

# 第5章

## 窄带随机过程

如果一个随机过程的功率谱集中在某一中心频率附近的一个很小的频带内,且该频带又远小于其中心频率,这样的随机过程称为窄带随机过程,很显然,白噪声(或宽带噪声)通过窄带系统,其输出就是窄带随机过程。在电子系统中,窄带系统有很多,如一般的无线电接收系统都有的高频和中频放大器就是窄带系统,因此,窄带随机过程是雷达、通信系统中常见的随机过程。

窄带随机过程分析的有力工具是希尔伯特(Hilbert)变换。因此,本章首先介绍希尔伯特变换及信号的复信号表示,在此基础上,介绍窄带随机过程的表示形式与统计特性。

## 5.1 希尔伯特变换

希尔伯特变换是信号处理中常用的一种变换,是分析窄带信号的一种很好的数学工具。

### 5.1.1 希尔伯特变换的定义

假定有一个实函数  $x(t)$ ,它的希尔伯特变换定义为

$$H[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.1.1)$$

反变换为

$$H^{-1}[\hat{x}(t)] = x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.1.2)$$

经过简单的变量替换,式(5.1.1)和式(5.1.2)也可以写成

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t - \tau)}{\tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t + \tau)}{\tau} d\tau \quad (5.1.3)$$

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(t - \tau)}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(t + \tau)}{\tau} d\tau \quad (5.1.4)$$

由定义可知, $x(t)$ 的希尔伯特变换为  $x(t)$ 与  $1/\pi t$  的卷积,即

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (5.1.5)$$

因此,对  $x(t)$ 的希尔伯特变换可以看作  $x(t)$ 通过一个冲激响应为  $1/\pi t$  的线性滤波器,如图 5.1 所示。

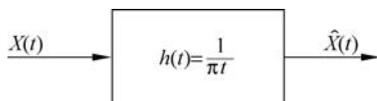


图 5.1 希尔伯特变换

希尔伯特变换器传递函数为



$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & (\omega > 0) \\ j & (\omega < 0) \end{cases} \quad (5.1.6)$$

其中  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  为符号函数。从希尔伯特变换器的传递函数可以看出, 它的幅频特性为

$$|H(\omega)| = 1 \quad (5.1.7)$$

它的相频特性为

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & (\omega > 0) \\ \pi/2 & (\omega < 0) \end{cases} \quad (5.1.8)$$

可见, 希尔伯特变换器在整个频域上具有恒为 1 的幅频特性, 为全通网络, 在相位上则引入  $-\frac{\pi}{2}$  和  $\frac{\pi}{2}$  的相移, 因此, 希尔伯特变换器可以看作一个  $\frac{\pi}{2}$  的理想移相器(或正交滤波器)。

### 5.1.2 希尔伯特变换的性质

$$(1) \quad H[\hat{x}(t)] = -x(t) \quad (5.1.9)$$

连续两次希尔伯特变换相当于做两次  $\frac{\pi}{2}$  的移相, 即  $\pi$  的移相, 也就是使信号反相。

(2) 设  $\omega_0$  为载波频率,  $\varphi$  为常数, 则

$$H[\cos(\omega_0 t + \varphi)] = \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.1.10)$$

$$H[\sin(\omega_0 t + \varphi)] = -\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.1.11)$$

(3) 设  $a(t)$  为低频信号, 其傅里叶变换为  $A(\omega)$ , 且

$$A(\omega) = 0 \quad (|\omega| > \Delta\omega/2) \quad (5.1.12)$$

则当  $\omega_0 > \Delta\omega/2$  时, 有

$$H[a(t)\cos\omega_0 t] = a(t)\sin\omega_0 t \quad (5.1.13)$$

$$H[a(t)\sin\omega_0 t] = -a(t)\cos\omega_0 t \quad (5.1.14)$$

**证明** 由性质(1)知, 若式(5.1.13)成立, 则式(5.1.14)必成立, 因此只需证明式(5.1.13)就行了。

令  $x(t) = a(t)\cos\omega_0 t$ , 则

$$X(\omega) = \frac{1}{2}[A(\omega - \omega_0) + A(\omega + \omega_0)]$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(\omega) &= -j \operatorname{sgn}(\omega) \left\{ \frac{1}{2}[A(\omega - \omega_0) + A(\omega + \omega_0)] \right\} \\ &= -\frac{j}{2}A(\omega - \omega_0) + \frac{j}{2}A(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

求上式的傅里叶反变换,得

$$\hat{x}(t) = a(t) \sin \omega_0 t$$

(4) 设  $A(t)$  与  $\varphi(t)$  为低频信号,则

$$H\{A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (5.1.15)$$

$$H\{A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = -A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (5.1.16)$$

请读者在习题 5.2 中自行证明。

(5) 设  $y(t) = v(t) * x(t)$ , 则

$$\hat{y}(t) = \hat{v}(t) * x(t) = v(t) * \hat{x}(t) \quad (5.1.17)$$

根据卷积运算的结合律就可以证明该性质。

(6) 设平稳随机过程  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau)$ , 则

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) \quad (5.1.18)$$

**证明** 因为  $G_{\hat{X}}(\omega) = G_X(\omega) |H(\omega)|^2 = G_X(\omega)$

所以  $R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$

即  $X(t)$  经过希尔伯特变换后,其功率谱不变。这比较好理解,因为希尔伯特变换只影响相频特性,不影响幅频特性,而功率谱不含相位信息,经过希尔伯特变换以后,其功率谱是不变的,即相关函数是不变的。由式(5.1.18),得

$$R_{\hat{X}}(0) = R_X(0) \quad (5.1.19)$$

即经过希尔伯特变换以后,其平均功率是不变的。该性质对时间相关函数也是成立的。即

$$\overline{R_{\hat{X}}(\tau)} = \overline{R_X(\tau)} \quad (5.1.20)$$

$$\overline{R_{\hat{X}}(0)} = \overline{R_X(0)} \quad (5.1.21)$$

(7)  $X(t)$  与它的希尔伯特变换的互相关函数满足如下关系:

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}(\tau), \quad R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}(\tau) \quad (5.1.22)$$

证明留作习题,参见习题 5.3。

(8)  $X(t)$  与它的希尔伯特变换的互相关函数是奇函数,即

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau), \quad R_{\hat{X}X}(-\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau) \quad (5.1.23)$$

$$R_{X\hat{X}}(0) = -R_{\hat{X}X}(0) = 0 \quad (5.1.24)$$

式(5.1.24)也表明,  $X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  在同一时刻是正交的。

(9) 偶函数的希尔伯特变换是奇函数,奇函数的希尔伯特变换是偶函数(证明留作习题,参见习题 5.1)。

**例 5.1** 单边带调制信号的产生。通信系统中的调制信号是典型的窄带信号,假定线性调制载波为



$$s(t) = A(t) \cos 2\pi f_0 t$$

其中  $A(t)$  与调制信号  $m(t)$  成比例关系时产生双边带调制(DSB), 如果  $A(t) = A_0 m(t)$ , 那么 DSB 信号的频谱为

$$S(f) = \frac{1}{2} A_0 M(f + f_0) + \frac{1}{2} A_0 M(f - f_0)$$

图 5.2 给出了 DSB 信号的频谱, 高于载波频率的  $M(f - f_0)$  部分称为上边带 USB, 低于载波频率的  $M(f - f_0)$  部分称为下边带 LSB。上下边带以载波频率为中心, 幅度呈现偶对称关系, 而相位为奇对称, 因此, 只需一个边带就可以得到  $m(t)$ , 没有必要同时传输两个边带。

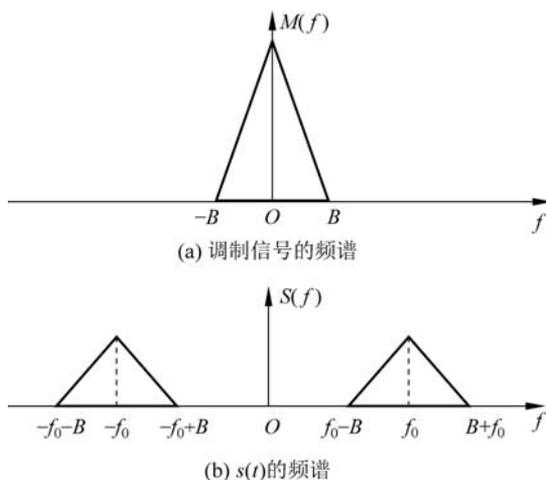


图 5.2 DSB 信号的频谱

保留 DSB 上边带的信号称为上边带(USB)信号, 保留 DSB 下边带的信号称为下边带(LSB)信号。图 5.3 给出了 DSB 信号和 LSB 信号的频谱。

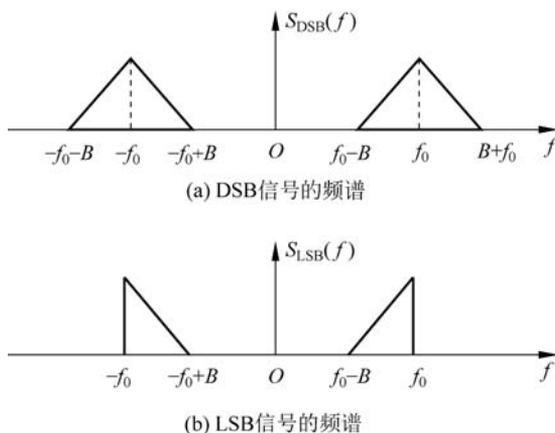


图 5.3 DSB 和 LSB 信号的频谱

DSB 信号通过下边带滤波器,可以获得下边带信号。下边带滤波器可表示为

$$\begin{aligned}
 H_{\text{LSB}}(f) &= \frac{1}{2} [\text{sgn}(f + f_0) - \text{sgn}(f - f_0)] \\
 S_{\text{LSB}}(f) &= H_{\text{LSB}}(f)S(f) \\
 &= \frac{1}{2} [\text{sgn}(f + f_0) - \text{sgn}(f - f_0)] \times \frac{1}{2} A_0 [M(f + f_0) + M(f - f_0)] \\
 &= \frac{1}{4} A_0 [M(f + f_0) + M(f - f_0)] + \\
 &\quad \frac{1}{4} A_0 [M(f + f_0) \text{sgn}(f + f_0) - M(f - f_0) \text{sgn}(f - f_0)]
 \end{aligned}$$

很显然,  $\frac{1}{2} A_0 m(t) \cos 2\pi f_0 t \leftrightarrow \frac{1}{4} A_0 [M(f + f_0) + M(f - f_0)]$ 。此外,根据希尔伯特变换的性质,

$$\begin{aligned}
 \hat{m}(t) &\leftrightarrow -j \text{sgn}(f) M(f), \quad \hat{m}(t) e^{\pm j 2\pi f_0 t} \leftrightarrow -j \text{sgn}(f \mp f_0) M(f \mp f_0) \\
 &\quad \frac{1}{4} A_0 [M(f + f_0) \text{sgn}(f + f_0) - M(f - f_0) \text{sgn}(f - f_0)] \\
 &\leftrightarrow -j \frac{1}{4} A_0 [\hat{m}(t) e^{j 2\pi f_0 t} - \hat{m}(t) e^{-j 2\pi f_0 t}] = \frac{1}{2} A_0 \hat{m}(t) \sin 2\pi f_0 t
 \end{aligned}$$

所以

$$s_{\text{LSB}}(t) = \frac{1}{2} A_0 m(t) \cos 2\pi f_0 t + \frac{1}{2} A_0 \hat{m}(t) \sin 2\pi f_0 t$$

同理可得

$$s_{\text{USB}}(t) = \frac{1}{2} A_0 m(t) \cos 2\pi f_0 t - \frac{1}{2} A_0 \hat{m}(t) \sin 2\pi f_0 t$$

USB 和 LSB 信号的产生如图 5.4 所示。

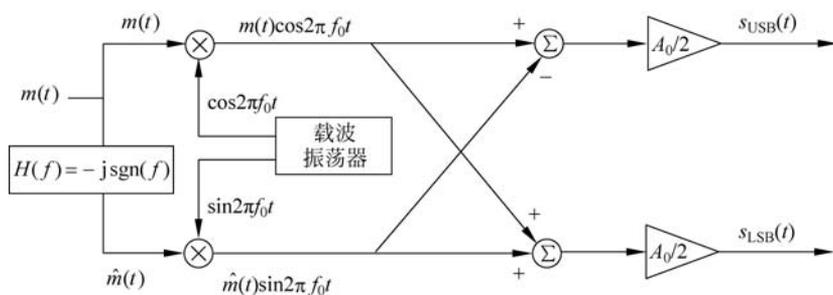


图 5.4 USB 和 LSB 信号的产生

**例 5.2** 假多普勒干扰。雷达通常是发射一个信号,遇到目标后产生回波信号,通过对回波信号的检测发现目标并确定目标位置。现代雷达常采用复杂的信号形式和先进的信号处理技术,不仅大大提高了探测性能,也显著提高了抗干扰能力,对雷达干扰技术提出了严峻的挑战。数字射频存储雷达干扰技术是对抗现代雷达的一种新型干扰方式,

它可以对接收的雷达信号采样后进行长时间的存储,经调制以后再转发为与雷达发射信号匹配的干扰信号。比如在调制过程中引入假多普勒信息,形成的干扰信号对雷达测速跟踪系统造成一个错误的速度信息,从而降低雷达系统的性能。假多普勒干扰机的组成如图 5.5 所示。

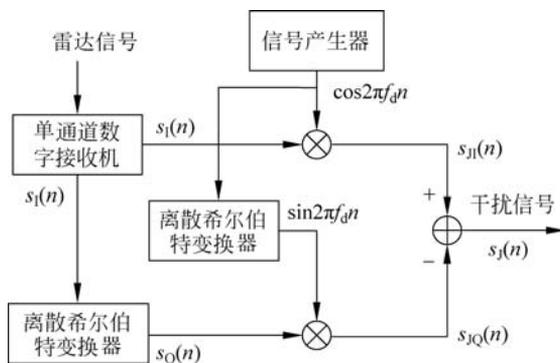


图 5.5 假多普勒干扰信号产生原理框图

考虑到实现的成本,对雷达信号采用单通道接收,即获得雷达信号的同相分量,然后通过希尔伯特变换实时获得雷达信号的正交分量,由于此处是采用数字接收机的方案,因此,希尔伯特变换也是离散希尔伯特变换。离散希尔伯特变换的单位样值响应为

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi n} & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}$$

假定单通道接收机输出的信号为  $s_1(n) = a(n)\cos(2\pi f_0 n + \varphi(n))$ , 则

$$s_{J1}(n) = a(n)\cos(2\pi f_0 n + \varphi(n))\cos 2\pi f_d n$$

$$s_{JQ}(n) = a(n)\sin(2\pi f_0 n + \varphi(n))\sin 2\pi f_d n$$

$$s_J(n) = s_{J1}(n) - s_{JQ}(n)$$

$$= a(n)\cos(2\pi f_0 n + \varphi(n))\cos 2\pi f_d n - a(n)\sin(2\pi f_0 n + \varphi(n))\sin 2\pi f_d n$$

$$= a(n)\cos[2\pi(f_0 + f_d)n + \varphi(n)]$$

可见,输出的干扰信号产生了一个多普勒频移。

## 5.2 信号的复信号表示

### 5.2.1 确知信号的复信号表示

设  $x(t)$  为实的确知信号,信号的复信号形式定义为

$$\tilde{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (5.2.1)$$

$\tilde{x}(t)$  也称为解析信号。

假定  $A(t)$  和  $\varphi(t)$  都是低频分量,那么

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

是窄带确知信号,它的解析信号为

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + jA(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \\ &= A(t) e^{j[\omega_0 t + \varphi(t)]} \\ &= \tilde{A}(t) e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

其中

$$\tilde{A}(t) = A(t) e^{j\varphi(t)} \quad (5.2.3)$$

$\tilde{A}(t)$ 称为复包络。

下面讨论一下解析信号的特征。对解析信号取傅里叶变换,得

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega) &= X(\omega) + j\hat{X}(\omega) \\ &= X(\omega) + j[-j\text{sgn}(\omega)X(\omega)] \\ &= X(\omega)[1 + \text{sgn}(\omega)] \\ &= 2X(\omega)U(\omega) \\ &= \begin{cases} 2X(\omega) & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

即,解析信号的频谱在负频率部分为零,而正频率部分是实信号的两倍。对于窄带确知信号,由式(5.2.2)得

$$\tilde{X}(\omega) = \tilde{A}(\omega - \omega_0) \quad (5.2.5)$$

或者

$$\tilde{A}(\omega) = \tilde{X}(\omega + \omega_0) \quad (5.2.6)$$

即,将解析信号的频谱向左平移 $\omega_0$ 就可以得到复包络的频谱。图5.6给出了窄带信号及其解析信号频谱之间的关系。

## 5.2.2 随机信号的复信号表示

对于随机信号,同样可以表示成复信号形式。设有平稳随机信号 $X(t)$ ,它的复信号形式定义为

$$\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t) \quad (5.2.7)$$

它的自相关函数定义为

$$R_{\tilde{X}}(\tau) = E[\tilde{X}(t + \tau)\tilde{X}^*(t)] \quad (5.2.8)$$

将式(5.2.7)代入式(5.2.8),得

$$\begin{aligned} R_{\tilde{X}}(\tau) &= E\{[X(t + \tau) + j\hat{X}(t + \tau)][X(t) - j\hat{X}(t)]\} \\ &= R_X(\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) + j[R_{\hat{X}X}(\tau) - R_{X\hat{X}}(\tau)] \end{aligned}$$

由于 $R_X(\tau) = R_{\hat{X}}(\tau)$ , $R_{X\hat{X}}(\tau) = R_{\hat{X}X}(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$ ,所以上式可简化为

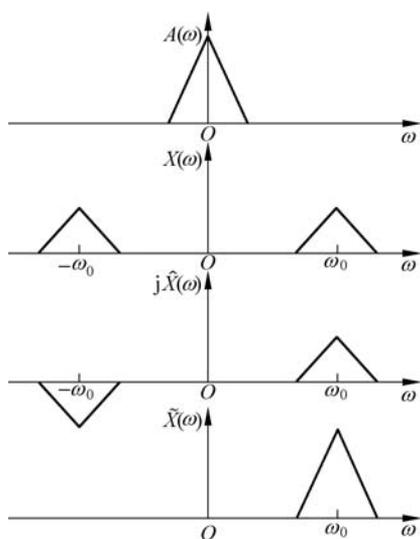


图 5.6 窄带信号及其解析信号频谱关系

$$R_{\tilde{X}}(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] \quad (5.2.9)$$

且

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2}\text{Re}[R_{\tilde{X}}(\tau)] \quad (5.2.10)$$

式中,  $\text{Re}(\cdot)$  表示取实部, 对式(5.2.9)两边取傅里叶变换, 得

$$\begin{aligned} G_{\tilde{X}}(\omega) &= 2[G_X(\omega) + \text{sgn}(\omega)G_X(\omega)] \\ &= \begin{cases} 4G_X(\omega) & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

式(5.2.11)表明, 随机信号的复信号形式, 其功率谱密度在负频率为零, 而在正频率为随机信号功率谱的四倍, 如图 5.7 所示。

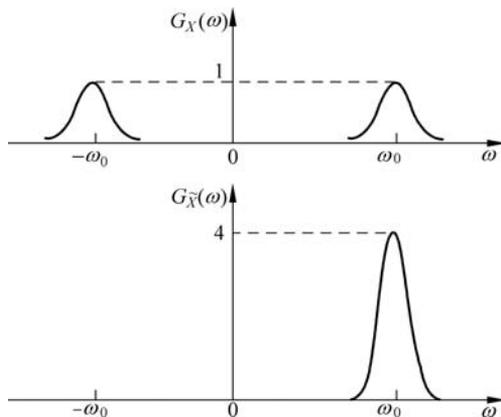


图 5.7 窄带随机信号及其复过程的功率谱



## 5.3 窄带随机过程的统计特性

### 5.3.1 窄带随机过程的准正弦振荡表示

在一般无线电接收系统中,通常都有高频或中频放大器,它们的通频带往往远小于中心频率  $f_0$ ,即

$$\frac{\Delta f}{f_0} \ll 1 \quad (5.3.1)$$

这样的系统称为窄带系统。

当系统的输入端加入白噪声或宽带噪声时,由于系统的带通特性,输出的功率谱集中在  $\omega_0$  为中心的一个很小的频带内,其输出噪声的波形如图 5.8(d)所示,这种形状的波形告诉我们,窄带过程表现为具有载波角频率  $\omega_0$ 、但相对于载波而言幅度和相位是慢变化的正弦振荡形式,可表示为

$$Y(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (5.3.2)$$

其中  $\omega_0$  为中心频率,  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  是慢变化的随机过程,式(5.3.2)称为窄带随机过程的准正弦振荡表示形式。将式(5.3.2)展开,得

$$\begin{aligned} Y(t) &= A(t) \cos\Phi(t) \cos\omega_0 t - A(t) \sin\Phi(t) \sin\omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos\omega_0 t - A_s(t) \sin\omega_0 t \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

其中

$$A_c(t) = A(t) \cos\Phi(t), \quad A_s(t) = A(t) \sin\Phi(t) \quad (5.3.4)$$

$A_c(t)$  和  $A_s(t)$  都是低频慢变化的随机过程,称为窄带随机过程的同相分量和正交分量。窄带随机过程的幅度和相位可以用同相分量和正交分量表示为

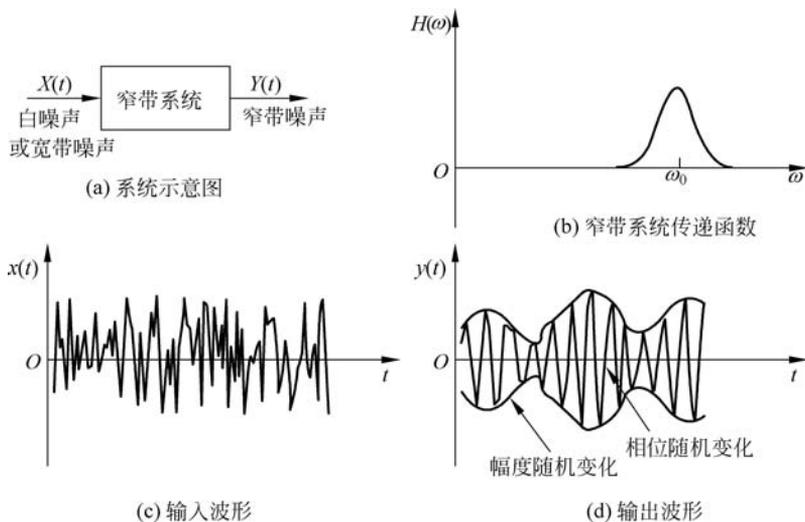


图 5.8 白噪声或宽带噪声通过窄带系统

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \Phi(t) = \arctan \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \quad (5.3.5)$$

### 5.3.2 窄带随机过程的统计特性

#### 1. 窄带随机信号的相关函数

设窄带随机信号  $Y(t)$  的功率谱如图 5.9(a) 所示。

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_Y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G_Y(\omega) \cos\omega\tau d\omega \quad (5.3.6)$$

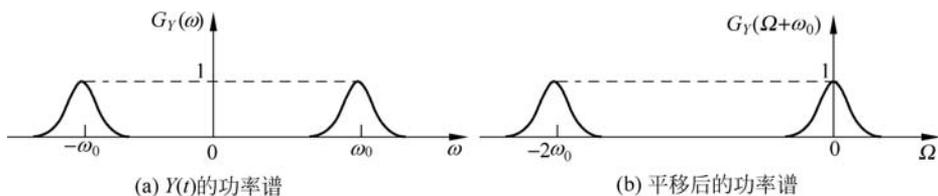


图 5.9 窄带随机信号的功率谱

令  $\omega = \Omega + \omega_0$ , 则

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0) \cos[(\Omega + \omega_0)\tau] d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0) [\cos\Omega\tau \cos\omega_0\tau - \sin\Omega\tau \sin\omega_0\tau] d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0) \cos\Omega\tau d\Omega \cos\omega_0\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0) \sin\Omega\tau d\Omega \sin\omega_0\tau \end{aligned}$$

即

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau) \cos\omega_0\tau - R_b(\tau) \sin\omega_0\tau \quad (5.3.7)$$

其中

$$R_a(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0) \cos\Omega\tau d\Omega \quad (5.3.8)$$

$$R_b(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} G_Y(\Omega + \omega_0) \sin\Omega\tau d\Omega \quad (5.3.9)$$

$R_a(\tau)$  和  $R_b(\tau)$  都是低频慢变化的。如果  $G_Y(\omega)$  具有对称形式的功率谱(频带内的功率谱关于中心频率对称), 则  $R_b(\tau) = 0$ ,  $R_a(\tau)$  是偶函数, 自相关函数变为

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau) \cos\omega_0\tau \quad (5.3.10)$$

#### 2. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的统计特性

根据式(5.3.3)得

$$Y(t) = A_c(t) \cos\omega_0 t - A_s(t) \sin\omega_0 t$$

所以

$$\hat{Y}(t) = A_c(t) \sin\omega_0 t + A_s(t) \cos\omega_0 t \quad (5.3.11)$$

$$Y(t) \cos \omega_0 t = A_c(t) \cos^2 \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$\hat{Y}(t) \sin \omega_0 t = A_c(t) \sin^2 \omega_0 t + A_s(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t$$

将上面两式相加, 可得

$$A_c(t) = Y(t) \cos \omega_0 t + \hat{Y}(t) \sin \omega_0 t \quad (5.3.12)$$

同理可得

$$A_s(t) = -Y(t) \sin \omega_0 t + \hat{Y}(t) \cos \omega_0 t \quad (5.3.13)$$

可见,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  可以看作  $Y(t)$  和  $\hat{Y}(t)$  经过线性变换后的结果。  $A_c(t)$  的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_c(t, t - \tau) &= E[A_c(t)A_c(t - \tau)] \\ &= E\{[Y(t) \cos \omega_0 t + \hat{Y}(t) \sin \omega_0 t][Y(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau) + \\ &\quad \hat{Y}(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau)]\} \\ &= R_Y(\tau) \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t - \tau) + R_{\hat{Y}Y}(\tau) \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t - \tau) + \\ &\quad R_{Y\hat{Y}}(\tau) \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t - \tau) + R_{\hat{Y}\hat{Y}}(\tau) \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t - \tau) \end{aligned}$$

由于  $R_Y(\tau) = R_{\hat{Y}\hat{Y}}(\tau)$ ,  $R_{Y\hat{Y}}(\tau) = -\hat{R}_Y(\tau) = -R_{\hat{Y}Y}(\tau)$ , 所以

$$\begin{aligned} R_c(t, t - \tau) &= R_Y(\tau) [\cos \omega_0 t \cos \omega_0(t - \tau) + \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t - \tau)] + \\ &\quad \hat{R}_Y(\tau) [\sin \omega_0 t \cos \omega_0(t - \tau) - \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t - \tau)] \end{aligned}$$

即

$$R_c(\tau) = R_Y(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_Y(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (5.3.14)$$

同理可证

$$R_s(\tau) = R_Y(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_Y(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (5.3.15)$$

可见,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的自相关函数是相同的, 由式(5.3.14)和式(5.3.15)也可以看出,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的方差是相等的, 且都等于  $Y(t)$  的方差, 即  $\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_Y^2$ 。

下面再分析一下  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的互相关函数。

$$\begin{aligned} R_{cs}(t, t - \tau) &= E[A_c(t)A_s(t - \tau)] \\ &= E\{[Y(t) \cos \omega_0 t + \hat{Y}(t) \sin \omega_0 t][ -Y(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau) + \\ &\quad \hat{Y}(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau)]\} \\ &= -R_Y(\tau) \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t - \tau) - R_{\hat{Y}Y}(\tau) \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t - \tau) + \\ &\quad R_{Y\hat{Y}}(\tau) \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t - \tau) + R_{\hat{Y}\hat{Y}}(\tau) \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t - \tau) \end{aligned}$$

因为

$$R_Y(\tau) = R_{\hat{Y}\hat{Y}}(\tau), \quad R_{Y\hat{Y}}(\tau) = -\hat{R}_Y(\tau) = -R_{\hat{Y}Y}(\tau)$$

所以

$$R_{cs}(t, t - \tau) = R_Y(\tau) [\sin\omega_0 t \cos\omega_0(t - \tau) - \cos\omega_0 t \sin\omega_0(t - \tau)] - \hat{R}_Y(\tau) [\sin\omega_0 t \sin\omega_0(t - \tau) + \cos\omega_0 t \cos\omega_0(t - \tau)]$$

即

$$R_{cs}(\tau) = R_Y(\tau) \sin\omega_0 \tau - \hat{R}_Y(\tau) \cos\omega_0 \tau \quad (5.3.16)$$

由于

$$\begin{aligned} R_{cs}(-\tau) &= R_Y(-\tau) \sin(-\omega_0 \tau) - \hat{R}_Y(-\tau) \cos(-\omega_0 \tau) \\ &= -R_Y(\tau) \sin\omega_0 \tau + \hat{R}_Y(\tau) \cos\omega_0 \tau \end{aligned}$$

即

$$R_{cs}(-\tau) = -R_{cs}(\tau) \quad (5.3.17)$$

所以  $R_{cs}(\tau)$  是奇函数, 奇函数在原点的值为零, 即

$$R_{cs}(0) = 0 \quad (5.3.18)$$

式(5.3.18)表明,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在同一时刻是相互正交的。

对式(5.3.14)和式(5.3.16)做傅里叶变换, 可以得到同相分量或正交分量的功率谱及其它们的互功率谱(证明留作习题, 参见习题 5.10), 即

$$\begin{aligned} G_c(\omega) = G_s(\omega) &= \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)] G_Y(\omega + \omega_0) + \\ &\quad \frac{1}{2} [1 - \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)] G_Y(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

$$\begin{aligned} G_{cs}(\omega) &= \frac{j}{2} [1 + \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)] G_Y(\omega + \omega_0) - \\ &\quad \frac{j}{2} [1 - \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)] G_Y(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

如果  $Y(t)$  具有对称形式的功率谱, 则

$$R_Y(\tau) = R_a(\tau) \cos\omega_0 \tau, \quad \hat{R}_Y(\tau) = R_a(\tau) \sin\omega_0 \tau$$

将上面两式代入式(5.3.16), 得

$$R_{cs}(\tau) = 0$$

即  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  是相互正交的两个随机过程。这时

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= R_Y(\tau) \cos\omega_0 \tau + \hat{R}_Y(\tau) \sin\omega_0 \tau \\ &= R_a(\tau) \cos\omega_0 \tau \cos\omega_0 \tau + R_a(\tau) \sin\omega_0 \tau \sin\omega_0 \tau \\ &= R_a(\tau) \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

$$R_Y(\tau) = R_c(\tau) \cos\omega_0 \tau \quad (5.3.22)$$



## 5.4 窄带正态随机过程包络和相位的分布

信号处理中, 有用信号通常都是调制在载波的幅度或相位上, 要提取有用信号通常需要包络检波器和鉴相器检测出信号的包络和相位, 而检测前噪声通常都是窄带正态随

机过程,为了获得最佳的检测效果,需要分析窄带正态随机过程包络和相位的分布。本节在 5.3 节的基础上,讨论窄带正态过程的包络、包络平方和相位的分布特性。在本节的讨论中,除特别声明外,都假定窄带正态过程的均值为零,功率谱密度相对于中心频率  $\omega_0$  是对称的。

### 5.4.1 窄带正态噪声的包络和相位的分布

#### 1. 一维分布

已知窄带过程的一般表达式为

$$Y(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t$$

设  $Y(t)$  的相关函数为  $R_Y(\tau)$ , 方差为  $R_Y(0) = \sigma^2$ , 式(5.3.12)和式(5.3.13)表明,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  都可看作是  $Y(t)$  经过线性变换的结果。因此,如果  $Y(t)$  为正态过程,则  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  也为正态过程,并且也具有零均值和方差  $\sigma^2$ 。 $Y(t)$  的包络和相位分别为

$$A(t) = [A_c^2(t) + A_s^2(t)]^{1/2}$$

$$\phi(t) = \arctan [A_s(t)/A_c(t)]$$

式(5.3.18)说明,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在同一时刻是互不相关的,因二者是正态过程,故也是互相独立的。设  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  分别表示  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在  $t$  时刻的取值,则其联合概率密度为

$$f_{A_c A_s}(A_{ct}, A_{st}) = f_{A_c}(A_{ct}) f_{A_s}(A_{st}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{A_{ct}^2 + A_{st}^2}{2\sigma^2}\right] \quad (5.4.1)$$

因为

$$A_c(t) = A(t) \cos \phi(t)$$

$$A_s(t) = A(t) \sin \phi(t)$$

设  $A_t$  和  $\varphi_t$  分别为包络  $A(t)$  和相位  $\phi(t)$  在  $t$  时刻的取值,则  $A(t)$  和  $\phi(t)$  的联合概率密度为

$$f_{A\phi}(A_t, \varphi_t) = |J| f_{A_c A_s}(A_{ct}, A_{st})$$

雅可比行列式  $J$  为

$$J = \frac{\partial(A_{ct}, A_{st})}{\partial(A_t, \varphi_t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_{ct}}{\partial A_t} & \frac{\partial A_{ct}}{\partial \varphi_t} \\ \frac{\partial A_{st}}{\partial A_t} & \frac{\partial A_{st}}{\partial \varphi_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_t & -A_t \sin \varphi_t \\ \sin \varphi_t & A_t \cos \varphi_t \end{vmatrix} = A_t$$

代入上式,得

$$\begin{aligned} f_{A\phi}(A_t, \varphi_t) &= A_t f_{A_c A_s}(A_t \cos \varphi_t, A_t \sin \varphi_t) \\ &= \begin{cases} \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right) & (A_t \geq 0, 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (5.4.2) \end{aligned}$$

由此得出包络的一维概率密度为

$$f_A(A_t) = \int_0^{2\pi} f_{A\phi}(A_t, \varphi_t) d\varphi_t = \begin{cases} \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right) & (A_t \geq 0) \\ 0 & (A_t < 0) \end{cases} \quad (5.4.3)$$

相位的一维概率密度为

$$f_\phi(\varphi_t) = \int_0^{+\infty} f_{A\phi}(A_t, \varphi_t) dA_t = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & (0 \leq \varphi_t \leq 2\pi) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (5.4.4)$$

从式(5.4.3)和式(5.4.4)可以看出,窄带正态过程的包络服从瑞利分布,而其相位服从均匀分布。另外不难看出有

$$f_{A\phi}(A_t, \varphi_t) = f_A(A_t) f_\phi(\varphi_t) \quad (5.4.5)$$

式(5.4.5)表明,在同一时刻 $t$ ,随机变量 $A(t)$ 和 $\phi(t)$ 是相互独立的。但要注意 $A(t)$ 与 $\phi(t)$ 并不是相互独立的两个随机过程。

## 2. 二维分布

由于 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 可以看作 $Y(t)$ 和 $\hat{Y}(t)$ 经过线性变换后的结果,因此若 $Y(t)$ 为窄带平稳正态过程,则 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 也必为平稳正态过程。假定 $Y(t)$ 具有关于中心频率对称的功率谱,令 $A_{c1}$ 和 $A_{c2}$ 分别表示 $A_c(t)$ 和 $A_c(t-\tau)$ 的取值, $A_{s1}$ 和 $A_{s2}$ 分别表示 $A_s(t)$ 和 $A_s(t-\tau)$ 的取值。求包络和相位的二维概率密度步骤如下:先求出四维概率密度 $f_{A_c A_s}(A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2})$ ,然后转换为 $f_{A\phi}(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2)$ ,最后再导出 $f_A(A_1, A_2)$ 和 $f_\phi(\varphi_1, \varphi_2)$ 。

(1) 求 $f_{A_c A_s}(A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2})$ 。

对于确定的时刻 $t, A_c(t), A_c(t-\tau), A_s(t)$ 和 $A_s(t-\tau)$ 皆为零均值、方差为 $\sigma^2$ 的正态随机过程变量。根据式(1.8.11)有

$$f_{A_c A_s}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C})} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}\right) \quad (5.4.6)$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} A_{c1} \\ A_{s1} \\ A_{c2} \\ A_{s2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & a(\tau) & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & a(\tau) \\ a(\tau) & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & a(\tau) & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

其中 $a(\tau) = R_a(\tau) = R_c(\tau) = R_s(\tau)$ ,由此得出

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{D^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & -a(\tau) & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & -a(\tau) \\ -a(\tau) & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & -a(\tau) & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

其中  $D = \det(\mathbf{C}) = [\sigma^4 - a^2(\tau)]^2$ , 把以上各式代入式(5.4.6), 得

$$\begin{aligned} & f_{A_c A_s}(A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 D^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2D^{\frac{1}{2}}} [\sigma^2 (A_{c1}^2 + A_{s1}^2 + A_{c2}^2 + A_{s2}^2) - 2a(\tau)(A_{c1}A_{c2} + A_{s1}A_{s2})] \right\} \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

(2) 求  $f_{A\phi}(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2)$ 。

在式(5.4.7)中, 因为

$$\begin{cases} A_{c1} = A_1 \cos \varphi_1, & A_{c2} = A_2 \cos \varphi_2 \\ A_{s1} = A_1 \sin \varphi_1, & A_{s2} = A_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (5.4.8)$$

那么

$$\begin{aligned} f_{A\phi}(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2) &= |J| f_{A_c A_s}(A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}) \\ &= |J| f_{A_c A_s}(A_1 \cos \varphi_1, A_1 \sin \varphi_1, A_2 \cos \varphi_2, A_2 \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

其中

$$J = \frac{\partial(A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2})}{\partial(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2)} = A_1 A_2$$

代入上式即可得

$$\begin{aligned} & f_{A\phi}(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2) \\ &= \begin{cases} \frac{A_1 A_2}{4\pi^2 D^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2D^{\frac{1}{2}}} [\sigma^2 (A_1^2 + A_2^2) - 2a(\tau)A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \right\} & \left( \begin{array}{l} A_1, A_2 \geq 0, 0 \leq \varphi_1, \\ \varphi_2 \leq 2\pi \end{array} \right) \\ 0 & \text{(其他)} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

(3) 包络的二维概率密度。

运用前面求一维概率密度的方法, 由式(5.4.9)对  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  积分, 得

$$\begin{aligned} f_A(A_1, A_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{A\phi}(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \\ &= \begin{cases} \frac{A_1 A_2}{D^{\frac{1}{2}}} I_0 \left( \frac{A_1 A_2 a(\tau)}{D^{\frac{1}{2}}} \right) \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (A_1^2 + A_2^2)}{2D^{\frac{1}{2}}} \right] & (A_1, A_2 \geq 0) \\ 0 & \text{(其他)} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

式中  $I_0(x)$  为第一类零阶修正贝塞尔函数, 并有

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \varphi) d\varphi$$

(4) 相位的分布。

由式(5.4.9)对  $A_1$  和  $A_2$  积分, 得

$$f_{\phi}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_{A\phi}(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2) dA_1 dA_2$$

$$= \begin{cases} \frac{D^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2\sigma^4} \left[ \frac{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(\pi - \arccos\beta)}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] & (0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (5.4.11)$$

式中  $\beta = a(\tau)\cos(\varphi_2 - \varphi_1)/\sigma^2$ 。以上诸式的积分推导比较烦琐,这里直接给出结果。

从式(5.4.9)~式(5.4.11)可知,

$$f_{A_\phi}(A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2) \neq f_A(A_1, A_2) f_\phi(\varphi_1, \varphi_2) \quad (5.4.12)$$

式(5.4.12)表明,窄带正态过程的包络与相位不是统计独立的随机过程。

### 5.4.2 窄带正态噪声加正弦信号的包络和相位的分布

接收信号中除了噪声外通常还包含回波信号,分析信号加噪声包络和相位的分布对于有效地检测信号十分重要。

#### 1. 基本关系式

设信号为  $s(t) = a\cos(\omega_0 t + \theta)$ ,噪声是窄带正态过程,可表示为

$$w(t) = A_w(t)\cos[\omega_0 t + \phi_w(t)] = w_c(t)\cos\omega_0 t - w_s(t)\sin\omega_0 t$$

其中  $N_c(t) = A_w(t)\cos\phi_w(t)$ ,  $A_s(t) = A_w(t)\sin\phi_w(t)$ 。那么,信号加噪声可表示为

$$\begin{aligned} X(t) &= s(t) + w(t) = [a\cos\theta + w_c(t)]\cos\omega_0 t - [a\sin\theta + w_s(t)]\sin\omega_0 t \\ &= A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t = A(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)] \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

其中包络为

$$A(t) = [A_c^2(t) + A_s^2(t)]^{1/2} = \{[a\cos\theta + w_c(t)]^2 + [a\sin\theta + w_s(t)]^2\}^{1/2} \quad (5.4.14)$$

而

$$\begin{cases} A_c(t) = a\cos\theta + w_c(t) \\ A_s(t) = a\sin\theta + w_s(t) \end{cases} \quad (5.4.15)$$

由于  $w_c(t)$  和  $w_s(t)$  服从正态分布,所以,对于任意的  $\theta$  值和时刻  $t$ ,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  也是正态分布并且相互独立。在  $\theta$  值给定的情况下,它们的均值和方差分别为

$$E[A_c(t) | \theta] = a\cos\theta$$

$$E[A_s(t) | \theta] = a\sin\theta$$

$$\text{Var}[A_c(t) | \theta] = \text{Var}[A_s(t) | \theta] = \sigma^2$$

那么  $A_c(t)$  与  $A_s(t)$  的联合概率密度为

$$f_{A_c A_s}(A_{ct}, A_{st} | \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(A_{ct} - a\cos\theta)^2 + (A_{st} - a\sin\theta)^2] \right\} \quad (5.4.16)$$

经过与推导式(5.4.2)相同的步骤,得出  $X(t)$  的包络与相位的联合概率密度为

$$f_{A_\phi}(A_t, \varphi_t | \theta) = \begin{cases} \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[A_t^2 + a^2 - 2aA_t \cos(\theta - \varphi_t)]\right\} & (A_t \geq 0, 0 \leq \theta, \varphi_t \leq 2\pi) \\ 0 & \text{(其他)} \end{cases} \quad (5.4.17)$$

## 2. 包络的概率密度

由式(5.4.17)对  $\varphi_t$  积分, 得出包络的条件概率密度为

$$f_A(A_t | \theta) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right) \quad (A_t \geq 0) \quad (5.4.18)$$

由于式(5.4.18)的结果与  $\theta$  无关, 故可写为

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right) \quad (A_t \geq 0) \quad (5.4.19)$$

式(5.4.19)表明, 窄带正态噪声加正弦信号的包络服从广义瑞利分布。其中  $I_0(x)$  可展开成级数形式, 即

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

当  $x \ll 1$  时

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \dots$$

当  $x \gg 1$  时

$$I_0(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}$$

(1) 信噪比很小时, 即  $a/\sigma \ll 1$ , 则

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 + \frac{a^2 A_t^2}{4\sigma^2}\right)$$

上式表明, 随着信噪比的减小, 广义瑞利分布趋向瑞利分布。

(2) 在大信噪比的情况下, 即  $a/\sigma \gg 1$  时,  $A(t)$  的概率密度近似为

$$f_A(A_t) = \frac{(A_t/a)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(A_t - a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

该式说明, 当  $A_t$  值接近  $a$  时, 即  $A_t/a \approx 1$  时包络变为正态分布。当  $A_t$  偏离  $a$  较大时, 式中的指数项使分布密度很快衰减下来, 因而仍能保持接近正态分布。图 5.10 给出了随着  $a/\sigma$  值不同, 归一化包络  $A(t)/\sigma$  的概率密度曲线。

## 3. 相位的概率密度

由式(5.4.17)对  $A_t$  积分, 得出相位的条件概率密度为

$$\begin{aligned} f_\phi(\varphi_t | \theta) &= \int_0^{+\infty} f_{A_\phi}(A_t, \varphi_t | \theta) dA_t \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right) \left\{1 + \sqrt{2\pi}\rho \cos(\theta - \varphi_t)\right\} \cdot \end{aligned}$$

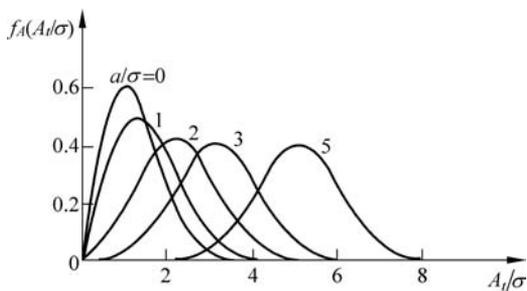


图 5.10 窄带正态噪声加正弦信号包络概率密度

$$\Phi[\rho \cos(\theta - \varphi_t)] \exp\left[\frac{1}{2}\rho^2 \cos^2(\theta - \varphi_t)\right] \quad (5.4.20)$$

式中  $\rho = a/\sigma$ ,  $\Phi(\cdot)$  为概率积分函数。由该式可以看出, 当  $\rho = 0$  时, 相位变成均匀分布, 这相当于窄带正态噪声的情况; 当信噪比很大  $\rho \gg 1$  时, 则相位的条件概率密度近似为

$$f_\phi(\varphi_t/\theta) \approx \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \cos(\theta - \varphi_t) \exp\left[-\frac{1}{2}\rho^2 \sin^2(\theta - \varphi_t)\right] \quad (5.4.21)$$

该式表明, 在大信噪比情况下, 信号加噪声的相位主要集中在信号相位  $\theta$  附近。图 5.11 给出了该相位的概率密度曲线及其与信噪比的关系。

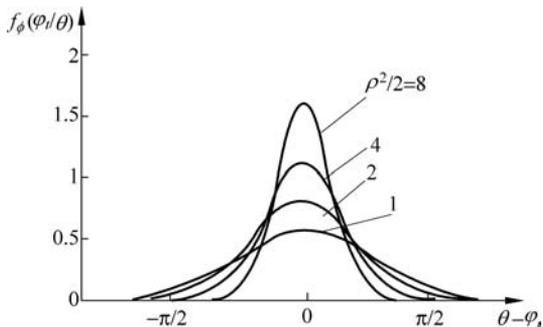


图 5.11 窄带正态噪声加正弦信号相位概率密度



### 5.4.3 窄带正态过程包络平方的分布

对小信号的检波一般都采用平方律检波, 而平方律检波器的输出是包络的平方。为此, 本节将对窄带噪声以及信号加窄带噪声包络平方的分布进行简要分析。

#### 1. 窄带噪声包络平方的分布

已知窄带正态噪声的包络的概率密度为

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (A_t \geq 0)$$

设包络的平方为

$$U(t) = A^2(t)$$

令  $u$  为  $U(t)$  在  $t$  时刻的取值, 因而有

$$u = A_t^2 \quad (A_t, u \geq 0)$$

于是  $U(t)$  的概率密度为

$$\begin{aligned} f_U(u) &= |J| f_A(A_t) \Big|_{A_t=\sqrt{u}} \\ &= \left| \frac{dA_t}{du} \right| f_A(A_t) \Big|_{A_t=\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) \quad (u \geq 0) \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

式(5.4.22)表明, 窄带正态噪声的包络平方服从指数分布, 对于  $\sigma^2=1$  这一特殊条件, 有

$$f_U(u) = \frac{1}{2} e^{-u/2} \quad (u \geq 0) \quad (5.4.23)$$

其均值和方差分布为

$$E[U(t)] = 2$$

$$D[U(t)] = 4$$

## 2. 正弦信号加窄带正态噪声包络平方的分布

根据式(5.4.13), 信号加噪声为

$$X(t) = S(t) + w(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + w(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$

该窄带过程包络的概率密度为

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right) \quad (A_t \geq 0)$$

设包络平方为  $U(t) = A^2(t)$ ,  $u$  为  $U(t)$  在  $t$  时刻的取值,  $u = A_t^2$ , 于是  $U(t)$  的概率密度为

$$\begin{aligned} f_U(u) &= |J| f_A(A_t) \Big|_{A_t=\sqrt{u}} = \left| \frac{dA_t}{du} \right| f_A(A_t) \Big|_{A_t=\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(u + a^2)\right] I_0\left(\frac{au^{1/2}}{\sigma^2}\right) \quad (u \geq 0) \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

在无线电系统中, 平方律检波器的应用十分广泛, 它和包络检波器相比, 在统计理论的分析上比较简单。实践证明, 这两种检波器的性能差别甚小, 因此在处理检波问题中常根据平方律检波的假设进行分析。当信息处理中需要得到检波后的概率密度时, 上面讨论的结果就显得很有实际意义。

## 5.5 信号处理实例——非线性系统输出端信噪比的计算

信噪比是雷达、通信等电子系统的一个重要指标, 研究信号和噪声通过电子系统后, 尤其是通过非线性系统后信噪比的计算方法是很有实际意义的。信号和噪声通过非线性

性系统后信噪比的计算要比线性系统的计算复杂得多,本节主要结合几种典型的检波器,讨论如何计算非线性系统输出的信噪比。

信噪比通常定义为信号的平均功率  $P_s$  与噪声的平均功率  $P_w$  之比,记为 SNR,即

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_w}$$

信号通常是确定性信号,或者是满足各态历经性的随机信号,其平均功率可表示为

$$P_s = \overline{s^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s^2(t) dt$$

检波器前一般连接有窄带系统,比如窄带中放,白噪声通过窄带系统,通常为窄带正态随机过程。下面结合几种典型的检波器,计算检波器输入和输出端的信噪比。



### 5.5.1 同步检波器

同步检波器如图 5.12 所示,窄带中放的输入端为接收的已调载波信号与噪声之和,即

$$X(t) = s(t) + w(t) = A_0 m(t) \cos 2\pi f_0 t + w(t) \quad (5.5.1)$$

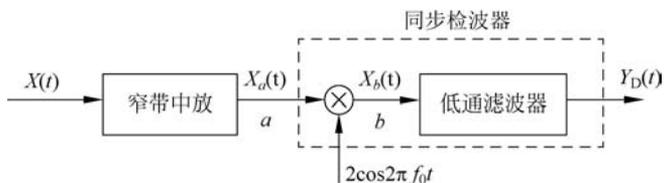


图 5.12 同步检波器

其中  $m(t)$  为消息信号,信号带宽为  $B$ ,  $w(t)$  为信道噪声,通常为零均值高斯白噪声,滤波器为中频窄带滤波器,它的频率特性如图 5.13 所示,  $X(t)$  通过窄带中放后,输出信号为

$$X_a(t) = s_a(t) + w_a(t) = A_0 m(t) \cos 2\pi f_0 t + w_a(t)$$

其中  $s_a(t) = s(t)$ ,  $w_a(t)$  为窄带正态噪声,可表示为

$$w_a(t) = w_c(t) \cos 2\pi f_0 t - w_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$

所以,

$$X_a(t) = A_0 m(t) \cos 2\pi f_0 t + w_c(t) \cos 2\pi f_0 t - w_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (5.5.2)$$

$$X_b(t) = X_a(t) 2 \cos 2\pi f_0 t$$

$$= A_0 m(t) + A_0 m(t) \cos 4\pi f_0 t + w_c(t) + w_c(t) \cos 4\pi f_0 t - w_s(t) \sin 4\pi f_0 t$$

经过低通滤波器后,

$$Y_D(t) = A_0 m(t) + w_c(t) \quad (5.5.3)$$

下面计算输入输出的信噪比。在乘法器的输入端  $a$  点,信号功率为

$$P_T = \overline{A_0^2 m^2(t)} / 2 \quad (5.5.4)$$

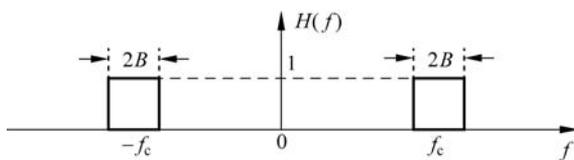


图 5.13 窄带中放频率特性

其中,  $\overline{m^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m^2(t) dt$ 。a 点噪声的平均功率为  $2N_0B$ , 因此, 乘法器输入端的信噪比为

$$\text{SNR}_T = \frac{P_T}{E[\omega_a^2(t)]} = \frac{A_0^2 \overline{m^2(t)}}{4BN_0} \quad (5.5.5)$$

而同步检波器输出的信号功率为  $P_D = A_0^2 \overline{m^2(t)}$ , 输出的噪声功率为  $E[\omega_c^2(t)] = 2N_0B$ , 所以, 同步检波器输出的信噪比为

$$\text{SNR}_D = \frac{P_D}{E\{\omega_c^2(t)\}} = \frac{A_0^2 \overline{m^2(t)}}{2BN_0} \quad (5.5.6)$$

通常我们把  $\text{SNR}_D/\text{SNR}_T$  称为检波增益, 它是衡量检波器性能的一个重要指标, 比较式(5.5.5)和式(5.5.6)可得

$$\text{SNR}_D/\text{SNR}_T = 2 \quad (5.5.7)$$

也就是说同步检波器得到了 3dB 的增益改善, 这是因为利用了同步检波器参考信号的相位与接收信号相位相干的特点。

### 5.5.2 包络检波器

幅度调制(AM)信号的解调通常采用包络检波, 如图 5.14 所示, 设包络检波器的输入为 AM 信号加窄带噪声, 即

$$\begin{aligned} X(t) &= A_0[1 + am(t)]\cos 2\pi f_0 t + w_c(t)\cos 2\pi f_0 t - w_s(t)\sin 2\pi f_0 t \\ &= A(t)\cos(2\pi f_0 t + \Phi(t)) \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

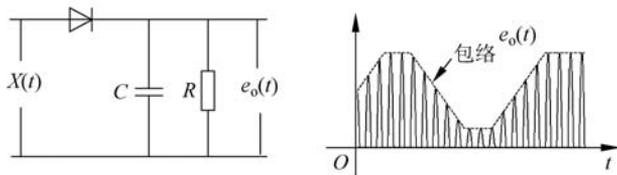


图 5.14 包络检波器及其输出波形

其中

$$A(t) = \sqrt{[A_0[1 + am(t)] + \omega_c(t)]^2 + \omega_s^2(t)} \quad (5.5.9)$$

$$\Phi(t) = \arctan\left(\frac{\omega_s(t)}{A_0[1 + am(t)] + \omega_c(t)}\right) \quad (5.5.10)$$

下面分为输入是大信噪比和小信噪比两种情况加以讨论,式(5.5.9)可表示为

$$A(t) = [A_0[1 + am(t)] + \omega_c(t)] \sqrt{1 + \left[\frac{\omega_s(t)}{A_0[1 + am(t)] + \omega_c(t)}\right]^2} \quad (5.5.11)$$

当输入为大信噪比的时候,

$$A(t) \approx A_0[1 + am(t)] + \omega_c(t) \quad (5.5.12)$$

图 5.14 检波器的输出  $e_o(t)$  即为  $A(t)$ , 式(5.5.12)中的第一项  $A_c$  是直流分量, 它不含任何信息, 可以通过隔直电路将其去掉, 经隔直后, 检波器的输出为

$$Y_D(t) \approx A_0 am(t) + \omega_c(t) \quad (5.5.13)$$

输出的信噪比为

$$\text{SNR}_D = \frac{A_0^2 a^2 \overline{m^2(t)}}{E\{\omega_c^2(t)\}} = \frac{A_0^2 a^2 \overline{m^2(t)}}{2N_0 B} \quad (5.5.14)$$

而包络检波器输入的信噪比为

$$\text{SNR}_T = \frac{\frac{A_0^2}{2} \overline{[1 + am(t)]^2}}{E[\omega^2(t)]} = \frac{A_0^2 \overline{[1 + a^2 m^2(t)]}}{4N_0 B} \quad (5.5.15)$$

式(5.5.15)推导过程中假定了  $\overline{m(t)} = 0$ 。那么, 检波增益为

$$\frac{\text{SNR}_D}{\text{SNR}_T} = \frac{2a^2 \overline{m^2(t)}}{1 + a^2 \overline{m^2(t)}} \quad (5.5.16)$$

对于全调制的情况, 即当  $am(t) = \cos 2\pi f_m t$ ,  $f_m$  为调制角频率, 那么,

$$\frac{\text{SNR}_D}{\text{SNR}_T} = \frac{2}{3} \quad (5.5.17)$$

可见, 这时输出信噪比小于输入信噪比。

当输入为小信噪比时, 这时的噪声幅度要远大于信号幅度,

$$\begin{aligned} A(t) &= \sqrt{[A_0[1 + am(t)] + \omega_c(t)]^2 + \omega_s^2(t)} \\ &= \sqrt{A_0^2[1 + am(t)]^2 + 2A_0[1 + am(t)]\omega_c(t) + \omega_c^2(t) + \omega_s^2(t)} \\ &\approx \sqrt{\omega_c^2(t) + \omega_s^2(t)} \cdot \sqrt{1 + \frac{2A_0[1 + am(t)]\omega_c(t)}{\omega_c^2(t) + \omega_s^2(t)}} \\ &\approx \sqrt{\omega_c^2(t) + \omega_s^2(t)} \left[ 1 + \frac{A_0[1 + am(t)]\omega_c(t)}{\omega_c^2(t) + \omega_s^2(t)} \right] \\ &= A_w(t) + A_0[1 + am(t)]\cos\Phi_w(t) \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

其中  $A_w(t) = \sqrt{\omega_c^2(t) + \omega_s^2(t)}$  代表噪声的幅度,  $\Phi_w(t) = \arctan \frac{\omega_s(t)}{\omega_c(t)}$  代表噪声的相位。所以, 检波器的输出为

$$Y_D(t) = A_w(t) + A_0[1 + am(t)]\cos\Phi_w(t) \quad (5.5.19)$$

从式(5.5.19)可以看出, 调制信号  $m(t)$  无法与噪声分开, 有用信号淹没在噪声中, 这时, 输出信噪比不是按比例地随输入信噪比下降, 而是急剧恶化, 这是由包络检波器的非线性解调特性引起的, 通常把这种现象称为“门限效应”, 开始出现门限效应的输入信噪比称为门限值。因此, 包络检波器只适合于输入信噪比大的情况, 当输入信噪比很小时, 通常需要采用相干解调。

### 5.5.3 平方律包络检波器

平方律包络检波器对 AM 信号的响应是信号加噪声包络的平方, 即

$$\begin{aligned} A^2(t) &= [A_0[1 + am(t)] + \omega_c(t)]^2 + \omega_s^2(t) \\ &= A_0^2[1 + am(t)]^2 + 2\omega_c(t)A_0[1 + am(t)] + \omega_c^2(t) + \omega_s^2(t) \\ &= A_0^2 + 2A_0^2am(t) + a^2m^2(t) + 2\omega_c(t)A_0[1 + am(t)] + \omega_c^2(t) + \omega_s^2(t) \end{aligned}$$

假定调制信号为  $m(t) = \cos 2\pi f_m t$ , 则

$$\begin{aligned} A^2(t) &= A_0^2 + 2A_0^2a \cos 2\pi f_m t + a^2A_0^2 \cos^2 2\pi f_m t + 2n_c(t)A_0[1 + am(t)] + \omega_c^2(t) + \omega_s^2(t) \\ &= A_0^2 + 2A_0^2a \cos 2\pi f_m t + \frac{1}{2}a^2A_0^2 + \frac{1}{2}a^2A_0^2 \cos 4\pi f_m t + 2n_c(t)A_0[1 + am(t)] + \\ &\quad \omega_c^2(t) + \omega_s^2(t) \end{aligned}$$

由于直流分量不含任何信息, 通过隔直电路可以将其消除, 平方律包络检波器输出为

$$\begin{aligned} Y_D(t) &= 2A_0^2a \cos 2\pi f_m t + \frac{1}{2}a^2A_0^2 \cos 4\pi f_m t + \\ &\quad 2\omega_c(t)A_0(1 + a \cos 2\pi f_m t) + \omega_c^2(t) + \omega_s^2(t) \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

输出的信号为

$$S_D(t) = 2A_0^2a \cos 2\pi f_m t + \frac{1}{2}a^2A_0^2 \cos 4\pi f_m t \quad (5.5.21)$$

其中后一项是二次谐波, 可以忽略掉, 所以信号功率为

$$P_D = 2A_0^4a^2 \quad (5.5.22)$$

输出噪声项为

$$\omega_D(t) = 2A_0(1 + a \cos 2\pi f_m t)\omega_c(t) + \omega_c^2(t) + \omega_s^2(t) \quad (5.5.23)$$

噪声功率为

$$\begin{aligned} P_{WD} &= 2A_0^2(2 + a^2)E[\omega_c^2(t)] + E[\omega_c^4(t)] + E[\omega_s^4(t)] + \\ &\quad 2E[\omega_c^2(t)]E[\omega_s^2(t)] - \{E[\omega_c^2(t)] + E[\omega_s^2(t)]\}^2 \end{aligned} \quad (5.5.24)$$

式(5.5.24)中最后两项是因为噪声中也包含直流分量, 由于输出通常采用交流耦合, 直

分量可以消除,所以噪声功率中应该减去噪声直流功率。因为

$$E\{w_c^2(t)\} = E\{w_s^2(t)\} = \sigma_w^2 = 2N_0B, \quad E\{w_c^4(t)\} = E\{w_s^4(t)\} = 3\sigma_w^4$$

所以,检波器输出的噪声功率为

$$P_{WD} = 2A_0^2(2+a^2)\sigma_w^2 + 4\sigma_w^4 \quad (5.5.25)$$

检波器输出的信噪比为

$$\text{SNR}_D = \frac{2A_0^4 a^2}{2A_0^2(2+a^2)\sigma_w^2 + 4\sigma_w^4} \quad (5.5.26)$$

采用正弦波调制时,检波器输入端信号功率为

$$P_T = \frac{1}{2}A_0^2\left(1 + \frac{1}{2}a^2\right) \quad (5.5.27)$$

综合式(5.5.26)与式(5.5.27),可得

$$\text{SNR}_D = 2\left(\frac{a}{2+a^2}\right)^2 \frac{P_T/N_0B}{1+(N_0B/P_T)} \quad (5.5.28)$$

当  $P_T/N_0B$  的值很大时,

$$\text{SNR}_D = 2\left(\frac{a}{2+a^2}\right)^2 \frac{P_T}{N_0B} \quad (5.5.29)$$

当  $P_T/N_0B$  的值很小时,

$$\text{SNR}_D = 2\left(\frac{a}{2+a^2}\right)^2 \left(\frac{P_T}{N_0B}\right)^2 \quad (5.5.30)$$

## 习 题

5.1 证明:

- (1) 偶函数的希尔伯特变换为奇函数;
- (2) 奇函数的希尔伯特变换为偶函数。

5.2 设  $A(t)$  与  $\varphi(t)$  为低频信号,  $\omega_0$  为高频载波角频率,证明:

- (1)  $H\{A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$ ;
- (2)  $H\{A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = -A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ 。

5.3 证明广义平稳过程  $X(t)$  与其希尔伯特  $\hat{X}(t)$  的相关函数存在下述关系:

- (1)  $R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$ ;
- (2)  $R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$ ;
- (3)  $R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$ ;
- (4)  $R_{X\hat{X}}(\tau)$  是奇函数。

5.4 设  $X(t)$  的解析信号为  $Z(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$ :

- (1) 证明  $E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$ ;

(2) 证明  $E[Z(t)Z(t-\tau)]=0$ ;

(3) 求  $Z(t)$  的功率谱密度(假定  $X(t)$  的功率谱密度为  $G_X(\omega)$ )。

5.5 设一个线性系统输入为  $X(t)$  时,相应的输出为  $Y(t)$ 。证明若该系统的输入为  $X(t)$  的希尔伯特变换  $\hat{X}(t)$ ,则相应的输出为  $Y(t)$  的希尔伯特变换  $\hat{Y}(t)$ 。

5.6 在复随机过程  $Z(t)=X(t)+jY(t)$  中,如果  $Z(t)$  的均值  $E[Z(t)]=E[X(t)]+jE[Y(t)]=m_Z$  是复常数,且  $Z(t)$  的自相关函数  $E[Z(t)Z^*(t-\tau)]=R_Z(\tau)$  为仅与  $\tau$  有关的复函数,则称  $Z(t)$  为复平稳随机过程。设  $A_k(k=1,2,\dots,n)$  是  $n$  个实随机变量,  $\omega_k(k=1,2,\dots,n)$  是  $n$  个实数,试问  $\{A_k\}$  应该满足怎样的条件才能使

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t}$$

是一个复平稳随机过程。

5.7 设有复随机过程

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cos \omega_i t + j\beta_i \sin \omega_i t)$$

其中  $\alpha_i$  与  $\beta_k$  是相互独立的随机变量,  $\alpha_i$  与  $\alpha_k$ 、 $\beta_i$  与  $\beta_k$  ( $i \neq k$ ) 是相互正交的,数学期望和方差分别为  $E[\alpha_i]=E[\beta_i]=0$ ,  $\sigma_{\alpha_i}^2 = \sigma_{\beta_i}^2 = \sigma_i^2$ 。求其复随机过程的相关函数。

5.8 设信号  $X(t)$  的带宽限制在  $\Omega$  上,证明信号预包络模平方的带宽为  $2\Omega$ 。

5.9 对于调频信号  $X(t)=\cos[\omega_0 t+m(t)]$ ,设  $dm(t)/dt \leq \omega_0$ ,即为窄带信号,求该信号的复包络和包络的表示式。

5.10 证明式(5.3.19)和式(5.3.20)。

5.11 设功率谱密度为  $N_0/2$  的零均值白高斯噪声通过一个理想带通滤波器,此滤波器的增益为 1,中心频率为  $f_0$ ,带宽为  $2B$ 。求滤波器输出的窄带过程  $n(t)$  和它的同相及正交分量的自相关函数  $R_w(\tau)$ 、 $R_{w_c}(\tau)$  和  $R_{w_s}(\tau)$ 。

5.12 考虑图 5.15 所示的 RLC 带通滤波器。设滤波器的品质因数  $Q \gg 1$ ,输入是功率谱密度为  $N_0/2$  的零均值白高斯噪声  $X(t)$ ,求滤波器输出端的窄带过程  $w(t)$  和它的同相及正交分量的功率谱密度  $R_w(\tau)$ 、 $R_{w_c}(\tau)$  和  $R_{w_s}(\tau)$ ,并以图示之。

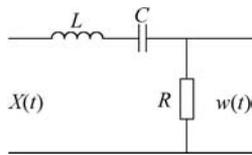


图 5.15 RLC 带通滤波器

5.13 相关函数为  $R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  的窄带平稳随机过程可表示为  $X(t) = A_c(t) \cos \omega_0' t - A_s(t) \sin \omega_0' t$ ,试在(1)  $\omega_0' \neq \omega$ ; (2)  $\omega_0' = \omega$  的条件下,分别求出相关函数  $R_c(\tau)$ 、 $R_s(\tau)$  及互相关函数  $R_{cs}(\tau)$ 。

5.14 考虑窄带高斯过程  $w(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t$ ,假定功率谱密度对称于载频  $\omega_0$ ,求概率密度  $f(x_t, x_{t-\tau}, y_t, y_{t-\tau})$ 。

5.15 设  $A(t)$  为平稳的窄带正态过程的包络,试证:

$$E[A(t)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_X, \quad \sigma_A^2 = \text{Var}[A(t)] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_X^2$$

其中  $\sigma_X^2$  为正态过程的方差。

5.16  $\chi$  变量为  $\chi^2$  变量的平方根,证明  $n$  个自由度的  $\chi$  变量的概率密度为

$$f(\chi) = \frac{\chi^{n-1} e^{-\chi^2/2}}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

5.17 证明  $n$  个自由度的  $\chi^2$  变量的第  $m$  阶中心矩为

$$2^m \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{n}{2} + m - 1\right)$$

5.18 一检波器如图 5.16 所示,其中非线性器件部分的传输特性为  $y = bx^2$ 。设输入信号  $X(t)$  为一窄带正态噪声,且可表示为  $X(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ ,其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

求  $Z(t)$  的概率密度、均值和方差。

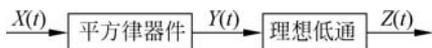


图 5.16 检波器示意图

5.19 在平方律包络检波器输入端加一窄带随机电压信号,其包络  $A(t)$  服从瑞利分布

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right] \quad (A_t \geq 0)$$

求在  $Y(t) = \frac{\alpha^2}{2} A^2(t)$  时,检波器  $Y(t)$  输出的概率密度、均值和方差。

5.20 同步检波器如图 5.17 所示,设  $X(t)$  为一窄带平稳噪声,其相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin\omega_0|\tau| \right) \quad (\alpha \ll \omega_0)$$

而  $Y(t) = A \sin\omega_0 t$  为一确定性信号,求同步检波器输出端的平均功率  $P_z$ 。

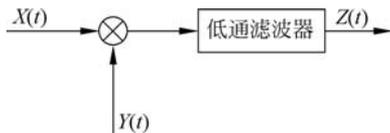


图 5.17 同步检波器示意图

5.21 双边带抑制载波调制和单边带调制中,若消息信号均为 3kHz 限带低频信号,载频为 1MHz,接收信号功率为 1mW,加性白色高斯噪声双边带功率谱密度为  $10^{-3} \mu\text{W}/\text{Hz}$ 。接收信号经带通滤波器后,进行相干解调。

- (1) 比较解调器输入信噪比;
- (2) 比较解调器输出信噪比。

## 计算机作业

5.22 画出式(5.4.10)和式(5.4.11)给出的包络和相位的二维概率密度曲线,改变  $a(\tau)$  的形式,考察曲线的变化。

5.23 以信噪比  $\rho = a/\sigma$  作为参数,画出广义瑞利分布式(5.4.19)的一组图形。

5.24 以信噪比  $\rho = a/\sigma$  作为参数,画出窄带正态噪声加正弦信号相位的分布式(5.4.20)的一组图形。

## 研讨题

5.25 设有图 5.18 所示的窄带信号处理系统,输入  $X(t)$  是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声。

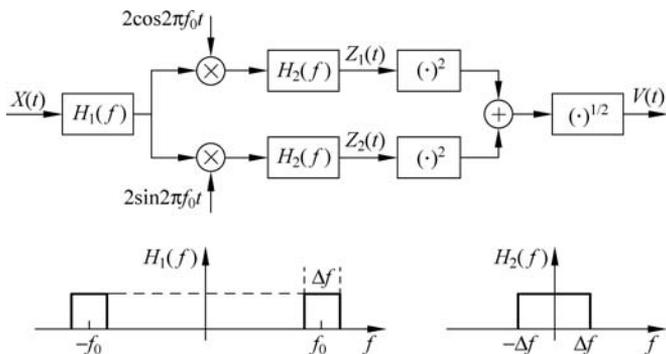


图 5.18 窄带信号处理系统

- (1) 求  $Z_1(t)$  和  $Z_2(t)$  的自相关函数;
- (2) 求  $Z_1(t)$  和  $Z_2(t)$  的一维概率密度;
- (3) 求  $Z_1(t)$  和  $Z_2(t)$  的联合概率密度  $f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2, t_1, t_2)$ ;
- (4) 求  $U(t)$  的一维概率密度;
- (5) 如果输入为  $X(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \theta) + w(t)$ , 输出  $V$  与门限  $\gamma$  进行比较, 求  $P(V > \gamma | a = 0)$  和  $P(V > \gamma | a > 0)$  的表达式。

## 实验

### 窄带高斯随机过程的产生

本实验模拟产生一段时长为 5ms 的窄带高斯随机过程  $X(t)$  的样本函数。根据窄带随机过程的理论,  $X(t)$  可表示为

$$X(t) = A_c(t) \cos 2\pi f_0 t - A_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$

其中  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  均为低频的高斯随机过程,因此,要模拟产生  $X(t)$ ,首先要产生两个相互独立的高斯随机过程  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$ ,然后用两个正交载波  $\cos 2\pi f_0 t$  和  $\sin 2\pi f_0 t$  进行调制,如图 5.19 所示。

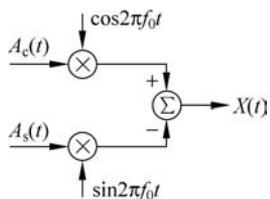


图 5.19 带通高斯随机过程的产生

假定  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的功率谱密度均为  $G_c(f) = G_s(f) = \frac{1}{1 + (f/\Delta f)^4}$ ,其中  $\Delta f$  为功率谱密度的 3dB 带宽。在 3.7 节

中介绍了有色高斯随机过程的产生,请按照频域法或时域滤波器法分别产生时长为 5ms 的低通过程  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$ ,然后按图 5.19 合成  $X(t)$ ,其中  $f_0 = 1000/\pi$ ,要求分别画出模拟产生的

$A_c(t)$ 、 $A_s(t)$  以及  $X(t)$  的波形。