。

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

所以有

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \iiint_{\tau'} \mathbf{J}_f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau'$$

可以得到

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{J}_f(\mathbf{r}) \quad (3.3.20)$$

该式称为矢量磁位的泊松方程。在直角坐标系中,该方程可以分解为三个标量方程,即

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu J_{fx} \\ \nabla^2 A_y = -\mu J_{fy} \\ \nabla^2 A_z = -\mu J_{fz} \end{cases} \quad (3.3.21)$$

相应的解为

$$\begin{cases} A_x = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{J_{fx}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \\ A_y = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{J_{fy}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \\ A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{J_{fz}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \end{cases} \quad (3.3.22)$$

从上述方程可以看出,积分方程的被积函数都是标量,求解矢量磁位变得更简单。

3.3.3 磁偶极子

磁偶极子是类比电偶极子而建立的物理模型,具有等值异号的两个点磁荷构成的系统称为磁偶极子,但由于至今没有发现单独存在的磁单极子,因此磁偶极子的物理模型不是两个磁单极子,而是用一段封闭电流回路来等效。磁偶极子模型能够很好地描述小尺度闭合电流线圈产生的磁场分布。下面利用矢量磁位来求解磁偶极子产生的磁感应强度。如图 3.3.3(a)所示,磁偶极子是一个中心位于球坐标系,原点半径为 a 且其上通有电流 I 的圆形线圈。设圆形电流线圈位于 xOy 平面上,它的中心与坐标原点重合,采用球坐标系计算远离线圈的任一点的矢量磁位,然后计算出磁感应强度。由于线圈的对称性,矢量磁位 $\mathbf{A}$ 与坐标 φ 无关,因此可以把场点 P 取在 $\varphi=0$ 的平面内,即 xOz 平面内。由

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}'}{R} \quad (3.3.23)$$

圆形线圈上的一个电流元 $I d\mathbf{l}'$ 在场点 P 产生的矢量磁位为

$$d\mathbf{A}' = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}'}{R} \quad (3.3.24)$$

在 $\varphi=0$ 平面的两侧为 φ 和 $-\varphi$ 位置处,取两个电流元 $I d\mathbf{l}'$ 和 $I d\mathbf{l}''$,并令 $d\mathbf{l}' = d\mathbf{l}'' = d\mathbf{l}$ 。它们在 P 点产生的矢量磁位 $d\mathbf{A}'$ 和 $d\mathbf{A}''$ 分别与 $d\mathbf{l}'$ 和 $d\mathbf{l}''$ 平行,如图 3.3.3(b)所示。

$$\begin{aligned} d\mathbf{A}' &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}'}{R} = \frac{\mu d\mathbf{l}}{4\pi R} (-\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi) \\ d\mathbf{A}'' &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}''}{R} = \frac{\mu d\mathbf{l}}{4\pi R} (\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi) \end{aligned}$$

这一对电流元在 P 点产生的矢量磁位为

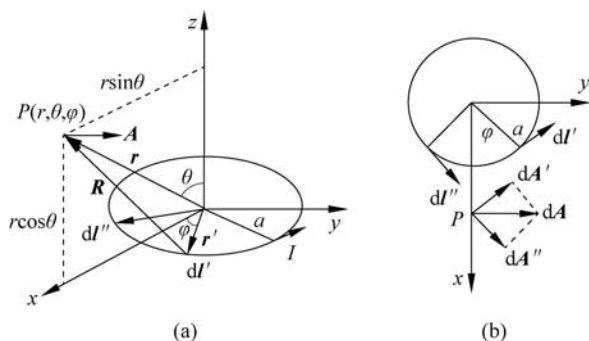


图 3.3.3 计算磁偶极子的场

$$d\mathbf{A}' + d\mathbf{A}'' = \mathbf{e}_y \frac{2\mu dl}{4\pi R} \cos\varphi$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos\varphi)^{1/2}$$

对于远离小圆环的区域,有 $r \gg a$, 所以有

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{2a}{r}\sin\theta\cos\varphi \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi \right)$$

所以圆形线圈在 P 点产生的矢量磁位是

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_y \frac{\mu I a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R} \cos\varphi d\varphi \\ &= \mathbf{e}_y \frac{\mu I a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi \right) \cos\varphi d\varphi \\ &= \mathbf{e}_y \frac{\mu I S}{4\pi r^2} \sin\theta \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

式中, $S = \pi a^2$ 为圆形线圈的面积。根据直角坐标与圆柱坐标单位矢量的变换关系,有

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\rho \sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos\varphi$$

当 $\varphi = 0$ 时,有 $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\varphi$, 所以式(3.3.25)可以变为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^2} \sin\theta = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^2} \sin\theta \quad (3.3.26)$$

在球坐标系下,可以得到磁感应强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \mathbf{e}_r \frac{2\mu_0 I S \cos\theta}{4\pi r^3} + \mathbf{e}_\theta \frac{\mu_0 I S \sin\theta}{4\pi r^3} \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

仿照电偶极矩,如图 3.3.4 所示,取一磁偶极矩,令

$$\mathbf{p}_m = IS \quad (3.3.28)$$

磁感应强度可以表示为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \frac{2\mu_0 \mathbf{p}_m \cos\theta}{4\pi r^3} + \mathbf{e}_\theta \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m \sin\theta}{4\pi r^3}$$

对于电偶极子,其电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{2ql \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \mathbf{e}_\theta \frac{ql \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

如图 3.3.5 所示,可以看出远离电偶极子和磁偶极子的地方,由于场解的形式非常相似,电力线和磁感应线也是相似的。

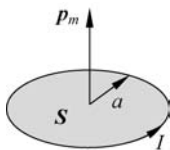


图 3.3.4 磁偶极矩

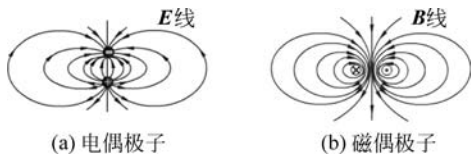


图 3.3.5 电偶极子与磁偶极子的远区场分布

3.3.4 电感

当一个导线回路中电流随时间变化时,要在自己回路中产生感应电动势,这种现象称为自感现象。如果空间有两个或两个以上的导线回路,当其中一个回路中的电流随时间变化时,将在其他的回路中产生感应电动势,称为互感现象。自感和互感现象都是电磁感应现象,遵循法拉第电磁感应定律。正如在静电场中,把导体上所带的电荷量与导体间电位差的比值称为电容 C 。在恒定电流电场中,又把电压与电流的比值作为电阻 R 的定义。那么,在恒定磁场中,电感定义为磁通量(磁链)与电流的比值,即

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (3.3.29)$$

式中, Ψ 是磁链(多匝线圈); I 是导线中的电流。下面从矢量磁位 $\mathbf{A}$ 导出自感 L 和互感 M 的一般表达式,并说明它们与导体系统的几何参数以及周围媒质参数的关系。

1. 自感

在各向同性的线性磁介质中,如果磁场是由某一导线回路中的电流 I 产生,则根据前面章节内容,得到该导体线圈产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.3.30)$$

穿过导线线圈回路所围面积的磁通量为

$$\Psi_L = \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.3.31)$$

或者计算导体线圈产生的矢量磁位

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.3.32)$$

其相对应的磁通量为

$$\Psi_L = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.3.33)$$

由上述关系式可以看出, Ψ_L 与电流强度 I 呈正比, 即

$$L = \frac{\Psi_L}{I} \quad (3.3.34)$$

式中, Ψ_L 称为自感磁链; 比例系数 L 称为自感或自感系数。如果载流导线非常细, 则 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 趋于 0, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 都趋于无穷大, 因而穿过回路的磁链和自感 L 也趋于无穷大, 显然不符合实际。因此, 在推导电感时, 需要考虑导线的线径影响。

对于导线内部, 由于存在着磁场, 因而穿过导线内部的磁链称为内磁链 Ψ_i , 由内磁链计算出的自感称为内自感 L_i 。注意在计算内磁链时, 认为电流均匀通过导线的横截面, 其中任意一条磁感应线只交链导线电流 I 的一部分, 即 I' 。内自感可以表示为

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I'} \quad (3.3.35)$$

对于导线外部的磁链称为外磁链 Ψ_o , 由它计算的自感称为外自感 L_o 。如图 3.3.6 所示, 在计算外磁链的过程中, 为了避免它变为无穷大, 假设电流集中在导线的几何轴线上, 而把导线的内侧边界线看作回路的边界。因而外磁链 Ψ_o 等于 $\mathbf{B}$ 在所围面积 s 上的面积分, 或为矢量磁位 $\mathbf{A}$ 沿 l 的闭合路径积分, 即导线轴线 l_0 上的电流 I 在 l 上任意一点产生的矢量磁位为

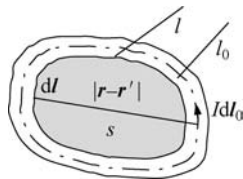


图 3.3.6 外自感的计算

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_0} \frac{d\mathbf{l}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

相应的外磁链为

$$\Psi_o = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \oint_{l_0} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_0 \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

所以外自感为

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \oint_l \oint_{l_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_0 \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.3.36)$$

这就是计算单匝线圈外自感的一般公式。如果多匝线圈是密绕的, 则外自感还要乘以匝数。该式称为计算外自感的诺伊曼公式。从式(3.3.36)可以看出, 该外自感仅与线圈的几何形状、尺寸及周围磁介质有关, 与线圈中的电流无关。

对于粗导线回路而言, 其自感应为内自感和外自感之和, 即

$$L = L_i + L_o \quad (3.3.37)$$

上式在实际的电路中, 既可以计算实际线圈的电感参量, 也易于理解电感的物理意义。

2. 互感

如图 3.3.7 所示, 有两个彼此靠近的导线回路, 如果第一个回路中有电流 I_1 通过时, 则这一电流所产生的磁感应线, 除了要穿过本回路外, 还将有一部分与第二个回路相交链。由回路电流 I_1 所产生的和回路 2 相交链的磁链, 称为互感磁链 Ψ_{12} 。显然, Ψ_{12}

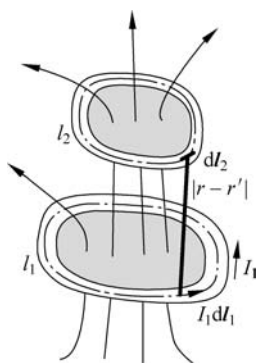


图 3.3.7 两个电流回路之间的电感

与电流 I_1 成正比,定义互感系数 M_{12} ,即

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} \quad (3.3.38)$$

同理,回路 2 对回路 1 的互感 M_{21} ,即

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} \quad (3.3.39)$$

假设导线和周围磁介质的磁导率都是 μ_0 ,第一个回路中的电流 I_1 在第二个回路 dl_2 所在点的矢量磁位为

$$\mathbf{A}_{12} = \oint_{l_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.3.40)$$

则穿过第二个回路的互感磁链是

$$\Psi_{12} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_{12} \cdot d\mathbf{l}_2 = \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.3.41)$$

所以回路 1 对回路 2 的互感为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.3.42)$$

同理,可以求得回路 2 对回路 1 的互感为

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.3.43)$$

比较上面两式可以看出

$$M_{21} = M_{12} \quad (3.3.44)$$

上两式是计算互感的诺埃曼公式,而且互感的大小只与两导线回路的几何形状、尺寸、相对位置及周围磁介质的特性有关,而与回路的电流无关。

3.3.5 磁场的能量与能量密度

电流回路在恒定磁场中要受到作用力而产生运动,说明磁场中存储着能量。如果这个磁场是由另外的一个或几个恒定电流回路所产生,那么磁场的能量就一定是在这些恒定电流的建立过程中,由外电源提供。由于我们研究的是恒定电流磁场的能量,所以它只与各回路电流的终值有关,而与电流的建立过程无关。在理论上可以任意选取一个电流回路建立的过程来计算恒定电流磁场的能量,此过程省略。两个恒定电流回路所具有的磁能为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \\ &= \frac{1}{2} I_1 (L_1 I_1 + M I_2) + \frac{1}{2} I_2 (L_2 I_2 + M I_1) \end{aligned}$$



视频3-4

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} I_1 (\psi_{11} + \psi_{21}) + \frac{1}{2} I_2 (\psi_{22} + \psi_{12}) \\
&= \frac{1}{2} I_1 \psi_1 + \frac{1}{2} I_2 \psi_2
\end{aligned} \quad (3.3.45)$$

式中, ψ_1 和 ψ_2 分别是穿过回路 l_1 和回路 l_2 的总磁链(自感磁链与互感磁链之和); L_1 和 L_2 是两个线圈的自感; M 是两个线圈的互感; I_1 和 I_2 是两个线圈的电流。如果有 N 个电流回路, 则这个系统的总能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \psi_k \quad (3.3.46)$$

只要空间有磁场存在, 就有磁能存在。如何表征磁场能量在空间的分布? 我们必须寻找磁能与磁场 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 的关系。

在 N 个电流回路的系统中, 穿过第 k 个电流回路的总磁链可以表示为

$$\psi_k = \iint_{s_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{l_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.3.47)$$

式中, l_k 是第 k 个回路的周长; s_k 是 l_k 所围面积; $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 是所有电流回路(包括第 k 个回路)所产生的。代入磁能表示式, 得到

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \oint_{l_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \oint_{l_k} I_k \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.3.48)$$

为了使磁能的表示式具有普遍意义, 设系统的电流分布在一个有限的体积 τ' 内, 可以体电流元代 $\mathbf{J}_f d\tau'$ 替线电流元 $I_k d\mathbf{l}$, 并用体积分代替线积分求和, 得到

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_f d\tau' = \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\tau' \quad (3.3.49)$$

上式可以将体积分区域扩展到整个空间(在 τ' 体积之外的区域, $\mathbf{J}_f = 0$), 所以上式可以变为

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\tau \quad (3.3.50)$$

应用矢量恒等式

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

考虑到 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 得到

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\tau \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau \\
&= \frac{1}{2} \oint_s (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau
\end{aligned} \quad (3.3.51)$$

上式右边第一项的面积分在包围面趋于无穷远处时为 0, 所以得到

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau \quad (3.3.52)$$

上式积分范围为有磁场的全部空间, 也就是说有磁场的地方, 就有磁能存在。由上式可

以得到磁能密度

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (3.3.53)$$

在线性各向同性的磁介质中, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 所以磁能密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (3.3.54)$$

【例 3-6】 如图 3.3.8 所示, 空气填充的同轴传输线有实心内导体(其半径为 a)和很薄的外导体(其内半径为 b)。求单位长度传输线的电感。

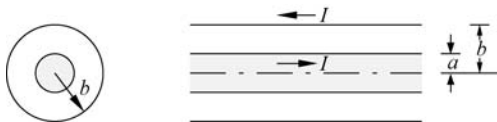


图 3.3.8 同轴传输线的两视图

解: 假设电流 I 在内导体流过, 通过外导体以相反方向流回来。建立以轴线为 z 轴的极坐标。假设电流 I 在整个内导体截面上是均匀分布的。由于圆柱的轴对称性, $\mathbf{B}$ 只有 ϕ 分量, 但在两个区域中有不同的表达式。即求解: (1) 在内导体内部和 (2) 在内导体和外导体之间的电感。

(1) 在内导体内部 ($0 \leq \rho \leq a$), 由安培环路定律, 则有

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 \rho I}{2\pi a}$$

(2) 在内外导体之间 ($a < \rho \leq b$), 则有

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

现在, 考虑在内导体半径 $\rho \sim \rho + d\rho$ 之间的圆环与流过单位长度圆环柱的电流相交链的磁链, 进行面积分得到

$$\begin{aligned} d\Phi_m &= \int_\rho^b B_\phi d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \int_\rho^a \rho d\rho + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} (a^2 - \rho^2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

但是, 圆环柱中的电流只是总电流 I 的一部分 (即 $\frac{2\pi\rho d\rho}{\pi a^2} = \frac{2\rho d\rho}{a^2}$), 因此这个圆环的磁链是

$$d\Psi' = \frac{2\rho d\rho}{a^2} d\Phi_m$$

单位长度的磁链数是

$$\Psi = \int_{\rho=0}^{\rho=a} d\Psi' = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \left[\frac{1}{2a^2} \int_0^a (a^2 - \rho^2) \rho d\rho + \left(\ln \frac{b}{a} \right) \int_0^a \rho d\rho \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

因此,单位长度同轴传输线的电感是

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ (H/m)}$$

其中,第一项 $\mu_0/8\pi$ 来自实心内导体内部的磁链,称为单位长度内导体的内自感;第二项来自内、外导体之间的磁链,称为单位长度同轴线的外电感。

3.4 静态场的边值问题

自由空间的电磁场完全由电荷、电流两大场源决定,因此其问题处理相对简单。但是,在电磁工程实践中,电磁元件、部件、设备、系统是有边界的,并且随着用户的需要和技术的发展,可以预见未来这些体积、边界会日益缩小。有限空间中的电磁场与自由空间不同,除了空间内的电荷、电流源影响电磁场的时空分布特性以外,空间中的媒质和边界也是影响电磁场时空特性。因此,广义地讲,所有电磁工程问题都是电磁场边值问题,当今电磁技术研究的热点之一就是寻找新的媒质、结构、边界,实现更优的电磁特性。

本节主要讨论静电场的边值问题,根据不同形状的导体边界条件,采用不同的数学方法,求解计算电位函数 ϕ 、电场强度 $\mathbf{E}$ 和(或)表面电荷分布。依据矢量场的唯一性定理,不同方法求得的静电场解应该是等效的。

3.4.1 静态场问题的类型和解法

对于静态场问题,其类型一般可以分为两大类:分布型问题和边值型问题。

1. 分布型问题

分布型问题是指已知电荷、电流分布,求解电磁场场量,又可以分为正向问题和反向问题。正向问题是指已知电荷、电流分布,求 $\mathbf{E}$ 、 ϕ 等场量。可以用前面学过的方法,利用标量和矢量积分直接求解。例如,求解带电体的电场强度:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(r') \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (3.4.1)$$

反向问题是指已知 $\mathbf{E}$ 、 ϕ 等场量,求解场源电荷、电流分布,通常可以利用场的基本方程和边界条件来求解。例如,利用电位函数满足的泊松方程,求解体电荷密度

$$\rho_f = -\epsilon \nabla^2 \phi \quad (3.4.2)$$

利用边界条件求解分界面上的电荷分布,如理想导体表面的电荷分布

$$\rho_{sf} = D_n = \epsilon E_n = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (3.4.3)$$

2. 边值型问题

边值型问题是指已知给定区域的边界条件,求该区域中的电磁场场量和位函数。归结为求解满足一定边界条件下的泊松方程或拉普拉斯方程。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (3.4.4)$$

或

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.4.5)$$

根据已知边界条件的不同,边值问题又分为三种类型:

第一类边值问题(狄里赫利问题),已知边界上各点的 ϕ 值。

第二类边值问题(牛曼(诺埃曼)问题),已知边界上各点的 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 值。对于导体表面实际上是已知导体表面的电荷面密度 $\rho_{sf} = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}$ 。

第三类边值问题(混合型问题):已知部分边界表面的 ϕ 值,其他边界表面的 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 值。

3. 静态场边值型问题的解法

静态场边值型问题的解法种类很多,一般可以分为解析法和数值法两大类。

解析法是通过数学推导,得到一个解的函数表达式。常用方法有镜像法、分离变量法、复变函数法、格林函数法等。

数值法是通过建立数学模型,用计算机求解,得到研究区域中离散点的场强或位函数值。常用的数值法有时域有限差分法(FDTD)、有限元法(FEM)、矩量法(MoM)等,由于引入计算机仿真,数值方法能求解许多解析法解决不了的复杂工程问题。

3.4.2 唯一性定理

不同方法得到的电磁场量是否唯一? 矢量场分析中的唯一性定理回答了这个问题。在静电场中,亥姆霍兹定理可如下描述:满足同一边界条件的泊松方程(或拉普拉斯方程)的解是唯一的。这个定理的应用意义是,无论采取何种方法,满足相同边界条件的静电场的解是等效的。因而唯一性定理可以表述为,满足给定边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解是唯一的。

既然泊松方程或拉普拉斯方程在给定边界条件下的解是唯一的,那么,我们任意假设的一个解,只要它既能满足泊松方程或拉普拉斯方程,同时又能满足给定的边界条件,就可以说得出的解是所要求问题的解。唯一性定理的重要意义:①提供求边值问题正确性的衡量标准;②提供求边值问题唯一性的理论依据;③提供建立其他原理的理论基础。

有一类静电问题,如果直接求解拉普拉斯方程的话,看来非常困难;但是这些问题的



视频3-5

边界条件,可以用适当的镜像(等效)电荷建立起来,从而直接求出其电位函数。这种灵活地采用适当的镜像电荷代替原来边界条件来求解拉普拉斯方程的方法称为镜像法。镜像法简单方便,更容易写出所要求的解,但是它只能应用于一些特殊边界的情形。

3.4.3 镜像法

镜像法的依据是唯一性定理。由于镜像电荷的引入原则是满足原有的边界条件,而引入镜像电荷后,镜像电荷处在所研究区域之外,在所研究区域内泊松方程或拉普拉斯方程的形式不变,因此所求问题的解没有任何变化。

考察一个位于无限大的接地导体平面(零电位)上方的区域,距离平面 d 处的正点电荷 q 的情况,如图 3.4.1(a)所示。要求出导体平面之上($y>0$)区域内每一点的电位函数,在直角坐标中解拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.4.6)$$

这个方程用于除了点电荷所在位置之外的整个 $y>0$ 区域。求解 $\phi(x, y, z)$ 应满足的条件有:

(1) 地平面的所有点上,电位为 0,即

$$\phi(x, 0, z) = 0$$

(2) 在 q 所在位置,其电位满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\epsilon} \delta(0, d, 0)$$

构成一个满足所有这些条件的解 ϕ ,看来很困难。镜像法则可以简化这些问题。

1. 平面导体与点电荷

对于图 3.4.1 中的问题,有一正的点电荷 q ,置于零电位的无限大平面导体上方距离为 d 处。假设将导体用在 $y=-d$ 处的镜像电荷 $-q$ 代替,则在 $y>0$ 区域内任一观察点 $P(x, y, z)$ 的电位函数可以为

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{q}{[x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{-q}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{1/2}} \right\} \quad (3.4.7)$$

用直接代入法,很容易验证 ϕ 满足拉普拉斯方程,显然,它也满足我们前面所列的两个条件,依据唯一性定理,它是唯一的解。

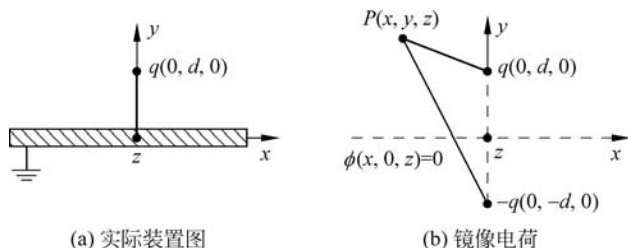


图 3.4.1 点电荷和接地平面导体系统

导体表面的感应电荷密度为

$$\rho_{sf} = -\epsilon \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{y=0} = -\frac{qd}{2\pi(x^2 + d^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.4.8)$$

为了计算导体平面上的总电量,我们改为极坐标,令 $\rho^2 = x^2 + z^2$, $ds = \rho d\rho d\varphi$, 则对式(3.4.8)面积分

$$q' = \iint_s \rho_{sf} ds = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{qd}{(\rho^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = -q \quad (3.4.9)$$

它恰好与镜像电荷电量相等。用镜像法求解这个静电问题极为简单;但必须强调的是:镜像电荷位于所求场区域的外部,并且在 $y < 0$ 区域的 ϕ 和 E 都为 0。综上所述,位于无穷大导体表面上方的线电荷 ρ_l 的电场,也可以根据它的镜像 $-\rho_l$ 求出。

2. 相交无限大导体平面与点电荷

上面讨论的是单个无限大导体平面附近点电荷的镜像问题,每一个点电荷在与之对应的位置上有一个镜像点电荷。下面我们要讨论镜面是两个相交的半无限大接地导体平面的镜像电荷情况,如图 3.4.2 所示。确定镜像电荷的关键仍然是必须满足原有的边界条件以及不破坏原来满足的拉普拉斯方程或泊松方程。

有两个相交成直角的接地导体平面,在 P_1 点有点电荷 q ,它与两导体平面的距离分别为 h_1 、 h_2 ,计算第一象限内的电位和电场。

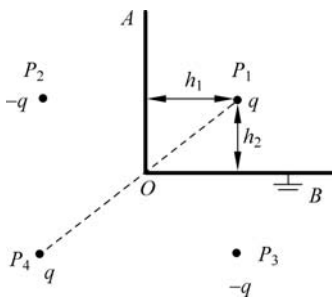


图 3.4.2 相交无限大导体平面与点电荷

这个问题用镜像法来求解时,在 P_2 点放一个镜像电荷 $-q$,可以保证 OA 面上电位为 0,但 OB 面上的电位不为 0;在 P_3 点放一个镜像电荷 $-q$,可以保证 OB 面上电位为 0,但 OA 面上的电位不为 0。如果在 P_2 和 P_3 点上放上镜像电荷 $-q$,而在与 P_1 关于交点 O 的对称位置 P_4 上放一个镜像电荷 q ,就能保证 OA 和 OB 面上的电位均为 0。所以 P_1 点的点电荷 q 有三个镜像电荷,而 P_4 点上的电荷 q 可以看成 P_2 和 P_3 点上镜像电荷 $-q$ 的镜像,称为双重镜像。

将上面寻找镜像电荷的方法,推广到两导体平面相交成 α 角的情况。同样可以利用上面的方法,轮流找出镜像电荷以及镜像电荷的镜像,直到最后的镜像电荷与原电荷重合为止(多重镜像)。但是并不是任意情况下,最后的镜像电荷都能与原有电荷重合。我们从几何上分析,这些镜像电荷其实是位于一个圆上,圆心位于边界的交点,半径是从此交点到原有电荷的距离。要使最后的镜像电荷与原有电荷重合,只有满足: $\alpha = 180/n$ (n 为整数),镜像电荷的总数为 $(2n-1)$ 个。当 n 不为整数时,用这种方法得到的镜像电荷将有无穷个,而且镜像电荷还将跑到 α 角以内,从而改变了原有的电荷分布。所以当 n 不为整数时,不能用镜像法求解。

3. 接地导体球与点电荷

下面我们再来利用镜像法求解接地导体球与点电荷构成系统的边值问题。设接地导体球半径为 a , 在球外与球心相距 d_1 的 P_1 点有一个点电荷 q , 极性为正(图 3.4.3), 求球外的电位函数。

由于点电荷电场的作用, 在导体球面上要产生感应电荷, 因导体球接地, 导体球面上只有负的感应电荷, 球外任一点的场等于点电荷 q 与球面上感应电荷的场的叠加。采用镜像法的关键是找出镜像电荷的位置、数目、极性、大小。我们如果用一个镜像电荷来等效导体球面上感应电荷对场的贡献, 问题是这个镜像电荷应该放在哪里、电量为多少?

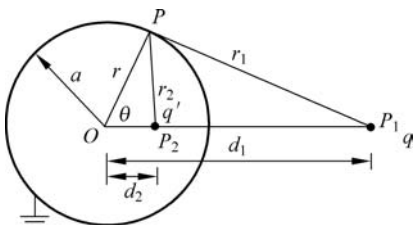


图 3.4.3 接地导体球与点电荷

镜面是球面, 镜像电荷必须在我们研究区域之外, 即导体球内。由于球的对称性, 镜像电荷必须在球心与原有点电荷 q 所在点的连线上。导体球面上任一点的电位

$$\phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon r_2} = 0 \quad (3.4.10)$$

由余弦定理

$$\begin{cases} r_1^2 = a^2 + d_1^2 - 2ad_1 \cos\theta \\ r_2^2 = a^2 + d_2^2 - 2ad_2 \cos\theta \end{cases}$$

代入式(3.4.10), 经整理得

$$[q^2(d_2^2 + a^2) - q'^2(d_1^2 + a^2)] + 2a \cos\theta (q'^2 d_1 - q^2 d_2) = 0$$

上式对所有 θ 角都成立

$$\begin{cases} q^2(d_2^2 + a^2) = q'^2(d_1^2 + a^2) \\ q'^2 d_1 = q^2 d_2 \end{cases}$$

解此方程组, 得到两组解

$$\begin{cases} d_2 = d_1, & q' = -q \\ d_2 = \frac{a^2}{d_1}, & q' = -\frac{a}{d_1}q \end{cases} \quad (3.4.11)$$

显然, 第一组解中镜像电荷与原有点电荷重合, 无意义; 第二组解, 由于 $d_1 > a$, 所以 $d_2 < a$, 即镜像电荷落在接地的导体球内, 正是我们所需要的。球外任一点的电位为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{d_1 r_2} \right) \quad (3.4.12)$$

r_1 、 r_2 分别为原有点电荷和镜像电荷到场点的距离

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{d_1^2 + r^2 - 2d_1 r \cos\theta} \\ r_2 = \sqrt{\left(\frac{a^2}{d_1}\right)^2 + r^2 - 2r\left(\frac{a^2}{d_1}\right) \cos\theta} \end{cases}$$

导体球表面的面电荷密度

$$\rho_{sf} = -\epsilon \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{-q(d_1^2 - a^2)}{4\pi a(d_1^2 + a^2 - 2d_1 a \cos\theta)^{3/2}} \quad (3.4.13)$$

导体球面上总的感应电荷

$$q' = \iint_s \rho_{sf} ds = -\frac{a}{d_1} q \quad (3.4.14)$$

3.4.4 分离变量法

分离变量法也是求解边值问题的一种常用解法。分离变量法在三种常用坐标系中,求解拉普拉斯方程的具体步骤是:

(1) 根据问题中导体与介质分界面的形状,选择适当的坐标系。

(2) 把待求的电位函数表示为三个未知函数的乘积,其中每一个未知函数仅是一个坐标变量的函数。然后将三个未知函数的乘积代入拉普拉斯方程,并将其变为三个常微分方程。

(3) 用给定的边值(包括场域内不同媒质分界面上的边界条件)确定解的待定常数。唯一性定理保证了用这种方法求出来的解是唯一的。

实际中,我们经常用到平行平面场,这时电位函数仅与平面上的两个坐标有关。研究这种二维场有它的实际意义,而且使用分离变量法解决二维问题简单明了。下面举例说明分离变量法在直角坐标系中求解二维问题的具体步骤。

设电位分布只是 x, y 的函数,而沿着 Z 方向没有变化,则拉普拉斯方程是

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.4.15)$$

把它的解写成

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.4.16)$$

其中, $X(x), Y(y)$ 分别是 x, y 的函数,将上式代入拉普拉斯方程得到

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (3.4.17)$$

如果 $X(x), Y(y)$ 不等于 0, 可以用 $X(x)Y(y)$ 除上式各项, 并得到

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (3.4.18)$$

上式的第二项与 x 无关,而在 x, y 取任意值时,上式两项之和又恒等于 0。所以上式第一项必定与 x 无关,而是等于一个常数,即满足

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2 \end{cases} \quad (3.4.19)$$

并且满足

$$C_1 + C_2 = 0 \quad (3.4.20)$$

我们取 $C_1 = -K_n^2, C_2 = K_n^2$, 得到

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + K_n^2 X = 0 \quad (3.4.21)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - K_n^2 Y = 0 \quad (3.4.22)$$

这样,通过分离变量,把二维拉普拉斯方程变成两个常微分方程。 K_n 称为分离常数,取不同值时,解有不同形式。

当 $K_n = 0$ 时,两个常微分方程的通解为

$$X_n = A_0 + B_0 x \quad (3.4.23)$$

和

$$Y_n = C_0 + D_0 y \quad (3.4.24)$$

当 $K_n \neq 0$ 时,两个常微分方程的通解为

$$X_n = A_n \cos K_n x + B_n \sin K_n x \quad (3.4.25)$$

和

$$Y_n = C_n \operatorname{ch} K_n y + D_n \operatorname{sh} K_n y \quad (3.4.26)$$

由于拉普拉斯方程是线性的, K_n 取所有可能值的解的线性组合也是它的解,所以得到电位函数的通解为

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= X(x)Y(y) \\ &= (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos K_n x + B_n \sin K_n x) \cdot \\ &\quad (C_n \operatorname{ch} K_n y + D_n \operatorname{sh} K_n y) \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

如果取 $C_1 = K_n^2, C_2 = -K_n^2$, 则可以得到另外一个通解为

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= X(x)Y(y) \\ &= (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} K_n y + B_n \operatorname{sh} K_n y) \cdot \\ &\quad (C_n \cos K_n x + D_n \sin K_n x) \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

到底如何选取分离常数,要由给定边值的具体情况确定。需要注意的是,双曲函数 $\operatorname{sh} x$ 在 x 轴上只有一个零点,而 $\operatorname{ch} x$ 在 x 轴上没有零点。

【例 3-7】 有一很长的金属导体槽如图 3.4.4 所示,它的横截面如图所示,其电位为 0,导体槽上有金属盖板但与导体槽有非常小的间隙以保证与导体槽绝缘,盖板上的电位

为 U_0 , 试计算导体槽内的电位分布。

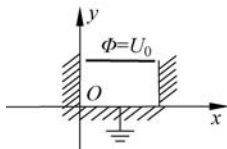


图 3.4.4 金属导体槽

解: 因为导体槽很长, 边界形状又是直线, 所以槽内的电位函数满足二维的直角坐标系中拉普拉斯方程。电位函数满足的边界条件为

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad \Phi=0 \quad ①$$

$$x=a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad \Phi=0 \quad ②$$

$$y=0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad \Phi=0 \quad ③$$

$$y=b, \quad 0 < x < a, \quad \Phi=U_0 \quad ④$$

该边值问题是一个狄利赫里边值问题。因为槽内的电位函数 $\Phi(x, y)$ 在 $x=0, a$ 处取零值, 所以其通解为

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$= (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos K_n x + B_n \sin K_n x) \cdot (C_n \operatorname{ch} K_n y + D_n \operatorname{sh} K_n y)$$

将边界条件①代入上式得到

$$0 = A_0(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (C_n \operatorname{ch} K_n y + D_n \operatorname{sh} K_n y)$$

为了保证上式在 $0 \leq y \leq b$ 内任意取值都成立, 必须满足

$$A_0 = 0, \quad A_n = 0$$

所以电位函数为

$$\Phi(x, y) = B_0 x(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin K_n x \cdot (C_n \operatorname{ch} K_n y + D_n \operatorname{sh} K_n y)$$

将边界条件②代入上式得到

$$0 = B_0 a(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin K_n a \cdot (C_n \operatorname{ch} K_n y + D_n \operatorname{sh} K_n y)$$

为了保证上式在 $0 \leq y \leq b$ 内任意取值都成立, 必须满足

$$B_0 = 0, \quad B_n \sin K_n a = 0$$

但 $B_n \neq 0$, 否则整个通解为零解, 无意义。所以只有

$$\sin K_n a = 0$$

由此得到

$$K_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n=1, 2, \dots)$$

此时电位函数为

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right)$$

将边界条件③代入上式, 得到

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) C_n$$

为了保证上式在 $0 \leq x \leq a$ 内任意取值都成立, 且 $B_n \neq 0$, 得到

$$C_n = 0$$

将上式代入电位函数得到

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

式中, 利用边界条件④可以确定待定常数 E_n , 即

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)$$

我们采用傅里叶变化的方法, 上式两边都乘以 $\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$, 其中 m 是整数。然后积分

$$\int_0^a U_0 \sin \frac{m\pi}{a}x \, dx = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \, dx$$

上式左端得到

$$\int_0^a U_0 \sin \frac{m\pi}{a}x \, dx = \begin{cases} \frac{2aU_0}{m\pi}, & m \text{ 为奇数} \\ 0, & m \text{ 为偶数} \end{cases}$$

右端为

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \left(E_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}\right) \frac{a}{2}, & n = m \end{cases}$$

可以得到 E_n , 即

$$E_n = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

所以, 金属槽内的电位分布为

$$\Phi(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n \text{ 为奇数}$$

习题

3-1 一块很薄的无限大带电平板, 其面电荷密度是 ρ_s (C/m²)。试证明在离板 Z_0 (m) 点的电场强度 E (V/m) 有一半是由该点正下方的板上的一个半径 $r_0 = \sqrt{3} Z_0$ 的圆内的电荷所产生的。

3-2 自由空间中, 两个无限大平面相距为 d , 分别均匀分布着电荷密度 ρ 、 $-\rho$, 求空间三个区域的电场强度。

3-3 自由空间中, 两根互相平行、相距为 d 的无限长带电细导线, 其上均匀分布电

荷分别为 ρ_l 、 $-\rho_l$ ，求空间任意一点的电场强度和电位分布。

3-4 半径为 a 的无限长直圆柱导体上，均匀分布的面电荷密度为 ρ_s 。计算导体内外的电场分布。

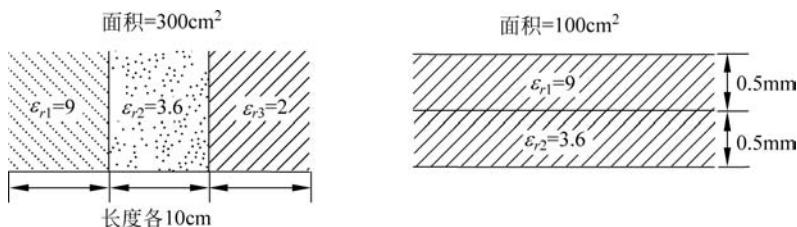
3-5 在真空中，有一个半径为 a 的带电球体，其体电荷密度 $\rho_f = kr$ (k 是常数， r 是球坐标系的径向变量)，求球内、外的电场强度和电位的表示式。

3-6 电荷分布在半径为 a ，外半径为 b ($a < b$) 的球形区域内，设体电荷密度为 $\rho = \frac{k}{r}$ (k 为常数)，求空间三个区域内的电场强度。穿过球面 $r=b$ 的总电通量为多少？

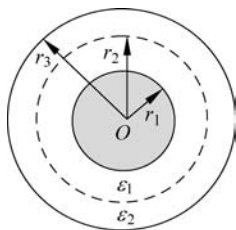
3-7 设 $x < 0$ 的区域为空气， $x > 0$ 区域为电介质，电介质的介电常数为 $3\epsilon_0$ 。如果空气中的电场强度 $\mathbf{E}_1 = 3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z$ (V/m)，求电介质中的电场强度 $\mathbf{E}_2$ 。

3-8 设垂直于 x 轴的相距 d 的两平板构成电容器，两极板上分别带有面电荷密度为 ρ_s 和 $-\rho_s$ 的均匀电荷，在两极板间充满介电常数为 $\epsilon_r = \frac{x+d}{d}$ 的非均匀电介质。边缘效应忽略不计，求该平板电容器中的电场强度。

3-9 求如题图 3-9 所示的两种电容器的电容，其基本间距为 1mm。



题图 3-9



题图 3-11

3-10 两个相距 2mm 的平行板电容中填充相对介电常数为 6 的介质，平板面积为 40cm^2 ，板间电压为 1.5kV，试求：(1) 介质内部电压；(2) 电场强度；(3) 自由电荷面密度；(4) 电容；(5) 电容储能。

3-11 用双层理想电介质按照如题图 3-11 所示方法制成的单芯同轴电缆，已知 $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ ， $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ ，内外导体单位长度上所带电荷分别为 ρ_l 、 $-\rho_l$ 。求：(1) 四个区域内的电场强度分布；(2) 内外导体间电压；(3) 单位长度电缆内外导体间电容。

3-12 自由电荷体密度为 ρ 的球体(半径为 a)，球内外的介电常数均为 ϵ_0 ，试求：

- (1) 球内、外的 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ ；
- (2) 球内、外的电位 φ ；
- (3) 静电场能量。

3-13 已知半径为 a 的导体球带电荷 q ，球心位于两种介质的分界面上如图，试求：

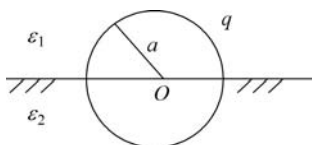
- (1) 电场分布；
- (2) 球面上的自由电荷分布；

(3) 整个系统的静电场能量。

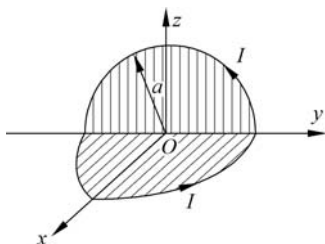
3-14 一平行板电容器,极板面积为 S , 一板接地, 另一板平移, 当板间间隔为 d 时, 将之充电至电压为 U_0 , 然后移去电源、使极板间隔增至 nd (n 为整数)。忽略边缘效应。试求:

- (1) 两极板间的电压;
- (2) 计算并证明此时电容器储能的增加等于外力所做的功。

3-15 一个半径为 a 的圆线圈, 通有电流 I , 将线圈平面沿直径折成 90° (如题图 3-15 所示), 求线圈中心的磁感应强度。



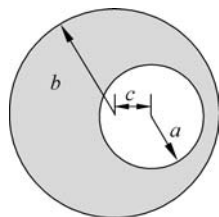
题图 3-14



题图 3-15

3-16 两个相距 d 的两根无限长直导线, 通过电流分别为 $I, -I$, 求空间任一点的磁场强度、磁感应强度以及矢量磁位。

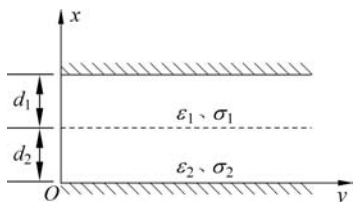
3-17 如题图 3-17 所示的半径为 a 的无限长导体圆柱 ($\mu = \mu_0$), 与内外半径分别为 b, c ($c > b > a$), 磁导率为 $\mu = 4\mu_0$ 的磁介质套筒同轴, 导体中通过电流为 I 。求: (1) 空间任意一点的磁场强度和磁感应强度; (2) 套筒中的束缚电流体密度 $\mathbf{J}_M$ 以及内外表面的束缚电流面密度 $\mathbf{J}_{MS}$; (3) 移去套筒, 再次求空间任意一点的磁场强度和磁感应强度。



题图 3-17

3-18 已知 $y < 0$ 的区域为导磁媒质, 磁导率 $\mu_2 = 5000\mu_0$, $y > 0$ 的区域为空气。试求: (1) 当空气中的磁感应强度 $\mathbf{B}_1 = 0.5\mathbf{e}_z - 10\mathbf{e}_y$ (mT) 时, 导磁媒质中的磁感应强度 $\mathbf{B}_2$;

(2) 当导磁媒质中的磁感应强度 $\mathbf{B}_2 = 10\mathbf{e}_x + 0.5\mathbf{e}_y$ (mT) 时, 空气中的磁感应强度 $\mathbf{B}_1$ 。



题图 3-19

3-19 一个有两层介质 ϵ_1, ϵ_2 的平行板电容器, 两层介质都具有电导率, 分别为 σ_1 和 σ_2 , 参见题图 3-19。当外加电压为 ϕ_0 时, 求通过电容器的电流和两层介质分界面上的自由电荷面密度。

3-20 两种不同的导电媒质的分界面是一个平面。媒质的参数是: $\sigma_1 = 10^2 \text{ S/m}$, $\sigma_2 = 1 \text{ S/m}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ 。已知在媒质 1 中的电流密度的数值处处等于 10 A/m^2 ,

方向与分界面的法线成 45° 。

(1) 求媒质 2 中的电流密度的大小和方向；

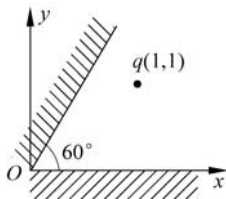
(2) 求分界面上的面电荷密度。

3-21 若两媒质分界面两侧的介电常数及电导率分别为 ϵ_1, ϵ_2 及 σ_1, σ_2 。已知电流流过这一分界面时法向电流密度为 J_n ，试证明分界面上的自由电荷密度 $\rho_{sf} = J_n \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right)$ 。

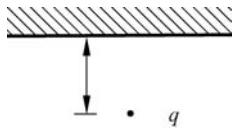
3-22 两层介质的同轴电缆，介质分界面为同轴的圆柱面，内导体半径为 a ，分界面半径为 b ，外导体内半径为 c ；两层介质的介电常数由内到外分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ，电导率分别为 σ_1 和 σ_2 。当外加电压 U_0 时，试求：(1) 介质中的电场强度；(2) 分界面上的自由电荷面密度；(3) 单位长度的电容和漏电导。

3-23 一无限大导体平面折成 60° 角，角域内有一点电荷 q 位于 $x=1, y=1$ 点，如题图 3-23 所示。若用镜像法求角域内的电位，试标出所有镜像电荷的位置和数值（包括极性），并求 $x=2, y=1$ 点的电位。

3-24 一无限大水平导体平面的下方，距平面 h 处有一带电量为 q ，质量为 m 的小带电体（可视为点电荷），如题图 3-24 所示。若要使带电体所受到的静电力恰好与重力平衡， q 应为多少？



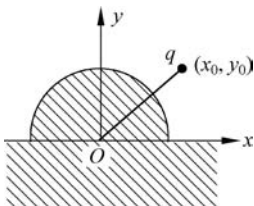
题图 3-23



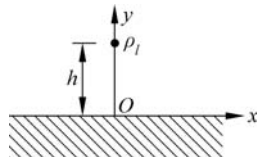
题图 3-24

3-25 在一无限大导体平面上有一个半径为 a 的导体半球凸起。如题图 3-25 所示坐标系，设在 (x_0, y_0) 点有一点电荷 q ，若用镜像法求解导体外部空间任一点的电位，试计算各个镜像电荷的位置和数值。

3-26 在离地面高为 h 处有一无限长带正电的水平面细直导线（见图题 3-26），线电荷密度为 ρ_l (C/m) 证明它在导电的地平面上引起的面电荷密度是 $\rho_s = \frac{-\rho_l h}{\pi(x^2 + h^2)}$ (C/m²)。



题图 3-25



题图 3-26