

第5章

连续时间信号与系统复频域分析



思维导图

第3章研究了连续时间信号的频域分析法,是以虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 为基本信号,将信号 $x(t)$ 分解成具有不同频率的虚指数分量的叠加。这种分析方法在信号系统的分析和处理等领域占有重要地位。不过这种分析方法也有局限性,例如,虽然大多数实际信号都存在傅里叶变换,但也有些重要信号(例如指数增长信号)不存在傅里叶变换;另外,傅里叶变换只能分析初始状态为零时系统的响应,即零状态响应。

本章引入复频率 $s = \sigma + j\omega$ (σ, ω 均为实数),以复指数信号 e^{st} 为基本信号,将信号 $x(t)$ 分解成具有不同复频率的复指数分量之叠加。通过拉普拉斯变换,对信号与系统进行分析 and 处理,这种方法称为复频域分析法。

本章首先介绍拉普拉斯变换及其性质,并介绍用复频域分析法分析、求解微分方程和电系统,讨论系统函数及其系统特性。然后引入连续系统模拟(框图和信号流图)表示,并介绍复频域分析法在通信系统、雷达系统分析中的应用。最后简要介绍连续时间系统的状态变量分析法。



教学视频

5.1 拉普拉斯变换

5.1.1 拉普拉斯变换的定义

从第3章可知,当信号 $x(t)$ 满足绝对可积条件时,可以进行傅里叶变换和反变换:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.1.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.1.2)$$

但有些信号不满足绝对可积条件,不能用上式进行傅里叶变换。这些信号不满足绝对可积条件的原因是由于衰减太慢或者不衰减,例如,单位阶跃信号 $x(t) = u(t), t \rightarrow \infty, x(t) = 1$ 不衰减。为了克服以上困难,可用一个收敛因子 $e^{-\sigma t}$ 与 $x(t)$ 相乘,只要 σ 值选择合适,就能保证 $x(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件,从而可求出 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换,即

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \triangleq X(\sigma+j\omega) \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

将式(5.1.3)与傅里叶变换定义式比较,可写作

$$\mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] = X(\sigma+j\omega)$$

取傅里叶反变换

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\sigma+j\omega)] = x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

上式两边同除以 $e^{-\sigma t}$, 有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega) e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega \quad (5.1.4)$$

令 $s = \sigma + j\omega$, 其中 σ 是常数, 则 $d\omega = ds/j$, 于是式(5.1.3)、式(5.1.4)可以写为

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (5.1.5)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (5.1.6)$$

式(5.1.5)称为 $x(t)$ 的拉普拉斯变换, 它是一个含参量 s 的积分, 把关于时间 t 为变量的函数变换为以 s 为变量的函数 $X(s)$, 称 $X(s)$ 为 $x(t)$ 的象函数。式(5.1.6)称为 $X(s)$ 的拉普拉斯反变换, 称 $x(t)$ 为 $X(s)$ 的原函数。以上两式构成一变换对, 可简记为

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}[x(t)] \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ x(t) &\leftrightarrow X(s) \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

由此可见, $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。

5.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

如前所述, 选择合适的 σ 值才能使式(5.1.5)的积分收敛, $X(s)$ 才存在。首先看下面几个例子。

例 5.1.1 求信号 $x(t) = e^{\alpha t} u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 由式(5.1.5), 有

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{\alpha-s} e^{(\alpha-s)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-\alpha} [1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha-s)t}] = \frac{1}{s-\alpha} [1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t}] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha}, & \sigma = \text{Re}[s] > \alpha \\ \text{不定}, & \text{Re}[s] = \alpha \\ \text{无界}, & \text{Re}[s] < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

可见, 只有当 $\text{Re}[s] > \alpha$ (也可写成 $\sigma > \alpha$) 时, $e^{\alpha t} u(t)$ 的拉普拉斯变换才存在。

根据例 5.1.1 分析结果, 得到一个常用的拉普拉斯变换对

$$e^{\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \quad \text{Re}[s] > \alpha \quad (5.1.8)$$

例 5.1.2 求信号 $x(t) = -e^{\alpha t} u(-t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 由式(5.1.5), 有

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{\alpha t} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{s-\alpha} e^{(\alpha-s)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{s-\alpha} [1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(\alpha-s)t}] = \frac{1}{s-\alpha} [1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(\alpha-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t}] \end{aligned}$$



教学视频

$$= \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha}, & \sigma = \operatorname{Re}[s] < \alpha \\ \text{不定}, & \operatorname{Re}[s] = \alpha \\ \text{无界}, & \operatorname{Re}[s] > \alpha \end{cases}$$

可见,只有当 $\sigma < \alpha$ 时, $-e^{\alpha t}u(-t)$ 的拉普拉斯变换才存在。

根据例 5.1.2 分析结果,得到一个常用的拉普拉斯变换对:

$$-e^{\alpha t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \quad \operatorname{Re}[s] < \alpha \quad (5.1.9)$$

例 5.1.3 求信号 $x(t) = e^{\alpha t}u(t) + e^{\beta t}u(-t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 按照例 5.1.1 和例 5.1.2 类似的分析方法,容易得到

$$\text{当 } \alpha < \beta \text{ 时, } X(s) = \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}, \quad \alpha < \operatorname{Re}[s] < \beta;$$

当 $\alpha \geq \beta$ 时, $X(s)$ 不存在。

把使 $X(s)$ 存在的 s 的范围(即 s 的实部 σ 的范围,因为 $e^{-j\omega t}$ 不影响积分的收敛性)称为收敛域(Region of Convergence),简记为 ROC。表示收敛域的一个方便直观的方法是:在 s 平面上把收敛域用阴影线表示出来,如图 5.1.1 所示,收敛域是一个区域,它是由收敛坐标 σ_c 决定的, σ_c 的取值与信号 $x(t)$ 有关。过 σ_c 平行于虚轴的一条直线称为收敛轴或收敛边界。

从以上三例分析可知,对于右边信号,拉普拉斯变换定义式中的积分上限为 ∞ ,所以,若对于某个 σ_1 该积分收敛,那么对于所有的 $\sigma > \sigma_1$,该积分一定也收敛,所以,右边信号的收敛域为右边收敛。同样,左边信号的收敛域为左边收敛,双边信号的收敛域为带状收敛。上面三个例子中拉普拉斯变换的收敛域如图 5.1.1 所示,其中虚线称为收敛轴。

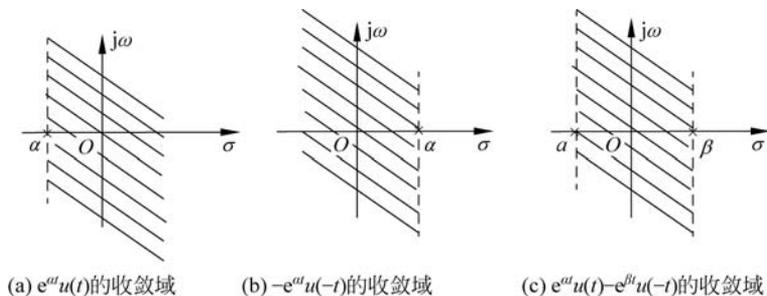


图 5.1.1 右边信号、左边信号、双边信号的收敛域

5.1.3 单边拉普拉斯变换

由例 5.1.1 和例 5.1.2 的求解可以看出一个问题:一个象函数,一定要考虑收敛域,其时域与复频域的对应才是唯一的。这个约束较为苛刻,这也限制了它的应用。



教学视频

所幸的是,实际遇到的信号都有初始时刻,不妨设其初始时刻为0时刻。这样在 $t < 0$ 时 $x(t)=0$,从而其拉普拉斯变换可以写为

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (5.1.10)$$

式中,积分下限取 0^- ,是考虑到 $x(t)$ 可能在 $t=0$ 时刻包含冲激函数或其各阶导数,一般情况下,认为 0 和 0^- 是等同的。式(5.1.10)称为单边拉普拉斯变换(简称拉氏变换)。为了区分,式(5.1.5)称为双边拉普拉斯变换,记为 $X_B(s)$ 。

显然,对于因果信号 $x(t)$,由于 $x(t)=0, t < 0$,所以其双边、单边拉普拉斯变换相同。

式(5.1.10)对应的反变换可以写为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds, \quad t > 0^- \quad (5.1.11)$$

下面,求几个常用信号的单边拉普拉斯变换。

例 5.1.4 求矩形脉冲信号 $x(t)=G_{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ 的单边拉普拉斯变换。

解:由式(5.1.10),有

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\tau} e^{-st} dt = \frac{1-e^{-s\tau}}{s}$$

显然,由于该信号是时限信号,函数值非零的时间段为有限长,拉普拉斯变换定义式中的积分区间有限,故对所有的 $s, X(s)$ 都存在,即收敛域为整个 s 平面, $\text{Re}[s] > -\infty$,这种情况称为全 s 平面收敛。

例 5.1.5 求单位冲激信号 $\delta(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

解:由式(5.1.10),有

$$\delta(t) \leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

单位冲激信号 $\delta(t)$ 的收敛域是全 s 平面收敛。

即 $\delta(t) \leftrightarrow 1, \quad \sigma > -\infty \quad (5.1.12)$

例 5.1.6 求复指数信号 $x(t)=e^{s_0 t} u(t)$ (s_0 为复常数)的单边拉普拉斯变换。

解:由式(5.1.10),有

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = \frac{1}{s-s_0}, \quad \text{Re}[s] > \text{Re}[s_0]$$

即

$$e^{s_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_0}, \quad \text{Re}[s] > \text{Re}[s_0] \quad (5.1.13)$$

若 s_0 为实数,令 $s_0=a$ (a 为实常数),得到

$$e^{at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \quad \text{Re}[s] > a \quad (5.1.14)$$

若 $s_0=0$,得到

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.1.15)$$

若 s_0 为虚数, 令 $s_0 = \pm j\omega_0$, 得到

$$e^{\pm j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s \mp j\omega_0}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0$$

利用欧拉公式, 根据式(5.1.15)可以得出

$$\cos(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.1.16)$$

$$\sin(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.1.17)$$

可见, 大部分常用信号的单边拉普拉斯变换都存在, 但也有些信号不存在拉普拉斯变换, 例如 t^t 、 e^{t^2} 等增长过快的信号, 无法找到合适的 σ 值使其收敛, 所以不存在拉普拉斯变换, 这类信号称为超指数信号。但实际中遇到的一般都是指数阶信号, 总能找到合适的 σ 值使其收敛, 故常见信号的单边拉普拉斯变换总是存在的。

对比双边拉普拉斯变换的定义式(5.1.5)和单边拉普拉斯变换的定义式(5.1.10), 以及前面几个例子, 可以看出, 双边拉普拉斯变换既可以分析因果信号, 又可以分析非因果信号, 但需要与收敛域一起才能与时域信号唯一对应。而单边拉普拉斯变换只能分析因果信号, 其优势在于不需要指明收敛域就可以与时域一一对应, 这种唯一性大大简化了分析。并且在实际应用中, 遇到的连续时间信号大都是因果信号。所以本书主要讨论单边拉普拉斯变换, 如果不特别指明, 拉普拉斯变换都是指单边拉普拉斯变换。

5.1.4 拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系

在本章的开始, 用求 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换的方法, 引入复变量 $s = \sigma + j\omega$, 得出了拉普拉斯变换。随后又将时域信号 $x(t)$ 限制为因果信号, 从而得到单边拉普拉斯变换。两种变换的定义式分别为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

显然, $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换, 而傅里叶变换即是 $\sigma = 0$ 时(即 s 平面虚轴上)的拉普拉斯变换。图 5.1.2 是它们之间关系的示意图。通过以下几个例子来深入理解。

例 5.1.7 求指数衰减信号 $x(t) = e^{\alpha t} u(t)$, $\alpha < 0$ 的傅里叶变换和拉普拉斯变换。

解: 根据前面学习过的变换对, 可以直接得到

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \alpha}$$

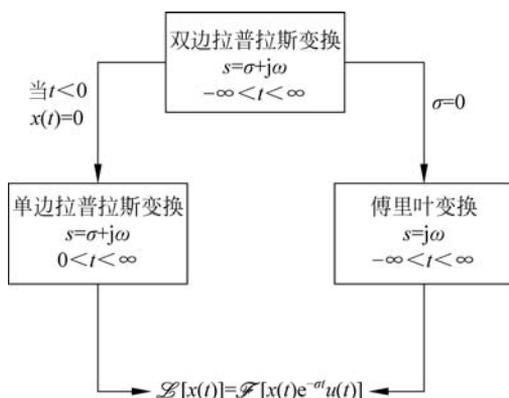


图 5.1.2 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

$$X(s) = \frac{1}{s - \alpha}, \quad \text{Re}[s] > \alpha$$

因为 $\alpha < 0$, 收敛域包含虚轴, 傅里叶变换和拉普拉斯变换都存在, 并且

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$$

例 5.1.8 求阶跃信号 $x(t) = u(t)$ 的傅里叶变换和拉普拉斯变换。

解: 根据前面学习过的变换对, 可以直接得到

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}[s] > 0$$

此时收敛域以虚轴为边界, 傅里叶变换和拉普拉斯变换都存在, 但

$$X(j\omega) \neq X(s) \Big|_{s=j\omega}$$

例 5.1.9 求指数增长信号 $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$ 的傅里叶变换和拉普拉斯变换。

解: 由于指数增长信号不满足绝对可积, 傅里叶变换不存在。而拉普拉斯变换存在:

$$X(s) = \frac{1}{s - \alpha}, \quad \text{Re}[s] > \alpha$$

因为 $\alpha > 0$, 收敛域不包含虚轴。

综合以上分析, 可以得出以下结论:

(1) 当拉普拉斯变换的收敛域包含虚轴时, 拉普拉斯变换和傅里叶变换都存在, 并且 $X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$;

(2) 当拉普拉斯变换的收敛域以虚轴为边界时, 拉普拉斯变换和傅里叶变换都存在, 但傅里叶变换中含有冲激函数, 故 $X(j\omega) \neq X(s) \Big|_{s=j\omega}$;

(3) 当拉普拉斯变换的收敛域不包含虚轴并且不以虚轴为边界时, 拉普拉斯变换存在, 但傅里叶变换不存在。



动图演示



教学视频

5.2 拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯变换有一些基本性质,这些性质反映了信号的时域特性和复频域特性的关系。掌握这些性质对求一些复杂信号的拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换带来方便。这些性质与傅里叶变换的性质在很多情况下是相似的。

5.2.1 线性特性

$$\text{若 } x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad \sigma > \sigma_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad \sigma > \sigma_2$$

$$\text{则 } a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) \quad (5.2.1)$$

式中, a_1, a_2 为任意常数,收敛域为两函数收敛域的重叠部分。

5.2.2 时移(延时)特性

$$\text{若 } x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \sigma > \sigma_c$$

$$\text{则 } x(t - t_0)u(t - t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}, \quad \sigma > \sigma_c \quad (5.2.2)$$

式中, $t_0 > 0$ 。

$$\text{证明: } \mathcal{L}[x(t - t_0)u(t - t_0)] = \int_{t_0}^{\infty} x(t - t_0)e^{-st} dt$$

令 $\tau = t - t_0$, 于是有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t - t_0)u(t - t_0)] &= \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} e^{-st_0} d\tau \\ &= e^{-st_0} \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} \cdot X(s) \end{aligned}$$

例 5.2.1 求矩形脉冲信号

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的拉普拉斯变换。

解: 由于

$$x(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

所以

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}[u(t) - u(t - \tau)] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s\tau} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \end{aligned}$$

在应用时移特性时,需要注意信号的几种时移情况,例如 $x(t - t_0), x(t - t_0)u(t),$

$x(t)u(t-t_0)$, $x(t-t_0)u(t-t_0)$ 。设 $x(t) = \sin(\omega t)$, 则 $\sin\omega(t-t_0)$, $\sin\omega(t-t_0)u(t)$, $\sin(\omega t)u(t-t_0)$, $\sin\omega(t-t_0)u(t-t_0)$ 这几种时移信号如图 5.2.1 所示。

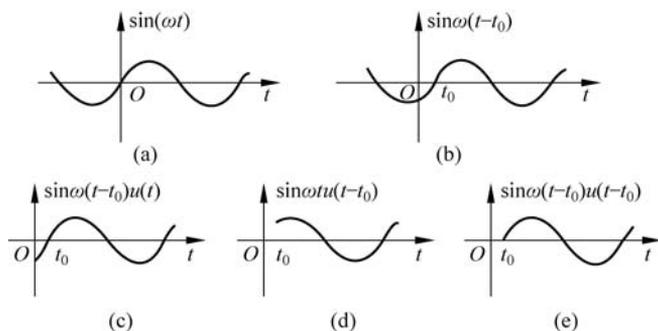


图 5.2.1 时移信号的波形

时移特性只适用于求 $x(t-t_0)u(t-t_0)$ 的拉普拉斯变换, 即图 5.2.1(e) 所示的时移信号。

运用时移特性还可方便地求出周期信号的拉普拉斯变换。

例 5.2.2 求图 5.2.2 所示矩形脉冲信号的拉普拉斯变换。

解: 该矩形脉冲信号可写作

$$x_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t-nT) \cdot u(t-nT)$$

其中, $x(t) = u(t) - u(t-\tau)$ 为单个矩形脉冲。其拉普拉斯变换 $X(s)$ 已在例 5.2.1 中求出, 即

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$$

利用时移特性, 有

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(t-nT) \cdot u(t-nT) \\ &\leftrightarrow X(s) [1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots + e^{-nsT} + \dots] \\ &= X(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s \cdot (1 - e^{-sT})} \end{aligned}$$



图 5.2.2 矩形脉冲信号

5.2.3 复频移特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\sigma > \sigma_c$

则 $x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0)$, $\sigma - \sigma_0 > \sigma_c$ (5.2.3)

式中, $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ 为复常数。

证明:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(t)e^{s_0 t}] &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{s_0 t} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-(s-s_0)t} dt \\ &= X(s-s_0)\end{aligned}$$

例 5.2.3 求 $e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t)u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 因为

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

所以

$$e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad (5.2.4)$$

类似可得

$$e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad (5.2.5)$$

5.2.4 尺度变换特性

若

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \sigma > \sigma_c$$

则

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \sigma > a\sigma_c, a > 0 \quad (5.2.6)$$

证明:

$$\mathcal{L}[x(at)] = \int_{0^-}^{\infty} x(at)e^{-st} dt$$

令 $\tau = at, d\tau = a dt$

所以 $\mathcal{L}[x(at)] = \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$

如果信号函数既时移又变换时间尺度,其拉普拉斯变换结果具有普遍意义,即若

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \sigma > \sigma_c$$

则

$$x(at-t_0)u(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{s}{a}t_0}, \quad \sigma > a\sigma_c \quad (5.2.7)$$

证明: 方法一: 按定义式求

$$\mathcal{L}[x(at-t_0)u(at-t_0)] = \int_{0^-}^{\infty} x(at-t_0)u(at-t_0)e^{-st} dt$$

令

$$at-t_0 = \tau, \quad d\tau = a dt$$

则

$$\mathcal{L}[x(at-t_0)u(at-t_0)] = \int_0^{\infty} x(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau \frac{1}{a} e^{-\frac{s}{a}t_0}$$

方法二:

$$x(at-t_0)u(at-t_0) = x\left[a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right]u\left[a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right]$$

由尺度变换特性,有

$$x(at)u(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

由时移特性,有

$$x \left[a \left(t - \frac{t_0}{a} \right) \right] u \left[a \left(t - \frac{t_0}{a} \right) \right] \leftrightarrow \frac{1}{a} X \left(\frac{s}{a} \right) e^{-\frac{s}{a} t_0}$$

如果信号函数既时移又复频移,其结果也具有一般性,即若

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \sigma > \sigma_c$$

$$\text{则} \quad e^{-s_0(t-t_0)} x(t-t_0) u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-s_0} X(s+s_0), \quad \sigma + \sigma_0 > \sigma_c \quad (5.2.8)$$

$$\text{证明: } \mathcal{L} [e^{-s_0(t-t_0)} x(t-t_0) u(t-t_0)] = \int_{t_0}^{\infty} e^{-s_0(t-t_0)} x(t-t_0) e^{-st} dt$$

$$\text{令 } \tau = t - t_0, d\tau = dt$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad & \mathcal{L} [e^{-s_0(t-t_0)} x(t-t_0) u(t-t_0)] \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-s_0\tau} x(\tau) e^{-s\tau} e^{-s_0} d\tau = e^{-s_0} \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) e^{-(s+s_0)\tau} d\tau \\ &= e^{-s_0} X(s+s_0) \end{aligned}$$

5.2.5 时域微分定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\sigma > \sigma_c$, 且 $\frac{dx(t)}{dt}$ 存在

$$\text{则} \quad \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^-) \quad (5.2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \quad \mathcal{L} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

因为 $x(t)$ 是指数阶信号,在收敛域内有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-st} = 0$

$$\text{所以} \quad \mathcal{L} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = sX(s) - x(0^-)$$

同理可以推证

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (5.2.10)$$

例 5.2.4 已知 $x(t) = e^{-at} u(t)$, 求 $\frac{dx(t)}{dt}$ 的拉普拉斯变换。

解: 可用两种方法求解。

解法一: 由基本定义式求。

$$\text{因为} \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [e^{-at} u(t)] = \delta(t) - a e^{-at} u(t)$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \mathcal{L}[\delta(t)] - \mathcal{L}[ae^{-at}u(t)] \\ &= 1 - \frac{a}{s+a} = \frac{s}{s+a}\end{aligned}$$

解法二：由微分性质求。

已知 $x(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}$, $x(0^-) = 0$

则

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) = \frac{s}{s+a}$$

5.2.6 时域积分定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\sigma > \sigma_c$

则

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-) \quad (5.2.11)$$

其中, $x^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$ 为 $x(t)$ 积分的初始值。

证明：因为

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$$

所以

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau\right] + \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right]$$

其中, 右端第一项积分为常数, 即

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-)$$

第二项积分由分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right] \Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s}X(s)\end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s) + \frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-)$$

如果函数积分区间从零开始, 则有

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s) \quad (5.2.12)$$

同理可推证

$$\underbrace{\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t}_{n \uparrow} x(t) \underbrace{dt dt \cdots dt}_{n \uparrow} \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s) \quad (5.2.13)$$

例 5.2.5 求 $x(t) = t^2 u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解：因为
$$tu(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

应用积分定理可得
$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad (5.2.14)$$

$$t^2 u(t) \leftrightarrow \frac{2}{s^3} \quad (5.2.15)$$

5.2.7 s 域微分定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \sigma > \sigma_c$

则
$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad (5.2.16)$$

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad (5.2.17)$$

证明：根据定义
$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

所以
$$\begin{aligned} \frac{dX(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} [-tx(t)] e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}[-tx(t)] \end{aligned}$$

同理可推出

$$\frac{d^n X(s)}{ds^n} = \int_0^{\infty} (-t)^n x(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[(-t)^n x(t)]$$

例 5.2.6 求 $x(t) = te^{-at} u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解：因为 $e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$

根据式(5.2.12)可直接写出

$$-te^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = -\frac{1}{(s+a)^2}$$

即
$$te^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2} \quad (5.2.18)$$

5.2.8 s 域积分定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \sigma > \sigma_c$

则
$$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(s_1) ds_1 \quad (5.2.19)$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_s^\infty X(s_1) ds_1 &= \int_s^\infty \left[\int_{0^-}^\infty x(t) e^{-s_1 t} dt \right] ds_1 \\ &= \int_{0^-}^\infty x(t) \left[\int_s^\infty e^{-s_1 t} ds_1 \right] dt = \int_{0^-}^\infty x(t) \frac{1}{t} e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L} \left[\frac{x(t)}{t} \right] \end{aligned}$$

例 5.2.7 求 $x(t) = \frac{\sin t}{t} u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 因为 $\sin t u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1}$

所以
$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{\sin t}{t} u(t) \right] &= \int_s^\infty \frac{1}{s_1^2 + 1} ds_1 \\ &= \arctan s_1 \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s \\ &= \arctan(1/s) \end{aligned}$$

5.2.9 初值定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \sigma > \sigma_c$, 且 $x(t)$ 不含冲激或冲激和各阶导数

则
$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (5.2.20)$$

证明: 由时域微分定理可知

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= \int_{0^-}^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

因为在区间 $(0^-, 0^+)$, $t=0, e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$

所以
$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= x(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

令 $s \rightarrow \infty$, 对上式两边取极限有

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

5.2.10 终值定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\sigma > \sigma_c$

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ (5.2.21)

证明: 由时域微分定理

$$sX(s) - x(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

令 $s \rightarrow 0$ 对上式取极限

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-) &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(\infty) - x(0^-) \end{aligned}$$

所以

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

5.2.11 卷积定理

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$, $\sigma > \sigma_1$

$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$, $\sigma > \sigma_2$

则 $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) \cdot X_2(s)$ (5.2.22)

其收敛域至少是 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ 收敛域的重叠部分。

证明: $\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt$

因为 $t - \tau < 0$ 时, $x_2(t - \tau) = 0$

令 $t - \tau = h$, $dh = dt$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_0^{\infty} x_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^{\infty} x_2(h) e^{-sh} dh \\ &= X_1(s) \cdot X_2(s) \end{aligned}$$

例 5.2.8 已知 $x_1(t) = e^{-\lambda t} u(t)$, $x_2(t) = u(t)$, 求 $x_1(t) * x_2(t)$ 。

解: $x_1(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \lambda} = X_1(s)$, $x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} = X_2(s)$

而 $X_1(s) \cdot X_2(s) = \frac{1}{s + \lambda} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda} \right)$

所以 $x_1(t) * x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s) \cdot X_2(s)]$

$$= \frac{1}{\lambda} [1 - e^{-\lambda t}] u(t)$$



教学视频

5.3 拉普拉斯反变换

在系统复频域分析中,经常会遇到求拉普拉斯反变换的问题。对于单边拉普拉斯变换,象函数 $X(s)$ 的拉普拉斯反变换为

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, & t \geq 0 \end{cases} \quad (5.3.1)$$

这是一个复变函数积分,直接积分比较困难。下面介绍对常遇到的 $X(s)$ 求拉普拉斯反变换的几种一般性方法。

5.3.1 利用拉普拉斯性质求反变换

如果 $X(s)$ 是一些比较简单的函数,可利用常见信号的拉普拉斯变换表(见附录 A.10),查出对应的原函数号,或者借助拉普拉斯变换若干性质,配合查表,求出原函数,即信号。

例 5.3.1 已知 $X(s) = 2 + \frac{s+2}{(s+2)^2 + 2^2}$, 求其拉普拉斯反变换 $x(t)$ 。

解: 由式(5.1.12)和式(5.2.5)可知

$$\begin{aligned} 2\delta(t) &\leftrightarrow 2 \\ e^{-2t} \cos 2tu(t) &\leftrightarrow \frac{s+2}{(s+2)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

所以 $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = 2\delta(t) + e^{-2t} \cos 2tu(t)$

例 5.3.2 求 $X(s) = \frac{1}{s^3}(1 - e^{-st_0})$ 的拉普拉斯反变换, $t_0 > 0$ 。

解: $X(s) = \frac{1}{s^3}(1 - e^{-st_0})$ 可写成

$$X(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{s} (1 - e^{-st_0})$$

由式(5.2.14)可知

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

由式(5.1.15)可知

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

根据拉普拉斯变换的线性和时移性质可得

$$u(t) - u(t - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{s}(1 - e^{-st_0})$$

由卷积定理可知

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = [tu(t)] * [u(t) - u(t-t_0)] \\
 &= \left[\int_{-\infty}^t xu(x)dx \right] * [\delta(t) - \delta(t-t_0)] \\
 &= \frac{1}{2}t^2u(t) - \frac{1}{2}(t-t_0)^2u(t-t_0)
 \end{aligned}$$

5.3.2 部分分式展开法求解反变换

分析线性非时变系统时,常常遇到的象函数 $X(s)$ 是 s 的有理分式,可以用长除法把 $X(s)$ 分解为关于 s 的有理多项式与真分式之和。有理真分式是 s 的两个多项式之比,可以写成

$$X_1(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad (5.3.2)$$

式中, $m < n$, 各系数 a_i ($i=0, 1, 2, \cdots, m$), b_j ($j=0, 1, \cdots, n-1$) 都是实数。

求 $X(s)$ 的反变换归结为求有理真分式 $X_1(s)$ 的反变换,可用将有理真分式展开成部分分式的方法来求。下面讨论用这种方法求反变换问题。

首先要求出 $B(s)=0$ 的 n 个根(称为 $X_1(s)$ 的极点),它有几种情况。

1. $B(s)=0$ 为单值根(单极点)

如果 $B(s)=0$ 的根都是单根,即 n 个根 s_k ($1, 2, \cdots, n$) 都互不相等,则 $X_1(s)$ 可以展开成如下部分分式:

$$X_1(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-s_i} \quad (5.3.3)$$

式中, K_i 为特定系数。

$$K_i = (s-s_i)X_1(s) \Big|_{s=s_i} = (s-s_i) \frac{A(s)}{B(s)} \Big|_{s=s_i} \quad (5.3.4)$$

或

$$K_i = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{A(s)}{B'(s)} = \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} \quad (5.3.5)$$

将 K_i 代入式(5.3.3)得

$$X_1(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} \frac{1}{s-s_i} \quad (5.3.6)$$

则

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} e^{s_i t}, \quad t \geq 0 \quad (5.3.7)$$

例 5.3.3 求 $X(s) = \frac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$ 的拉普拉斯反变换 $x(t)$ 。

解: $B(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s+3)(s+2)(s+1)$

所以
$$X(s) = \frac{K_1}{s+3} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_1 = (s+3)X(s)|_{s=-3} = 6$$

$$K_2 = (s+2)X(s)|_{s=-2} = -5$$

$$K_3 = (s+1)X(s)|_{s=-1} = 1$$

因此
$$x(t) = (6e^{-3t} - 5e^{-2t} + e^{-t})u(t)$$

例 5.3.4 求 $X(s) = \frac{3s^3 + 8s^2 + 7s + 1}{s^2 + 3s + 2}$ 的拉普拉斯反变换 $x(t)$ 。

解: 因为 $m > n$, $X(s)$ 不是真分式, 应先用长除法将其化为真分式, 即

$$\begin{aligned} X(s) &= 3s - 1 + \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2} \\ &= 3s - 1 + \frac{4s + 3}{(s+2)(s+1)} = 3s - 1 + X_1(s) \end{aligned}$$

$$X_1(s) = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+1}$$

$$K_1 = (s+2)X_1(s)|_{s=-2} = 5$$

$$K_2 = (s+1)X_1(s)|_{s=-1} = -1$$

因为 $\mathcal{L}^{-1}[3s] = 3\delta'(t)$, $\mathcal{L}^{-1}[-1] = -\delta(t)$

所以
$$x(t) = 3\delta'(t) - \delta(t) + 5e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t)$$

2. $B(s) = 0$ 有重根

设 $B(s) = 0$ 有一个 p 阶重根 s_1 , $(n-p)$ 个单值根 s_i ($i = 2, 3, \dots, n-p+1$), 则 $X_1(s)$ 可写成

$$X_1(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s-s_1)^p B_2(s)} \quad (5.3.8)$$

其中, $B_2(s) = (s-s_2)(s-s_3)\cdots(s-s_{n-p+1})$ 。

令 $X_2(s) = \sum_{i=2}^{n-p+1} \frac{K_i}{s-s_i}$, 其原函数求法同前单值根相同。

这时 $X_1(s)$ 可分解成

$$X_1(s) = \frac{K_{11}}{(s-s_1)^p} + \frac{K_{12}}{(s-s_1)^{p-1}} + \cdots + \frac{K_{1p}}{(s-s_1)} + X_2(s) \quad (5.3.9)$$

系数 K_{1i} ($i = 1, 2, \dots, p$) 求法如下:

$$K_{11} = (s-s_1)^p X_1(s)|_{s=s_1} \quad (5.3.10)$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} [(s-s_1)^{p-1} X_1(s)]|_{s=s_1} \quad (5.3.11)$$

⋮

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s-s_1)^p X_1(s)] \Big|_{s=s_1} \quad (5.3.12)$$

因为 $\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, 利用复频移特性可得原函数:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^p \frac{K_{1i}}{(s-s_1)^{p+1-i}} \right] + \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] \\ &= e^{s_1 t} \sum_{i=1}^n \frac{K_{1i}}{(p-i)!} t^{p-i} + \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)], \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

例 5.3.5 求 $X(s) = \frac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^3}$ 的拉普拉斯反变换 $x(t)$ 。

解:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{K_{11}}{(s+3)^3} + \frac{K_{12}}{(s+3)^2} + \frac{K_{13}}{s+3} + \frac{K_2}{s+1} \\ K_{11} &= (s+3)^3 X(s) \Big|_{s=-3} = -6 \\ K_{12} &= \frac{d}{ds} [(s+3)^3 X(s)] \Big|_{s=-3} = \frac{3}{2} \\ K_{13} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [(s+3)^3 X(s)] \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{4} \\ K_2 &= [(s+1)X(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

所以

$$x(t) = \left[\left(-\frac{6}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4} \right) e^{-3t} + \frac{1}{4} e^{-t} \right] u(t)$$

3. $B(s)=0$ 含有复根

因为 $X(s)$ 为实系数有理式, 当出现复根时, 必共轭成对。这时原函数将出现正弦或余弦项。把 $B(s)$ 作为一个整体来考虑, 可使求解过程简化。

例 5.3.6 求 $X(s) = \frac{3s+5}{s^2+2s+2}$ 的拉普拉斯反变换 $x(t)$ 。

解: 因为 $B(s) = s^2+2s+2$ 有一对共轭复根 $s_{1,2} = -1 \pm j1$
把分母多项式统一处理, 即

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3s+5}{s^2+2s+1+1} = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+1} \\ \text{则} \quad x(t) &= (3\cos t + 2\sin t) e^{-t} u(t) \end{aligned}$$

4. 留数法(反演积分)

留数法就是直接计算式(5.3.1)的积分, 现将该式重写如下:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad t \geq 0 \quad (5.3.14)$$

这是复变函数积分问题。根据复变函数理论中的留数定理知, 若函数 $x(z)$ 在区域 D 内

除有限个奇点外处处解析, c 为 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭合曲线, 则有

$$\oint_c x(z) dz = 2\pi j \sum \text{Res}[x(z), z_i] \quad (5.3.15)$$

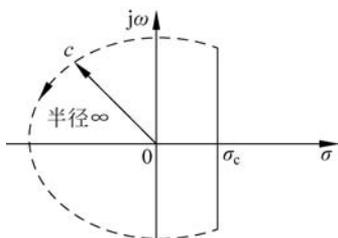


图 5.3.1 留数定理计算围线积分示意图

为了能用留数定理计算式(5.3.14)的积分, 可从 $\sigma - j\infty$ 到 $\sigma + j\infty$ 补足一条积分路径, 构成一闭合围线积分, 如图 5.3.1 所示。补足的这条路径 c , 是半径为 ∞ 的圆弧, 可以证明, 沿该圆弧的积分应为零, 即 $\int_c X(s)e^{st} ds = 0$, 这样上面的积分就可用留数

定理求出, 它等于围线中被积函数 $X(s)e^{st}$ 所有极点的留数和, 即

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \sum_{\text{极点}} [X(s)e^{st} \text{ 的留数}] \cdot u(t) \quad (5.3.16)$$

下面给出用留数法求拉普拉斯反变换的公式:

(1) $X(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ 为有理真分式, 且只有 n 个单值极点。

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^n \text{Res}[X(s)e^{st}; s_k] \cdot u(t) \\ &= \sum_{k=1}^n [(s - s_k)X(s)e^{st}]|_{s=s_k} \cdot u(t) \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

或

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} e^{s_i t} \cdot u(t) \quad (5.3.18)$$

(2) $X(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ 为 n 阶有理真分式, 且有 p 阶重极点 s_1 及 $(n-p)$ 阶单值极点。

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(p-1)}}{ds^{(p-1)}} \left[(s - s_1)^p \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right] \cdot u(t) + \\ &\quad \sum_{k=n-p}^n [(s - s_k)X(s)e^{st}]|_{s=s_k} \cdot u(t) \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

例 5.3.7 求 $X(s) = \frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}$ 的拉普拉斯反变换 $x(t)$ 。

解: $X(s)$ 有两个单值极点 $s_1=0$, $s_2=-3$ 和一个二重极点 $s_3=-1$, 留数分别为

$$\text{Res}[s_1] = [(s - s_1)X(s)e^{st}]_{s=s_1} = \frac{(s+2)e^{st}}{(s+3)(s+1)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Res}[s_2] = [(s - s_2)X(s)e^{st}]_{s=s_2} = \frac{(s+2)e^{st}}{s(s+1)^2} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{12}e^{-3t}$$

$$\text{Res}[s_3] = \frac{1}{1} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{(s+2)}{s(s+3)(s+1)^2} e^{st} \right] \Big|_{s=-1} = \left(-\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{-t}$$

所以

$$x(t) = \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{12}e^{-3t} - \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4} \right) e^{-t} \right] u(t)$$

当象函数 $X(s)$ 为有理分式时,用留数法求拉普拉斯反变换并无突出的优点,但当 $X(s)$ 不能展开为部分分式时,就只能用留数法了。

5. 级数展开法

对于 $X(s)$ 含有非整幂的无理函数,不能展开成简单的部分分式。欲求其反变换,必须通过留数法。但有些简单的无理函数的反变换可用级数展开方式求出。以下通过例子说明。

例 5.3.8 求 $X(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ 的拉普拉斯反变换 $x(t)$ 。

解: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} = \frac{1}{s \sqrt{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2}} = \frac{1}{s} \left[1+\left(\frac{a}{s}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

可将其展开成幂级数

$$\frac{1}{s \sqrt{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2}} = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{2s^3} + \frac{3a^4}{2!2^2s^5} - \frac{3 \cdot 5a^6}{3!2^3s^7} + \dots$$

因为 $\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

所以
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right] &= 1 - \frac{1}{2^2}(at)^2 + \frac{1}{2^2 4^2}(at)^4 - \frac{1}{2^2 4^2 6^2}(at)^6 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{at}{2}\right)^{2k} = J_0(at) \end{aligned}$$

J_0 称为零阶的第一类贝赛尔函数。

5.4 双边拉普拉斯变换

如果时间函数信号 $x(t)$ 为双边信号,则其拉普拉斯变换式为

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (5.4.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_B(s) e^{st} ds, \quad -\infty < t < \infty \quad (5.4.2)$$

上两式称为双边拉普拉斯变换。将单边拉普拉斯变换中所讨论的问题稍加修改,即可用于分析双边拉普拉斯变换。

5.4.1 收敛域

当采用单边拉普拉斯变换时,只限于 $t > 0$,若选 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_1$ (σ_1 为收敛坐标) 则

$t \rightarrow \infty$ 时, $x(t)e^{-\sigma t} \rightarrow 0$ 。对于双边拉普拉斯变换还应考虑 $t < 0$ 的情况, 这时 $e^{-\sigma t}$ 将随着 $|t|$ 的增大而增大, 因此 σ 又不能选得过大。为使式(5.4.1)的积分收敛, σ 应小于另一收敛坐标 σ_2 , 即应使

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma < \sigma_2$$

因此, 双边拉普拉斯变换的收敛条件为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma > \sigma_1 \quad (5.4.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma < \sigma_2 \quad (5.4.4)$$

则其双边拉普拉斯变换在 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ 区域上存在。在复平面上, 区域 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ 称为双边拉普拉斯变换的收敛域。

例 5.4.1 确定下列信号的拉普拉斯变换的收敛域:

$$(1) x_1(t) = \begin{cases} e^{at}, & t < 0, a > 0 \\ e^{-at}, & t > 0, a > 0 \end{cases}$$

$$(2) x_2(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t < 0, a > 0 \\ e^{at}, & t > 0, a > 0 \end{cases}$$

$$(3) x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

解: (1) $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma + a > 0$

即 $\sigma > -a, \quad \sigma_1 = -a$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{at} e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma - a < 0$$

即 $\sigma < a, \quad \sigma_2 = a$

所以其收敛域为 $-a < \sigma < a$ 。

$$(2) \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma - a > 0$$

即 $\sigma > a, \quad \sigma_1 = a$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_2(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-at} e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma + a < 0$$

即 $\sigma < -a, \quad \sigma_2 = -a$

以上两项积分无公共收敛域, 所以对 $x_2(t)$ 而言, $X(s)$ 不存在。

$$(3) \lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow \infty} 0e^{-\sigma t} = 0, \quad -\infty < \sigma$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 0e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma < \infty$$

所以其收敛域为 $-\infty < t < \infty$, 即全平面收敛, 可写为 $\sigma > -\infty$ 。

5.4.2 双边拉普拉斯变换的求法及基本性质

分析双边拉普拉斯变换,不妨把双边信号分成两个单边信号,即

$$x_1(t) = x(t)u(t) \quad (5.4.5)$$

$$x_2(t) = x(t)u(-t) \quad (5.4.6)$$

这样,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= x(t)u(t) + x(t)u(-t) \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

对式(5.4.7)进行双边拉普拉斯变换,有

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^0 x(t)u(-t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} x(t)u(t)e^{-st} dt \quad (5.4.8)$$

式(5.4.8)中第二个积分正是函数 $x(t)$ 的单边拉普拉斯变换,即

$$X_2(s) = \int_0^{\infty} x(t)u(t)e^{-st} dt, \quad \sigma > \sigma_1$$

$$X_{B_2}(s) = X_2(s), \quad \sigma > \sigma_1$$

式(5.4.8)的第一个积分中,令 $t = -\tau$,代入得

$$\begin{aligned} X_{B_1}(s) &= -\int_{\infty}^0 x(-\tau)u(\tau)e^{-(-s)\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} x(-\tau)u(\tau)e^{-(-s)\tau} d\tau \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

$$\text{令} \quad X_1(s) = \int_0^{\infty} x(-t)u(t)e^{-st} dt, \quad \sigma > \sigma_2 \quad (5.4.10)$$

$$\text{则} \quad X_{B_1}(s) = X_1(-s), \quad \sigma < -\sigma_2 \quad (5.4.11)$$

于是函数 $x(t)$ 的双边拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} X_B(s) &= X_{B_1}(s) + X_{B_2}(s) \\ &= X_1(-s) + X_2(s), \quad \sigma_1 < \sigma < -\sigma_2 \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

例 5.4.2 求信号 $x(t) = \begin{cases} e^{at}, & t < 0, a > 0 \\ e^{-bt}, & t > 0, b > 0 \end{cases}$ 的双边拉普拉斯变换,并说明其收敛域。

解:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= e^{at}u(-t) + e^{-bt}u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \mathcal{L}[x_1(-t)u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \sigma > -a \end{aligned}$$

所以有

$$X_{B_1}(s) = X_1(-s) = \frac{1}{-s+a}, \quad \sigma < a$$

$$X_2(s) = \mathcal{L}[x_2(t)u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s+b}, \quad \sigma > -b$$

$$X_{B_2}(s) = X_2(s) = \frac{1}{s+b}, \quad \sigma > -b$$

最后得 $x(t)$ 的双边拉普拉斯变换

$$X_B(s) = \mathcal{L}[x(t)] = X_{B_1}(s) + X_{B_2}(s)$$

$$= \frac{1}{-s+a} + \frac{1}{s+b}$$

$$= \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-a}, \quad -b < \sigma < a$$

例 5.4.3 求 $x(t) = [-e^{at} + e^{-bt}]u(t)$, $a > 0, b > 0$ 的双边拉普拉斯变换, 并说明其收敛域。

解: 此函数为单边函数, 其双边拉普拉斯变换和单边拉普拉斯变换相同。

$$X_B(s) = \int_0^{\infty} [e^{-bt} - e^{at}]e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a$$

由上两例的结果可见, 这两例虽是不同的时间信号波形, 但它们的双边拉普拉斯变换在形式上却是相同的。可见相同的双边拉普拉斯变换式, 当取不同的收敛域时, 其 $x(t)$ 是各异的。这说明确定双边拉普拉斯变换收敛域尤为重要。

前面讨论的单边拉普拉斯变换的性质也适用于双边拉普拉斯变换, 所不同的是要注意收敛域的确定。这里不作详细的讨论, 其性质列于表 5.4.1 以供查阅。

表 5.4.1 双边拉普拉斯变换的性质

名称	$x(t) \leftrightarrow X_B(s)$	
	时域	s 域
定义	$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_B(s) e^{st} ds$	$X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ $\alpha < \sigma < \beta$
线性	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_{B_1}(s) + a_2 X_{B_2}(s)$ $\max(\alpha_1, \alpha_2) < \sigma < \min(\beta_1, \beta_2)$
尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X_B\left(\frac{s}{a}\right), \alpha < \frac{\sigma}{ a } < \beta$
时移	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0} X_B(s), \alpha < \sigma < \beta$
复频移	$e^{-s_0 t} x(t)$	$X_B(s+s_0)$ $\alpha - \operatorname{Re}[s_0] < \sigma < \beta - \operatorname{Re}[s_0]$

续表

名称	$x(t) \leftrightarrow X_B(s)$	
	时域	s 域
时域微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX_B(s), \alpha < \sigma < \beta$
时域积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}X_B(s), \max(\alpha, 0) < \sigma < \beta$
	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}X_B(s), \alpha < \sigma < \min(\beta, 0)$
时域卷积	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_{B_1}(s) \cdot X_{B_2}(s)$ $\max(\alpha_1, \alpha_2) < \sigma < \min(\beta_1, \beta_2)$
频域卷积	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_{B_1}(\eta) X_{B_2}(s-\eta) d\eta$ $\alpha_1 + \alpha_2 < \sigma < \beta_1 + \beta_2$ $\alpha_1 < c < \beta_1$
s 域微分	$(-t)^n x(t)$	$\frac{d^n X_B(s)}{ds^n}, \alpha < \sigma < \beta$

5.4.3 双边拉普拉斯反变换

可以用求单边拉普拉斯反变换的方法求解双边拉普拉斯反变换。但要注意,在双边拉普拉斯反变换中,给出的 $X_B(s)$ 可以由不同的收敛条件而对应于不同的 $x(t)$, 因此要依据收敛条件去恢复 $x(t)$ 。下面举例说明。

例 5.4.4 已知象函数 $X_B(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$, 试分别求出其收敛域为以下三种情况的双边拉普拉斯反变换:

- (1) $\sigma > -1$;
- (2) $\sigma < -2$;
- (3) $-2 < \sigma < -1$ 。

解: 首先将 $X_B(s)$ 展开为部分分式:

$$X_B(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = (s+1)X_B(s) \Big|_{s=-1} = 1$$

$$K_2 = (s+2)X_B(s) \Big|_{s=-2} = 1$$

所以

$$X_B(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

(1) 对于 $\sigma > -1$ 。这时 $X_1(-s) = 0$, 其原函数仅在 $t > 0$ 时不等于零, 故得

$$X_B(s) = X_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_2(s)] = (e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

(2) 对于 $\sigma < -2$ 。这时 $X_2(s) = 0$, 其原函数仅在 $t < 0$ 时不等于零, 故得

$$X_B(s) = X_1(-s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$X_1(s) = \frac{1}{-s+1} + \frac{1}{-s+2} = \frac{-1}{s-1} + \frac{-1}{s-2}$$

$$x(-t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] = (-e^t - e^{2t})u(t)$$

所以原函数为

$$x(t) = (-e^{-t} - e^{-2t})u(-t)$$

(3) 对于 $-2 < \sigma < -1$ 。这时

$$X_B(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

其中, 极点 $s = -1$ 在收敛域的右边界, 因而上式中第一项应在 $\sigma < -1$ 时收敛, 其原函数在 $t > 0$ 时等于零; $X_B(s)$ 中的极点 $s = -2$ 是收敛域的左边界, 因而上式中第二项应在 $\sigma > -2$ 时收敛, 其原函数在 $t < 0$ 时等于零。

故得

$$X_1(-s) = \frac{1}{s+1}, \quad X_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

所以

$$X_1(s) = \frac{1}{-s+1} = \frac{-1}{s-1}$$

$$x_1(-t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] = -e^t u(t)$$

$$x_1(t) = -e^{-t} u(-t)$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_2(s)] = e^{-2t} u(t)$$

最后得原函数

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= -e^{-t} u(-t) + e^{-2t} u(t) \end{aligned}$$

利用留数计算法求双边拉普拉斯反变换的计算公式为

若 $X_B(s)$ 的收敛域为 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, 则

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \\ &= \begin{cases} -\sum [\text{对 } \sigma \text{ 的右方 } X_B(s) e^{st} \text{ 极点的留数}], & t < 0 \\ \sum [\text{对 } \sigma \text{ 的左方 } X_B(s) e^{st} \text{ 极点的留数}], & t > 0 \end{cases} \quad (5.4.13) \end{aligned}$$

例 5.4.5 用留数法求象函数 $X_B(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$, $-2 < \sigma < -1$ 的拉普拉斯反变换。

解: 根据函数的收敛域 $-2 < \sigma < -1$ 可知极点 $s = -2$ 在 σ 的左边, 极点 $s = -1$ 在 σ 的右边, 根据式(5.4.13), 有

$$x(t) = \begin{cases} -\operatorname{Res}[X_B(s)e^{st}]_{s=-1}, & t < 0 \\ \operatorname{Res}[X_B(s)e^{st}]_{s=-2}, & t > 0 \end{cases}$$

其中,
$$-\operatorname{Res}[X_B(s)e^{st}]_{s=-1} = -(s+1)X_B(s)e^{st} \Big|_{s=-1} = -e^{-t}$$

$$\operatorname{Res}[X_B(s)e^{st}]_{s=-2} = (s+2)X_B(s)e^{st} \Big|_{s=-2} = e^{-2t}$$

故得 $x(t) = \begin{cases} -e^{-t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t > 0 \end{cases}$, 与例 5.4.4 结果相同。

5.5 系统的复频域分析

拉普拉斯变换是分析连续时间线性时不变系统的有力数学工具。本节讨论运用拉普拉斯变换, 求解系统响应的一些问题。

5.5.1 微分方程的复频域求解

如前所述, 描述连续时间线性时不变系统的是常系数线性微分方程, 其一般形式如下:

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

式中, 各系数均为实数, 设系统的初始状态为 $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$ 。

求解系统响应的计算过程就是求解此微分方程。第 2 章中讨论了微分方程的时域求解方法, 求解过程较为烦琐。下面学习用拉普拉斯变换的方法求解微分方程。

令 $x(t) \leftrightarrow X(s), y(t) \leftrightarrow Y(s)$, 根据拉普拉斯变换的时域微分特性, 有

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (5.5.2)$$

$$y^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - s^{n-2} y'(0^-) - \cdots - y^{(n-1)}(0^-) \quad (5.5.3)$$

若输入信号 $x(t)$ 为因果信号, 则 $t=0^-$ 时刻 $x(t)$ 及其各阶导数为零, 所以

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) \quad (5.5.4)$$

这样, 将式(5.5.1)等号两边取拉普拉斯变换, 就可以将描述 $y(t)$ 和 $x(t)$ 之间关系的微分方程变换为描述 $Y(s)$ 和 $X(s)$ 之间关系的代数方程, 并且初始状态已自然地包含在其中, 可直接得出系统的全响应解, 求解步骤简明且有规律。现举例说明。

例 5.5.1 某线性时不变系统 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$, 输入信号 $x(t) = e^{-3t}u(t)$, 初始状态 $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1$, 求全响应。



教学视频



思维导图

解: 对微分方程两边取拉普拉斯变换, 可得

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = 2sX(s) + X(s) \quad (5.5.5)$$

将 $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1, X(s) = \frac{1}{s+3}$ 代入上式得

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 4 = \frac{2s + 1}{s + 3}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 9s + 13}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{5}{s + 1} + \frac{1}{s + 2} - \frac{5}{s + 3}$$

求反变换得

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - \frac{5}{2}e^{-3t}u(t)$$

在第 2 章中讨论了全响应中的零输入响应与零状态响应、自然响应与强迫响应的概念, 这里从 s 域的角度来研究这一问题。

例 5.5.1 中, 由式(5.5.5)可以得到

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}X(s) + \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 3y(0^-)}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} \frac{1}{s + 3} + \frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \underbrace{\frac{-\frac{1}{2}}{s + 1} + \frac{3}{s + 2} + \frac{-\frac{5}{2}}{s + 3}}_{\text{零状态响应 } Y_{zs}(s)} + \underbrace{\frac{3}{s + 1} + \frac{-2}{s + 2}}_{\text{零输入响应 } Y_{zi}(s)}$$

$$= \underbrace{\frac{5}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}}_{\text{自然响应 } Y_n(s)} + \underbrace{\frac{-5}{s + 3}}_{\text{强迫响应 } Y_f(s)}$$

相应地, 有

$$y(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) - \frac{5}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{零状态响应 } y_{zs}(t)} + \underbrace{3e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)}_{\text{零输入响应 } y_{zi}(t)}$$

$$= \underbrace{\frac{5}{2}e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)}_{\text{自然响应 } y_n(t)} + \underbrace{-\frac{5}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{强迫响应 } y_f(t)}$$

可见, $Y(s)$ 的极点由两部分组成, 一部分是系统特征根形成的极点 $-1, -2$ (称为自然频率或固有频率), 构成系统自然响应 $y_n(t)$; 另一部分是激励信号的象函数 $X(s)$ 的极点 -3 , 构成强迫响应 $y_f(t)$ 。所以, 自然响应 $y_n(t)$ 的函数形式由系统的特征根决定, 强迫响应 $y_f(t)$ 的函数形式由激励信号决定。



由例 5.5.1 可见,用拉普拉斯变换求解微分方程有以下三步:

- (1) 对微分方程逐项求拉普拉斯变换,利用微分性质代入初始状态;
- (2) 对拉普拉斯变换方程进行代数运算,求出响应的象函数;
- (3) 对响应的象函数进行拉普拉斯反变换,得到全响应的时域表示。

5.5.2 电路系统的复频域求解

对电路系统进行分析,除了用拉普拉斯变换解微分方程求响应外,还可以利用元件的 s 域模型,直接列出象函数对应的代数方程求解。本节首先讨论基尔霍夫定律在 s 域的形式和电路元件的 s 域模型。

1. 基尔霍夫定律的 s 域形式(运算形式)

基尔霍夫电流定律(KCL)指出:对任意节点,在任一时刻流入(或流出)该节点电流的代数和恒等于零,即

$$\sum i(t) = 0 \quad (5.5.6)$$

对式(5.5.6)进行拉普拉斯变换,可得

$$\sum I(s) = 0 \quad (5.5.7)$$

式中, $I(s)$ 为各相应电流 $i(t)$ 的象函数。

同理可得基尔霍夫电压定律(KVL)在 s 域的形式:

$$\sum U(s) = 0 \quad (5.5.8)$$

式中, $U(s)$ 为各相应支路电压 $u(t)$ 的象函数。式(5.5.8)表明沿任意闭合回路,各段电压象函数的代数和恒等于零。

2. R 、 L 、 C 的 s 域模型(运算阻抗)

1) 电阻 R

根据时域元件的伏安关系,有

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad (5.5.9)$$

对式(5.5.9)取拉普拉斯变换,得

$$U(s) = R \cdot I(s) \quad (5.5.10)$$

式(5.5.10)是电阻 R 上电压与电流在 s 域中的关系,称为 R 的 s 域模型。如图 5.5.1 所示,其元件的象电压(电压象函数)与象电流(电流象函数)之比定义为元件的运算阻抗。

所以电阻 R 的运算阻抗可表示为

$$R = \frac{U(s)}{I(s)} \quad (5.5.11)$$

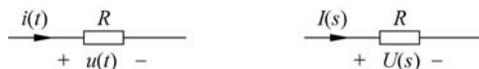


图 5.5.1 电阻及其 s 域模型

2) 电容 C

时域电容元件 C 的伏安关系为

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (5.5.12)$$

由拉普拉斯变换积分性质可得

$$U_C(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{1}{s} u_C(0^-) \quad (5.5.13)$$

$$I(s) = CsU_C(s) - Cu_C(0^-) \quad (5.5.14)$$

式中, $u_C(0^-)$ 为电容上的初始电压。其 s 域模型如图 5.5.2 所示。

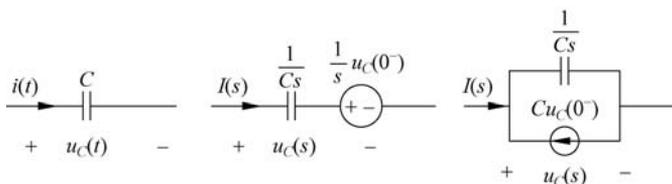


图 5.5.2 电容及其 s 域模型

式(5.5.13)表明,电容上象电压 $U_C(s)$ 和象电流 $I(s)$ 的关系可以看作由容抗(电容的运算阻抗) $1/Cs$ 与内部象电压源 $u_C(0^-)/s$ 相串联组成。式(5.5.14)表明,该电容上象电压 $U_C(s)$ 和象电流 $I(s)$ 的关系也可看作容抗 $1/Cs$ 与内部象电流源 $Cu_C(0^-)$ 相并联组成。

 3) 电感 L

时域电感元件 L 的伏安关系为

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (5.5.15)$$

取拉普拉斯变换,由微分性质可得

$$U(s) = LsI_L(s) - Li_L(0^-) \quad (5.5.16)$$

或

$$I_L(s) = \frac{U(s)}{Ls} + \frac{i_L(0^-)}{s} \quad (5.5.17)$$

式中, $i_L(0^-)$ 为电感的初始电流。其 s 域模型如图 5.5.3 所示。

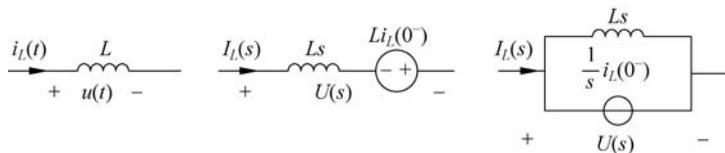


图 5.5.3 电感及其 s 域模型

式中, Ls 称为感抗(电感的运算阻抗), $Li_L(0^-)$ 称为内部象电压源, $i_L(0^-)/s$ 称为内部象电流源。

利用 s 域模型求全响应是一种分析电路系统常用的方法。这种方法首先把电路中的元件用其 s 域模型来代替, 然后利用基尔霍夫定律的 s 域形式, 按电阻电路的分析方法, 列出电路方程, 直接求出响应的象函数, 再进行反变换就得全响应的时域形式。因为这种方法的拉普拉斯变换已体现在 s 域模型中, 避免了在时域列写微积分方程的过程。

例 5.5.2 如图 5.5.4 所示电路, $C=1\text{F}$, $R_1=1/5\Omega$, $R_2=1\Omega$, $L=1/2\text{H}$, $u_C(0^-)=5\text{V}$, $i_L(0^-)=4\text{A}$ 。当 $x(t)=10\text{V}$, 求全响应电流 $i_1(t)$ 。

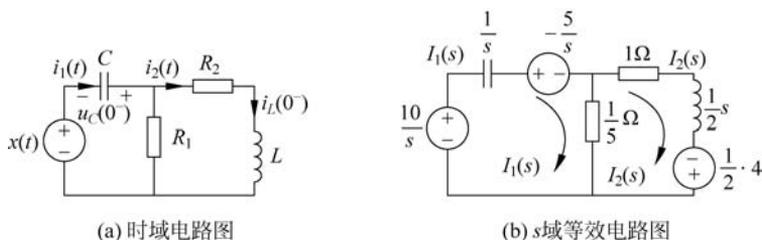


图 5.5.4 例 5.5.2 电路

解: 将电路元件用其 s 域模型替代, 激励用其象函数替代, 作出该电路的 s 域等效电路, 如图 5.5.4(b) 所示。由基尔霍夫定律的 s 域形式可得

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{s}\right)I_1(s) - \frac{1}{5}I_2(s) = \frac{10}{s} + \frac{5}{s} \\ -\frac{1}{5}I_1(s) + \left(\frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{2s}\right)I_2(s) = 2 \end{cases}$$

消去 $I_2(s)$, 经整理得

$$I_1(s) = -\frac{57}{s+3} + \frac{136}{s+4}$$

所以

$$i_1(t) = (-57e^{-3t} + 136e^{-4t})u(t)$$

例 5.5.3 电路如图 5.5.5 所示, $u_C(t)$ 和 $x(t)$ 分别为输出和输入电压。(1) 求系统的单位冲激响应; (2) 为使系统的零输入响应等于单位冲激响应, 试确定系统的初始状态 $i(0^-)$ 和 $u_C(0^-)$ 。

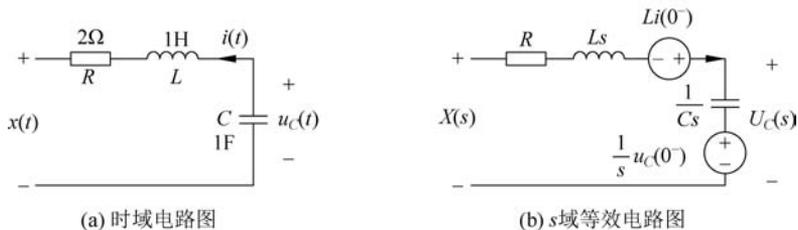


图 5.5.5 例 5.5.3 电路

解: 由图 5.5.5(a) 可得其 s 域等效电路图如图 5.5.5(b) 所示。

(1) 求单位冲激响应 $h(t)$ 。

单位冲激响应为零状态响应, 故等效电路中附加电压源为零, 此时,

$$X(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$H(s) = U_c(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} X(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}$$

代入参数, 整理得

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

所以

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = te^{-t}u(t)$$

(2) 考虑初始状态的作用, 此时 $X(s) = 0$, 输入端相当于短路, 可得

$$I(s) = \frac{Li(0^-) - \frac{1}{s}u_c(0^-)}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}$$

$$U_c(s) = \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{1}{s}u_c(0^-)$$

$$= \frac{(s+2)u_c(0^-) + i(0^-)}{(s+1)^2}$$

根据要求

$$U_c(s) = H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

所以

$$(s+2)u_c(0^-) + i(0^-) = 1$$

由方程两端系数相等, 可得初始状态为

$$i(0^-) = 1, \quad u_c(0^-) = 0$$

5.6 连续时间系统的系统函数及系统特性

5.6.1 系统函数

如前所述, 线性时不变系统可用线性常系数微分方程描述, 即

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t), \quad m \leq n \quad (5.6.1)$$

对式(5.6.1)两边同时取拉普拉斯变换, 并设初始状态为零, 可得零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的象函数为

$$Y_{zs}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X(s) \quad (5.6.2)$$



教学视频

式中, $X(s)$ 为激励 $x(t)$ 的象函数, $N(s)$ 、 $D(s)$ 分别为

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \quad (5.6.3)$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (5.6.4)$$

其中, $D(s)$ 称为微分方程(5.6.1)的特征多项式, $D(s)=0$ 称为特征方程, 它的根称为特征根。

定义系统零状态响应的象函数 $Y_{zs}(s)$ 与激励的象函数 $X(s)$ 之比为系统函数(或传递函数、网络函数), 用 $H(s)$ 表示, 即

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} \quad (5.6.5)$$

由式(5.6.2)知, $H(s)$ 的一般形式是两个 s 的多项式之比, 即

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5.6.6)$$

式(5.6.6)构成的有理分式与外界激励无关, 与系统内部的初始状态也无关(即系统处于零状态), 只取决于输入和输出所构成的系统本身, 因此它决定了系统特性。一旦系统的结构已定, $H(s)$ 就可以计算出来。

引入系统函数的概念以后, 零状态响应的象函数可写为

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \quad (5.6.7)$$

式(5.6.7)和式(5.6.5)中的 $H(s)$ 是否就是单位冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换呢? 下面进行分析。

当输入为单位冲激信号时, 即 $x(t) = \delta(t)$ 时, $X(s) = 1$, 此时的单位冲激响应即为 $h(t)$, 根据式(5.6.7), 其象函数为

$$\mathcal{L}[h(t)] = X(s)H(s) = H(s)$$

上式说明, 单位冲激响应 $h(t)$ 与系统函数 $H(s)$ 是一对拉普拉斯变换对。

对式(5.6.7)取拉普拉斯反变换, 并利用卷积定理, 得到

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)H(s)] = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] * \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = x(t) * h(t)$$

这与时域分析中得到的结论是完全一致的。可见, 拉普拉斯变换把时域中的卷积运算转变为 s 域中的乘积运算。这也提供了一种求解零状态响应的新方法。

例 5.6.1 设有 $x(t) = tu(t)$ 加到图 5.6.1 所示 RC 串联电路输入端, 试求该系统的系统函数 $H(s)$ 以及电容上的电压 $u_C(t)$ 。

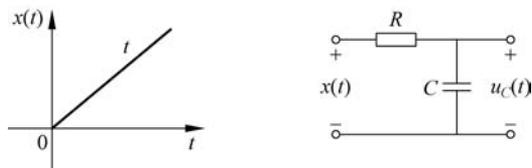


图 5.6.1 RC 串联电路图

解: 由运算等效电路模型可得

$$U_C(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} \cdot X(s)$$

所以其系统函数为

$$H(s) = \frac{U_C(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

因

$$X(s) = \mathcal{L}[t \cdot u(t)] = \frac{1}{s^2}$$

则

$$U_C(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{RC}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{1}{s^2} - \frac{RC}{s}$$

所以, 系统的零状态响应, 即电容上的电压为

$$u_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_C(s)] = [t - RC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})]u(t)$$

5.6.2 系统的极零点分析

本节首先说明极、零点和极零图的概念, 然后讨论系统函数极零点在 s 平面的分布情况与系统性能的关系。本节所涉及的问题, 在系统分析和综合中占有很重要的地位。

1. 系统的极点、零点和极零图

对于 n 阶常系数微分方程描述的系统, 由 5.6.1 节分析可知其系统函数可写为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5.6.8)$$

显然, 除去一个常数因子外, $N(s)$ 、 $D(s)$ 分别可以用它们的根来表示。即 $H(s)$ 又可以表示为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (5.6.9)$$

其中, K 为常数。分母多项式 $D(s) = 0$ 的根为 p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 称为**极点**(即特征根), 分子多项式 $N(s) = 0$ 的根为 z_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 称为**零点**。极点和零点可能为实数或复数。只要 $H(s)$ 表示一个实系统, 则 $N(s)$ 、 $D(s)$ 的系数都为实数, 那么其复数零点或极点必成共轭对出现。显然, 如果不考虑常数 K , 由系统的零点和极点可以得到系统函数 $H(s)$ 。



教学视频



教学视频

在 s 平面上标出 $H(s)$ 的极、零点位置,极点用 \times 表示,零点用 \circ 表示,若为 n 重零点或极点,可在旁注以“(n)”,就得到系统函数的极零点图。极零点图可以表示一个系统,常用来分析系统特性。

例 5.6.2 已知系统函数 $H(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+\frac{3}{2})^2(s^2+s+\frac{5}{4})}$, 求其极点和零点,并画出极

零点图。

解: $H(s)$ 有一个二阶零点: $z_1 = 2$;

有一个二阶极点: $p_1 = -\frac{3}{2}$;

另有两个共轭极点: $p_2 = -\frac{1}{2} + j$, $p_3 = -\frac{1}{2} - j$ 。

极零点图如图 5.6.2 所示。

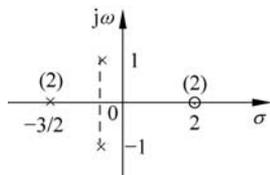


图 5.6.2 例 5.6.2 的极零点图

2. 系统的时域特性与极点位置的关系

系统函数 $H(s)$ 一般是关于 s 的有理分式,通过因式分解和部分分式展开,如果只含有一阶极点,可以将其分解成表 5.6.1 中各式的线性组合。也就是说,根据系统函数 $H(s)$ 的极点,可以得出时域 $h(t)$ 的函数形式。下面以一阶极点为例进行分析,不难得出如图 5.6.3 所示的对应关系。这样,根据 $H(s)$ 极点在 s 平面上的位置就可以得出单位冲激响应 $h(t)$ 的函数形式。

表 5.6.1 常用拉普拉斯变换对及其极点

$x(t)$	$X(s)$	极 点
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$p_1 = 0$
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$p_1 = a$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$p_{1,2} = \pm j\omega_0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$p_{1,2} = \pm j\omega_0$
$e^{at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$p_{1,2} = a \pm j\omega_0$
$e^{at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$p_{1,2} = a \pm j\omega_0$

综合以上分析可以得出以下结论:

对于因果系统, $H(s)$ 在左半开平面的极点所对应的特征模式衰减(或振荡衰减),当 $t \rightarrow \infty$ 时,这部分响应趋于零;在虚轴上的一阶极点对应的特征模式不随时间变化(或等幅振荡);在右半开平面的极点对应的特征模式增长(或振荡增长)。

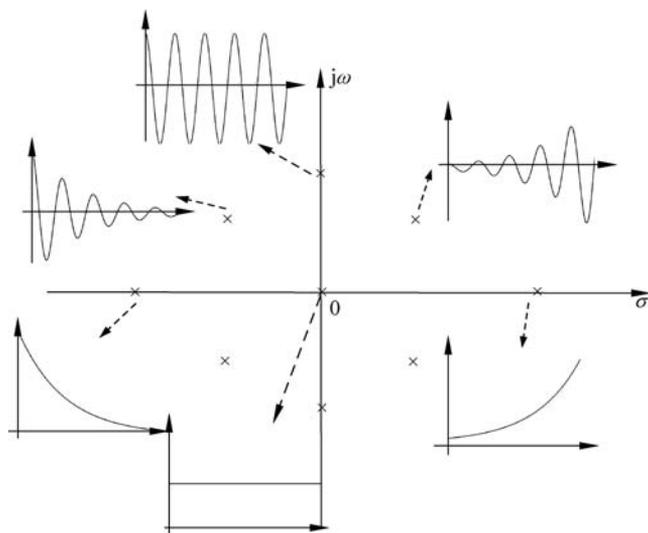


图 5.6.3 $H(s)$ 的极点分布与对应的波形关系

第 2 章中分析了系统自然响应的特征模式由系统的特征根决定,从复频域看就是由系统函数的极点决定,所以,系统自然响应的时域函数形式也可以用以上结论来分析。

注意: 这里的 $H(s)$ 是单边拉普拉斯变换,相应的单位冲激响应 $h(t)$ 为因果信号,即仅针对因果系统给出的分析。

3. 系统的频率响应的极零点分析

本节研究系统的幅频和相频特性与极零点的关系。对于稳定的线性时不变系统,其系统函数 $H(s)$ 是 s 的实系数有理分式,以 $s=j\omega$ 代入式(5.6.9)可得到系统的频率响应,即

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{j=1}^n (j\omega - p_j)} \quad (5.6.10)$$

可以看到,系统频响取决于零、极点的分布,即取决于 p_j, z_j 的位置,而 K 是系数,

对频响特性无关紧要。式(5.6.10)分母中任一极点因子 $j\omega - p_j$ 相当于由极点 p_j 引向虚轴上某点 $j\omega$ 的一个向量,称为极点向量;分子中任一零点因子 $j\omega - z_j$ 相当于由零点 z_j 引向虚轴上某点 $j\omega$ 的一个向量,称为零点向量。图 5.6.4 示出了两个极点向量,记极点向量

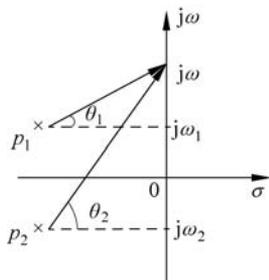


图 5.6.4 极点向量图

$$j\omega - p_j = A_j e^{j\theta_j}$$

其中, $A_j = |j\omega - p_j|, \theta_j = \angle(j\omega - p_j)$ 。

类似地,记零点向量



动图演示



教学视频



动图演示

$$j\omega - z_j = B_j e^{j\varphi_j}$$

其中, $B_j = |j\omega - z_j|$; $\varphi_j = \angle(j\omega - z_j)$ 。

则系统的频率响应为

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \quad (5.6.11)$$

$$\text{其中} \quad |H(j\omega)| = K \frac{|B_1| |B_2| \cdots |B_m|}{|A_1| |A_2| \cdots |A_n|} = K \frac{\prod_{j=1}^m |B_j|}{\prod_{j=1}^n |A_j|} \quad (5.6.12)$$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \\ &= \sum_{j=1}^m \varphi_j - \sum_{j=1}^n \theta_j \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

$|H(j\omega)|$ 称为系统的幅频特性, 等于 K 乘以所有零点向量的模除以所有极点向量的模; $\angle H(j\omega)$ 称为相频特性, 等于所有零点相位和减去所有极点相位的和。

例 5.6.3 求图 5.6.5 所示 RC 电路的频率响应 $H(j\omega)$ 。

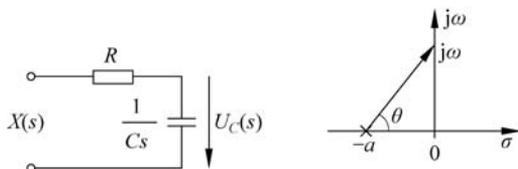


图 5.6.5 例 5.6.3 RC 电路及极零点图

解: 由图 5.6.5 可得

$$H(s) = \frac{U_C(s)}{X(s)} = \frac{a}{s+a}, \quad a = \frac{1}{RC}$$

令 $s = j\omega$ 代入, 则有

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$$

其中, $|H(j\omega)| = \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$; $\angle H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 。

下面根据一些特殊点近似画出幅频和相频特性。

当 $\omega = 0$ 时, $|H(j0)| = 1$, $\angle H(j0) = 0^\circ$;

当 $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j0)|$ 时, $\omega = a = \frac{1}{RC}$, 即 $\omega = \omega_c = \frac{1}{RC}$,

则有 $|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle H(j\omega_c) = -45^\circ$;

当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $|H(j\infty)| \rightarrow 0$, $\angle H(j\infty) \rightarrow -90^\circ$ 。

其幅频和相频特性如图 5.6.6 所示。幅频特性关于纵轴对称(偶对称), 相频特性关于原点对称(奇对称)。

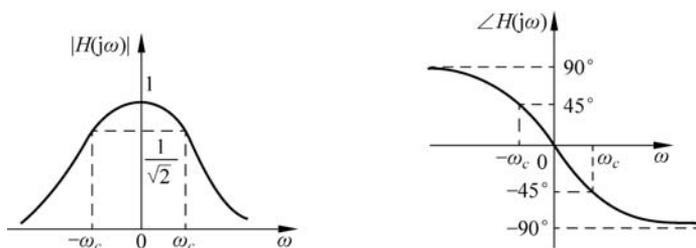


图 5.6.6 例 5.6.3 RC 电路的频率响应图

例 5.6.4 已知某稳定系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{3s}{s+3}$$

画出其频率响应 $H(j\omega)$ 。

解： $H(s)$ 的极零点图和向量图如图 5.6.7(a)和(b)所示。

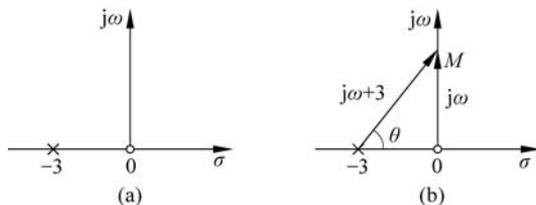


图 5.6.7 例 5.6.4 的极零点图和向量图

由图 5.6.7(b)可见,当频率从正方向趋于 0(即 0^+)时,有

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} 3 \frac{|j\omega|}{|j\omega+3|} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle j\omega - \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle (j\omega+3) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

反之,当频率从负方向趋于 0(即 0^-)时,有

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^-} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0^-} 3 \frac{|j\omega|}{|j\omega+3|} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle j\omega - \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle (j\omega+3) = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}$$

当频率趋向于正无穷大时,两个向量($j\omega$ 和 $j\omega+3$)趋向于相同值,且总的频率响应幅值趋向于 3,同时 $j\omega$ 的相位为 $\pi/2$ 且 $j\omega+3$ 的相位趋向于 $\pi/2$,因此,总的频率响应相位趋于零,即

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 3 \frac{|j\omega|}{|j\omega+3|} = 3$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle j\omega - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle (j\omega+3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

同样,当频率趋于负无穷大时,有

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow -\infty} |H(j\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow -\infty} 3 \frac{|j\omega|}{|j\omega + 3|} = 3 \\ \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \angle H(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \angle j\omega - \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \angle (j\omega + 3) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

其频率响应 $H(j\omega)$ 如图 5.6.8 所示。

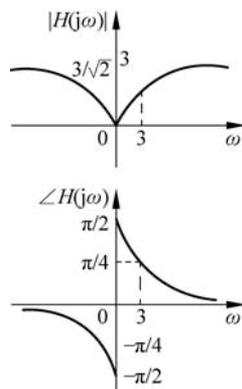


图 5.6.8 例 5.6.4 的频率响应 $H(j\omega)$

5.6.3 全通系统和最小相位系统

1. 全通系统

全通系统的幅频特性 $|H(j\omega)| = 1$, 而相频特性可变。若将一个全通系统串接在电路中, 可使被传输的信号相位改变, 通常作为相位补偿器, 图 5.6.9(a) 为典型的全通系统, 图 5.6.9(b) 为支臂的结构组成。

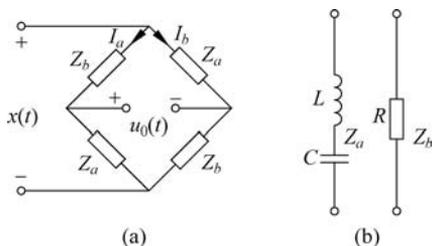


图 5.6.9 全通系统

观察图 5.6.9 可直接得到

$$U_0(s) = I_a(s)Z_b - I_b(s)Z_a = \frac{Z_b - Z_a}{Z_b + Z_a}X(s)$$

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{X(s)} = \frac{R - Ls - \frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}$$

令 $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $s_0 = \alpha + j\omega_0$, 且 $\omega_0 \gg \alpha$, 代入后可得

$$H(s) = \frac{-s^2 + \frac{R}{L}s - \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{-s^2 + 2\alpha s - \omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} = \frac{-(s - s_0)(s - s_0^*)}{(s + s_0)(s + s_0^*)} \quad (5.6.14)$$

图 5.6.10 为全通系统的极零点图, 由图可知, 零点向量模与极点向量模相等, 因此, $|H(j\omega)| = 1$, 但相频特性随 ω 变化。

2. 最小相移系统

考察图 5.6.11 所示的两个系统,它们有相同的极点,即

$$p_{1,2} = p_{3,4} = -2 \pm j2$$

但它们的零点不同,是关于纵轴成对称关系,即

$$z_{1,2} = -1 \pm j1, \quad z_{3,4} = 1 \pm j1$$

不难看出,它们的幅频特性相同,但图 5.6.11(a) 的相位小于图 5.6.11(b) 的相位,因为图 5.6.11(b) 的相位角绝对值大。

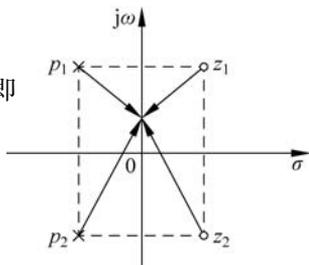


图 5.6.10 全通系统极零点图

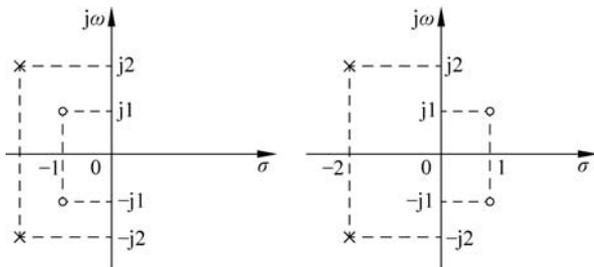


图 5.6.11 最小和非最小相移系统

最小相移系统定义如下: 零点仅位于左半平面或纵轴上时的系统函数称为最小相移函数。该系统称作最小相移系统,如果系统函数有一个或多个零点在右半平面,就称该系统为非最小相移系统。

一个非最小相移系统,可用最小相移系统与全通系统级联来代替。

设非最小相移系统函数分子的复数因子为

$$[s - (\sigma_i + j\omega_i)][s - (\sigma_i - j\omega_i)] = (s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2$$

于是 $H(s)$ 可写成

$$H(s) = H_{\min}(s)[(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2]$$

由于在 $H(s)$ 中已提出非最小相移这一项,余下部分必然是最小相移部分。分子分母同乘以 $(s + \sigma_i)^2 + \omega_i^2$, 则有

$$H(s) = \underbrace{H_{\min}(s)[(s + \sigma_i)^2 + \omega_i^2]}_{\text{最小相移系统}} \underbrace{\frac{(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2}{(s + \sigma_i)^2 + \omega_i^2}}_{\text{全通系统}} \quad (5.6.15)$$

5.6.4 系统因果性和稳定性分析

1. 系统的因果性分析

第 1 章中已经学习过因果系统的概念。因果系统是指,响应不出现在激励之前的系统。显然,因果系统的单位冲激响应 $h(t)$ 满足

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (5.6.16)$$

对于因果系统,可以用单边拉普拉斯变换来分析。此时,其收敛域为 $\text{Re}[s] > \sigma_c$, σ_c 是最右边极点的模值。

2. 系统稳定性分析

系统稳定性是系统一个极为重要的特性,也是大多数实际系统能够正常工作的基本条件。第2章中已经证明,系统稳定的充分必要条件是单位冲激响应 $h(t)$ 绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M, \quad M \text{ 为有限正常数} \quad (5.6.17)$$

前面讨论傅里叶变换的收敛性时已经指出,对于一般来说有实际意义的信号,只要信号绝对可积,其傅里叶变换就存在。也就是说,如果冲激响应 $h(t)$ 绝对可积,那么 $H(s)$ 的收敛域就包含虚轴。结合系统稳定性与冲激响应的关系,可以得到结论:线性时不变系统稳定性与系统函数 $H(s)$ 的收敛域包含虚轴是等价的;如果 $H(s)$ 的收敛域包含虚轴,则系统稳定,否则系统不稳定。

例 5.6.5 已知线性时不变系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-3)}$$

试分析其系统的稳定性。

解: 由 $H(s)$ 可知该系统有两个极点: $p_1 = -1, p_2 = 3$ 。

$H(s)$ 的收敛域可以有三种情况(见图 5.6.12):

- (1) $\text{Re}\{s\} > 3$, 收敛域位于右半平面,不包含虚轴,此时,系统是因果的、不稳定的;
- (2) $\text{Re}\{s\} < -1$, 收敛域位于左半平面,不包含虚轴,此时,系统是非因果的、不稳定的;
- (3) $-1 < \text{Re}\{s\} < 3$, 收敛域包含虚轴,此时,系统是稳定、非因果的。

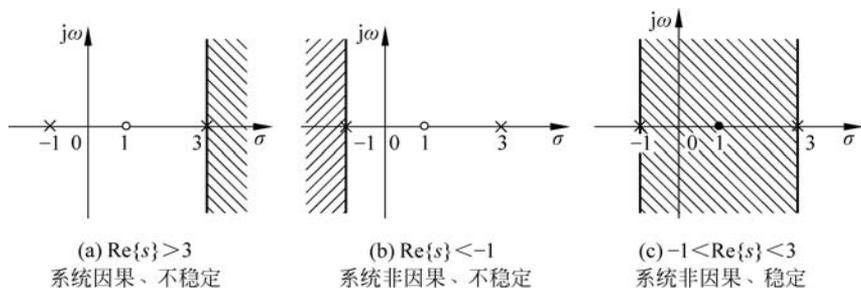


图 5.6.12 例 5.6.5 的收敛域(图中阴影部分)

进一步,假设 $H(s)$ 是因果系统(即 $h(t) = 0, t < 0$),它的收敛域位于 s 平面的右半平面。这时,若系统稳定, $H(s)$ 的收敛域必须位于包含虚轴的右半平面,或者说, $H(s)$ 的极点必须全部位于 s 平面的左半平面。因此,对于因果的线性时不变系统,通过判定系统函数 $H(s)$ 的极点位置,就可判定系统的稳定性;如果 $H(s)$ 的极点全部位于左半平面,则系统稳定,否则系统不稳定。

例 5.6.6 已知因果系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 5}{s^3 + 6s^2 + 10s + 8}$$

判定系统的稳定性。

解：求分母多项式的根，即解方程 $s^3 + 6s^2 + 10s + 8 = 0$ ，得

$$s_0 = -4, s_1 = -1 + j, s_2 = -1 - j$$

由于这三个根的实部均小于零，它们全部位于 s 平面的左半平面，因此可以判定系统是稳定的。

要判定连续时间系统的稳定性，最直接的方法就是求出系统函数的分母多项式的所有根，然后通过判断所有这些根是否在 s 平面的左半平面来判定系统是否稳定。对于二阶以下的系统，求这些根并不困难。但是，对于高阶系统，直接求根就比较困难了。不过，借助于电子计算机，通常可以方便地求出高阶多项式的根。除此之外，还有许多其他的方法来判定系统的稳定性。

3. 劳斯-霍尔维茨稳定性判据

对于系统的稳定性判别，除了直接求系统函数分母多项式的根外，还有其他各种各样的方法。这里介绍一种适用于因果连续时间系统稳定性判别的方法，即劳斯-霍尔维茨稳定性判据。这种方法不需要解出系统函数分母多项式的根，只是判断这些根中有多少是位于 s 平面内虚轴的右边。

具有实系数的 n 阶方程，其特征方程为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (5.6.18)$$

首先，将特征方程的系数按顺序排成如下的两行：

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & & \end{array} \quad (\text{一直排到 } a_n \text{ 止})$$

然后，以这两行为基础，计算下面各行，从而构成如下的一个阵列，称为劳斯-霍尔维茨阵列，这个阵列就是判别系统稳定性的依据。

$$\begin{array}{cccccc} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 & \cdots & \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \cdots & \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdots & & \\ A_3 & B_3 & C_3 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ A_{n-2} & B_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & \\ A_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & & \\ A_n & 0 & 0 & \cdots & & \end{array}$$

上述阵列中，头两行就是前面由系数排成的两行，即 $A_0 = a_0, A_1 = a_1, B_0 = a_2, B_1 = a_3, C_0 = a_4, C_1 = a_5, \cdots$ ，其余各行按如下公式计算：

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

由于第一列出现了0,无法继续计算下去;现用一个无穷小量 δ 代替0,得到如下的劳斯-霍尔维茨阵列:

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \delta & 1 & 0 \\ 1 - \frac{2}{\delta} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

如果 δ 从正方向趋近于0,则第四行第一列元素 $1 - \frac{2}{\delta}$ 为负值,阵列的第一列元素有符号变化;如果 δ 从负方向趋近于0,则阵列的第一列元素也有符号变化。因此,可以判定系统是不稳定的。

遇到这种情况时,可以把特征方程中的 s 换成 $1/s$,由此得到的根与原来的特征方程的根的实部的符号是相同的,因而不影响稳定性判别结果。这时,只需把特征方程中的系数全部颠倒,然后再采用劳斯-霍尔维茨判别法。

例5.6.8中,把特征方程的系数颠倒后,得到的劳斯-霍尔维茨阵列为

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & \\ 2 & 0 & \end{array}$$

同样可以判定系统是不稳定的。

5.7 信号流图和梅森公式

前面各章中,常常采用代数方法来描述一个系统所具有的输入-输出关系。这是描述系统的基本而有效的方法,但对于系统的设计和实现往往是不够的。

信号流图是一种描述系统的图解方法。一方面,它通过描述组成系统的各元部件之间信号传递的关系来表示系统中各变量的因果关系,从而进一步得到系统的输入-输出关系;另一方面,通过把系统分解成一些基本元部件的组合,得到系统模拟实现的结构和描述,从而为系统的设计和实现提供了一条有效的途径。

5.7.1 信号流图

信号流图是由若干节点和连接这些节点的有向支路组成的信号传递网络;节点代表

网络变量,用小圆圈表示;支路是连接两个节点的定向线段,用支路增益表示这两个节点之间的输入-输出关系。并且,节点变量的值等于所有流向该节点的支路输出之和,而支路输出值是流出节点变量的值乘以支路增益。

图 5.7.1 是一个典型的信号流图。它由 5 个节点、6 条支路组成。5 个节点分别代表 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 5 个节点变量,支路增益分别为 a, b, c, d, e, f 。

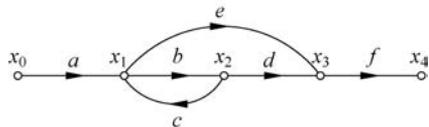


图 5.7.1 一个典型的信号流图

由图 5.7.1 可确定节点变量之间的输入-输出关系:

$$x_1 = ax_0 + cx_2$$

$$x_2 = bx_1$$

$$x_3 = dx_2 + ex_1$$

$$x_4 = fx_3$$

经化简,可得到 x_0 与 x_4 之间的输入-输出关系: $x_4 = \frac{a(bd+e)f}{1-cb}x_0$ 。

用信号流图表示一个系统时,节点变量就是系统变量,支路增益就是组成系统的各元部件的系统函数。

为了说明问题方便,下面将定义一些名词术语。

源节点: 只有输出支路、没有输入支路的节点,如图 5.7.1 中的 x_0 ,它一般代表网络中的输入变量,故也称输入节点。

阱节点: 只有输入支路、没有输出支路的节点,如图 5.7.1 中的 x_4 ,它一般代表网络中的输出变量,故也称输出节点。

混合节点: 既有输入支路又有输出支路的节点,如图 5.7.1 中的其他节点。

前向通路: 信号从源节点向阱节点传递时,每个节点只通过一次的通路,称为前向通路。前向通路上各支路增益之乘积,称为前向通路总增益;图 5.7.1 中有两条前向通路,一条的总增益为 aef ,另一条为 $abdf$ 。

回路: 起点和终点在同一节点且每个节点只通过一次的闭合通路称为简单回路,简称回路。回路中所有支路增益之乘积,称为回路增益。图 5.7.1 中只有一条回路,其增益为 bc 。

不接触回路: 回路与回路之间没有公共节点的回路称为不接触回路。图 5.7.1 中没有不接触回路。

5.7.2 流图代数

从上面的例子可以看出,从各个节点变量之间的输入-输出关系,经过化简,可以得到源节点与阱节点之间的输入-输出关系。这个化简过程可以直接在信号流图上进行,这就是本节要介绍的流图代数。首先,介绍最基本的化简规则。

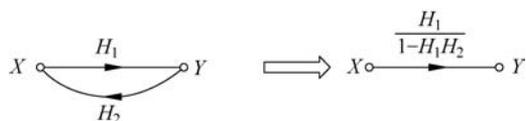
(1) 支路级联:



(2) 支路并联:



(3) 支路反馈连接:



(4) 支路节点的移动:



利用上述基本化简方法,可以把信号流图化简,最后得到流图的总增益。这种方法称为流图代数方法。

例 5.7.1 信号流图如图 5.7.2(a)所示,试用流图代数方法,求出最简信号流图。

解: 根据流图代数化简图 5.7.2(a)所示信号流图,见图 5.7.2(b)、(c)、(d),最后得到总增益。图 5.7.2(d)为最简信号流图。

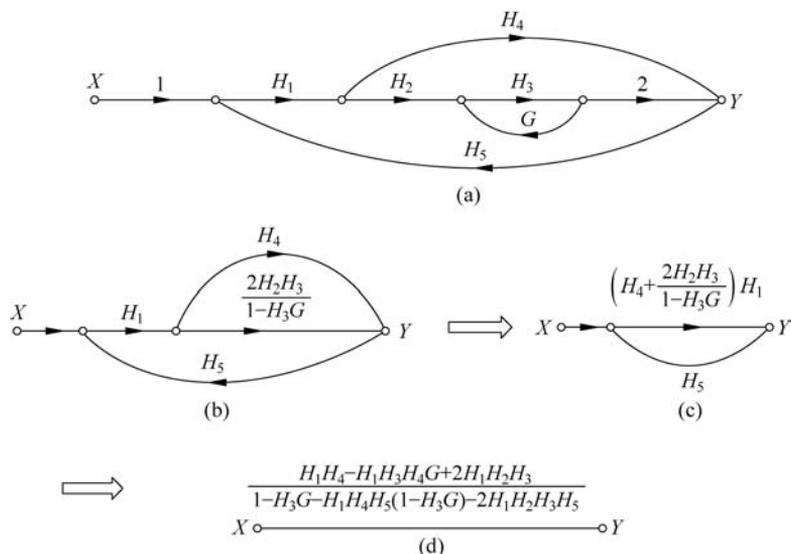


图 5.7.2 例 5.7.1 的信号流图化简过程

5.7.3 梅森公式

对于复杂的信号流图,通过化简求总增益往往非常烦琐,可以直接利用梅森(S. J. Mason)公式化简,求出流图的总增益,即系统函数。

梅森公式为

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n T_k \Delta_k \quad (5.7.1)$$

式中, T 为流图的总增益;

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$$

为流图的特征式,其中:

$\sum L_a$ —— 所有回路增益之和;

$\sum L_b L_c$ —— 在所有互不接触的回路中,每次取其中两个回路的回路增益的乘积之和;

$\sum L_d L_e L_f$ —— 在所有互不接触的回路中,每次取其中三个回路的回路增益之和;

n —— 前向通路总数;

T_k —— 第 k 条前向通路总增益;

Δ_k —— 流图因子式。它等于流图特征式中除去第 k 条前向通路相接触的回路增益项(包括回路增益的乘积项)以后的余子式。

例 5.7.2 用梅森公式重求例 5.7.1 的信号流图的总增益。

解: 前向通路共有两条: $k=1, T_1=2H_1H_2H_3, \Delta_1=1$

$$k=2, T_2=H_1H_4, \Delta_2=1-H_3G$$

共有三个回路: $L_1=H_3G, L_2=H_1H_4H_5, L_3=2H_1H_2H_3H_5$

有一个两两不接触的回路: $L_1L_2=H_1H_3H_4H_5G$

$$\Delta = 1 - (H_3G + H_1H_4H_5 + 2H_1H_2H_3H_5) + H_1H_3H_4H_5G$$

系统总增益为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\Delta} (T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2) \\ &= \frac{2H_1H_2H_3 + H_1H_4(1 - H_3G)}{1 - (H_3G + H_1H_4H_5 + 2H_1H_2H_3H_5) + H_1H_3H_4H_5G} \end{aligned}$$

5.8 系统模拟

在进行系统设计时,首先经过理论分析获得满足系统设计要求的系统函数或描述系统的微分方程,然后需要用计算机算法或专用硬件设备来实现该系统。一般情况下,计算机算法和硬件设备可以分解成一组基本的运算单元的组合。从系统函数得到由一组

基本运算单元构成的网络,这一过程就称为系统模拟(或称系统实现)。常常选用加法器、标量乘法器和积分器作为基本运算单元。

一个连续时间线性时不变系统可以由下面的微分方程描述:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t), \quad m \leq n \quad (5.8.1)$$

设系统的初始条件为零,两边取拉普拉斯变换,可得系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (5.8.2)$$

从微分方程可以看出,系统最基本的运算包括求和、乘系数和微分。可选择加法器、标量乘法器和微分器作为基本运算单元。但由于微分运算可能会带来较大的误差,而改用积分运算。因此,连续时间系统常常选用加法器、标量乘法器和积分器作为基本运算单元。这三种基本运算单元的方框图和信号流图分别如图 5.8.1 和图 5.8.2 所示。

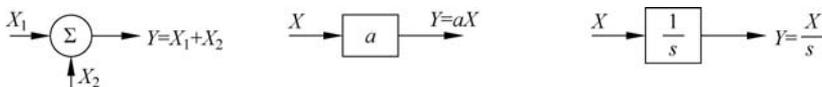


图 5.8.1 三种基本运算单元的方框图

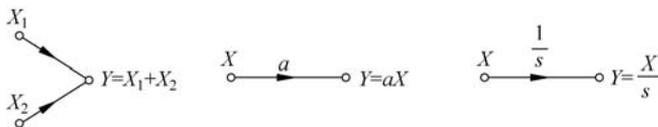


图 5.8.2 三种基本运算单元的信号流图

把系统函数变为下面的积分形式:

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^n b_l s^{l-n}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{k-n}} = \frac{b_0 s^{-n} + b_1 s^{-(n-1)} + \dots + b_{n-1} s^{-1} + b_n}{a_0 s^{-n} + a_1 s^{-(n-1)} + \dots + a_{n-1} s^{-1} + a_n} \quad (5.8.3)$$

注意: 为简单起见,在式(5.8.3)中假设 $m=n$ 。如果实际情况不是这样,可以认为那些项的系数为零。

根据系统函数,可以得到由三种基本运算单元构成的网络。对于同一个系统函数,可以对应多种形式的网络,比较常用的有直接实现形式、级联实现形式和并联实现形式。

1. 直接实现形式

对于一般的由式(5.8.1)定义的系统,它的系统函数用式(5.8.3)表示。如果直接对照梅森公式画出它的信号流图,就得到它的直接实现形式,见图 5.8.3(a)。如果用方框图来表示该系统,可得到如图 5.8.3(b)所示的方框图实现形式。

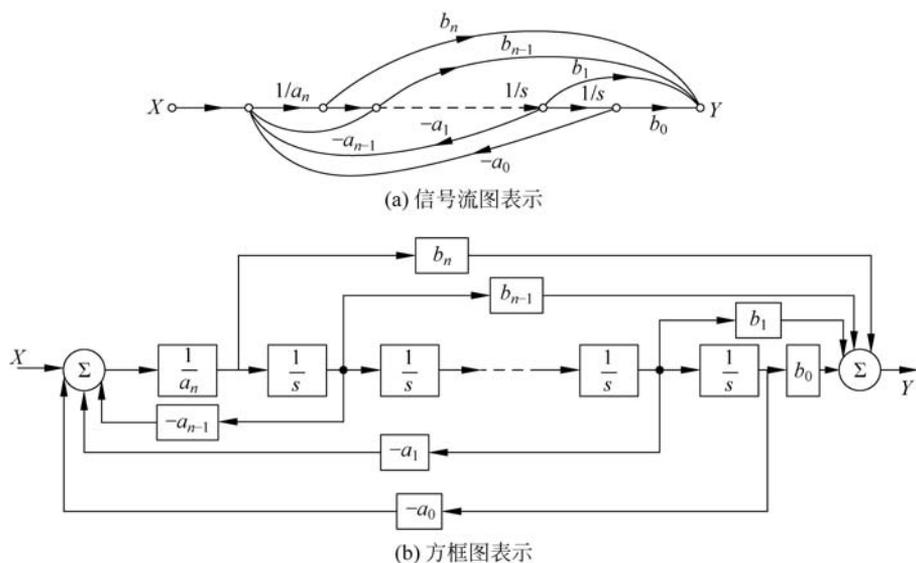


图 5.8.3 连续时间系统的直接实现形式

需要注意的是,对于给定的系统函数,其直接实现形式并不是唯一的。

2. 级联实现形式

将式(5.8.3)化成若干一阶系统的级联,即

$$H(s) = A \prod_{k=1}^n \frac{(1 + \lambda_k s^{-1})}{(1 + \gamma_k s^{-1})} \quad (5.8.4)$$

λ_k 、 γ_k 有可能是复数,如果是复数,必然成共轭对出现。把两个成共轭对一次项因子合并,就得到一个实系数的二次项。这样,可以把系统化成由实系数的一阶系统与实系数的二阶系统的级联,即

$$H(s) = A \prod_{k=1}^p \frac{(1 + \lambda_k s^{-1})^{\frac{n-p}{2}}}{(1 + \gamma_k s^{-1})} \prod_{k=1}^{\frac{n-p}{2}} \frac{(1 + \beta_{0k} s^{-1} + \beta_{1k} s^{-2})}{(1 + \alpha_{0k} s^{-1} + \alpha_{1k} s^{-2})} \quad (5.8.5)$$

其中,每个一阶系统和二阶系统分别用直接实现形式来实现。最后,得到系统的级联实现形式。图 5.8.4 是一个六阶系统的级联实现形式,用三个二阶系统的级联来实现。需要注意,对于一个已知的 $H(s)$,其级联实现形式也不是唯一的。为简单起见,后面均采用信号流图来表示系统。

3. 并联实现形式

将式(5.8.3)化成若干一阶系统的并联,即

$$H(s) = A + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{(1 + \gamma_k s^{-1})} \quad (5.8.6)$$

λ_k 、 γ_k 有可能是复数,如果是复数,必然成共轭对出现。把两个成共轭对一次项因子合

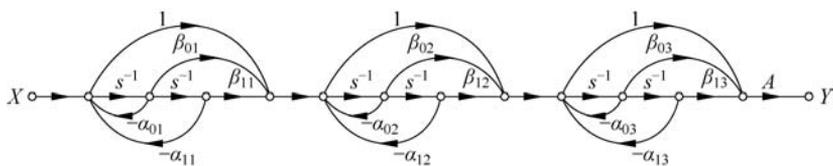


图 5.8.4 连续时间系统的级联实现形式

并,就得到一个实系数的二次项。这样,可以把系统化成由实系数的一阶系统与实系数的二阶系统的并联,即

$$H(s) = A + \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{(1 + \gamma_k s^{-1})} + \sum_{k=1}^{\frac{n-p}{2}} \frac{(\beta_{0k} + \beta_{1k} s^{-1})}{(1 + \alpha_{0k} s^{-1} + \alpha_{1k} s^{-2})} \quad (5.8.7)$$

其中,每个一阶系统和二阶系统分别用直接实现形式来实现,最后得到系统的并联实现形式。图 5.8.5 是一个六阶系统的并联实现形式,用三个二阶系统的并联来实现。显然,对于一个已知的 $H(s)$,其并联实现形式也不是唯一的。

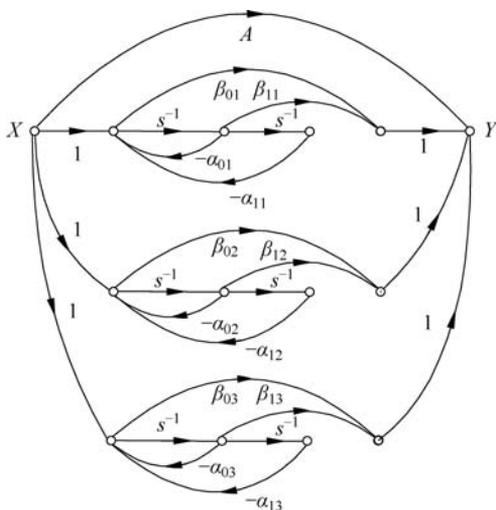


图 5.8.5 连续时间系统的并联实现形式

例 5.8.1 给出系统函数为

$$H(s) = \frac{5s + 5}{s^3 + 7s^2 + 10s} = \frac{5s^{-2} + 5s^{-3}}{1 + 7s^{-1} + 10s^{-2}}$$

可以得到系统的直接实现形式,见图 5.8.6。

将系统函数化为下面的形式:

$$H(s) = \frac{5s + 5}{s^3 + 7s^2 + 10s} = s^{-1} \left(\frac{5s^{-1}}{1 + 2s^{-1}} \right) \left(\frac{1 + s^{-1}}{1 + 5s^{-1}} \right)$$

可以得到系统的级联实现形式,见图 5.8.7。

将系统函数化为下面的形式:

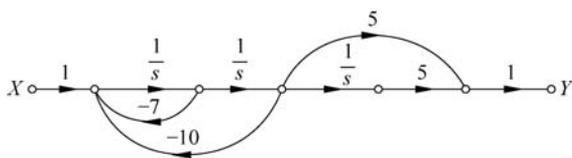


图 5.8.6 例 5.8.1 的直接实现形式

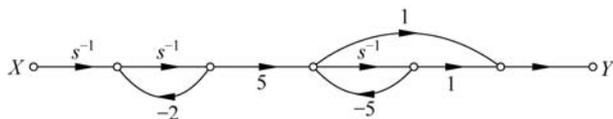


图 5.8.7 例 5.8.1 的级联实现形式

$$H(s) = \frac{5s + 5}{s^3 + 7s^2 + 10s} = \frac{1}{2}s^{-1} + \frac{\frac{5}{6}s^{-1}}{1 + 2s^{-1}} - \frac{\frac{4}{3}s^{-1}}{1 + 5s^{-1}}$$

可以得到系统的并联实现形式,见图 5.8.8。

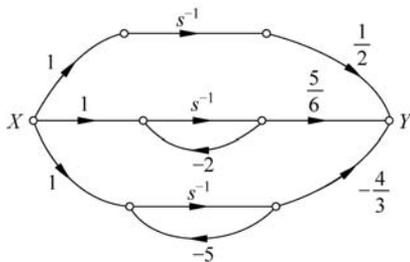


图 5.8.8 例 5.8.1 的并联实现形式

5.9 连续系统的状态变量分析

线性系统模型有微分方程、系统函数、单位冲激响应等,它们是描述系统的输入-输出关系的模型,描述的是系统的外部特性。状态空间模型不仅描述系统的输入-输出关系,还给出了系统的内部信息。

系统的状态变量分析包括:①选取系统内部一组未知量作为状态变量,并建立系统状态方程和输出方程,其中状态方程描述系统的内部特性,输出方程描述系统输出与输入和状态变量之间的关系;②解状态方程和输出方程。

5.9.1 连续系统状态方程和输出方程

动态系统的状态变量是确定动态系统状态的最小一组变量。状态变量用列向量 \boldsymbol{v} 表示:

$$\boldsymbol{v}(t) = [v_1(t) v_2(t) \cdots v_n(t)]^T$$

维数 n 与系统微分方程的阶数相等。

例如含有电容、电感等储能元件的二阶电路,采用二阶微分方程来描述该电路的输入-输出关系。若该二阶电路是线性时不变系统,则其全响应可分解为零输入响应与零状态响应之和,其初始状态有 2 个。选取 2 个与电路中电容电压、电感电流相关的未知量作为状态变量,写出 2 个一阶微分方程作为状态方程,用来描述该电路的内部特性,写出输出与输入和状态变量的方程作为输出方程,来描述该电路的外部特性。

例 5.9.1 如图 5.9.1 所示的电路系统,试列写微分方程组表示电流 i_1, i_2 的变化规律。

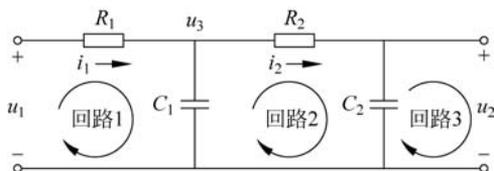


图 5.9.1 RC 电路图

解: 由电路理论知,回路 1、回路 2、回路 3 的电压方程分别为

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt + R_1 i_1(t) &= u_1(t) \\ \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt &= R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt \\ \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt &= u_2(t) \end{aligned}$$

对方程组求导,可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} [i_1(t) - i_2(t)] + R_1 \frac{di_1(t)}{dt} &= \frac{du_1(t)}{dt} \\ \frac{1}{C_1} [i_1(t) - i_2(t)] &= R_2 \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2(t) \\ \frac{1}{C_2} i_2(t) &= \frac{du_2(t)}{dt} \end{aligned}$$

改写为

$$\begin{cases} \frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} i_1(t) + \frac{1}{R_1 C_1} i_2(t) + \frac{1}{R_1} \frac{du_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{R_2 C_1} i_1(t) - \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) i_2(t) \\ \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} i_2(t) \end{cases}$$

表示成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} \quad (5.9.1)$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.9.2)$$

式中, $i_1(t), i_2(t)$ 是状态变量, 方程(5.9.1)是状态方程, 方程(5.9.2)是输出方程。

上述矩阵形式方程组写成一般形式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{v}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (5.9.3)$$

方程 $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$ 称为状态方程, 方程 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{v}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$ 称为输出方程。系统的状态方程和输出方程一起称为系统的状态空间模型。

例 5.9.1 中, 状态变量为 $\mathbf{v}(t) = [i_1(t) \ i_2(t)]^T$, 该电路是二阶的, 故状态变量是二维的;

$\mathbf{x}(t) = \frac{du_1(t)}{dt}$, $\mathbf{y}(t) = \frac{du_2(t)}{dt}$, 分别为输入和输出;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \end{bmatrix}, \text{称为状态矩阵或系统矩阵;}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{称为输入矩阵或控制矩阵;}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}, \text{称为输出矩阵;}$$

$\mathbf{D} = 0$, 称为前馈矩阵。

例 5.9.2 如图 5.9.2 所示的弹簧阻尼系统, 作用力 $u(t)$ 是输入, 质量块在外力作用下的位移 $y(t)$ 是输出, 试确定该系统的状态变量, 并写出该系统的状态方程和输出方程。

解: 质量块 m 受到作用力、弹簧弹力、阻尼器摩擦力和重力的作用。设无外力作用时质量块的位移为 0, 由牛顿第二定律知

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t) \quad (5.9.4)$$

该系统是二阶系统, 状态变量为二维。

取 $\mathbf{v}(t) = [v_1(t) \ v_2(t)]^T = \left[y(t) \ \frac{dy(t)}{dt} \right]^T$, 则有

$$\dot{v}_1(t) = v_2(t)$$

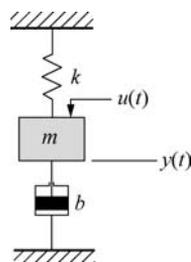


图 5.9.2 弹簧阻尼系统

且根据式(5.9.4),有

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{m}[u(t) - kv_1(t) - bv_2(t)]$$

得到该系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t)$$

输出方程为

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

例 5.9.3 如图 5.9.3 所示的 RLC 电路系统, $u(t)$ 是输入, 电容电压 $u_{C_2}(t)$ 是输出, 试选取该系统的状态变量, 写出状态方程和输出方程。

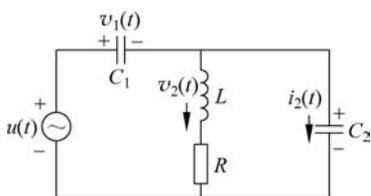


图 5.9.3 RLC 电路系统

解: 该电路有三个储能元件, 但电容 C_1 和电容 C_2 是不独立的, 因为

$$u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t) = u(t) \quad (5.9.5)$$

因此该电路是一个二阶系统, 状态变量是二维的。取 $\mathbf{v}(t) = [v_1(t) \ v_2(t)]^T = [u_{C_1}(t) \ i_L(t)]^T$,

则有

$$C_1 \dot{v}_1(t) = v_2(t) + i_2(t) = v_2(t) + C_2 [\dot{u}(t) - \dot{v}_1(t)]$$

$$v_1(t) + L \dot{v}_2(t) + R v_2(t) = u(t)$$

经整理后得

$$\dot{v}_1(t) = \frac{1}{C_1 + C_2} [v_2(t) + C_2 \dot{u}(t)] \quad (5.9.6)$$

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{L} [-v_1(t) - R v_2(t) + u(t)] \quad (5.9.7)$$

方程(5.9.6)含有输入的一阶导数, 不满足状态方程的形式要求, 将方程(5.9.6)改写为

$$\dot{v}_1(t) - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \dot{u}(t) = \frac{1}{C_1 + C_2} v_2(t)$$

重新定义状态变量如下:

$$v_{1a}(t) = v_1(t) - \frac{C_2}{C_1 + C_2} u(t) \quad (5.9.8)$$

代入方程(5.9.6)和方程(5.9.7), 得到

$$\begin{aligned} \dot{v}_{1a}(t) &= \frac{1}{C_1 + C_2} v_2(t) \\ \dot{v}_2(t) &= \frac{1}{L} \left[- \left[v_{1a}(t) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} u(t) \right] - R v_2(t) + u(t) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[-v_{1a}(t) - R v_2(t) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} u(t) \right] \end{aligned}$$

整理得到该系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{1a}(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1 + C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1a}(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

下面求输出方程,已知

$$y(t) = u_{C_2}(t)$$

代入式(5.9.5),有

$$y(t) = u(t) - u_{C_1}(t) = u(t) - v_1(t)$$

代入式(5.9.8),有

$$y(t) = u(t) - \frac{C_2}{C_1 + C_2} u(t) - v_{1a}(t)$$

表示成矩阵为

$$y(t) = [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} v_{1a}(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \frac{C_1}{C_1 + C_2} u(t)$$

由上面的例题可知,通过合理选取状态变量,得到的状态方程是一阶微分方程组,状态变量的维数等于系统的阶数。但状态变量的选取并不唯一,通常根据研究问题性质和需求来确定,比如选择能反映系统特性且便于观测或控制的物理量作为状态变量,如电路中电容电压、电感电流,机械系统中的位置、速度等。

5.9.2 由系统的输入-输出模型建立状态空间模型

由系统的输入-输出模型建立状态空间模型,先要进行系统的模拟实现(模拟框图、信号流图等),然后从中确定状态变量,得到的状态空间模型与该实现的结构等价。

微分方程、单位冲激响应等系统输入-输出模型,都可以转换为系统函数。根据系统函数进行系统模拟实现,常用的有直接实现形式、级联实现形式和并联实现形式。

1. 直接实现形式的状态空间模型

系统函数的一般形式为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad n \geq m$$

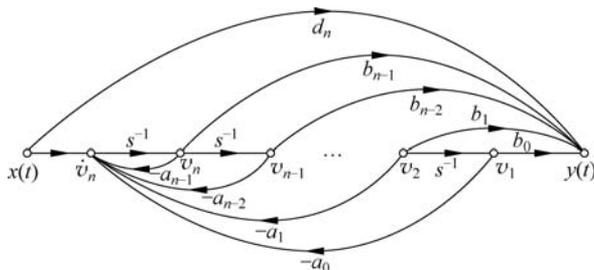
当 $n = m$ 时,上式不妨改写为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} + d_n \quad (5.9.9)$$

根据梅森公式,得其直接实现形式如图 5.9.4 所示。

按照图 5.9.4 标记的方式选取状态变量,得到如下方程组:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= v_2 \\
 \dot{v}_2 &= v_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{v}_{n-1} &= v_n \\
 \dot{v}_n &= x - a_{n-1}v_n - \cdots - a_1v_2 - a_0v_1 \\
 y &= d_nx + b_{n-1}v_n + b_{n-2}v_{n-1} + \cdots + b_1v_2 + b_0v_1
 \end{aligned}$$


 图 5.9.4 n 阶系统函数的直接实现形式

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_{n-1} \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad (5.9.10)$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} + d_n x$$

例 5.9.4 已知系统的微分方程为 $2y'''(t) + 4y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = x''(t) + 10x(t)$ 。试写出系统函数,并由此得到该系统直接实现形式的状态空间模型。

解: 根据微分方程写出系统函数为

$$H(s) = \frac{0.5s^2 + 5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

根据式(5.9.10),得到该系统的状态空间模型如下:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [5 \quad 0 \quad 0.5] \mathbf{v}$$

例 5.9.5 已知系统函数为

$$H(s) = \frac{s^3 + 13s^2 + 38s + 14}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

写出该系统的状态空间模型。

解:
$$H(s) = \frac{s^3 + 13s^2 + 38s + 14}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{7s^2 + 27s + 8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} + 1$$

根据式(5.9.10),得到该系统的状态空间模型如下:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [8 \quad 27 \quad 7] \mathbf{v} + x$$

对于因果系统,对模型方程(5.9.3)取拉普拉斯变换有

$$\begin{aligned} s\mathbf{V}(s) - \mathbf{v}(0^-) &= \mathbf{A}\mathbf{V}(s) + \mathbf{B}\mathbf{X}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{V}(s) + \mathbf{D}\mathbf{X}(s) \end{aligned} \quad (5.9.11)$$

对于零初始状态有

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{X}(s)$$

从而有

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{X}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (5.9.12)$$

对于单输入-单输出系统,系统函数是标量,因而有

$$H(s) = H(s)^T = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]^T = \mathbf{B}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{D}^T$$

因此,该系统函数亦可用下列状态空间模型实现:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{A}^T \mathbf{v}(t) + \mathbf{C}^T x(t) \\ y(t) &= \mathbf{B}^T \mathbf{v}(t) + \mathbf{D}^T x(t) \end{aligned}$$

将上述结论应用于例 5.9.5,得到该系统的另一个状态空间模型为

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \\ 7 \end{bmatrix} x$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{v} + x$$

2. 并联实现形式的状态空间模型

将系统函数化为部分分式

$$H(s) = d_n + \sum_{i=1}^l H_i(s) \quad (5.9.13)$$

$H_i(s)$ 分子的阶次小于分母阶次。设与子系统 $H_i(s)$ 对应的状态空间模型为

$$\dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{v}_i(t) + \mathbf{B}_i x_i(t)$$

$$y_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{v}_i(t) \quad (5.9.14)$$

上述各子系统并联,因而有

$$x_i(t) = x(t)$$

$$y(t) = d_n x(t) + \sum_{i=1}^l y_i(t) = d_n x(t) + \sum_{i=1}^l \mathbf{C}_i \mathbf{v}_i(t)$$

由此可得式(5.9.13)所示系统函数的状态空间模型如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_1 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{v}}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_l \end{bmatrix} x \quad (5.9.15)$$

$$y = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} + d_n x$$

设 $H(s)$ 所有系数为实数,则该系统函数的极点有 4 种类型:单实极点、共轭复极点、重实极点、重共轭复极点。下面以单实极点、共轭复极点和 3 重实极点为例讨论子系统 $H_i(s)$ 的状态空间模型。

对于单实极点情形,

$$H_i(s) = \frac{b}{s+a}$$

对应直接实现形式的状态模型为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i &= -a\mathbf{v}_i + x_i \\ y_i &= b\mathbf{v}_i \end{aligned}$$

对于共轭复极点情形,

$$H_i(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

对应直接实现形式的状态模型为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_i \\ y_i &= [b_0 \quad b_1] \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

对于 3 重实极点情形,不访设

$$H_i(s) = \frac{b_1}{(s+p)^3} + \frac{b_2}{(s+p)^2} + \frac{b_3}{s+p}$$

根据梅森公式,得其实现形式如图 5.9.5 所示。

按图 5.9.5 标记的方式选取状态变量,得到如下方程组:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{bmatrix} -p & 1 & 0 \\ 0 & -p & 1 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \mathbf{v}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_i, \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$y_i = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \mathbf{v}_i$$

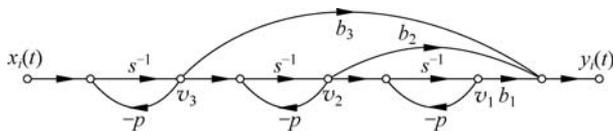


图 5.9.5 3 重实极点系统函数的模拟

例 5.9.6 已知系统函数为

$$H(s) = \frac{s^3 + 13s^2 + 38s + 14}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

试写出该系统并联实现形式的状态空间模型。

解：将 $H(s)$ 化为部分分式

$$H(s) = \frac{s^3 + 13s^2 + 38s + 14}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{-6}{s+1} + \frac{18}{s+2} + \frac{-5}{s+3} + 1$$

该系统有 3 个单实极点,应用前述分析结论,可得系统的状态空间模型如下:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [-6 \quad 18 \quad -5] \mathbf{v} + x$$

例 5.9.7 已知系统函数为

$$H(s) = \frac{3}{(s+2)^2(s^2+s+1)}$$

写出该系统一个并联实现形式的状态空间模型。

解：将 $H(s)$ 化为部分分式

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2} + \frac{-s}{s^2+s+1}$$

该系统有一个 2 重实极点和一对共轭复极点,其中 $H_1(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}$ 对应的状态模型为

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y_1 = [1 \quad 1] \mathbf{v}_1$$

$H_2(s) = \frac{-s}{s^2+s+1}$ 对应的状态模型为

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y_2 = [0 \quad -1] \mathbf{v}_2$$

应用前述分析结论,可得系统的状态空间模型如下:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0 \quad -1] \mathbf{v}$$

3. 级联实现形式的状态空间模型

将系统函数分解为因子形式如下:

$$H(s) = d_n + \prod_{i=1}^l H_i(s) \quad (5.9.16)$$

下列只讨论 $l=2$ 的情况,即

$$H(s) = d_n + H_1(s)H_2(s) \quad (5.9.17)$$

约定 $H_1(s)$ 分子阶次小于分母阶次。这一分解用框图表示,如图 5.9.6 所示。

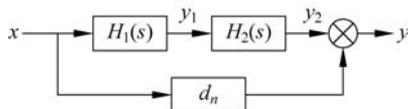


图 5.9.6 式(5.9.17)对应的框图表示

设 $H_1(s), H_2(s)$ 的状态空间模型分别为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{B}_1 x, & y_1 &= \mathbf{C}_1 \mathbf{v}_1 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{B}_2 y_1, & y_2 &= \mathbf{C}_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{D}_2 y_1 \end{aligned} \quad (5.9.18)$$

从而可推导系统的输出为

$$y = d_n x + y_2 = d_n x + \mathbf{C}_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{v}_1 = d_n x + [\mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$$

由此可得该系统的状态空间模型如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_1 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \\ y &= [\mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + d_n x \end{aligned} \quad (5.9.19)$$

例 5.9.8 已知系统函数为

$$H(s) = \frac{5s + 5}{s^3 + 7s^2 + 10s}$$

试写出该系统级联实现的状态空间模型。

解: 将系统函数进行因式分解,得

$$H(s) = \frac{5s+5}{s^3+7s^2+10s} = \frac{5}{s+2} \cdot \frac{s+1}{s^2+5s} = H_1(s)H_2(s)$$

$H_1(s) = \frac{5}{s+2}$, 其直接实现形式的状态空间模型为

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -2v_1 + x \\ y_1 &= 5v_1\end{aligned}$$

故有

$$\mathbf{A}_1 = -2, \quad \mathbf{B}_1 = 1, \quad \mathbf{C}_1 = 5$$

$H_2(s) = \frac{s+1}{s^2+5s}$, 其直接实现形式的状态空间模型为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_1 \\ y_2 &= [1 \quad 1] \mathbf{v}_2\end{aligned}$$

系统的输出 $y = y_2$ 。因此有

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = [1 \quad 1], \quad \mathbf{D}_2 = 0, \quad d_n = 0$$

根据式(5.9.19)可得该系统的状态空间模型为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x \\ y &= [0 \quad 1 \quad 1] \mathbf{v}\end{aligned}$$

验证: 将模型参数代入式(5.9.12), 可验证该状态模型得到的系统函数。

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$= [0 \quad 1 \quad 1] \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = \frac{5s+5}{s^3+7s^2+10s}$$

以上讨论了给定系统输入-输出模型求状态空间模型的几种方法。对于给定的输入-输出模型, 可以有不同的状态空间模型。当给定系统函数的一个实现, 则可以直接从该实现中选取状态变量, 并写出状态方程和输出方程。

例 5.9.9 已知系统函数为

$$H(s) = \frac{5s+5}{s^3+7s^2+10s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{5}{s+2} \cdot \frac{s+1}{s+5}$$

它的一个级联实现如图 5.9.7 所示。

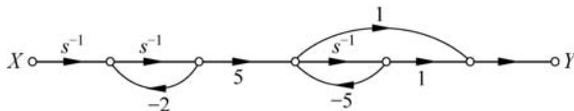


图 5.9.7 级联实现 $H(s)$ 的信号流图

试写出状态空间模型。

解：该系统是3阶的,状态变量有3个分量,在该信号流图中取3个积分器的输出作为状态变量,如图5.9.8所示。

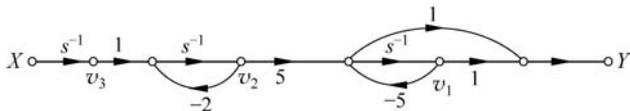


图 5.9.8 级联实现 $H(s)$ 的信号流图(标记状态变量)

根据图 5.9.8,可以写出下列方程:

$$\dot{v}_1 = -5v_1 + 5v_2$$

$$\dot{v}_2 = -2v_2 + v_3$$

$$\dot{v}_3 = x$$

$$y = v_1 + \dot{v}_1 = v_1 + (-5v_1 + 5v_2) = -4v_1 + 5v_2$$

写成矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [-4 \quad 5 \quad 0] \mathbf{v}$$

验证:将模型参数代入式(5.9.12),可验证该状态模型得到的系统函数。

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$= [-4 \quad 5 \quad 0] \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5s + 5}{s^3 + 7s^2 + 10s}$$

5.9.3 连续系统状态方程的 s 域求解

线性时不变系统的状态方程是一阶线性常微分方程组,采用 s 域求解,即对方程求拉普拉斯变换,并整理得到状态变量的 s 域表达式,再求反变换得到其时域解。

对状态方程求拉普拉斯变换的结果如式(5.9.11)。将该式整理得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}(s) = \mathbf{B}\mathbf{X}(s) + \mathbf{v}(0^-)$$

进一步,有

$$\mathbf{V}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}(0^-) \quad (5.9.20)$$

求反变换得到其时域解如下,其中与输入相关的部分为零状态解,与初始状态相关的部分为零输入解。

$$\mathbf{v}_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)]$$

$$\mathbf{v}_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}(0^-)] \quad (5.9.21)$$

将式(5.9.20)代入输出方程,即可得到系统的零状态响应和零输入响应:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{zs}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{v}_{zs}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}_{zi}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{v}_{zi}(t) \end{aligned} \quad (5.9.22)$$

例 5.9.10 已知因果系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

输入信号 $x(t) = u(t)$, 初始状态 $v_1(0^-) = 1, v_2(0^-) = 0$, 试求状态方程的解。

解:

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{B}\mathbf{X}(s) + \mathbf{v}(0^-)] \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 1 \\ -s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{-s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 + \frac{1}{s+1} - \frac{0.5}{s+2} \\ -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求拉普拉斯反变换,得到

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + e^{-t} - 0.5e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix} u(t)$$

例 5.9.11 已知因果系统的状态方程和输出方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1 + x \\ \dot{v}_2 &= v_1 - 3v_2 \\ y &= -v_1 + v_2 \end{aligned}$$

初始状态 $v_1(0^-) = 1, v_2(0^-) = 2$, 输入信号 $x(t) = u(t)$, 求系统函数、零状态响应和零输入响应。

解: 将上述系统方程写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x \\ y &= [-1 \quad 1] \mathbf{v} \end{aligned}$$

因有

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+3)} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{s+2}{(s-1)(s+3)}$$

下面求系统的零状态响应,已经求得了 $H(s)$,因而有

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) = -\frac{s+2}{s(s-1)(s+3)}$$

$$= \frac{2/3}{s} - \frac{3/4}{s-1} + \frac{1/12}{s+3}$$

$$y_{zs}(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{12}e^{-3t} \right) u(t)$$

根据式(5.9.21),有

$$\mathbf{V}_{zi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}(0^-)$$

因而有

$$Y_{zi}(s) = \mathbf{C}\mathbf{V}_{zi}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}(0^-)$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+3)} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{s-4}{(s-1)(s+3)} = -\frac{3/4}{s-1} + \frac{7/4}{s+3}$$

$$y_{zi}(t) = \left(-\frac{3}{4}e^t + \frac{7}{4}e^{-3t} \right) u(t)$$



动图演示

5.10 案例：运用复频域方法分析锁相环的动态性能

在雷达、通信、导航设备中,为了便于远距离传输,信号被调制在频率很高的载波上发送出去。在接收端,则需要产生与发射载波完全同步的本地信号,以便对接收信号进行解调,进而通过基带处理提取其中的信息。傅里叶变换的频移性质可以解释调制-解调过程的原理,其中解调所用的信号与调制所用的信号具有完全相同的频率和初始相位,也就是说,在理论分析时,认为二者是完全同步的。但在实际应用中,调制器和解调器可能距离非常远,它们所使用的频率源是独立的,产生的高频正弦信号并不能完全同步,需要使用锁相环对接收端的频率源进行微调,从而在接收端产生与发射载波完全同步的信号。

锁相环是现代电子设备中广泛使用的电路模块,它通过负反馈系统调节振荡器的输出,使振荡器产生的信号的频率和相位与输入参考信号锁定,从而实现载波同步。本节首先介绍锁相环的组成和工作原理,然后在锁定状态下对系统进行线性化近似,导出锁

相环的系统函数,从而运用复频域的分析方法,研究不同的环路滤波器对锁相环的频率和相位跟踪能力的影响。

5.10.1 锁相环的组成和工作原理

锁相环由鉴相器、环路滤波器、压控振荡器三个部分组成,如图 5.10.1 所示。随着数字器件的发展,这几个模块既可以用模拟电路来实现,也可以用数字电路来实现,本节仅分析用模拟电路实现的锁相环。

当输入信号与振荡器输出的信号不同步时,二者存在相位差。这个相位差被鉴相器提取,通过环路滤波器滤波后控制压控振荡器的输出,从而调整输出信号的频率,使其趋向于与输入信号同步。

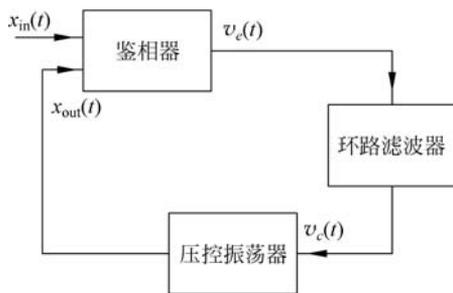


图 5.10.1 锁相环的组成

5.10.2 锁定状态下的线性模型

1. 鉴相器的线性模型

假设锁相环处在锁定状态下,即输出信号与输入信号具有相同的频率。

$$x_{in}(t) = A \sin(\omega_c t + \theta_{in}(t)) \quad (5.10.1)$$

$$x_{out}(t) = B \cos(\omega_c t + \theta_{out}(t)) \quad (5.10.2)$$

当输出信号与输入信号有微小的频率差异时,可以用缓变的相位来描述这种频率差异,因此式(5.10.1)和式(5.10.2)的模型仍然适用。注意到锁定状态下输出信号与输入信号一个是余弦信号,另一个是正弦信号,二者有 90° 的相位差。从后面的推导可以看到,这样鉴相器才能提取 $\theta_{out}(t)$ 与 $\theta_{in}(t)$ 之间的差异。

在模拟锁相环中,鉴相器由模拟混频器和低通滤波器组成,如图 5.10.2(a)所示。

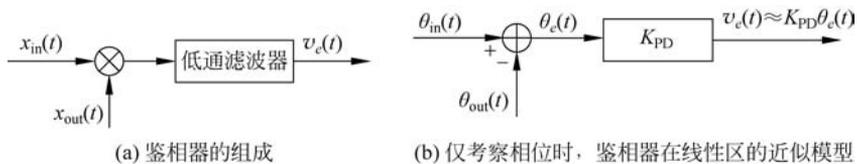


图 5.10.2 鉴相器的组成与线性区的近似模型

由于

$$x_{in}(t) \cdot x_{out}(t) = \frac{1}{2} AB [\sin(2\omega_c t + \theta_{in}(t) + \theta_{out}(t)) + \sin(\theta_{in}(t) - \theta_{out}(t))]$$

因此经过低通滤波后的输出信号为

$$v_e(t) = \frac{1}{2}ABK_m \sin(\theta_{in}(t) - \theta_{out}(t))$$

其中, K_m 为低通滤波器的增益。当二者的相位差不大时, 鉴相器工作在线性区, 有

$$\begin{cases} \sin(\theta_{in}(t) - \theta_{out}(t)) \approx \theta_{in}(t) - \theta_{out}(t) \\ v_e(t) \approx \frac{1}{2}ABK_m(\theta_{in}(t) - \theta_{out}(t)) = K_{PD}(\theta_{in}(t) - \theta_{out}(t)) \end{cases} \quad (5.10.3)$$

由于输入信号和输出信号的频率相同、相位不同, 如果仅考察相位, 则鉴相器可以近似成图 5.10.2(b)所示的模型, 其中 K_{PD} 为鉴相器增益。

2. 压控振荡器的线性模型

压控振荡器在正比于控制电压 $v_c(t)$ 的瞬时频率处振荡:

$$\omega_{out}(t) = \omega_0 + K_{VCO}v_c(t) \quad (5.10.4)$$

其中, ω_0 为压控振荡器的固有频率; K_{VCO} 为压控振荡器的增益常数。由于频率的微小差异可以用缓变的相位来描述, 因此不妨认为 ω_0 是输入信号频率, 即式(5.10.1)和式(5.10.2)中的 $\omega_c = \omega_0$ 。对比式(5.10.4)和式(5.10.2), 可以得到压控振荡器输出的过量相位 $\theta_{out}(t)$ 与压控振荡器控制电压 $v_c(t)$ 的关系:

$$\theta_{out}(t) = \int_0^t (\omega_{out}(\tau) - \omega_0) d\tau = \int_0^t K_{VCO}v_c(\tau) d\tau \quad (5.10.5)$$

式(5.10.5)说明, 如果仅考察压控振荡器输出信号的过量相位, 压控振荡器可以视为一个积分器。

3. 锁相环的线性模型

在锁定状态下, 可以仅考察锁相环输入信号和压控振荡器输出信号相对于理想振荡频率的过量相位 $\theta_{in}(t)$ 和 $\theta_{out}(t)$, 锁相环通过提取二者的相位差异并生成相应的控制信号调整压控振荡器输出信号的频率, 使 $\theta_{out}(t)$ 跟踪 $\theta_{in}(t)$ 的变化, 从而实现输出信号与输入信号的同步。联立式(5.10.3)和式(5.10.5), 可以得到以相位作为输入-输出时锁相环的系统模型。不难验证, 这是一个连续时间线性时不变系统, 因此可以用复频域的方法来分析。图 5.10.3 分别给出了该系统的时域和复频域框图, 其中 $F(s)$ 是环路滤波器的系统函数。在 5.10.3 节将看到, 环路滤波器对锁相环的动态响应特性有重要的影响。

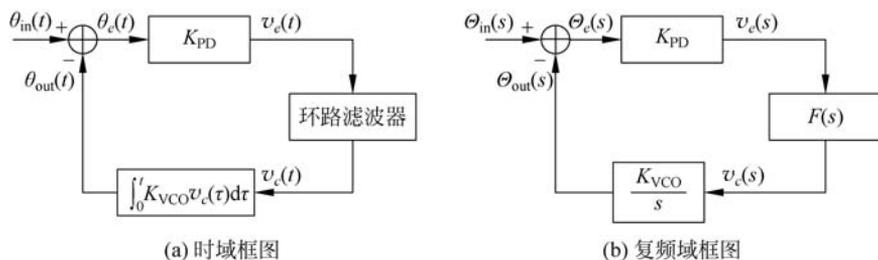


图 5.10.3 锁相环的线性化模型

根据图 5.10.3,可以得到整个锁相环的系统函数为

$$H(s) = \frac{\Theta_{\text{out}}(s)}{\Theta_{\text{in}}(s)} = \frac{KF(s)}{s + KF(s)} \quad (5.10.6)$$

其中, $K = K_{\text{PD}}K_{\text{VCO}}$ 称为锁相环的环路增益。如果以输出相位与输入相位的相位差作为考察对象:

$$\begin{aligned} \theta_e(t) &= \theta_{\text{in}}(t) - \theta_{\text{out}}(t) \\ \Theta_e(s) &= \Theta_{\text{in}}(s) - \Theta_{\text{out}}(s) \end{aligned}$$

则有

$$H_e(s) = \frac{\Theta_e(s)}{\Theta_{\text{in}}(s)} = 1 - H(s) = \frac{s}{s + KF(s)} \quad (5.10.7)$$

5.10.3 环路滤波器对锁相环特性的影响

图 5.10.4 给出了两种常用的环路滤波器电路。它们对应的锁相环分别是一阶系统和二阶系统。下面分别分析这两种锁相环的动态特性。

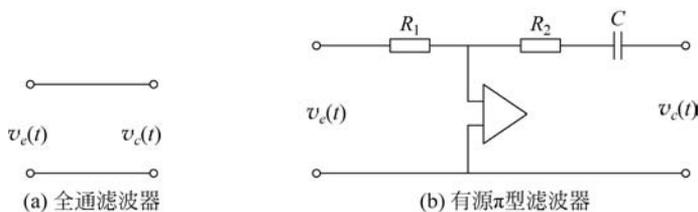


图 5.10.4 两种环路滤波器

5.10.3.1 一阶锁相环

当环路滤波器采用图 5.10.4(a)所示的全通滤波器时, $F(s) = 1$, 式(5.10.6)和式(5.10.7)分别写为

$$H(s) = \frac{K}{s + K} \quad (5.10.8)$$

$$H_e(s) = \frac{s}{s + K} \quad (5.10.9)$$

这是一个典型的一阶系统。下面来考察,当输入信号的相位或者频率发生突变时,锁相环对输入信号的跟踪能力。

1. 输入信号的相位发生跳变

不妨设输入信号的相位在 t_0 时刻突然跳变 $\Delta\varphi$, 此时有

$$\begin{cases} \theta_{\text{in}}(t) = \Delta\varphi \cdot u(t - t_0) \\ \Theta_{\text{in}}(s) = \frac{\Delta\varphi e^{-st_0}}{s} \end{cases} \quad (5.10.10)$$

因此输出相位为

$$\Theta_{\text{out}}(s) = \Theta_{\text{in}}(s)H(s) = \Delta\varphi e^{-st_0} \frac{K}{s(s+K)}$$

对上式进行拉普拉斯反变换,得到

$$\theta_{\text{out}}(t) = \Delta\varphi(1 - e^{-K(t-t_0)})u(t-t_0)$$

图 5.10.5 给出了输入相位发生突变时,输出相位对输入相位的跟踪情况。绘图时取 $\Delta\varphi=0.5, t_0=1, K=1$ 或 $K=10$ 。可以看到,环路增益越大,一阶锁相环对输入相位突变的响应速度越快。

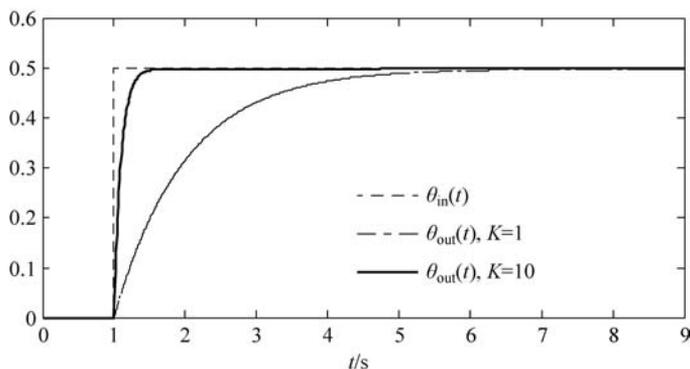


图 5.10.5 一阶锁相环对相位突变的跟踪情况

根据式(5.10.9)和式(5.10.10),还可以求出输入相位突变时锁相环的相位误差:

$$\Theta_e(s) = \Theta_{\text{in}}(s)H_e(s) = \Delta\varphi e^{-st_0} \frac{1}{s+K}$$

根据终值定理,可以求出当 $t \rightarrow \infty$ 时的稳态误差:

$$\theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta\varphi e^{-st_0} \frac{s}{s+K} = 0$$

因此一阶锁相环最终可以无误差地跟上输入信号的相位跳变,这与图 5.10.5 给出的结果是一致的。

2. 输入信号的频率发生跳变

如果输入信号的频率在 t_0 时刻突然跳变 $\Delta\omega$, 固定的频率差会造成相位的线性变化:

$$\begin{cases} \theta_{\text{in}}(t) = \Delta\omega \cdot (t - t_0) \cdot u(t - t_0) \\ \Theta_{\text{in}}(s) = \frac{\Delta\omega e^{-st_0}}{s^2} \end{cases} \quad (5.10.11)$$

因此输出相位为

$$\Theta_{\text{out}}(s) = \Theta_{\text{in}}(s)H(s) = \Delta\omega e^{-st_0} \frac{K}{s^2(s+K)}$$

对上式进行拉普拉斯反变换,得到

$$\theta_{\text{out}}(t) = \Delta\omega \left[(t - t_0) - \frac{1}{K}(1 - e^{-K(t-t_0)}) \right] u(t - t_0)$$

此时观察输入相位与输出相位的相位差异更加直观:

$$\theta_e(t) = \theta_{\text{in}}(t) - \theta_{\text{out}}(t) = \frac{\Delta\omega}{K}(1 - e^{-K(t-t_0)})u(t - t_0) \quad (5.10.12)$$

这个结果也可以通过复频域分析得到。将式(5.10.11)与式(5.10.9)相乘,有

$$\Theta_e(s) = \Theta_{\text{in}}(s)H_e(s) = \Delta\omega e^{-st_0} \frac{1}{s(s+K)}$$

对它进行拉普拉斯反变换,就可以得到式(5.10.12)。

运用终值定理,可以求得 $t \rightarrow \infty$ 时的稳态相位误差:

$$\theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta\omega e^{-st_0} \frac{1}{s+K} = \frac{\Delta\omega}{K} \quad (5.10.13)$$

上式表明,当输入信号的频率发生跳变时,输出信号的相位相对于输入信号的相位最终会存在一个固定的相位差,这个相位差的大小与频率跳变大小成正比,与锁相环增益成反比,锁相环增益越大,固定相位差越小。

稳态相位误差是恒定的,也说明稳态时输出信号的频率已经跟踪上输入信号的频率,即有 $\omega_{\text{out}} = \omega_0 + \Delta\omega$ 。这个现象也可以用压控振荡器的工作原理来解释:由于稳态输出频率与压控振荡器的固有频率存在频率偏移,这个频率偏移需要一个恒定的压控振荡器输入电压来维持。而环路滤波器是全通系统,压控振荡器输入直接来自鉴相器输出,因此输出信号与输入信号将会维持一个恒定的相位差,从而保证压控振荡器有非零的输入。锁相环增益大,较小的相位差异就能产生较大的压控振荡器控制电压,因此频率跳变后的稳态相位误差就会越小。

5.10.3.2 二阶锁相环

在 5.10.3.1 节中看到,采用全通型环路滤波器,锁相环跟踪输入信号的频率跳变时会存在固定的稳态相位差。而输入信号频率相对于压控振荡器固有频率的偏移是一定存在的,为了改善锁相环对频率跳变的跟踪能力,需要采用其他形式的环路滤波器,例如图 5.10.4(b)所示的有源 π 型滤波器。

采用 5.5.2 节的方法,不难得到图 5.10.4(b)所示电路的系统函数为

$$F(s) = -\frac{1 + sR_2C}{sR_1C}$$

这是一个单极点环路滤波器。为保证环路的负反馈特性,可以通过调整压控振荡器的极性抵消 $F(s)$ 中的负系数,因此对于图 5.10.3 所示的锁相环模型,仍然有

$$F(s) = \frac{1 + sR_2C}{sR_1C} \quad (5.10.14)$$

将式(5.10.14)代入式(5.10.6)和式(5.10.7),可以得到锁相环的系统函数

$$H(s) = \frac{KF(s)}{s + KF(s)} = \frac{K(1 + R_2Cs)}{R_1Cs^2 + KR_2Cs + K}$$

$$H_e(s) = \frac{s}{s + KF(s)} = \frac{R_1Cs^2}{R_1Cs^2 + KR_2Cs + K}$$

采用单极点环路滤波器后,锁相环是一个二阶系统。二阶系统的时域响应表达式较为复杂,此处仅分析输入信号相位或频率跳变时,锁相环的稳态相位误差。

输入信号的相位发生跳变时,将式(5.10.10)与系统函数相乘,并运用终值定理,可以得到

$$\theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Theta_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Theta_{in}(s) H_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta\varphi e^{-st_0} \frac{R_1Cs^2}{R_1Cs^2 + KR_2Cs + K} = 0$$

因此,二阶锁相环最终也可以无误差地跟上输入信号的相位跳变。

当输入信号的频率发生跳变时,将式(5.10.11)与系统函数相乘,并运用终值定理,可以得到

$$\theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Theta_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Theta_{in}(s) H_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta\omega e^{-st_0} \frac{R_1Cs}{R_1Cs^2 + KR_2Cs + K} = 0 \quad (5.10.15)$$

对比式(5.10.13)与式(5.10.15)可知,一阶锁相环跟踪频率跳变信号会存在固定的相位差,而二阶锁相环最终可以无误差地跟踪频率跳变信号。这一差异的原因在于,二阶锁相环采用了式(5.10.14)所示的单极点环路滤波器,单极点环路滤波器的直流增益为无穷大,因此在稳态时,即使输入的相位误差为0,环路滤波器也可以产生维持压控振荡器频偏所需要的控制电压。

通过本节的案例可以看到,运用复频域分析的方法可以对锁相环进行定量的分析,其中环路滤波器的特性对锁相环的动态性能有重要的影响。在这个过程中,首先对鉴相器进行了线性化近似,使之成为一个线性时不变系统,这是复频域分析方法运用的前提;其次,将分析对象从完整的载波信号转换为信号的过量相位,从而将鉴相器转换为加法器,将压控振荡器转换为积分器,得到了系统的数学模型。线性化近似要求输入信号和输出信号的相位差异不大,只考虑相位则要求输入信号和输出信号的频率差异不大,因此该分析结果只在锁相环的锁定状态下适用。这个案例也提醒我们,运用信号与系统的理论方法分析实际系统时,可能需要通过一定的近似和转换技巧抽象出实际系统的数学模型;另外,要认识到理论分析的结果有它的适用范围,建立数学模型的过程中应用的近似和假设,是影响结果适用性的重要因素。

5.11 连续时间信号与系统复频域分析计算机仿真

5.11.1 信号的拉普拉斯变换

例 5.11.1 计算 $e^{2t}u(t)$ 、 $\sin(3t)u(t)$ 的拉普拉斯变换。

可利用 `laplace` 和 `ilaplace` 实现符号表达式的单边拉普拉斯变换和反变换。

```
syms t;
X1 = laplace(exp(3 * t) * heaviside(t))
X2 = laplace(sin(3 * t) * heaviside(t))
```

拉普拉斯变换结果分别为

$$X1 = 1/(s-3), \quad X2 = 3/(s^2 + 9)$$

例 5.11.2 计算 $\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}$ 的拉普拉斯反变换。

```
syms s; ilaplace((s+3)/(s+2)^3/(s+1))
```

拉普拉斯反变换结果为

$$2 * \exp(-t) - 2 * \exp(-2 * t) - 2 * t * \exp(-2 * t) - (t^2 * \exp(-2 * t))/2$$

拉普拉斯反变换默认是单边的。用 `ilaplace` 可以快速得到拉普拉斯反变换,但这种方法无法加深对概念的理解。对于求解分式形式的拉普拉斯反变换,推荐用部分分式展开法。可利用 `[r,p,k]=residue(b,a)` 函数实现部分分式展开,其中 `r` 为部分分式系数,`p` 为极点,`k` 为多项式系数。

例 5.11.3 用部分分式展开法实现例 5.11.2。

```
b = [1 3]; a1 = [1 1]; a2 = [1,2];
a = conv(conv(a1,a1),conv(a1,a2));
[r,p,k] = residue(b,a)
```

部分分式展开结果为

```
r = -1.0000 1.0000 -1.0000 2.0000
p = -2.0000 -1.0000 -1.0000 -1.0000
k = []
```

因此

$$X(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

5.11.2 系统函数极零点与系统特性

例 5.11.4 已知系统函数 $H(s) = \frac{0.5s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$, 试分别画出其极零点图、幅频响应和单位冲激响应。

频响应和单位冲激响应。

```
a = conv([1 1],[1 2 2]); b = [0.5 1]; subplot(1,3,1); pzmap(b,a)
[H,w] = freqs(b,a);subplot(1,3,2); plot(w,abs(H));title('系统幅频响应')
t = 0:0.01:20; ht = impulse(b,a,t);subplot(1,3,3);plot(t,ht);title('系统单位冲激响应')
```

系统极零点图、幅频响应和单位冲激响应如图 5.11.1 所示。

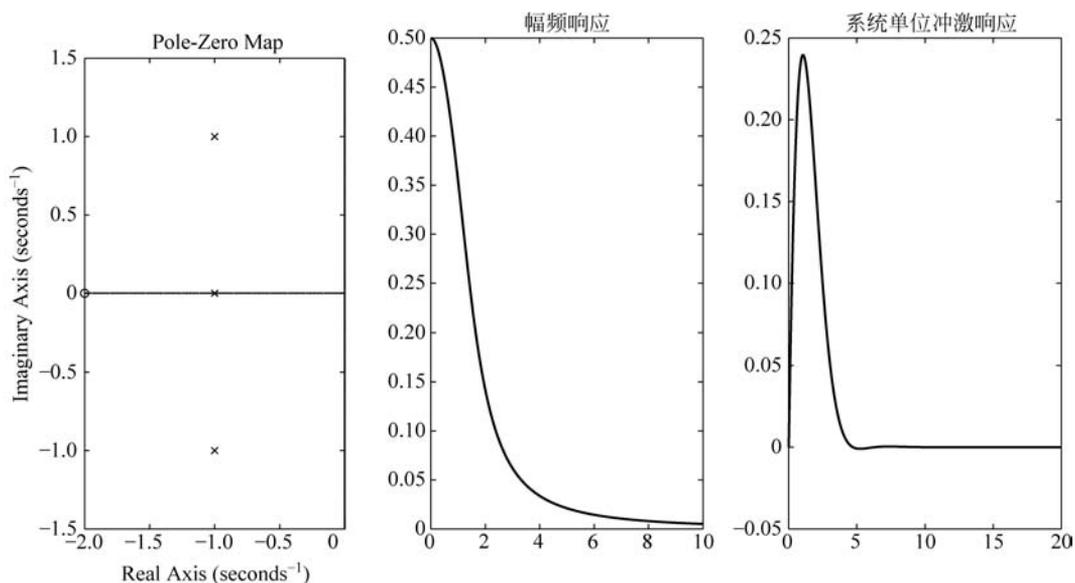


图 5.11.1 例 5.11.4 的结果

5.11.3 系统的模拟

例 5.11.5 设系统函数为 $H(s) = \frac{5s+7}{s^3+5s^2+5s+4}$, 写出其级联实现形式。

级联实现形式:

```
a = [1 5 5 4];
b = [0 0 5 7]; % 注意 b 须与 a 项数一致
[sos,G] = tf2sos(b,a)
```

运行结果为

```
sos =    0    1    0    1    4    0
        0    1    1.4  1    1    1
G =     5
```

因此得到级联形式

$$H(s) = 5 \frac{s^{-1}}{1+4s^{-1}} \frac{s^{-1} + 1.4s^{-2}}{1+s^{-1}+s^{-2}}$$

5.11.4 系统响应求解

例 5.11.6 通过计算机仿真求例 5.5.1 的零输入响应、零状态响应和全响应。
首先将该系统转换为状态空间模型:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, y = [1 \ 2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

```
A = [0, 1; -2, -3];    B = [0; 1];    C = [1, 2];    D = 0;
sys = ss(A, B, C, D);
t = [0:0.01:8];    xt = exp(-3 * t);    v0 = [-7/3; 5/3];
[yzi, t] = lsim(sys, zeros(1, length(t)), t, v0);
figure; subplot(3, 1, 1); plot(t, yzi); title('零输入响应')
[yzs, t] = lsim(sys, xt, t); subplot(3, 1, 2); plot(t, yzs); title('零状态响应')
[yt, t] = lsim(sys, xt, t, v0); subplot(3, 1, 3); plot(t, yt); title('全响应')
```

结果如图 5.11.2 所示。

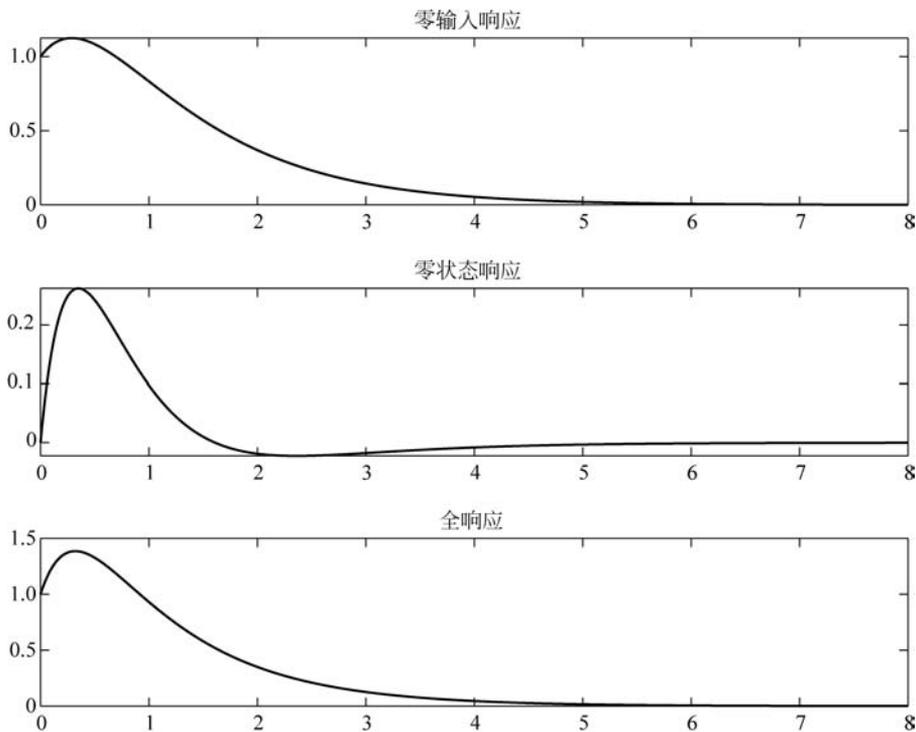


图 5.11.2 例 5.11.6 系统输出波形图

习 题

思考题

5.1 拉普拉斯变换与傅里叶变换有什么异同？为什么说拉普拉斯变换是广义的傅里叶变换？

- 5.2 $e^{s_0 t}$ 通过线性时不变系统后的输出是什么? 如何理解这一点?
 5.3 利用拉普拉斯变换求解系统全响应,对系统的因果性有什么要求?
 5.4 系统模拟框图的构成中为什么一般用积分器而不用微分器?

基本题

5.1 指出下列信号双边拉普拉斯变换的收敛域:

- (1) $u(t)$; (2) $\sin 2tu(t)$; (3) $tu(t)$; (4) $e^{3t}u(t)$;
 (5) $u(t) - u(t-4)$; (6) $e^{-|t|}$; (7) $e^{|t|}$ 。

5.2 求下列信号的双边拉普拉斯变换,并指明其收敛域:

(1) $\delta(t)$; (2) $u(t)$; (3) $-u(-t)$; (4) $x(t) = \begin{cases} e^{2t}, & t > 0 \\ e^{-3t}, & t < 0 \end{cases}$;

(5) $x(t) = \begin{cases} e^{4t}, & t > 0 \\ e^{3t}, & t < 0 \end{cases}$ 。

5.3 判断下列信号的傅里叶变换是否存在,单边拉普拉斯变换是否存在? 如果存在,请写出,并画出其收敛域。

- (1) $x(t) = u(t)$; (2) $x(t) = tu(t)$; (3) $x(t) = \delta(t)$; (4) $x(t) = e^{-2t}u(t)$;
 (5) $x(t) = e^{2t}u(t)$ 。

5.4 求下列信号的单边拉普拉斯变换:

- (1) $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$; (2) $e^{-t}u(t-2)$; (3) $e^{-t}[u(t) - u(t-2)]$;
 (4) $u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$; (5) $2\delta(t) - 3e^{-7t}u(t)$; (6) $(\sin t + 2\cos t)u(t)$;
 (7) $e^{-t} \sin 2t \cdot u(t)$; (8) $e^{-(t+a)} \cos(\omega_0 t)u(t)$; (9) $(1 - \cos at)e^{-\beta t}u(t)$;
 (10) $e^{-at} \sin(\beta t + \theta)u(t)$; (11) $(1 + 2t)e^{-t}u(t)$; (12) $t\delta'(t)$; (13) $t^2u(t-1)$;
 (14) $(t-1)[u(t-1) - u(t-2)]$; (15) $(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)u(t-\tau), \tau > 0$;
 (16) $(t^3 + t^2 + t + 1)u(t)$; (17) $te^{-at} \sin 2t \cdot u(t)$; (18) $\frac{1}{t}(e^{-3t} - e^{-4t})u(t)$;
 (19) $e^{-2(t+1)}u(t+1)$ 。

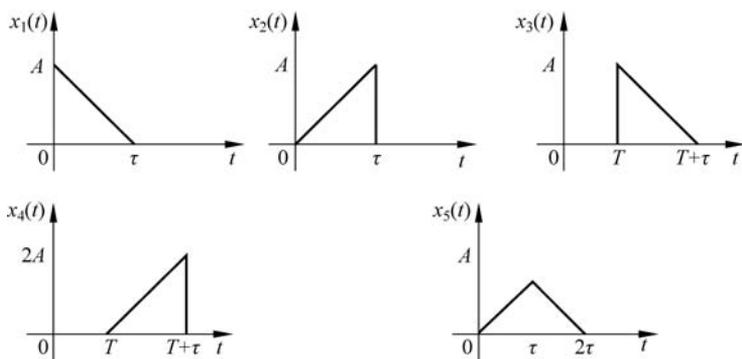
5.5 若已知 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$, 求 $e^{-at}x\left(\frac{t}{a}\right)$ 的拉普拉斯变换 ($a > 0$, 且 a 为实数)。

5.6 求题图 5.1 中信号 $x_1(t)$ 的拉普拉斯变换,并将其他信号的拉普拉斯变换表示成 $X_1(s)$ 的形式。

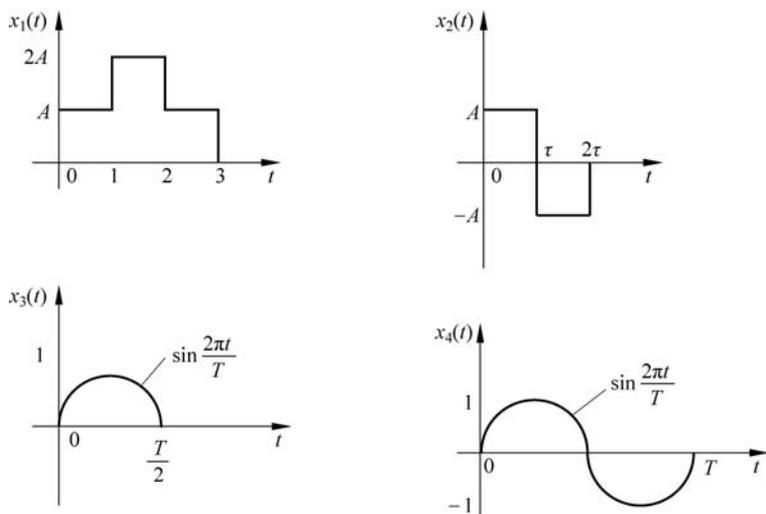
5.7 求题图 5.2 中信号的拉普拉斯变换。

5.8 已知 $L[x(t)] = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$, 求下列信号的拉普拉斯变换:

- (1) $\int_0^t x(\tau) d\tau$; (2) $x(t) \cdot \cos\omega_0 t$; (3) $x(2t-4)$; (4) $\frac{1}{t}x(t)$;
 (5) $t \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ 。



题图 5.1

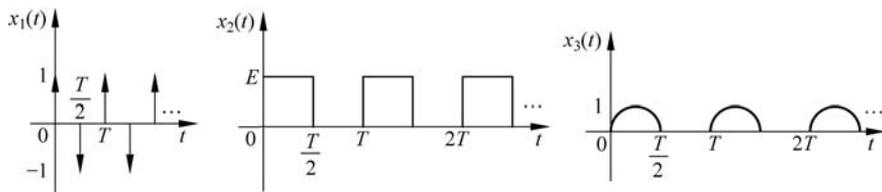


题图 5.2

5.9 已知因果信号的拉普拉斯变换如下,求 $x(0^+)$ 和 $x(\infty)$:

(1) $\frac{s-6}{(s+2)(s+5)}$; (2) $\frac{10(s+2)}{s(s+5)}$; (3) $\frac{1}{(s+3)^3}$; (4) $\frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$ 。

5.10 求题图 5.3 所示单边周期信号 ($t=0$ 时接入) 的拉普拉斯变换。



题图 5.3

5.11 用部分分式展开法求下列象函数的单边拉普拉斯反变换:

$$\begin{aligned}
 & (1) \frac{4}{s(2s+3)}; \quad (2) \frac{3s}{(s+2)(s+4)}; \quad (3) \frac{1}{s^2-3s+2}; \quad (4) \frac{1}{s(RCs+1)}; \\
 & (5) \frac{4s+5}{s^2+5s+6}; \quad (6) \frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}; \quad (7) \frac{2s+4}{s^2+2s+5}; \quad (8) \frac{2s+30}{s^2+10s+50}; \\
 & (9) \frac{1}{s(s^2+5)}; \quad (10) \frac{1}{s(s^2+s+1)}; \quad (11) \frac{e^{-s}}{4s(s^2+1)}; \quad (12) \frac{s-a}{(s+a)^2}; \\
 & (13) \frac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}; \quad (14) \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}; \quad (15) \frac{1}{(s+2)(s+3)^4}; \\
 & (16) \frac{1}{(s^2+3)^2}.
 \end{aligned}$$

5.12 求下列象函数的单边拉普拉斯反变换,并粗略画出其时域波形:

$$(1) \frac{1-e^{-sT}}{s+1}; \quad (2) \frac{s(1-e^{-s})}{s^2+\pi^2}; \quad (3) \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)^2.$$

5.13 求下列象函数的双边拉普拉斯反变换:

$$(1) \frac{-2}{(s-1)(s-3)}, 1 < \sigma < 3; \quad (2) \frac{2}{(s+1)(s+3)}, -3 < \sigma < -1; \quad (3) \frac{4}{s^2+4}, \sigma < 0.$$

5.14 试用拉普拉斯变换求解下列方程所描述的因果系统的全响应:

$$(1) y'(t) + 2y(t) = u(t), y(0^-) = 1;$$

$$(2) y'(t) + 2y(t) = 0, y(0^-) = 2;$$

$$(3) y'(t) + 2y(t) = 0, y(0^-) = 2.$$

5.15 用拉普拉斯变换求解因果系统 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3x(t)$ 的零输入响应和零状态响应。

$$(1) x(t) = u(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = -1;$$

$$(2) x(t) = e^{-t}u(t), y(0^-) = 0, y'(0^-) = 1.$$

5.16 已知描述因果系统的微分方程为 $y'(t) + 2y(t) = x'(t) + x(t)$, 试求下列输入时的零状态响应:

$$(1) x(t) = u(t); \quad (2) x(t) = e^{-t}u(t); \quad (3) x(t) = e^{-2t}u(t).$$

5.17 已知因果系统函数和初始状态如下,求系统零输入响应:

$$(1) H(s) = \frac{s}{s^2+4}, y(0^-) = 0, y'(0^-) = 1;$$

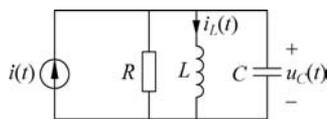
$$(2) H(s) = \frac{s+4}{s(s^2+3s+2)}, y(0^-) = y'(0^-) = y''(0^-) = 1.$$

5.18 某线性时不变系统,输入 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 时输出为 $y_{zs}(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}\right)u(t)$,求该系统的冲激响应 $h(t)$ 。

5.19 若系统的单位阶跃响应为 $s(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$,为使输出零状态响应为 $y_{zs}(t) = (1 - e^{-2t} + te^{-2t})u(t)$,求输入信号 $x(t)$ 。

5.20 电路如题图 5.4 所示。输入电流源 $i(t) = u(t)$, 求下列情况下的零状态响应 $u_C(t)$:

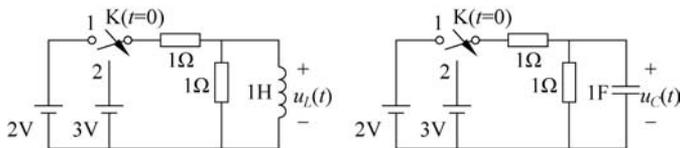
- (1) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=0.4\Omega$;
- (2) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=0.5\Omega$;
- (3) $L=0.1\text{H}, C=0.1\text{F}, R=\frac{1}{1.2}\Omega$ 。



题图 5.4

5.21 若上题中 $i_L(0^-) = -1\text{A}, u_C(0^-) = 1\text{V}$, 求上题三种情况下的零输入响应。

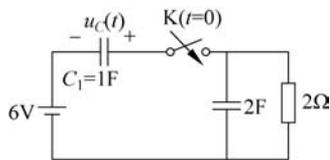
5.22 电路如题图 5.5 所示, 在 $t=0$ 前已处于稳定状态。开关 K 在 $t=0$ 时由“1”扳到“2”, 分别求 $u_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 。



题图 5.5

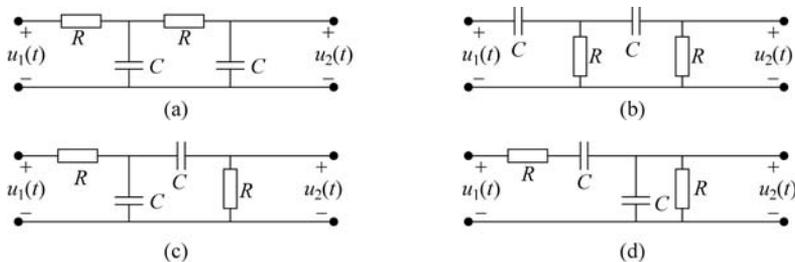
5.23 电路如题图 5.6 所示, 已知电容 C_1 上的初始电压为 3V , $t=0$ 时开关闭合, 求全响应 $i(t)$ 。

5.24 求题图 5.7 所示 4 种 RC 网络的传递函数 $\frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ ($R=1\Omega, C=1\text{F}$)。

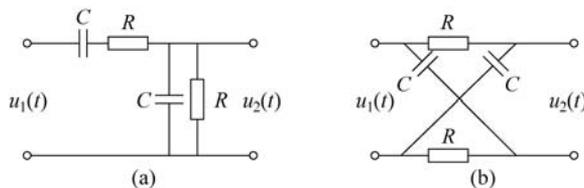


题图 5.6

5.25 分别求出题图 5.8 所示电路的系统函数, 并画出极零点图。



题图 5.7



题图 5.8

5.26 利用平面几何求值法,粗略画出以下系统函数所描述的线性时不变系统的幅频和相频响应曲线(默认收敛域均包含虚轴)。

(1) $H(s) = \frac{s^2 - 2s + 50}{s^2 + 2s + 50}$; (2) $H(s) = \frac{s-1}{s+2}$; (3) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$;

(4) $H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$; (5) $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 1}$ 。

5.27 某线性时不变系统的极零点图如题图 5.9 所示。

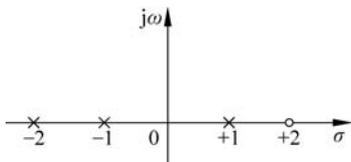
- (1) 指出该系统所有可能的收敛域;
- (2) 对(1)中所有可能的收敛域,判断系统是否稳定或因果。

5.28 某连续系统的微分方程为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$, $H(s)$ 表示该系统的系统函数。

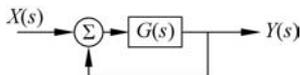
的系统函数。

- (1) 把 $H(s)$ 表示成 s 的多项式之比,并画出 $H(s)$ 的极零点图;
- (2) 对下列三种情况中的每一种,确定 $h(t)$:
 - (a) 系统是稳定的;
 - (b) 系统是因果的;
 - (c) 系统既不是稳定,也不是因果的。

5.29 某控制系统结构如题图 5.10 所示,其中 $G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{(s+1)(0.5s^2+s+1)}$,试确定该系统稳定时的 K 值范围。



题图 5.9



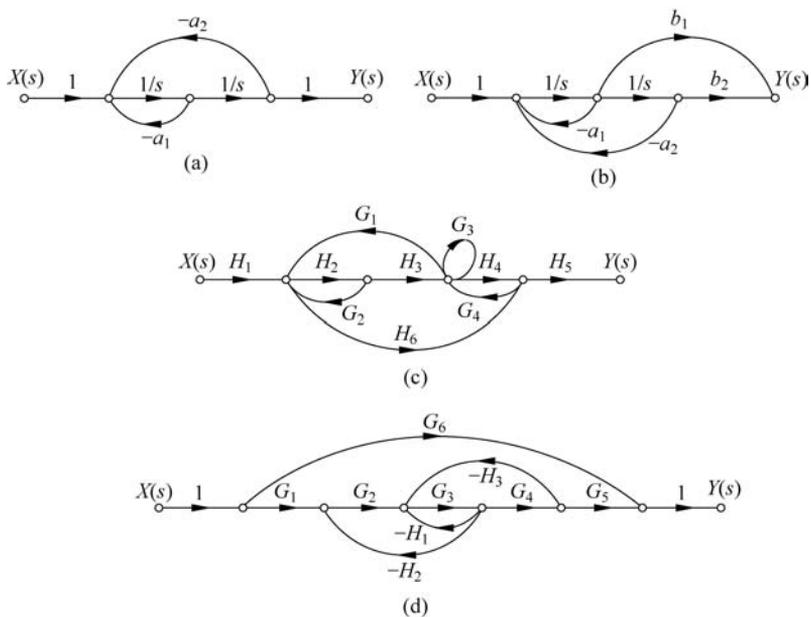
题图 5.10

5.30 设系统有下列特征方程,用劳斯-霍尔维茨判据判别各系统的稳定性或求系统稳定时的 K 值范围,若系统不稳定,则指出系统特征方程有正实部根的个数。

- (1) $s^4 + 5s^2 + 2s + 10 = 0$;
- (2) $s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 10s + 10 = 0$;
- (3) $4s^5 + 6s^4 + 9s^3 + 2s^2 + 5s + 4 = 0$;
- (4) $s^4 + 9s^3 + 10s^2 + Ks + K = 0$;
- (5) $s^3 + 4s^2 + 4s + K = 0$;
- (6) $s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$ 。

5.31 系统的信号流图如题图 5.11 所示,求系统函数。

5.32 设某连续系统的系统函数如下,求它们的直接实现形式、级联实现形式和并

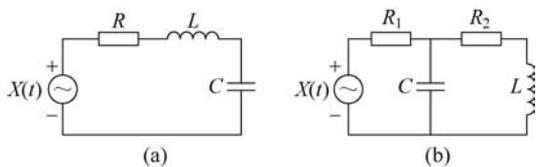


题图 5.11

联实现形式。

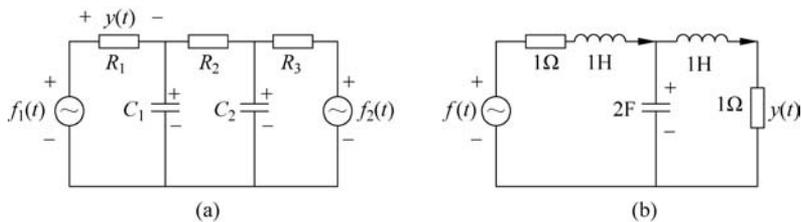
$$(1) H(s) = \frac{5s + 7}{s^3 + 5s^2 + 5s + 4}; \quad (2) H(s) = \frac{s + 3}{(s + 2)^2 (s + 1)}.$$

5.33 建立题图 5.12 所示电路的状态方程。



题图 5.12

5.34 建立题图 5.13 所示电路的状态方程和输出方程。



题图 5.13

5.35 将下列微分方程化为状态方程和输出方程:

(1) $y'''(t) + 5y''(t) + 7y'(t) + 3y(t) = x(t)$;

(2) $y''(t) + 4y'(t) = x(t)$;

(3) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + x(t)$ 。

5.36 将下列微分方程组化为状态方程和输出方程:

(1) $y_1'(t) + y_2(t) = x_1(t)$
 $y_2''(t) + y_1'(t) + y_2'(t) + y_1(t) = x_2(t)$;

(2) $y_1''(t) + y_2(t) = x(t)$
 $y_2''(t) + y_1(t) = x(t)$ 。

提高题

5.1 已知因果信号的象函数如下,求 $x(0^+)$ 和 $x(\infty)$:

(1) $\frac{s}{s^2 - 2}$; (2) $\frac{s}{s + 2}$; (3) $\frac{1}{s^2 + 1}$ 。

5.2 已知 $X(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$, 利用拉普拉斯变换的性质直接求下列象函数的反变换:

(1) $X\left(\frac{s}{3}\right)$; (2) $X\left(\frac{s}{3}\right)e^{-2s}$; (3) $X'(s)$; (4) $sX'(s)$; (5) $X'\left(\frac{s}{3}\right)$;

(6) $\frac{X(s)}{s}$; (7) $\frac{X'\left(\frac{s}{3}\right)}{s}$; (8) $sX\left(\frac{s}{3}\right)$; (9) $sX\left(\frac{s}{3}\right)e^{-2s}$ 。

5.3 求下列象函数的单边拉普拉斯反变换,并粗略画出时域波形:

(1) $\frac{1}{1 + e^{-s}}$; (2) $\frac{1}{s(1 + e^{-s})}$ 。

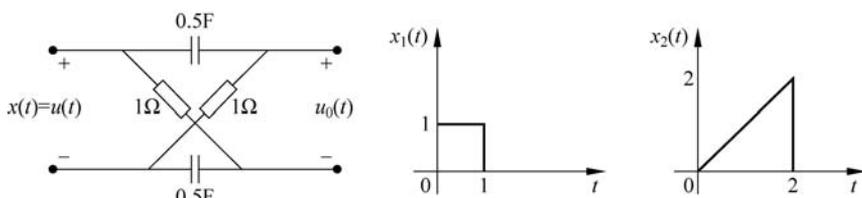
5.4 求 $\frac{-s+1}{(s^2+4)(s+1)}$, $-1 < \sigma < 0$ 的双边拉普拉斯反变换。

5.5 信号 $x(t)$ 满足有以下特点:(1) 因果信号;(2) 有多个零值点。其象函数 $X(s)$ 的极点个数有可能为 1 吗?

5.6 某信号 $x(t)$ 具有以下特点:(1) $x(t)$ 为实偶信号;(2) $X(s)$ 有 4 个极点没有零点;(3) $X(s)$ 有一个极点在 $0.5e^{j\frac{\pi}{4}}$; (4) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 4$ 。试确定 $x(t)$ 及其拉普拉斯变换收敛域。

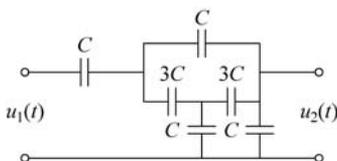
5.7 电路如题图 5.14 所示, $u_0(t)$ 为输出信号。求:

- (1) 系统函数;
- (2) 输入为 $x_1(t)$ 时的零状态响应;
- (3) 输入为 $x_2(t)$ 时的零状态响应。



题图 5.14

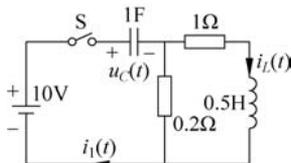
5.8 求题图 5.15 所示电路的系统函数,其中 $u_1(t)$ 为输入信号, $u_2(t)$ 为输出信号。



题图 5.15

5.9 电路如题图 5.16 所示, $i_1(t)$ 为输出电流, $u_C(0^-) = 8V$, $i_L(0^-) = 4A$, $t = 0$ 时开关闭合。

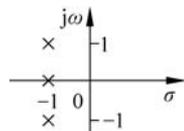
- (1) 画出该系统的 s 域等效电路图;
- (2) 计算全响应电流 $i_1(t)$;
- (3) 指出 $i_1(t)$ 的自然响应、强迫响应、瞬态响应和稳态响应分量。



题图 5.16

5.10 某连续时间系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-2|t|}$, 试写出描述该系统的微分方程, 并计算 e^{-t} 通过该系统后的输出。

5.11 某连续系统极零点图如题图 5.17 所示。当输入 $x(t) = \begin{cases} 1, & \cos t > \frac{1}{\pi} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 时, 若分别用 X_k, Y_k 表示输入、输出信号



题图 5.17

的傅里叶级数, $\frac{Y_0}{X_0} = 1$, 试计算 $\frac{Y_1}{X_1}$ 。

5.12 周期信号 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(t - 3k) + \delta(t - 1 - 3k) - \delta(t - 2 - 3k)]$ 通过系统函数为 $H(s) = e^{s/4} - e^{-s/4}$ 的系统。用 Y_k 表示输出 $y(t)$ 的傅里叶级数, 试计算 Y_3 。

5.13 某系统单位冲激响应 $h(t) = (1 - 2t)e^{-2t}u(t)$, 试近似画出该系统的频率响

应,并判断该系统为何种类型的滤波器。

5.14 设计某二阶带通滤波器,其中心频率在 $\omega_0=10$,增益在 $\omega=0$ 和 $\omega=\infty$ 应该为零,将极点选在 $-a \pm j10$,试分析 a 对频率响应的影响。

5.15 想设计一因果稳定的连续时间线性时不变系统。在低频段该系统的幅频特性近似为 5ω ,在高频段该系统幅频特性近似为 $80/\omega$,且当 $\omega=4$ 时,该系统的幅频响应为 40。可以设计出满足上述条件的系统吗?若可以,请写出该系统的系统函数。

5.16 某因果线性时不变系统,在初始状态不变的条件下,当输入 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 时,全响应为 $y(t)=1.5e^{-t}u(t)-2e^{-2t}u(t)+0.5e^{-3t}u(t)$;当输入 $x(t)=e^{-4t}u(t)$ 时,全响应 $y(t)=2.5e^{-2t}u(t)-4e^{-3t}u(t)+1.5e^{-4t}u(t)$ 。

- (1) 计算该系统的系统函数 $H(s)$;
- (2) 画出该系统的极零点图,并指出 $H(s)$ 的收敛域;
- (3) 判断该系统的稳定性并说明原因;
- (4) 求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

5.17 下列关于 $x(t)$ 的说法分别对 $X(s)$ 收敛域有何要求?

- (1) $x(t)e^{2t}$ 绝对可积; (2) $x(t) * [e^{-2t}u(t)]$ 绝对可积;
- (3) $x(t)=0, t < 1$; (4) $x(t)=0, t > 1$ 。

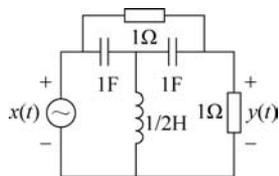
5.18 某实信号 $x(t)$ 满足下列 5 个条件,试确定 $X(s)$ 并给出其收敛域。

- (1) $X(s)$ 只有两个极点;
- (2) $X(s)$ 在有限 s 平面没有零点;
- (3) $X(s)$ 有一个极点在 $s=-1+j$;
- (4) $e^{2t}x(t)$ 不是绝对可积的;
- (5) $X(0)=8$ 。

5.19 某因果稳定线性时不变系统的单位冲激响应记作 $h(t)$,系统函数 $H(s)$ 有理且满足以下条件,试确定 $H(s)$ 并给出其收敛域。

- (1) $H(1)=0.2$;
- (2) 当输入为 $u(t)$ 时,输出绝对可积;
- (3) 当输入为 $tu(t)$ 时,输出不绝对可积;
- (4) 信号 $h''(t)+2h'(t)+2h(t)$ 是有限长的;
- (5) $H(s)$ 在无限远点只有一个零点。

5.20 建立题图 5.18 所示电路的状态方程和输出方程。



题图 5.18

计算机作业

5.1 计算下列信号的单边拉普拉斯变换:

- (1) $\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$; (2) $e^{-t}u(t-2)$; (3) $e^{-t}[u(t)-u(t-2)]$;
- (4) $(t^3+t^2+t+1)u(t)$; (5) $te^{-at}\sin 2t \cdot u(t)$ 。

5.2 计算下列象函数的单边拉普拉斯反变换：

$$(1) \frac{s-a}{(s+a)^2}; \quad (2) \frac{e^{-s}}{4s(s^2+1)}; \quad (3) \frac{1}{s(s^2+5)}。$$

5.3 对下列象函数进行部分分式展开：

$$(1) \frac{4}{s(2s+3)}; \quad (2) \frac{1}{s^2-3s+2}; \quad (3) \frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3};$$

$$(4) \frac{2s+4}{s^2+2s+5}; \quad (5) \frac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}; \quad (6) \frac{1}{s(s^2+s+1)}。$$

5.4 画出以下系统函数所描述的连续时间线性时不变系统的极零点图,以及频率响应曲线(默认收敛域均包含虚轴):

$$(1) H(s) = \frac{s^2-2s+50}{s^2+2s+50}; \quad (2) H(s) = \frac{s-1}{s+2}; \quad (3) H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)};$$

$$(4) H(s) = \frac{s}{s^2+s+1}; \quad (5) H(s) = \frac{s^2}{s^2+2s+1}。$$

5.5 编程实现基本题 5.15。

5.6 编程实现基本题 5.27。