



动画演示

1.6 案例：雷达信号的时域分析

建立信号的时域模型是进行信号处理方法研究的基础。下面以雷达信号处理为例，建立待处理信号的模型，并分析目标运动导致的信号展缩、时移和多普勒调制。

雷达一词来源于其英文全称 Radio Detection and Ranging, 缩写为 Radar, 它发射电磁波信号, 并通过接收目标反射(散射)的信号获得目标的位置、速度等信息。图 1.6.1 给出了雷达探测目标的示意图。

1.6.1 静止目标的回波——信号时移

将雷达发射的电磁波信号记成 $s(t)$, 一个目标被雷达发射的电磁波照射到并将该电磁波向空间散射, 散射的电磁波传播到雷达并被接收机接收, 接收的信号记成 $r(t)$, 它相对于发射信号存在时间延迟和幅度衰减, 即

$$r(t) = As(t - t_d) \quad (1.6.1)$$

时间延迟由电磁波在雷达-目标-雷达路径上传播需要的时间决定, 假设目标到雷达的距离为 R , 则

$$t_d = \frac{2R}{c}$$

式中, c 为电磁波传播的速度, 即光速。

对距离在 10km 外的目标, 接收信号相对于发射信号的时间延迟大约为 $66.7\mu\text{s}$ ($1\mu\text{s} = 10^{-6}\text{s}$)。在第 3 章中将学到, 信号的时宽和带宽成反比, 因此雷达信号处理能达到的时间测量精度与雷达信号所占据的频带宽度成反比关系。由于雷达工作频率很高, 比较容易实现大的信号带宽, 因此能获得高的距离测量精度。例如工作在 X 波段(中心频率约为 10GHz, $1\text{GHz} = 10^9\text{Hz}$)的雷达, 带宽可以达到 1GHz 以上, 时间测量精度可以达到 1ns ($1\text{ns} = 10^{-9}\text{s}$), 相应的距离测量精度可以达到 0.15m。能够对很远的目标精确地测量距离, 是雷达传感器的优势之一。

1.6.2 运动目标的回波——信号时移和展缩

如果目标是运动的, 那么目标与雷达的距离是一个随时间变化的量。假设目标的投影速度为 v , 朝向雷达的方向为速度正方向, 如图 1.6.1 所示, 并且记目标在 $t=0$ 时刻的距离为 R_0 , 则在 t 时刻目标的距离为

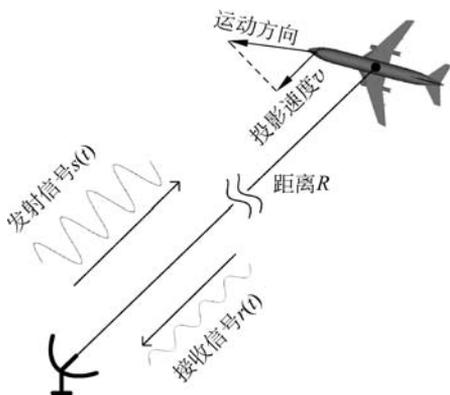


图 1.6.1 雷达探测目标示意图

$$R(t) = R_0 - vt$$

当目标速度远小于光速时,可以近似地认为 t 时刻的回波延迟时间是

$$t_d = \frac{2R(t)}{c}$$

于是回波信号 $r(t)$ 与发射信号 $s(t)$ 的关系为

$$r(t) = A_s \left(t - \frac{2R(t)}{c} \right) = A_s \left(\left(1 + \frac{2v}{c} \right) t - \frac{2R_0}{c} \right) \triangleq A_s (\beta t - t_0) \quad (1.6.2)$$

其中, $\beta = 1 + 2v/c$, $t_0 = 2R_0/c$ 。由此可见,运动目标的回波相对于发射信号,不但存在幅度衰减和时间延迟,还存在波形展宽或者压缩, β 称为展缩因子。具体地,当 $v > 0$,即目标朝向雷达运动时, $\beta > 1$, $r(t)$ 相对于 $s(t)$ 波形压缩;当目标远离雷达运动时, $v < 0$, $\beta < 1$, $r(t)$ 相对于 $s(t)$ 波形展宽。

雷达发射的信号 $s(t)$ 通常是一个持续时间有限的信号,波形展缩会造成信号持续时间发生变化。实际上,由于目标运动速度远小于光速,信号持续时间的变化非常微小。例如,对于以 10 倍声速运动的目标 ($v = 3400\text{m/s}$), $\beta = 1 + 2.27 \times 10^{-5}$,因此波形仅被压缩了十万分之二,信号持续时间的变化几乎可以忽略不计。

但是,雷达发射的信号 $s(t)$ 同时也是一个频率很高的信号,极其微小的波形展缩也会带来显著的频率变化,使得雷达具有速度测量能力。相关问题将在 1.6.3 节进行分析。

1.6.3 运动目标的回波——信号展缩引起的多普勒频移

雷达发射信号通常是一个持续时间有限、工作频率很高的信号。以单一载频脉冲信号为例,此时

$$s(t) = G_T(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

根据式(1.6.2),回波信号可以表示为

$$r(t) = A_s (\beta t - t_0) = A G_T(\beta t - t_0) \cdot \cos(\omega_0 (\beta t - t_0))$$

1.6.2 节已经分析过,展缩因子 β 非常接近于 1,因此信号波形展缩引起的脉冲宽度变化可以忽略不计,即

$$G_T(\beta t - t_0) \approx G_T(t - t_0)$$

下面分析载频项

$$\cos(\omega_0 (\beta t - t_0)) = \cos\left(\omega_0 \left(\left(1 + \frac{2v}{c} \right) t - t_0 \right)\right) = \cos((\omega_0 + \omega_d)t - \omega_0 t_0) \quad (1.6.3)$$

其中

$$\omega_d = \frac{2v}{c} \omega_0 \quad (1.6.4)$$

式(1.6.3)表明,对于正弦信号,波形的展缩和时移可以等效为频率和相位的变化。图 1.6.2(a)和(b)分别对比了时移和展缩前后的两个正弦信号,可以直接观察到时移引起的相位变化和展缩引起的频率变化。

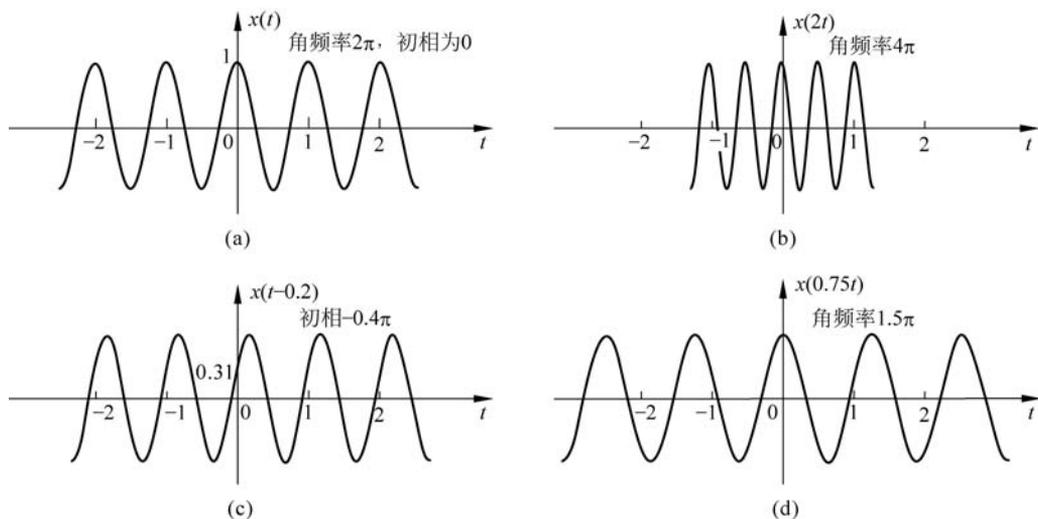


图 1.6.2 正弦信号的展缩和时移等效为频率和相位变化

从上面的分析可以看出,由于雷达信号具有很高的频率,目标运动引起的回波波形展缩使得回波信号的频率相对于发射信号的频率发生了变化,这个现象就是运动引起的多普勒频移效应,式(1.6.4)给出了多普勒频率与目标速度的关系。由于雷达主动向目标发射并接收信号,雷达信号在雷达-目标-雷达之间经历了双程传播,因此雷达信号的多普勒频移比被动接收声源或光源发出的信号的多普勒频移多一个因子2。

由于雷达信号的频率很高,极其微小的波形展缩也会带来显著的频率变化。例如,以10倍声速运动的目标展缩因子 $\beta = 1 + 2.27 \times 10^{-5}$,对于X波段的雷达, $\omega_0 = 2\pi \times 10^{10} \text{ rad/s}$,根据式(1.6.4), $\omega_d = 2\pi \times 2.27 \times 10^5 \text{ rad/s}$,即多普勒频移可以达到227kHz,这个频移量可以通过雷达信号处理测量出来,从而实现对目标速度的测量。第3章中还将通过实例说明,雷达的频率测量精度与发射信号的持续时间成反比,而一串相参的雷达脉冲串的持续时间可以达到秒量级,因此频率测量精度可以达到赫兹量级,速度测量精度可以优于1m/s。对远距离目标具有极高的速度测量精度,是雷达传感器的另一个特点和优势。

1.7 信号时域分析计算机仿真

MATLAB、Octave、Python 等是国际上公认的优秀、可靠的科学计算和仿真标准软件,在学术研究与工业生产中有着广泛的应用。可将其作为“信号与系统”学习中必要的辅助工具,加强对基本理论的理解和掌握。

1.7.1 连续时间信号的实现

例 1.7.1 绘制正弦信号 $2\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ 、门信号 $G_2(t-1)$ 、三角信号 $\Lambda_2(t)$ 、抽样函

数 $\text{Sa}(\pi t)$ 。

```
t = -4:0.001:4; % 时域自变量
A = 2; omega0 = 2 * pi; theta = pi/6; % 正弦信号
xt1 = A * sin(omega0 * t + theta); % 信号,  $\theta$  的默认单位是弧度
tao = 2; xt2 = rectpuls(t, tao); % 门信号
xt3 = tripuls(t, 4, 0); % 三角信号
xt4 = sinc(t); % 抽样函数
subplot(2,2,1); plot(t, xt1); title('正弦信号')
subplot(2,2,2); plot(t, xt2); title('门信号')
subplot(2,2,3); plot(t, xt3); title('三角信号')
subplot(2,2,4); plot(t, xt4); title('抽样函数')
```

各信号波形如图 1.7.1 所示。

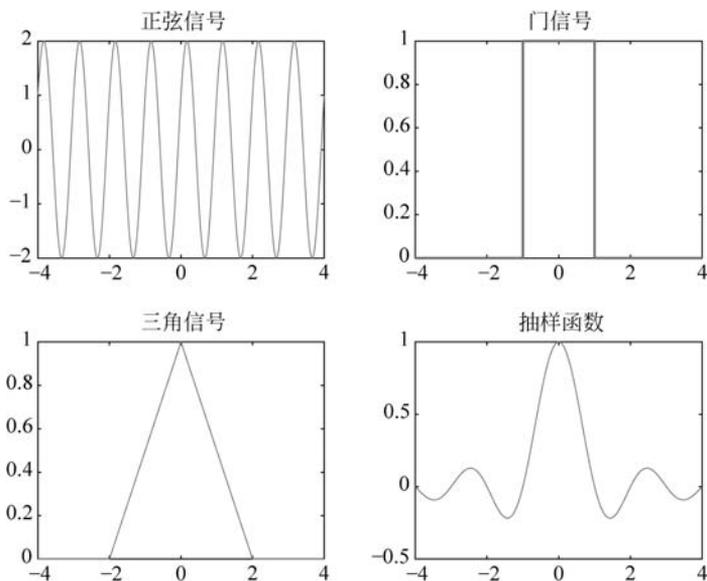


图 1.7.1 例 1.7.1 各信号的波形图

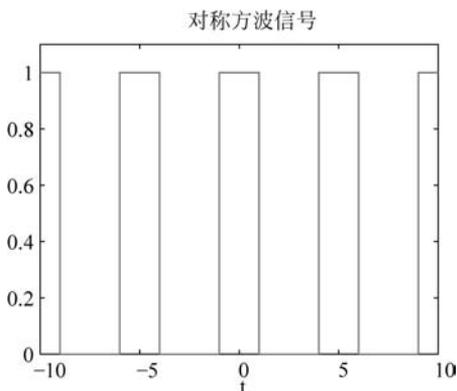


图 1.7.2 例 1.7.2 周期信号的波形图

例 1.7.2 绘制图 1.2.5(a) 中 $T=5$, $\tau=2$ 时的信号波形。

```
% square 产生的是周期为  $2\pi$  的方波信号,
% 最小值为 -1, 最大值为 1
t = -10:0.001:10; xt = (square((t + 1)
* (2 * pi)/5, 40) + 1) * 0.5;
plot(t, xt); xlabel('t'); title('对称方波
信号'); ylim([0 1.1])
```

周期矩形脉冲信号的波形如图 1.7.2 所示。

1.7.2 离散时间信号的实现

例 1.7.3 绘制 $\delta(n-1)$, $u(n)$ 和 $(-0.6)^n u(n)$ 。

```
n = -10:10;    xn1 = [n == 1];
xn2 = [n >= 0];    xn3 = (-0.6).^n;
subplot(1,3,1); stem(n,xn1,'filled'); title('单位样值序列  $\delta(n-1)$ ')
subplot(1,3,2); stem(n,xn2,'filled'); title('单位阶跃序列  $u(n)$ ')
subplot(1,3,3); stem(n,xn3,'filled'); title('指数序列  $(-0.6)^n$ ')
```

各序列波形如图 1.7.3 所示。

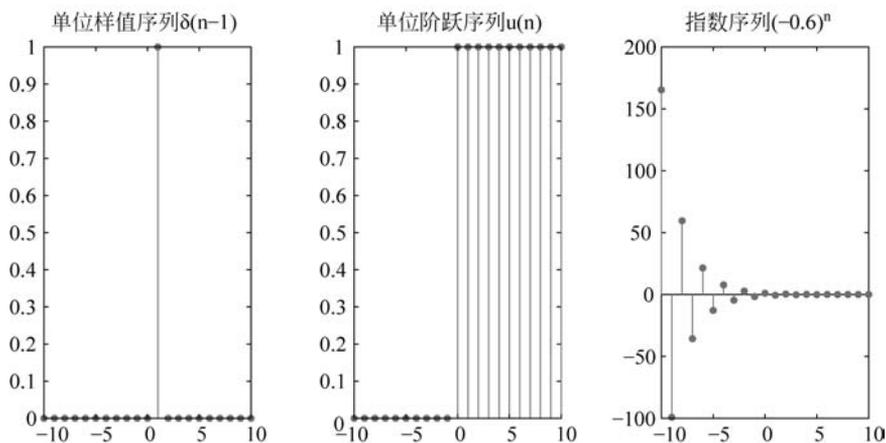


图 1.7.3 例 1.7.3 各序列的波形图

1.7.3 信号时域运算的实现

例 1.7.4 绘制 $\delta(n)$ 的累加序列。

```
n = -10:10;    deltan = [n == 0];
yn = cumsum(deltan);
stem(n,yn,'filled'); xlabel('n');
title('\delta(n)的累加序列')
```

累加结果如图 1.7.4 所示。

例 1.7.5 绘制 $(\cos t)'$ 、 $u^{(-1)}(t-1)$ 的信号波形。

```
dt = 0.001; t = -10:dt:10;
xt1 = cos(t); yt1 = diff(xt1)/dt;
subplot(1,2,1); plot(t(2:end), yt1);
title('cos(t)的微分')
```

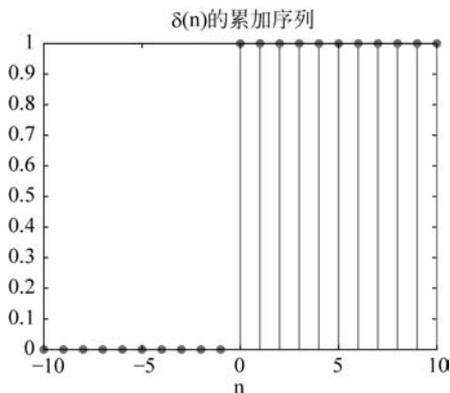


图 1.7.4 例 1.7.4 的累加结果

```
xt2 = heaviside(t-1); yt2 = cumtrapz(t,xt2);
subplot(1,2,2);plot(t,yt2); title('u(t-1)的积分')
```

微积分结果如图 1.7.5 所示。

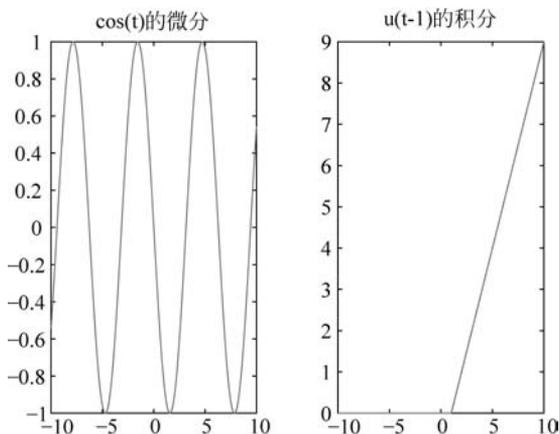


图 1.7.5 例 1.7.5 的微积分结果

例 1.7.6 对三角信号 $x(t) = \Delta_2(t-1)$, 分别绘制 $x(-2t+4)$ 和奇偶分解的结果。

```
tx = -4:0.001:4; x = tripuls(tx-1,2,0); ty = (tx-4)/(-2);
subplot(1,2,1); plot(tx,x, '-.',ty,x, 'linewidth',2); legend('x(t)', 'x(-2t+4)');
xlabel('t'); title('信号的尺度变换')
tx_ = fliplr(-tx); x_ = fliplr(x); %左右翻转信号,得到 x(-t)
xeven = (x+x_)/2; xodd = (x-x_)/2;
subplot(1,2,2);plot(tx,x,tx,xeven, ':',tx,xodd, '-.', 'linewidth',2);
legend('xt','xt的偶部','xt的奇部'); xlabel('t'); title('信号的奇偶分解')
```

尺度变换及奇偶分解结果如图 1.7.6 所示。

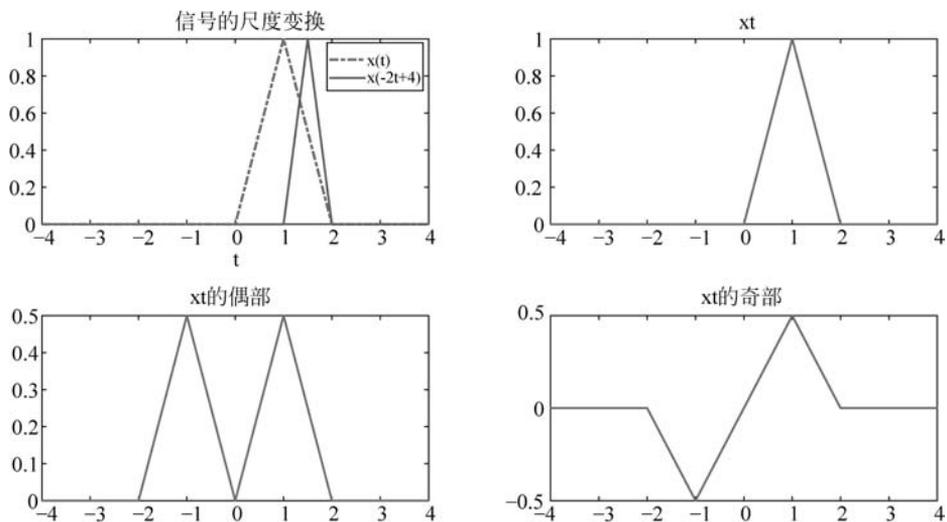


图 1.7.6 例 1.7.6 的运行结果

例 1.7.7 $x_1(n) = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n < 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, $x_2(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 绘制 $x_1(n) * x_2(n)$ 。

```

nx1 = 0:4; x1 = nx1 + 1;
nx2 = 0:5; x2 = ones(size(nx2));
ny = [min(nx1) + min(nx2)]:[max(nx1) + max(nx2)];
y = conv(x1,x2); stem(ny,y,'filled'); hold on
stem(nx1,x1,'d'); stem(nx2,x2,'- .s'); hold off
title('信号的卷积')

```

卷积结果如图 1.7.7 所示。

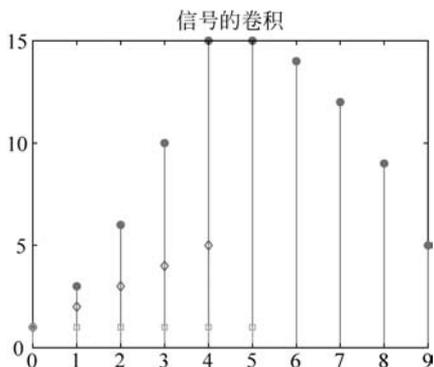


图 1.7.7 例 1.7.7 信号的卷积结果

习 题

思考题

- 1.1 什么是信号？什么是系统？信号与系统有何联系？
- 1.2 为何要对信号进行分类？
- 1.3 为何要对信号进行分解？
- 1.4 为何要对系统进行分类？
- 1.5 所有物理可实现的系统一定是因果系统吗？

基本题

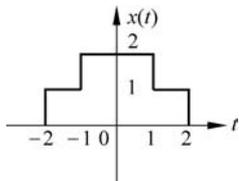
- 1.1 判断下列信号的周期性。若是周期的，试确定其基本周期。
 - (1) $\cos t$ ；
 - (2) $\sin 2\pi t + \sin 3\pi t$ ；
 - (3) $\sin t + \sin \pi t$ ；
 - (4) $\cos n$ ；
 - (5) $\cos(3\pi n)$ ；
 - (6) $e^{j\frac{\pi}{2}n}$ 。
- 1.2 计算下列信号的能量和功率，并判断哪些是能量信号，哪些是功率信号。

(1) $\sin t$; (2) $x(t) = 2\sin 2\pi t + 2\sin 3\pi t$; (3) $x(t) = \begin{cases} 8e^{-4t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$;

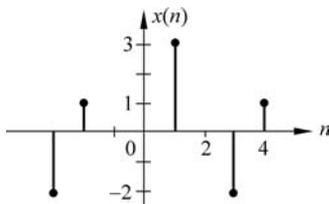
(4) $e^{j\frac{\pi}{2}n}$; (5) $x(n) = \begin{cases} 2^{-n}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$.

1.3 将题图 1.1 所示信号 $x(t)$ 表示成门信号之和。

1.4 信号 $x(n)$ 如题图 1.2 所示, 试将其表示为 $\delta(n)$ 的叠加。



题图 1.1



题图 1.2

1.5 用极坐标形式 $(re^{j\theta}, -\pi < \theta \leq \pi)$ 表示下列复数:

(1) 2; (2) -3; (3) 2j; (4) -3j; (5) $1 - \sqrt{3}j$; (6) $(-1 - j)/(1 - \sqrt{3}j)$ 。

1.6 求下列信号与冲激信号 $\delta(t)$ 的关系:

(1) $\delta(3t+6)$; (2) $\delta(-3t+6)$; (3) $\delta(3t-6)$; (4) $\delta(-3t-6)$ 。

1.7 计算下列各式:

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$; (2) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t+t_0)\delta(t+t_0)dt$; (3) $\int_{-4}^2 e^t \delta(t+3)dt$;

(4) $\int_0^{\infty} e^{-t} \sin t \delta(t+1)dt$; (5) $\frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$; (6) $\int_{-1}^1 \delta(t^2-4)dt$;

(7) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1-t)(t^2+4)dt$; (8) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \frac{\sin 2t}{t} dt$;

(9) $\int_{-10}^{10} \delta(2t-3)(2t^2+t-5)dt$ 。

1.8 画出下列信号的波形图:

(1) $x_1(t) = tu(t)$; (2) $x_2(t) = (t-1)u(t)$; (3) $x_3(t) = (t+1)u(t)$;

(4) $x_4(t) = (t+1)u(t+1)$; (5) $x_5(t) = t[u(t) - u(t-1)]$;

(6) $x_6(t) = tu(t) - (t-1)u(t)$ 。

1.9 写出题图 1.3 所示信号的解析表示式。

1.10 将题图 1.4 中信号 $x(t)$ 表示成斜波信号与阶跃信号之和。

1.11 对题图 1.5 信号, (1) 求各信号的微分并画出波形图; (2) 求 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 的积分并画出波形图。

(10) $y(n) = |x(n) - x(n-1)|$; (11) $y(n) = x^2(n)$; (12) $y(n) = -nx(n)$ 。

1.32 系统输入-输出关系式如下,判断它们是否为因果系统,并说明原因。其中 $x(t)$ 、 $x(n)$ 、 $y(t)$ 、 $y(n)$ 意义同上。

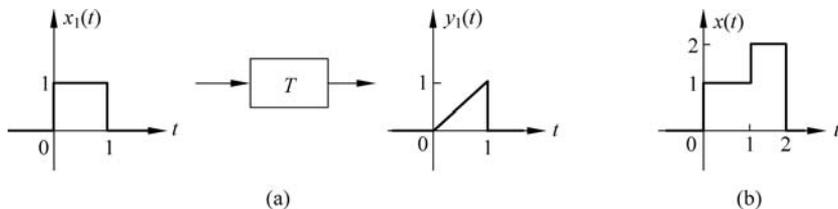
(1) $y(t) = e^{x(t)}$; (2) $y(t) = x(-t)$; (3) $y(t) = x(t-c)$, c 为实常数;

(4) $y(n) = \sum_{k=n-2}^{n+4} x(k)$; (5) $y(n) = x^2(n)$; (6) $y(n) = x(n)x(n-2)$ 。

1.33 对于线性时不变系统来说,若输入信号 $x(t)$ 是一个周期为 T 的周期信号,输出信号是周期信号吗? 周期是多少?

1.34 某线性系统在相同的初始状态下,当输入为 $x(t)$ 时,全响应为 $y(t) = 2e^{-t} + \cos 2t$; 当输入 $2x(t)$ 时,全响应为 $y(t) = e^{-t} + 2\cos 2t$ 。求在相同的初始条件下,输入为 $4x(t)$ 时的全响应。

1.35 某线性时不变系统的输入、输出信号如题图 1.12(a) 所示。如果输入题图 1.12(b) 所示的信号,画出其输出信号的波形。



题图 1.12

提高题

1.1 两离散时间周期信号分别为 $x_1(n) = \{\dots, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, \dots\}$, $x_2(n) = \{\dots, 3, 3, 3, 3, 1, 3, 3, 3, 3, 1, \dots\}$, 试确定 $x_1(n) + x_2(n)$ 的周期。

1.2 对 $\cos(\omega_0 t)$ 以间隔 1 进行抽样,得到 $x(n) = \{\dots, 1, 0.5, -0.5, -1, -0.5, 0.5, 1, 0.5, -0.5, -1, -0.5, \dots\}$ 。写出 ω_0 所有可能的取值。

1.3 计算下列各式:

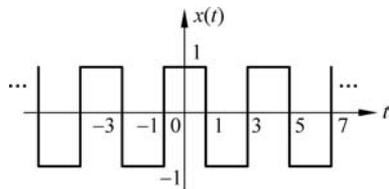
(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2 - 4) dt$; (2) $\int_{-\infty}^t e^{-\tau} \delta'(\tau) d\tau$;

(3) $\int_{-10}^{10} \delta'(t + \frac{1}{4}) (2t^2 + t - 5) dt$; (4) $3^n \delta(n^2 - 4)$ 。

1.4 试将题图 1.13 所示的对称方波信号表示成符号函数的形式。

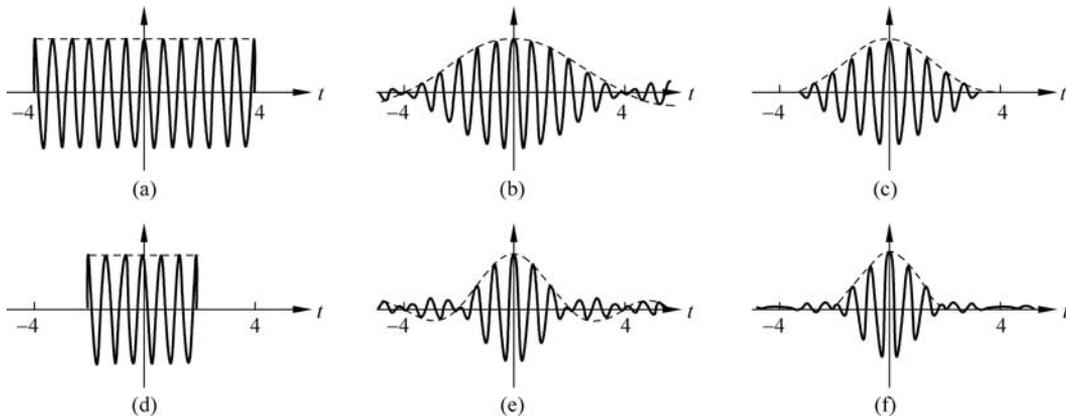
1.5 利用冲激信号的泛函定义证明 $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$ 。

1.6 画出下列各信号的波形: (1) $\text{Sa}(\pi t) + \cos(4\pi t)$; (2) $\text{Sa}(\pi t) \cdot \cos(4\pi t)$ 。



题图 1.13

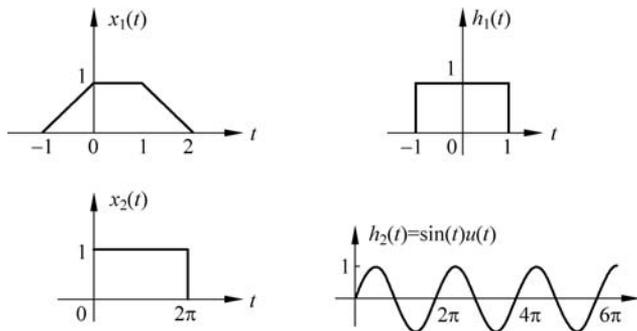
1.7 题图 1.14 的 6 幅图中,有一幅图为 $\text{Sa}^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \cdot \cos\omega_m t$ 的波形。试确定波形编号并从中得到 ω_m 的取值。



题图 1.14

1.8 $x_1(t) = e^{-at}u(t), x_2(t) = \sin t u(t - 2\pi)$, 计算卷积积分 $x_1(t) * x_2(t)$ 。

1.9 信号如题图 1.15 所示,试画出 $\frac{d}{dt}[x_1(t) * h_1(t)], x_2(t) * h_2(t)$ 。



题图 1.15

1.10 $x_1(t) = \Lambda_2(t), x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, 对于下列 k 值,画出 $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ 。

(1) $T = 3$; (2) $T = 1.5$ 。

1.11 设 $x_1(n) = u(n) - u(n - 6), x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。已知 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$, 且 $y(4) = 5, y(9) = 0$ 。试确定 N 。

1.12 若 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$, 判断下列说法的对错。

(1) $y(n - 1) = x_1(n - 1) * x_2(n - 1)$; (2) $y(-n) = x_1(-n) * x_2(-n)$ 。

1.13 题图 1.16 所示是某连续系统的模拟框图,请列出其微分方程。

1.17 某系统只包括一个乘法器,该乘法器将输入信号 $x(t)$ 与振荡器的输出 $A \cos(\omega_0 t + \theta)$ 相乘,产生系统的输出 $y(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)x(t)$ 。试证明:(1)该系统是线性的;(2)该系统是时变的。

1.18 非线性器件可以作为谐波发生器的基础。比如对于非线性系统 $y(t) = x^3(t)$,设输入为 $A \cos(\omega_0 t + \theta)$,证明 $y(t)$ 中包含 ω_0 和 $3\omega_0$ 的频率分量,并分别计算各自的振幅和初相。

计算机作业

1.1 绘制以下信号:

$$(1) x(t) = \cos(\omega_0 t), \omega_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, t \text{ 取 } -12 \sim 12;$$

$$(2) x(n) = \cos(\Omega_0 n), \Omega_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \text{ 并与(1)进行比较, } n \text{ 取 } -12 \sim 12;$$

$$(3) x(t) = \text{Sa}(\pi t), \text{ 并与 } \frac{1}{\pi t} \text{ 进行比较, } t \text{ 取 } -12 \sim 12;$$

$$(4) x(n) = u(n) - u(n-5), n \text{ 取 } -12 \sim 12;$$

$$(5) x(t) = u(t) - u(t-5), t \text{ 取 } -12 \sim 12;$$

$$(6) x(t) = \text{Sa}(\pi t) + \cos(10t), \text{ 并与 } \text{Sa}(\pi t) \text{ 进行比较, } t \text{ 取 } -12 \sim 12;$$

$$(7) x(t) = \text{Sa}(\pi t) \cos(10t), \text{ 并与 } \text{Sa}(\pi t) \text{ 进行比较, } t \text{ 取 } -12 \sim 12.$$

1.2 已知 $x(t) = t[u(t) - u(t-5)]$,试绘制:

$$(1) x(t); (2) x(-t); (3) x(2t); (4) x(3-0.5t); (5) x'(t);$$

$$(6) x^{(-1)}(t); (7) x(t) \text{ 的偶分量和奇分量.}$$

1.3 序列 $x(n)$ 如题图 1.8 所示,试绘制(1) $x(n)$; (2) $x(2n)$ 、 $x(n/2)$ 、 $x(-n+2)$;

$$(3) \sum_{k=-\infty}^n x(k)、x(n) - x(n-1).$$

$$1.4 \quad x_1(t) = \begin{cases} 1, & 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, x_2(t) = \begin{cases} t-1, & 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 试绘制 } x_1(t) * x_2(t).$$