

第5章

一阶电路与二阶电路

内容提要：本章在第4章内容的基础上进一步讨论一阶与二阶动态电路的时域分析。对于一阶电路，将重点分析其零输入响应、零状态响应和全响应。在此基础上，归纳出一阶电路时域分析的三要素法。然后，介绍一阶电路阶跃响应和冲激响应的概念、求解方法和应用。对于二阶电路，将重点分析其零输入响应和冲激响应，从而掌握二阶动态电路在不同参数配置条件下响应信号的特征。

重点：一阶电路的时间常数；稳态响应与暂态响应的概念；一阶电路分析的三要素法；阶跃响应与冲激响应；二阶电路的过渡过程。

难点：一阶电路三要素的计算；冲激响应的分析；二阶电路的能量交互过程。

5.1 一阶电路及其特征

若动态电路的输入-输出方程为一阶线性微分方程,则称为一阶电路。一阶电路在物理上可以包含若干电阻元件、独立源和受控源,但动态元件仅有一种(电容元件或电感元件)。若电路中仅包含一个动态元件,则电路必为一阶电路。若电路中仅含有一种动态元件(电容元件或电感元件),但数量在两个以上,则需要根据它们之间的连接关系方可确定动态电路是否为一阶电路。以包含多个电容元件的动态电路为例,若电容元件之间构成串联或并联关系,则对应的输入-输出方程必为一阶线性微分方程,该电路为一阶电路。

本章后续内容将重点研究仅包含一个动态元件的一阶电路,在此基础上归纳出具有普遍意义的结论和分析方法。

5.2 一阶电路的零输入响应

由第4章的知识可知,在无输入激励的情况下,仅由动态元件原始储能引起的响应称为零输入响应。此时,电路中没有任何独立源,电路的动态过程体现为动态元件通过电阻、受控源等耗能元件构成的回路进行电磁能量释放的物理过程。本节将重点分析RC和RL两种一阶电路的零输入响应。其中,RC电路是指由电阻元件和电容元件组成的一阶电路,RL电路是指由电阻元件和电感元件组成的一阶电路。

5.2.1 RC电路的零输入响应

首先,考虑一个最简单的RC电路。如图5-2-1(a)所示电路,换路前($t < 0$), S_1 闭合, S_2 断开,电路由电容 C 与电压源 $U_S = U_0$ 组成,直流电压源将向电容充电, $t = 0_-$ 时,电容电压充至电源电压,即 $u_C(0_-) = U_0$;当 $t = 0$ 时发生换路, S_1 断开, S_2 闭合,使电容脱离电源而改接于电阻上;此后($t > 0$),电容 C 通过电阻 R 放电。求换路后,电容电压 $u_C(t)$ 和放电电流 $i(t)$ 随时间的变化规律,即零输入响应。

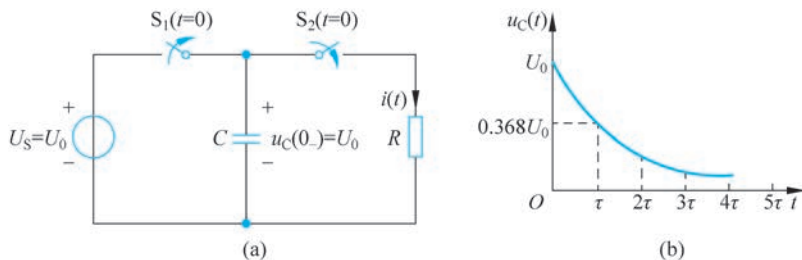


图 5-2-1 RC 电路的零输入响应示例

换路后,根据 KVL 列回路方程,可得

$$u_C(t) - i(t)R = 0 \quad (5-2-1)$$

将 $i(t) = -C \frac{du_C(t)}{dt}$ (注意 u_C, i 取非关联参考方向) 代入式(5-2-1), 得

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \quad (5-2-2)$$

式(5-2-2)即以电容电压 $u_C(t)$ 为输出变量的电路方程, 为一阶线性微分方程。

由高等数学知识可知, 式(5-2-2)的特征方程为

$$RCs + 1 = 0 \quad (5-2-3)$$

其特征根为

$$s = -\frac{1}{RC}$$

所以, 电路方程的通解有如下形式:

$$u_C(t) = A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5-2-4)$$

由此可知, 仅需根据初始条件 $u_C(0_+)$ 确定待定常数 A , 即可求得零输入响应 $u_C(t)$ 。

根据电容元件特性可知

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

代入式(5-2-4), 得

$$u_C(0_+) = A e^{-\frac{0}{RC}} \Rightarrow A = U_0$$

故

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-5)$$

放电时电容电压 $u_C(t)$ 随时间的变化规律如图 5-2-1(b) 所示。

进一步, 可求得放电电流

$$i(t) = \frac{u_C(t)}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-6)$$

放电电流 $i(t)$ 随时间的变化规律如图 5-2-2 所示。

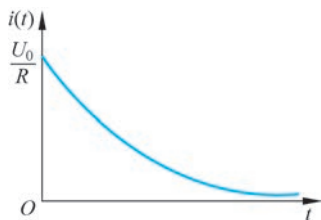


图 5-2-2 放电电流随时间的变化规律

由式(5-2-5)和式(5-2-6)可见, 电容两端电压 $u_C(t)$ 由初始值 U_0 随时间按指数规律衰减到零, 放电电流 $i(t)$ 由 $\frac{U_0}{R}$ 随时间按指数规律衰减到零。二者随时间衰减的速度取决于电阻 R 和电容 C 的乘积。

为便于分析, 定义 RC 电路的时间常数 $\tau = RC$, 它是表示放电快慢的物理量, 当电阻和电容分别以欧姆(Ω)、法拉(F)为单位时, 时间常数 τ 的量纲为秒(s)。

将 $\tau = RC$ 代入式(5-2-5)和式(5-2-6), 得

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-7)$$

$$i(t) = \frac{u_C(t)}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-8)$$

可见,时间常数 τ 越大,电容放电速度越慢;反之,则放电速度越快。定性地看,时间常数 τ 与电阻 R 和电容 C 的取值成正比关系,其物理意义在于:当 R 增大时,放电电流减小,电容放电时间增长;当 C 增大时,在相同电容电压前提下储存电荷量 q 增大,放电时间变长。

令 $t = \tau$, 则

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 e^{-1} \approx \frac{U_0}{2.718} \approx 0.368U_0$$

由此可知,放电时间 $t = \tau$ 时,电容电压 u_C 衰减到初始值 U_0 的 36.8%, 如图 5-2-1(b); 同理,放电时间 $t = 3\tau$ 时,电容电压 u_C 衰减到初始值 U_0 的 5%; 放电时间 $t = 5\tau$ 时,电容电压 u_C 衰减到初始值 U_0 的 0.67%。理论上讲, $t \rightarrow \infty$ 时,电容放电过程才能结束,达到稳态,即 $u_C = 0$ 。一般认为, $t = 5\tau$ 时放电过程基本结束,电路进入稳态。工程上认为, $t = 3\tau$ 时电路进入稳态。放电电流的变化具有相同的规律。

5.2.2 RL 电路的零输入响应

考虑一个最简单的 RL 电路。如图 5-2-3 所示电路,换路前 ($t < 0$), 电流源 I_S 给电感 L 建立了磁场, $t = 0_-$ 时, $i_L(0_-) = I_0$; $t = 0$ 时, S 闭合,电感 L 通过电阻 R 释放磁场能量。求换路后 ($t > 0$) 电感上的电流 $i_L(t)$ 和电压 $u_L(t)$ 。注意,电感释放出磁场能量时电流方向不变。

换路后,根据 KVL 列回路方程,可得

$$u_R(t) + u_L(t) = i_L(t)R + L \frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

整理可得以电感电流为输出变量的输入-输出方程:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t)R = 0 \quad (5-2-9)$$

其特征方程为

$$Ls + R = 0 \quad (5-2-10)$$

特征根为

$$s = -\frac{R}{L}$$

所以,电路方程的通解有如下形式:

$$i_L(t) = A e^{-\frac{R}{L}t} \quad (5-2-11)$$

由此可知,仅需根据初始条件 $i_L(0_+)$ 确定待定常数 A , 即可求得零输入响应 $i_L(t)$ 。

根据电感元件的特性可知

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$$

代入式(5-2-11), 得

$$i_L(0_+) = A e^{-\frac{R}{L} \times 0} = A = I_0$$

故

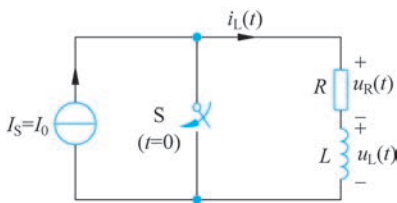


图 5-2-3 RL 电路的零输入响应示例

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-12)$$

进一步,可求得电感电压为

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-13)$$

电感电流 $i_L(t)$ 与电感电压 $u_L(t)$ 随时间的变化规律如图 5-2-4 所示。

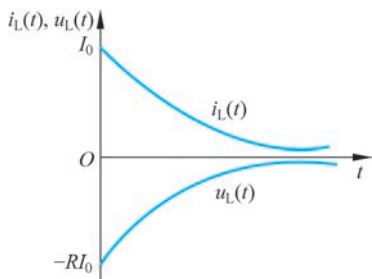


图 5-2-4 电感电流和电压的变化规律

与 RC 电路的放电过程相似, RL 电路中电感 L 释放磁场能量的速度与电阻 R 和电感 L 的取值有关。定义 RL 电路的时间常数 $\tau = L/R = LG$ 。若电感 L 和电导 G 分别以亨利(H)和西门子(S)为单位,则时间常数的量纲为秒(s)。时间常数 τ 越大,电感 L 释放磁场能量的速度越慢;反之,则越快。

根据时间常数 τ 的定义,式(5-2-12)和式(5-2-13)可以表示为

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-14)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-15)$$

定性地看,时间常数 τ 与电导 G 和电感 L 的取值呈正比关系。其物理意义在于:当 G 增大(电阻 R 减小)时,电阻元件消耗功率减小,电感释放能量时间增长;当电感 L 增大时,在相同初始电流前提下储存的磁场能量增大,放电时间变长。

通过观察可知,在计算时间常数 τ 时, RL 电路与 RC 电路具有强烈的对偶性,电感 L 与电容 C 对偶,电导 G 与电阻 R 对偶。

5.2.3 一阶电路零输入响应的简化分析方法^①

对前面讨论的简单 RC 电路和 RL 电路零输入响应的分析结果归纳如下。

RC 电路:

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad i_C(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+$$

其中, $\tau = RC$ 。

RL 电路:

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad u_L(t) = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+$$

其中, $\tau = \frac{L}{R} = LG$ 。

由以上分析可知,对于仅包含一个动态元件的一阶电路,无论是 RC 电路,还是 RL

^① 一阶电路零输入响应的 Multisim 仿真实例参见附录 A 例 2-4。

电路,任一零输入响应均可表示为统一的表达形式:

$$\text{零输入响应} = \text{初始值} \times e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-2-16)$$

因此,为求解零输入响应,仅要求出相应电路变量的初始值和电路时间常数 τ 即可。这就避免了线性微分方程的建立和求解过程,简化了分析。具体求解过程可归纳为三个步骤:

- (1) 根据电路模型、元件属性和原始状态确定待求电路变量的初始值。
- (2) 根据换路后的电路模型确定电路时间常数 τ 。
- (3) 根据式(5-2-16)写出零输入响应。

【例 5-2-1】 如图 5-2-1 所示电路,开关长期合在位置 1 上,如在 $t=0$ 时把它合到位置 2 上,求换路后电容的电压 $u_C(t)$ 及放电电流 $i(t)$ 。已知 $R_1=1\text{k}\Omega$, $R_2=2\text{k}\Omega$, $R_3=3\text{k}\Omega$, $C=1\mu\text{F}$, 电流源 $I=3\text{mA}$ 。

解: (1) 由 $t=0_-$ 时的电路求 $u_C(0_-)$, 此时电容 C 开路, 可得

$$u_C(0_-) = IR_2 = 3 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^3 \text{ V} = 6 \text{ V}$$

由换路定则可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6 \text{ V}$$

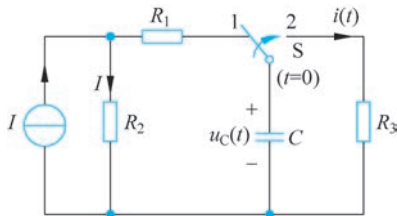
(2) $t=0_+$ 时, 电容 C 通过电阻 R_3 放电, 可得

$$\tau = R_3 C = 3 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6} \text{ s} = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$$

(3) 根据式(5-2-16)写出零输入响应。换路后, 电容的电压 $u_C(t)$ 及放电电流 $i(t)$ 为

$$u_C(t) = 6e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ V} = 6e^{-\frac{1}{3} \times 10^3 t} \text{ V}, \quad t \geq 0_+$$

$$i(t) = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_C(0_+)}{R_3} e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 \times 10^{-3} \times e^{-\frac{1}{3} \times 10^3 t} \text{ A}, \quad t \geq 0_+$$



例图 5-2-1

【思考与练习】

5-2-1 证明图 5-2-1 中 RC 一阶电路换路后的能量守恒性, 即电容放电过程结束后, 电阻元件消耗的总能量等于电容元件在 0 时刻储存的电场能量。

5-2-2 证明图 5-2-3 中 RL 一阶电路换路后的能量守恒性, 即电感放电过程结束后, 电阻元件消耗的总能量等于电感元件在 0 时刻储存的磁场能量。

5.3 一阶电路的零状态响应

当动态电路中所有储能元件都没有原始储能(电容元件的电压为 0, 电感元件的电流为 0)时, 换路后仅由输入激励(独立源)产生的响应称为零状态响应。本节将分析简单一阶电路的零状态响应。

5.3.1 RC 电路的零状态响应

RC 电路的零状态响应是指换路前电容元件未储存能量, 在此条件下, 仅由独立源激

励所产生的电路响应。分析 RC 电路的零状态响应,实际上是分析电容元件的充电过程。

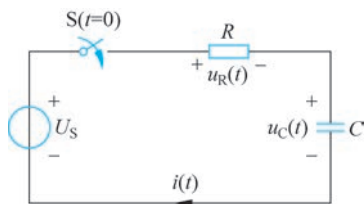


图 5-3-1 RC 电路的零状态响应

如图 5-3-1 所示 RC 电路, $t=0_-$ 时, 开关断开, 电路处于零初始状态; $t=0$ 时开关闭合。其物理过程为: 开关闭合瞬间, 电容电压不能跃变, 电容相当于短路, 此时 $u_R(0_+) = U_s$, 充电电流 $i(0_+) = U_s/R$, 为最大值; 随着电源对电容充电, u_C 增大, 电流逐渐减小; 当 $u_C = U_s$ 时, $i=0$, $u_R=0$, 充电过程结束, 电路进入另一种稳态。

换路后, 根据 KVL 列回路方程, 可得

$$u_R(t) + u_C(t) = U_s$$

把 $u_R(t) = Ri(t)$, $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ 代入上式, 得

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_s \quad (5-3-1)$$

此方程为一阶线性非齐次微分方程, 初始条件为 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ 。方程的解由非齐次微分方程的特解 $u'_C(t)$ 和对应齐次微分方程的通解 $u''_C(t)$ 组成, 即

$$u_C(t) = u'_C(t) + u''_C(t) \quad (5-3-2)$$

不难求得其特解为

$$u'_C = U_s \quad (5-3-3)$$

而对应的齐次微分方程

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

的通解为

$$u''_C(t) = A e^{-\frac{t}{RC}} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-3-4)$$

式中, A 为待定常数, τ 为 RC 电路的时间常数。

故

$$u_C(t) = U_s + A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-3-5)$$

代入初始条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 可得 $A = -U_s$ 。

所以

$$u_C(t) = U_s - U_s e^{-\frac{t}{\tau}} = U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0_+ \quad (5-3-6)$$

进一步, 可求得电路中的电流

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-3-7)$$

$u_C(t)$ 和 $i(t)$ 的零状态响应波形如图 5-3-2 所示。可见, 在直流电压源激励下, 电容电压不会突变, 须经历一个动态的充电过程, 充电速度取决于时间常数 τ , 当电容电压达

到电源电压 U_S 时充电结束,电路进入稳态;电容电流 $i(t)$ 换路瞬间发生突变,随充电过程的进行逐渐下降,下降速度取决于时间常数 τ ,充电结束后,电流为零,电路进入稳态。

电容元件获得的能量为 $\frac{1}{2}CU_S^2$,以电场能量形式储存。

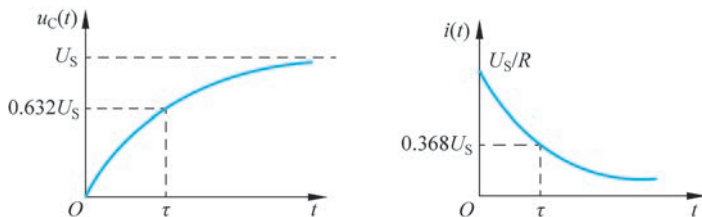


图 5-3-2 $u_C(t)$ 和 $i(t)$ 的零状态响应波形

5.3.2 RL 电路的零状态响应

如图 5-3-3 所示 RL 电路,在换路前($t < 0$)开关处于断开状态,电感元件 L 处于零原始状态,即 $i_L(0_-) = 0$; $t = 0$ 时刻开关闭合瞬间,电路与一电压恒定为 U_S 的电压源接通,此时相当于接入一个阶跃电压。

换路后,根据 KVL 列回路方程,可得

$$u_R(t) + u_L(t) = U_S$$

把 $u_R(t) = Ri_L(t)$, $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ 代入上式,整理得

$$\frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{U_S}{R} \quad (5-3-8)$$

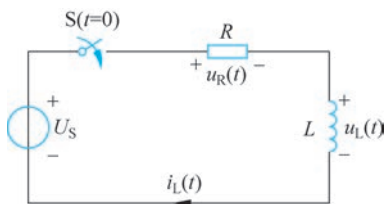


图 5-3-3 RL 电路的零状态响应

这也是一个一阶非齐次微分方程,其初始条件为 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ 。

与 RC 电路类似,电流 $i_L(t)$ 的解可分为微分方程的特解 $i'_L(t)$ 和通解 $i''_L(t)$ 两部分。

容易求得特解 $i'_L(t) = \frac{U_S}{R}$,通解可表示为 $i''_L(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$,其中 A 为待定常数。故

$$i_L(t) = i'_L(t) + i''_L(t) = \frac{U_S}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_S}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

代入初始条件 $i_L(0_+) = 0$,得 $A = -\frac{U_S}{R}$ 。

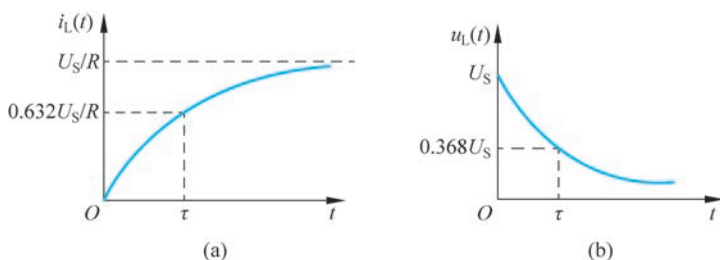
所以

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R} - \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0_+ \quad (5-3-9)$$

进一步,可求得电感两端的电压为

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-3-10)$$

电感电流 $i_L(t)$ 与电感电压 $u_L(t)$ 的零状态响应随时间的变化规律如图 5-3-4 所示。


 图 5-3-4 $i_L(t)$ 和 $u_L(t)$ 的零状态响应

对比图 5-3-2 与图 5-3-4 可见,一阶 RC 电路与一阶 RL 电路有强烈的对偶性:在直流电压源激励下,电感电流 $i_L(t)$ 不会突变,须经历一个动态充电过程,变化速度取决于时间常数 τ ,当电感电流达到 $\frac{U_S}{R}$ 时电路进入稳态;电感电压 $u_L(t)$ 换路瞬间发生突变,随充电过程的进行逐渐下降,下降速度取决于时间常数 τ ,充电结束后,电压为零,电路进入稳态。充电过程中,电感元件获得的能量为 $\frac{1}{2}L\left(\frac{U_S}{R}\right)^2$,以磁场能量形式储存。

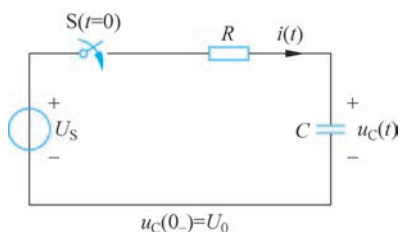
【思考与练习】

5-3-1 分析图 5-3-1 与图 5-3-3 中电阻元件的端电压 $u_R(t)$,对比两种一阶电路中 $u_R(t)$ 变化规律的异同。

5.4 一阶电路的全响应

5.2 节、5.3 节分别介绍了简单一阶电路的零输入响应与零状态响应的求解过程,并分析了响应信号的特征。实际应用中,往往动态元件在换路前并不处于零状态,会具有一定的原始储能,同时电路中会存在独立源。此时,希望分析一阶电路在动态元件原始储能和独立源共同作用下电路的响应,即一阶电路的全响应。

由第 4 章知识可知,利用线性电路的叠加定理,求解一阶电路的全响应时,可以将动态元件原始储能和独立源看作两组激励,分别求解其零输入响应和零状态响应,二者的代数和即为全响应。本节将通过对一阶线性电路的分析进一步阐明求全响应的线性叠加方法,并对一阶电路全响应进行深入剖析。下面以一阶 RC 电路为例,一阶 RL 电路具有相似的结论。


 图 5-4-1 一阶 RC 电路的全响应

如图 5-4-1 所示电路,设电容的初始电压为 $u_C(0_-)=U_0$,在 $t=0$ 时开关 S 闭合。分析响应电压 $u_C(t)$ 与响应电流 $i(t)$ 。

首先,求零输入响应,即 $U_S=0$ 时的电路响应。此时,图 5-4-1 与图 5-2-1(a) 换路后的状态完全等效,故其零输入响应为

$$u_{zi}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-4-1)$$

$$i_{zi}(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-4-2)$$

其次,求电路的零状态响应,即 $u_C(0_-)=0$ 时的响应。此时,图 5-4-1 与图 5-3-1 相同,故其零状态响应为

$$u_{zs}(t) = U_S - U_S e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0_+ \quad (5-4-3)$$

$$i_{zs}(t) = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-4-4)$$

最后,根据叠加定理可知,图 5-4-1 中 RC 电路的全响应为

$$u_C(t) = u_{zi}(t) + u_{zs}(t) = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-4-5)$$

$$i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t) = 0 + \left(\frac{U_S}{R} - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-4-6)$$

至此,利用叠加定理求得了一阶 RC 电路的全响应。这种方法同样适用于一阶 RL 电路全响应的分析。

观察式(5-4-5)和式(5-4-6),不难发现,一阶电路的全响应由两部分组成,其中一部分与电路时间常数 τ 无关,不会随时间的推移而消逝,而另一部分则随时间的推移以指数形式不断衰减,衰减速度取决于电路时间常数 τ ,当时间趋于无穷大时将变为零。将前一部分称为稳态分量或稳态响应;将后一部分称为暂态分量或暂态响应。与动态电路的状态过渡过程相联系,可知,换路后,动态电路脱离原先的稳定状态(简称稳态),进入一个渐变的动态过程(简称暂态)。在暂态过程中,由于稳态分量与暂态分量同时存在,响应信号不稳定,当时间足够长时,暂态分量消逝,响应信号中仅剩稳态分量,电路再次进入稳态。一般认为,换路后经过 $3\tau \sim 5\tau$ 的过渡时间,电路达到基本稳定。

根据上述分析,可以给出一阶电路全响应的另一种分解方式:

$$\text{全响应} = \text{稳态分量} + \text{暂态分量}$$

结合第 4 章内容,可以将动态电路全响应的几种分解方式归纳如下:

$$\text{全响应} = \text{零输入响应} + \text{零状态响应}$$

$$= \text{自然响应} + \text{强迫响应}$$

$$= \text{稳态响应} + \text{暂态响应}$$

上述几种分解方式从不同角度对动态电路的全响应进行了诠释:根据线性电路的叠加性,将动态元件原始储能和独立源看作两组独立的激励信号,则分别得到零输入响应和零状态响应;根据动态电路响应信号与电路结构的关系,以及响应信号与独立源之间关系,可以得到自然响应和强迫响应;根据动态电路响应信号中各部分的变化趋势,可以得到稳态响应和暂态响应。

【思考与练习】

5-4-1 归纳零输入响应、零状态响应、自然响应、强迫响应、稳态响应及暂态响应之间的相互关系。

5.5 一阶电路分析的三要素法

5.2节~5.4节对简单一阶电路的分析方法进行了全面的介绍,其基本出发点仍然建立在基尔霍夫定律和线性电路叠加定理的基础之上,通过建立与求解微分方程的方法获得电路响应。虽然主要针对简单RC电路和RL电路进行了分析,但所得结论对于一般的一阶电路具有普遍意义。本节将对上述分析结果进行归纳总结,导出更为简洁的一阶电路分析方法,即三要素法。采用三要素法分析一阶电路,可以省去建立和求解微分方程的复杂过程,使电路分析更为方便和高效。

5.5.1 适用于直流激励的三要素法

仍以简单一阶RC电路为出发点。由5.4节结论可知,如图5-4-1所示RC电路的全响应结果如下:

$$u_C(t) = u_{zi}(t) + u_{zs}(t) = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-5-1)$$

$$i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t) = \left(\frac{U_S}{R} - \frac{U_0}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-5-2)$$

由图5-4-1可知,电容电压 $u_C(t)$ 的初值 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$,电容电压的终值 $u_C(\infty) = U_S$;而电流 $i(t)$ 的初值 $i(0_+) = \frac{U_S}{R} - \frac{U_0}{R}$,电流 $i(t)$ 的终值 $i(\infty) = 0$ 。

观察式(5-5-1)和式(5-5-2)可见,一阶电路中任意电路变量的全响应具有如下的统一形式:

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-5-3)$$

由此可知,为了求解一阶电路中任一电路变量的全响应,仅须知道三个要素:电路变量的初值 $f(0_+)$ 、电路变量的终值 $f(\infty)$ 以及一阶电路的时间常数 τ 。式(5-5-3)称为一阶电路分析的三要素法。不难验证,三要素法同样适用于一阶RL电路。注意,此处归纳的三要素法仅适用于一阶电路,二阶以上动态电路不可采用此方法。

5.5.2 推广的三要素法

在前面分析一阶电路时,采用的独立源具有共同的特点,即所有独立源均为直流(直流电压源或直流电流源)。对于直流激励电路,换路前电路变量为稳定的直流量,换路后经历一个动态过程,电路变量过渡到另外一个稳定的直流量,容易根据电路的原始状态和电路结构确定电路变量的初值 $f(0_+)$ 、电路变量的终值 $f(\infty)$ 以及一阶电路的时间常数 τ 。若电路的激励源不是直流,而是符合一定变化规律的交流量(如正弦交流信号),则换路后电路经历一个动态过程再次进入稳态,此时的稳态响应不再是直流形式,而依赖于激励源的信号形式(如正弦交流信号)。此时,无法确定电路变量的终值 $f(\infty)$,故无法采用式(5-5-3)所给出的三要素法确定一阶电路的全响应。对于这类一阶电路,可以采

用推广的三要素法:

$$f(t) = f_w(t) + [f(0_+) - f_w(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0_+ \quad (5-5-4)$$

式中, $f(0_+)$ 为全响应的初值, $f_w(t)$ 为电路的稳态响应, τ 为电路的时间常数, $f_w(0_+)$ 为全响应稳态解的初始值。

在实际应用中, 直流激励电路和正弦交流激励电路是两类重要的电路类型, 对于直流激励电路注重其换路后的动态过渡过程, 而对于正弦交流激励电路更为注重其换路后的稳态响应。对于交流激励电路的稳态响应, 采用后续章节中的相量分析法更为方便。因此, 本节后续内容重点针对直流激励一阶电路的三要素法进行分析。

5.5.3 三要素的计算与应用

利用三要素法分析一阶电路的全响应时, 必须首先计算出电路变量的初值 $f(0_+)$ 、电路变量的终值 $f(\infty)$ 以及一阶电路的时间常数 τ 。本节对三要素的计算进行简单归纳, 并结合例题对三要素法的应用加以阐释。假设激励源为直流电压源或直流电流源。

1. 初值 $f(0_+)$ 的计算

换路前, 一般认为电路已进入稳态。根据电路结构以及元件属性, 不难确定动态元件的原始状态[电容元件的电压 $u_C(0_-)$ 或电感元件的电流 $i_L(0_-)$]。在有限激励的作用下, 电容元件的电压或电感元件的电流不会发生突变。因此, 在 $t=0_+$ 时刻, 电容元件的电压 $u_C(0_+)$ 或电感元件的电流 $i_L(0_+)$ 维持原始状态不变。可以用一个电压源 $U_S = u_C(0_+)$ 取代电容元件, 或用一个电流源 $I_S = i_L(0_+)$ 取代电感元件。此时, 电路被转换为电阻电路, 借助电阻电路的支路分析法、回路分析法、节点分析法、戴维南定理等即可计算出响应信号的初值 $f(0_+)$ 。

2. 终值 $f(\infty)$ 的计算

换路后, 动态电路经过一个过渡过程, 再次进入稳态。在直流激励情况下, $t=\infty$ 时, 电容电压和电感电流维持某个不变的取值。电容元件电流为零, 可以用开路元件取代, 电感元件电压为零, 可以用短路元件取代。与初值的计算方法类似, 电路可被转换为电阻电路, 借助电阻电路的分析方法即可计算出响应信号的终值 $f(\infty)$ 。

3. 时间常数 τ 的计算

实际的一阶电路可能元件数量较大, 结构较复杂, 电路中包含多个电阻元件、独立源、受控源和多个电容或电感。若电路满足一阶电路的条件, 则其中的电容元件或电感元件之间必有强烈的相关性, 表现在电路连接上为串联、并联或混联关系。此时, 换路后的电路模型可以看作由某个电容网络或电感网络与一个含源电阻网络相连组成, 如图 5-5-1(a) 所示。对电路中电容网络或电感网络进行串、并联计算, 得到一个等效电容 C_{eq} 或一个等效电感 L_{eq} , 将含源电阻网络进行诺顿等效或戴维南等效, 得到如图 5-5-1(b) 所示的等效一阶电路, 则一阶电路的时间常数 τ 可表示为

$$\tau = R_{eq} C_{eq} \quad \text{或} \quad \tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} \quad (5-5-5)$$

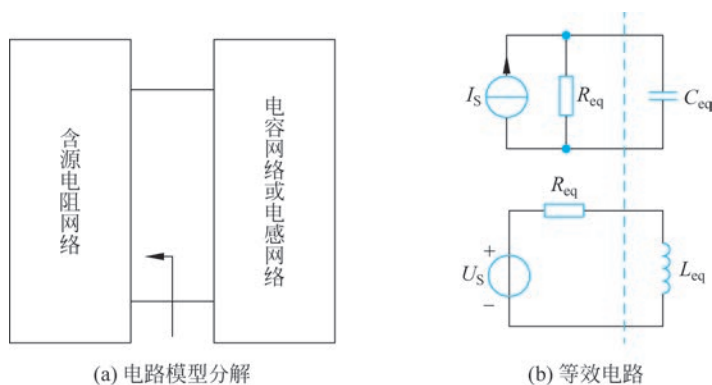
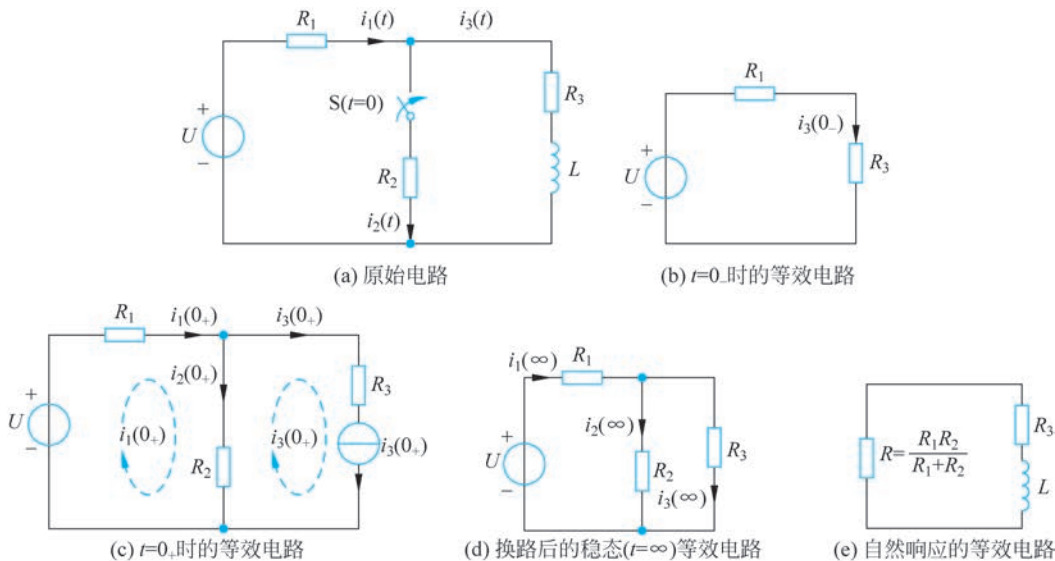


图 5-5-1 一阶电路的电路模型分解与等效

【例 5-5-1】 如例图 5-5-1(a)所示电路,已知 $U=10\text{V}$, $R_1=R_2=30\Omega$, $R_3=20\Omega$, $L=1\text{H}$, 设换路前电路已工作了很长时间,试用三要素法求换路后各支路的电流。



例图 5-5-1

解: (1) 开关闭合前, 电路为稳定状态, 如例图 5-5-1(b)所示, 所以 $t=0_-$ 时刻电感中的电流为

$$i_3(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_3} = \frac{10}{30 + 20} \text{A} = 0.2 \text{A}$$

开关闭合后, $t=0_+$ 时刻电感中的电流未发生跳变, 即

$$i_3(0_+) = i_3(0_-) = 0.2 \text{A}$$

(2) 用等效电流源 $i_3(0_+)$ 代替电感元件, 得到换路后 $t=0_+$ 时刻的等效电路, 如例图 5-5-1(c)所示, 并按网孔分析法列出以网孔电流 $i_1(0_+)$ 为未知量的网孔方程:

$$(R_1 + R_2)i_1(0_+) - R_2 i_3(0_+) = U$$

代入已知条件得

$$60i_1(0_+) - 30 \times 0.2 = U$$

从而解得

$$i_1(0_+) = \frac{16}{60} \text{ A} \approx 0.267 \text{ A}$$

根据换路后的稳态等效电路,如例图 5-5-1(d)所示,求出电流 $i_1(t)$ 和 $i_3(t)$ 的稳态分量为

$$i_1(\infty) = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{10}{30 + \frac{30 \times 20}{30 + 20}} \text{ A} = \frac{10}{30 + 12} \text{ A} \approx 0.238 \text{ A}$$

$$i_3(\infty) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1(\infty) = \frac{30}{30 + 20} \times 0.238 \text{ A} \approx 0.143 \text{ A}$$

时间常数按自然响应的等效电路,如例图 5-5-1(e)所示,计算,为

$$\tau = \frac{L}{R + R_3} = \frac{1}{15 + 20} \text{ s} = \frac{1}{35} \text{ s}$$

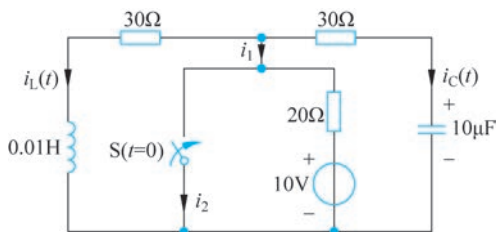
因此,利用三要素法公式可得各支路的电流为

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_1(\infty) + [i_1(0_+) - i_1(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = [0.238 + (0.267 - 0.238)e^{-35t}] \text{ A} \\ &= (0.238 + 0.029e^{-35t}) \text{ A}, \quad t \geq 0_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_3(t) &= i_3(\infty) + [i_3(0_+) - i_3(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = [0.143 + (0.2 - 0.143)e^{-35t}] \text{ A} \\ &= (0.143 + 0.057e^{-35t}) \text{ A}, \quad t \geq 0_+ \end{aligned}$$

$$i_2(t) = i_1(t) - i_3(t) = (0.095 - 0.028e^{-35t}) \text{ A}, \quad t \geq 0_+$$

【例 5-5-2】 如例图 5-5-2 所示电路,原来处于稳定状态, $t=0$ 时闭合开关,求 $t>0$ 时的 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 。



例图 5-5-2

解: 根据题设可知,开关闭合后形成三个独立回路。

对于左侧回路,易得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{10}{50} \text{ A} = 0.2 \text{ A}, \quad i_L(\infty) = 0 \text{ A}, \quad \tau_1 = \frac{0.01}{30} \text{ s} = \frac{1}{3} \times 10^{-3} \text{ s}$$

根据三要素法,可得

$$i_L(t) = 0.2e^{-3 \times 10^3 t} \text{ A}, \quad t \geq 0_+$$

对于右侧回路,易得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\text{V}, \quad u_C(\infty) = 0\text{V}, \quad \tau = 3 \times 10^{-4}\text{s}$$

根据三要素法,可得

$$u_C(t) = 6e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t} \text{V}, \quad t \geq 0_+$$

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt} = -0.2e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t} \text{A}, \quad t \geq 0_+$$

因此

$$i_1(t) = -i_L(t) - i_C(t) = (-0.2e^{-3 \times 10^3 t} + 0.2e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t}) \text{A}, \quad t \geq 0_+$$

$$i_2(t) = \frac{10}{20} \text{A} + i_1(t) = (0.5 + 0.2e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t} - 0.2e^{-3 \times 10^3 t}) \text{A}, \quad t \geq 0_+$$

【思考与练习】

5-5-1 在三要素中,“初值”即对应电路变量的初始状态,“终值”即对应电路变量的稳态响应。试问上述论断是否正确?

5-5-2 试说明三要素法的适用条件是什么,其是否适用于二阶电路?

5.6 一阶电路的阶跃响应和冲激响应

对于线性动态电路而言,零输入响应仅取决于动态元件的原始储能,零状态响应则由外部激励决定。在求解线性动态电路的零状态响应时,可以借助线性电路的叠加定理,只要知道动态电路对某些基本激励信号的响应,即可掌握该动态电路的基本属性并通过线性运算得到动态电路对其他激励信号的响应。第4章已经讲述了单位阶跃函数和单位冲激函数两种非常重要的奇异函数。本节将分析一阶电路对这两种基本函数的响应,并结合例题阐释二者在动态电路分析中的作用。

5.6.1 一阶电路的阶跃响应

阶跃响应,即单位阶跃函数作为激励信号时,动态电路的零状态响应。此时,假设动态元件中无原始储能,激励源可以是阶跃电压或阶跃电流,待求电路变量可以是电路中的任意支路电压或电流。

1. RC 电路的阶跃响应

如图 5-6-1 所示一阶 RC 电路,其中激励电流源为单位阶跃信号 $\epsilon(t)$,下面分析 RC 电路的阶跃响应 $u_C(t)$ 。

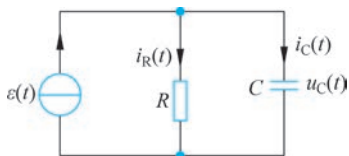


图 5-6-1 RC 电路的阶跃响应

阶跃电流 $\epsilon(t)$ 可以表示为

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

根据 KCL,可得

$$i_C(t) + i_R(t) = \epsilon(t)$$

将电容和电阻的 VCR

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R}$$

代入上式,得

$$C \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R} = \varepsilon(t) \quad (5-6-1)$$

整理得

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{1}{C}\varepsilon(t) \quad (5-6-2)$$

该微分方程的解可表示为

$$u_C(t) = u_{Ct}(t) + u_{Cf}(t) \quad (5-6-3)$$

式中, $u_{Ct}(t)$ 为齐次微分方程的通解, $u_{Cf}(t)$ 为非齐次微分方程的特解。其可表示为

$$\begin{cases} u_{Ct}(t) = B e^{-\frac{t}{RC}} \\ u_{Cf}(t) = K \end{cases} \quad (5-6-4)$$

将 $u_{Cf}(t) = K$ 代入式(5-6-2),得

$$\frac{K}{RC} = \frac{1}{C} \Rightarrow K = R$$

故

$$u_{Cf}(t) = R$$

则非齐次微分方程的解为

$$u_C(t) = B e^{-\frac{t}{RC}} + R$$

将初始条件 $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ 代入上式,得

$$B = -R$$

所以,阶跃响应

$$u_C(t) = -R e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) + R \varepsilon(t) = R \varepsilon(t) - R \varepsilon(t) e^{-\frac{t}{RC}} = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t) \quad (5-6-5)$$

由此,可以进一步求出阶跃响应 $i_C(t)$ 和阶跃响应 $i_R(t)$ 为

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t), \quad i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R} = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

$u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 和 $i_R(t)$ 的响应曲线如图 5-6-2 所示。

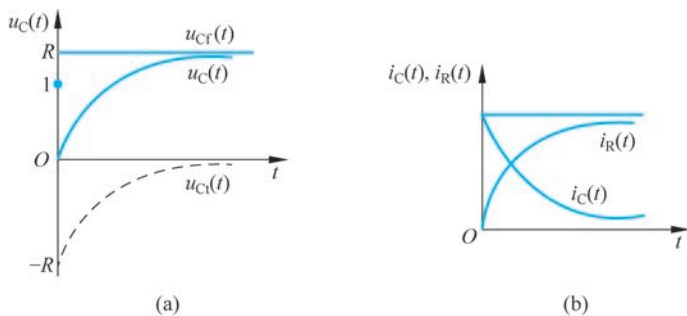


图 5-6-2 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 和 $i_R(t)$ 的响应曲线

2. RL 电路的阶跃响应

如图 5-6-3(a) 所示一阶 RL 电路, 其中电压源 $u_S(t)$ 的电压为 $1V$, 开关 S 闭合前电感线圈中无电流。 $t=0$ 时刻, 开关闭合, 分析开关闭合后的回路电流 $i(t)$ 、电阻电压 $u_R(t)$ 及电感电压 $u_L(t)$ 。

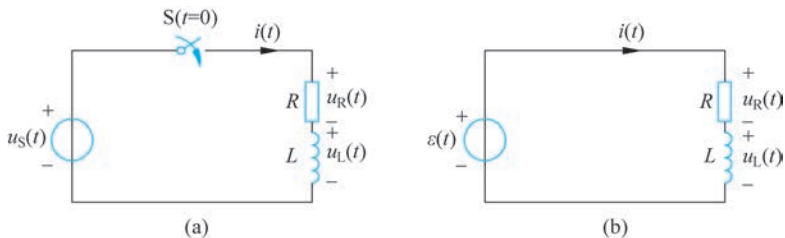


图 5-6-3 RL 电路的阶跃响应

当 $t=0_-$ 时, RL 支路上的电流等于零, 即 $i(0_-)=0$; 当 $t=0$ 时, 开关闭合, 电压源 $u_S(t)$ 作用在 RL 支路上。因此, 如图 5-6-3(a) 所示的一阶 RL 电路可以等效为图 5-6-3(b)。

对如图 5-6-3(b) 所示电路列 KVL 方程, 可得

$$u_L(t) + u_R(t) = \epsilon(t)$$

将 $u_R(t) = i(t)R$, $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ 代入上式, 得

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}\epsilon(t) \quad (5-6-6)$$

该微分方程的解可表示为

$$i(t) = i_t(t) + i_f(t) \quad (5-6-7)$$

式中, $i_t(t)$ 为齐次微分方程的通解, $i_f(t)$ 为非齐次微分方程的特解。其可表示为

$$\begin{cases} i_t(t) = Be^{-\frac{R}{L}t} \\ i_f(t) = K \end{cases} \quad (5-6-8)$$

将 $i_f(t) = K$ 代入式(5-6-6), 得

$$\frac{R}{L}K = \frac{1}{L} \Rightarrow K = \frac{1}{R}$$

故

$$i_f(t) = \frac{1}{R}$$

则非齐次微分方程的解为

$$i(t) = \frac{1}{R} + Be^{-\frac{R}{L}t} \quad (5-6-9)$$

将初始条件 $i(0_+) = i(0_-) = 0$ 代入上式, 得

$$B = -\frac{1}{R}$$

所以,回路电流

$$i(t) = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right) \epsilon(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \epsilon(t) \quad (5-6-10)$$

由此,可以进一步求出电阻电压 $u_R(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 为

$$u_R(t) = i(t)R = (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \epsilon(t), \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = e^{-\frac{R}{L}t} \epsilon(t)$$

5.6.2 一阶电路阶跃响应的一般分析方法与应用

5.6.1 节介绍了阶跃响应的概念,并分析了最基本的一阶 RC 电路与一阶 RL 电路的阶跃响应。在实际的一阶线性电路中,电路结构可能比较复杂,电路的激励源也可能不是单位阶跃函数。但借助最基本的一阶 RC 电路与一阶 RL 电路的单位阶跃响应,可以非常方便地分析其零状态响应。本节将给出一阶电路阶跃响应的一般分析方法,并结合示例分析其应用。

一阶电路可以分为两个基本类型: RC 一阶电路和 RL 一阶电路。若电路中激励源为直流信号(直流电压源或直流电流源),无论电路如何复杂, RC 一阶电路可以由一个等效的电容元件和一个含源电阻网络组成, RL 一阶电路可以由一个等效的电感元件和一个含源电阻网络组成,如图 5-6-4(a)所示。经诺顿等效或戴维南等效后,可以得到图 5-6-4(b)所示的电路模型。利用 5.6.1 节的知识,容易得到两种等效电路的单位阶跃响应:

$$\begin{cases} RC \text{ 一阶电路: } u_{C_{eq}}(t) = R_{eq} (1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}) \epsilon(t) \\ RL \text{ 一阶电路: } i_{L_{eq}}(t) = \frac{1}{R_{eq}} (1 - e^{-\frac{R_{eq}}{L_{eq}}t}) \epsilon(t) \end{cases} \quad (5-6-11)$$

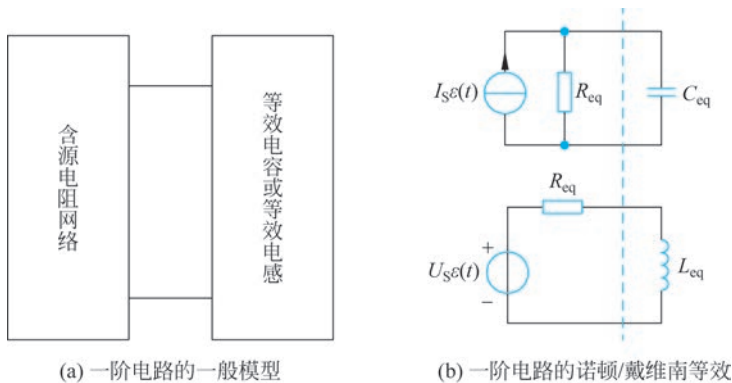


图 5-6-4 一阶电路的一般模型和诺顿/戴维南等效

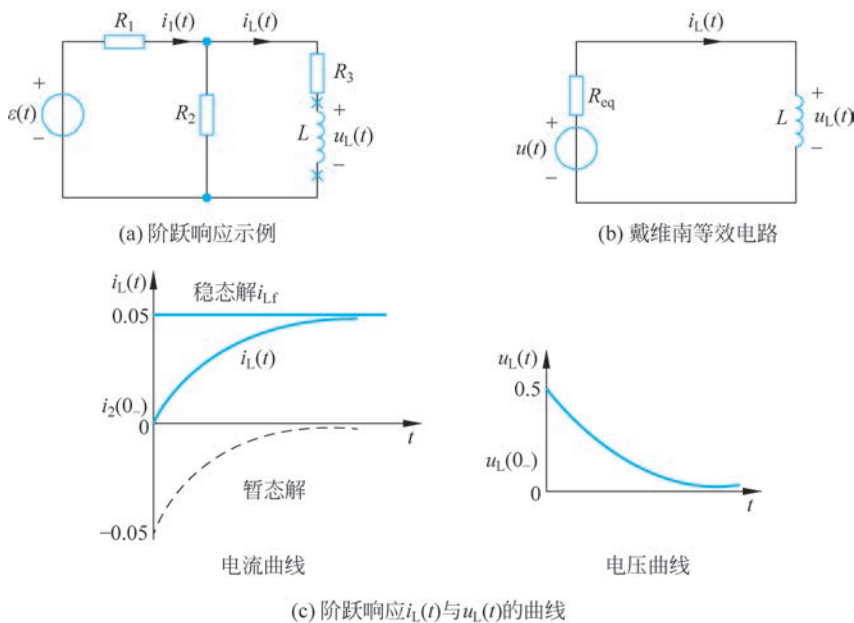
利用线性电路的齐次性,可以得到两种等效电路的零状态响应:

$$\begin{cases} RC \text{ 一阶电路: } u_{C_{eq}}(t) = I_S R_{eq} (1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}) \epsilon(t) \\ RL \text{ 一阶电路: } i_{L_{eq}}(t) = \frac{U_S}{R_{eq}} (1 - e^{-\frac{R_{eq}}{L_{eq}}t}) \epsilon(t) \end{cases} \quad (5-6-12)$$

一阶电路对移位的(或称延迟的)单位阶跃函数 $\varepsilon(t-t_0)$ 的响应(即换路时刻为 t_0 的单位阶跃函数),可以利用线性电路的时移不变性直接给出:

$$\begin{cases} RC \text{ 一阶电路: } u_{C_{eq}}(t-t_0) = I_S R_{eq} (1 - e^{-\frac{t-t_0}{R_{eq}C_{eq}}}) \varepsilon(t-t_0) \\ RL \text{ 一阶电路: } i_{L_{eq}}(t-t_0) = \frac{U_S}{R_{eq}} (1 - e^{-\frac{R_{eq}}{L_{eq}}(t-t_0)}) \varepsilon(t-t_0) \end{cases} \quad (5-6-13)$$

【例 5-6-1】 如图 5-6-1(a) 所示电路, 已知 $R_1=8\Omega, R_2=8\Omega, R_3=6\Omega, L=1\text{H}$, 求在单位阶跃电压激励下的阶跃响应 $i_L(t)$ 与 $u_L(t)$ 。



例图 5-6-1

分析: 可将电感元件以外的电路作戴维南等效变换, 然后利用公式即可直接写出答案。

解: 将 L 两端断开, 求开路电压 $u(t)$ 和等效电阻 R_{eq} , 断开后 $u(t)$ 即为 $\varepsilon(t)$ 在 R_2 上的分压

$$u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon(t) = \frac{8}{8 + 8} \varepsilon(t) \text{ V} = 0.5 \varepsilon(t) \text{ V}$$

$$R_{eq} = R_3 + (R_1 // R_2) = \left(6 + \frac{8 \times 8}{8 + 8}\right) \Omega = 10 \Omega$$

戴维南等效电路如图 5-6-1(b) 所示。

时间常数

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0.1 \text{ s}$$

从而,阶跃响应 $i_L(t)$ 与 $u_L(t)$ 为

$$i_L(t) = \frac{0.5}{R_{eq}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \epsilon(t) = 0.05(1 - e^{-10t}) \epsilon(t) \text{ A}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0.5e^{-10t} \epsilon(t) \text{ V}$$

$i_L(t)$ 与 $u_L(t)$ 的曲线如例图 5-6-1(c) 所示。

【例 5-6-2】 如例图 5-6-2 所示 RC 一阶电路,已知电流源 $i_S(t) = 2\epsilon(t) - 2\epsilon(t-5)$, 求电路的零状态响应 $u_C(t)$ 。

解: 利用 RC 一阶电路的单位阶跃响应公式,结合线性电路的齐次性和时移不变性,可以方便地求得电路的零状态响应。

RC 一阶电路对单位阶跃函数 $\epsilon(t)$ 的响应

$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \epsilon(t)$$

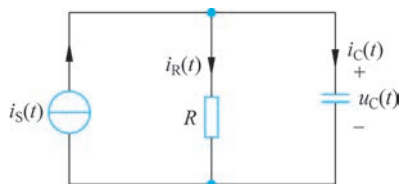
RC 一阶电路对移位的单位阶跃函数 $\epsilon(t-5)$

的响应

$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t-5}{RC}}) \epsilon(t-5)$$

利用齐次性和叠加性,可得电路的零状态响应

$$u_C(t) = 2R(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \epsilon(t) - 2R(1 - e^{-\frac{t-5}{RC}}) \epsilon(t-5)$$



例图 5-6-2

5.6.3 一阶电路的冲激响应

第 4 章已经讲述了冲激函数 $\delta(t)$ 的定义和基本属性。本节将给出冲激响应的基本概念,然后分析典型一阶电路的冲激响应。

电路在单位冲激电压或单位冲激电流激励下的零状态响应称为冲激响应。注意,冲激响应与阶跃响应均为零状态响应,其前提条件是动态元件无储能。

1. RC 电路的冲激响应

如图 5-6-5(a) 所示一阶 RC 电路,电流源为单位冲激函数 $\delta(t)$,电容元件 C 无原始储能,即 $u_C(0_-) = 0$ 。分析电容电压 $u_C(t)$ 、电阻电流 $i_R(t)$ 及电容电流 $i_C(t)$ 。

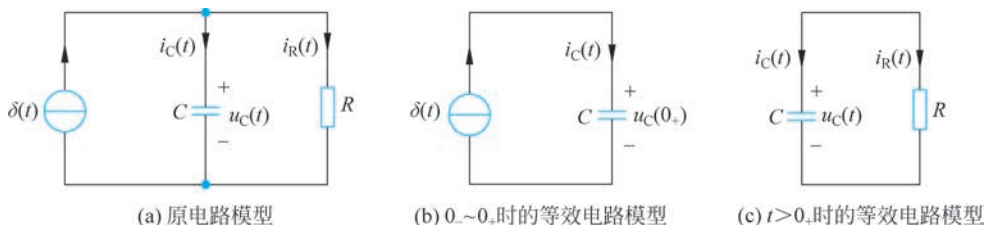


图 5-6-5 一阶 RC 电路的冲激响应

根据单位冲激函数的性质,电流源仅在 $0_- \sim 0_+$ 时作用于电路,其余时刻均为零。而 0_- 时刻电容元件 C 的电压 $u_C(0_-) = 0$,为短路状态。电路可以分两个阶段进行分析,第

一阶段为 $0_- \sim 0_+$ 时刻, 第二阶段为 $t \geq 0_+$ 。

第一阶段, 由于 $u_C(0_-) = 0$, 电容为短路状态, 电流源的电流全部流过电容支路, 电阻支路无电流流过。因此, 电路可等效为图 5-6-5(b)。 $0_- \sim 0_+$ 时刻, 单位冲激电流对电容充电, 由于冲激电流取值无穷大, 电容电压将发生突变。

$t = 0_+$ 时, 电容电压

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{C} \quad (5-6-14)$$

可见, 在第一阶段, 电容通过冲激电流建立了电场, 获得了能量。

第二阶段, 电流源相当于开路, 电路可等效为图 5-6-5(c)。 $t \geq 0_+$ 时, 电路的状态变化体现为电容元件 C 通过电阻 R 放电的过程, 其分析与零输入响应完全相同。因此, 可直接写出电容电压

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{RC}} \epsilon(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \epsilon(t) \quad (5-6-15)$$

式(5-6-15)即为一阶 RC 电路在单位冲激电流激励下的冲激响应电压。由此, 可直接得到电阻支路的冲激响应电流

$$i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R} = \frac{u_C(0_+)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \epsilon(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \epsilon(t) \quad (5-6-16)$$

由图 5-6-5(a), 利用 KCL 可得到电容电流的冲激响应

$$i_C(t) = \delta(t) - i_R(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \epsilon(t) \quad (5-6-17)$$

各冲激响应信号的曲线如图 5-6-6 所示。

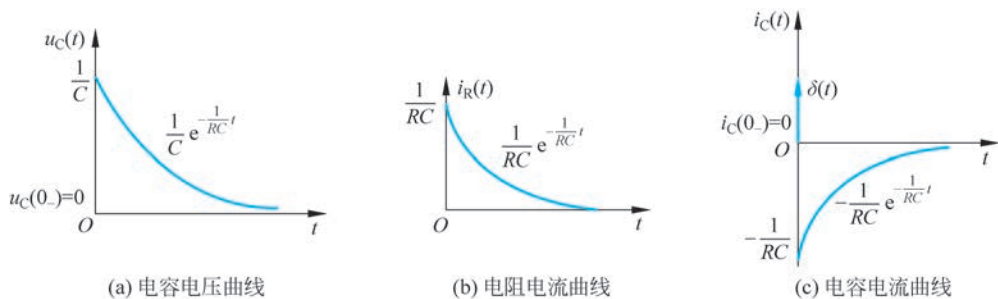


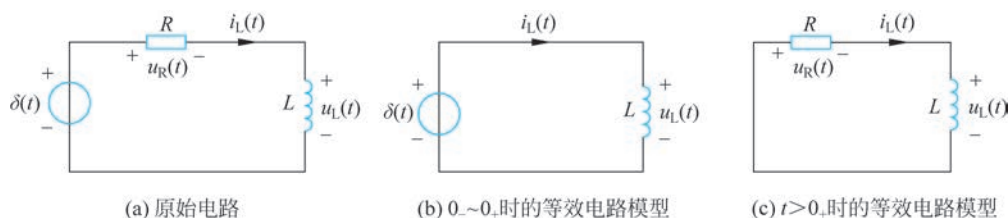
图 5-6-6 一阶 RC 电路冲激响应曲线

2. RL 电路的冲激响应

如图 5-6-7(a) 所示一阶 RL 电路, 电压源为单位冲激函数 $\delta(t)$, 电感元件 L 无原始储能(即 $i_L(0_-) = 0$)。下面分析电流 $i_L(t)$ 、电阻电压 $u_R(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 的变化规律。

根据单位冲激函数性质, 电压源仅在 $0_- \sim 0_+$ 时作用于电路, 其余时刻均为零。而 0_- 时刻电感元件 L 的电流 $i_L(0_-) = 0$, 为开路状态。电路可以分两个阶段进行分析, 第一阶段为 $0_- \sim 0_+$ 时刻, 第二阶段为 $t \geq 0_+$ 。

第一阶段, 由于 $i_L(0_-) = 0$, 电感为开路状态, 电压源电压 $\delta(t)$ 全部施加在电感两

图 5-6-7 RL 电路的冲激响应

端,电阻两端电压为 0。因此,电路可等效为图 5-6-7(b)。 $0_- \sim 0_+$ 时刻,单位冲激电压施加于电感两端,由于冲激电压取值无穷大,电感电流将发生突变。

$t = 0_+$ 时,电感电流

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{L} \quad (5-6-18)$$

可见,在第一阶段,电感通过冲激电压建立了磁场,获得了能量。

第二阶段,电压源相当于短路,电路可等效为图 5-6-7(c)。 $t \geq 0_+$ 时,电路的状态变化体现为电感元件 L 通过电阻 R 释放能量的过程,其分析方法与零输入响应完全相同。因此,可直接写出电感电流

$$i_L(t) = i_L(0_+) e^{-\frac{R}{L}t} \epsilon(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \epsilon(t) \quad (5-6-19)$$

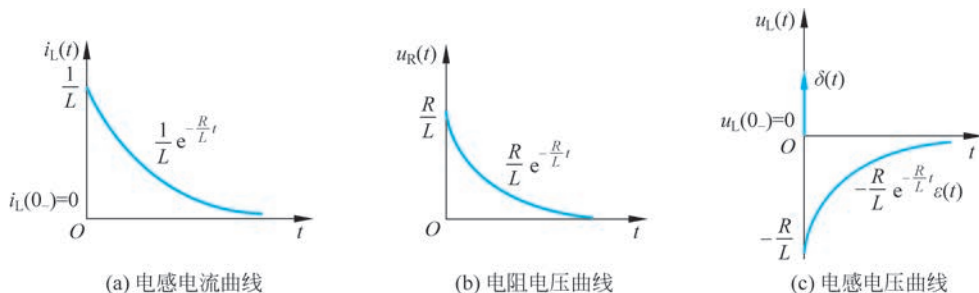
式(5-6-19)即一阶 RL 电路在单位冲激电压激励下的冲激响应电流。由此,可直接得到电阻上的冲激响应电压

$$u_R(t) = i_L(t)R = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \epsilon(t) \quad (5-6-20)$$

由图 5-6-7(a),利用 KVL 可得到电感电压的冲激响应

$$u_L(t) = \delta(t) - u_R(t) = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \epsilon(t) \quad (5-6-21)$$

各冲激响应信号的曲线如图 5-6-8 所示。

图 5-6-8 一阶 RL 电路冲激响应曲线

分析一阶 RC 电路与一阶 RL 电路的冲激响应,可以发现,在冲激电压或冲激电流的激励下,一阶动态电路的状态变化分两个阶段:第一阶段是动态元件在瞬间获得能量的阶段;第二阶段是激励源失去作用,表现为动态元件通过电阻元件释放能量的阶段,直至

能量耗尽进入稳态。对比可知, RL 电路与 RC 电路的冲激响应具有强烈的对偶性, 利用这种对偶性可以建立两种电路之间的联系。

3. 冲激响应与阶跃响应间的关系

由第 4 章知识可知, 单位冲激函数与单位阶跃函数间存在如下关系:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt', \quad \delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

任意线性电路的冲激响应与阶跃响应之间也存在类似的依从关系。设冲激响应用 $h(t)$ 表示, 阶跃响应用 $g(t)$ 表示, 则

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad g(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt'$$

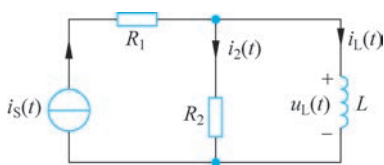
上述关系读者可自行证明, 或者可以利用一阶电路的阶跃响应和冲激响应进行验证。注意, 这种关系对任意阶线性动态电路都是成立的。

基于上述冲激响应与阶跃响应之间的依从关系, 线性动态电路的冲激响应可由已知的阶跃响应对时间变量求导获得; 线性动态电路的阶跃响应也可由已知的冲激响应积分求得。

5.6.4 一阶电路冲激响应的应用

前面介绍了冲激响应的概念, 并分析了最基本的一阶 RC 电路与一阶 RL 电路的冲激响应。对于复杂一阶线性电路冲激响应的分析, 可以借助戴维南等效、诺顿等效和叠加定理等分析方法。

【例 5-6-3】 如图例 5-6-3 所示 RL 一阶电路, 已知电流源 $i_S(t) = \delta(t)$, $L = 1\text{H}$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$, 求电路的零状态响应 $i_L(t)$ 、 $u_L(t)$ 。



例图 5-6-3

解: 根据题设, 在 0_- 时刻 $i_L(0_-) = 0$, 电感处于开路状态。 $t = 0$ 时, 冲激电流源通过 R_1 、 R_2 形成回路, 在 R_2 上产生冲激电压 $\delta(t)$ 。冲激电压施加于电感两端, 强迫其电流发生突变, 0_+ 时刻的电感电流为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1\text{A}$$

0_+ 时刻以后, 电流源不再作用, 相当于开路, 电感通过电阻 R_2 释放能量。因此, 电感线圈上的冲激响应电流

$$i_L(t) = i_L(0_+) e^{-\frac{R_2}{L}t} \varepsilon(t) = e^{-t} \varepsilon(t)$$

根据 KCL, 可以计算电阻 R_2 所在支路电流

$$i_2(t) = i_S(t) - i_L(t) = \delta(t) - e^{-t} \varepsilon(t)$$

电感电压, 即电阻 R_2 的端电压

$$u_L(t) = i_2(t) R_2 = [\delta(t) - e^{-t} \varepsilon(t)] R_2$$

前面曾经提到, 通过冲激响应可以了解电路的基本属性, 同时还可以方便地得到电

路对任意激励信号的零状态响应。另外,由电路冲激响应 $h(t)$ 可以求得阶跃响应 $g(t)$ 。电路对于任意激励信号 $s(t)$ 的零状态响应 $r(t)$,可以利用卷积运算得到

$$r(t) = h(t) * s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) s(t - \tau) d\tau$$

【思考与练习】

5-6-1 利用图 5-6-1 中 RC 电路单位阶跃响应 $u_C(t)$ 与图 5-6-5 中 RC 电路的单位冲激响应 $u_C(t)$ 的分析结果,验证冲激响应与阶跃响应的相互关系。

5-6-2 若将例图 5-6-3 中激励电流源换为 $i_S(t) = \varepsilon(t)$,重新分析相应的零状态响应 $i_L(t)$ 、 $u_L(t)$ 。

5.7 二阶电路

本节重点介绍二阶电路的基本特征、零输入响应和冲激响应。动态电路对任意激励信号的零状态响应均可借助冲激响应和卷积计算求得,将零输入响应与零状态响应叠加即可得到二阶电路的全响应。

5.7.1 二阶电路及其特征

在数学上,二阶电路的输入-输出方程表现为二阶线性微分方程;在物理结构上,二阶电路包含两个独立的动态元件,可以是一个电感与一个电容、两个电感或两个电容。注意,电路是否为二阶电路不能仅根据包含动态元件的数量来判断。若电路中包含一个电感与一个电容,则电路必为二阶电路;若电路中包含多个电容或多个电感,则需根据相互之间的连接关系来判断,若经串联、并联后可合并为一个电容或电感,则电路为一阶电路;若经串联、并联简化为最简形式后仍存在两个独立的电容或电感,则电路为二阶电路;若独立电容或电感数大于两个,则电路为高阶电路。

在一阶电路中,仅包含一个独立的动态元件,它可以吸收独立源提供的能量加以储存,储存的能量也可以通过电阻回路进行释放。在二阶电路中,由于存在两个独立的动态元件,二者均可以一定的形式储存能量和释放能量,但其在动态过渡过程中存在能量交互的现象,即两个动态元件交互地释放和吸收能量,在响应信号波形上体现为一定的振荡现象。二阶电路的能量交互现象所遵循的规律取决于具体电路结构和元件参数的配置。

包含一个电容元件与一个电感元件的 RLC 串联电路和 RLC 并联电路是最基本的二阶电路。任意 RLC 串联电路由一对串联的电感、电容与一个含源电阻网络组成,其电路模型如图 5-7-1(a)所示。将含源电阻网络经戴维南等效,可以得到 RLC 串联电路的通用模型,如图 5-7-1(b)所示。而任意 RLC 并联电路由一对并联的电感、电容与一个含源电阻网络组成,其电路模型如图 5-7-2(a)所示。将含源电阻网络经诺顿等效,可以得到 RLC 并联电路的通用模型,如图 5-7-2(b)所示。

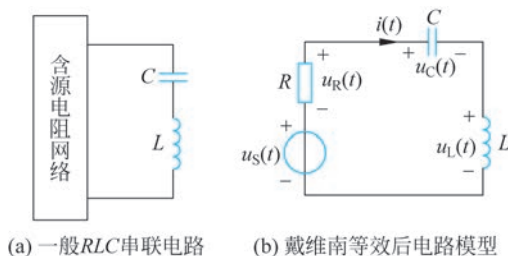


图 5-7-1 RLC 串联电路的一般模型

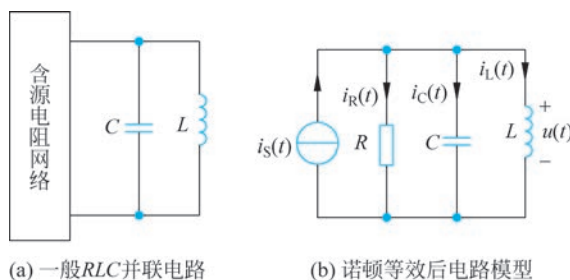


图 5-7-2 RLC 并联电路的一般模型

如图 5-7-1(b)所示 RLC 串联电路,根据 KVL 列出电路方程:

$$u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = u_S(t) \quad (5-7-1)$$

由于 $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$, 故

$$u_R(t) = i(t)R = RC \frac{du_C(t)}{dt}, \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2}$$

将上述关系代入式(5-7-1)并整理,得到 RLC 串联电路的输入-输出方程:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_S(t) \quad (5-7-2)$$

如图 5-7-2(b)所示 RLC 并联电路,根据 KCL 列出电路方程:

$$i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = i_S(t) \quad (5-7-3)$$

由于 $u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, 故

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt} = LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}$$

将上述关系代入式(5-7-3)并整理,得到 RLC 并联电路的输入-输出方程:

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_S(t) \quad (5-7-4)$$

在式(5-7-2)和式(5-7-4)二阶微分方程的基础上,根据初始条件和激励信号即可求解 RLC 串联电路和 RLC 并联电路的零输入响应和零状态响应。

5.7.2 二阶电路的零输入响应

本节介绍 RLC 串联电路和 RLC 并联电路两种典型二阶电路的零输入响应。

1. RLC 串联电路的零输入响应^①

令如图 5-7-1(b) 所示电路中的电压源 $u_S(t) = 0$, 此时 RLC 串联电路可简化为如图 5-7-3 所示电路。对应的输入-输出方程式(5-7-2)简化为齐次微分方程:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \quad (5-7-5)$$

根据初始条件 $u_C(0_+)$ 及 $u'_C(0_+) = \frac{1}{C} i(0_+)$, 求解式(5-7-5)即可确定 RLC 串联电路的零输入响应 $u_C(t)$ 。进而可求出 $i(t)$ 、 $u_R(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

齐次微分方程式(5-7-5)的特征方程为

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0 \quad (5-7-6)$$

解得其两个特征根为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5-7-7)$$

由式(5-7-7)可见, 特征根的取值依赖于 R 、 L 、 C 的取值, 可分为三种情况:

- (1) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$, 即 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 特征根 s_1, s_2 互不相等, 且均为负实数;
- (2) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, 即 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 特征根 s_1, s_2 为重根, 且为负实数;
- (3) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$, 即 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 特征根 s_1, s_2 为互共轭的复数, 且实部为负数。

定义 $R_d = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 为串联电路的阻尼电阻, 则 $R > R_d$ 时(情况 1), 称为过阻尼状态; $R < R_d$ 时(情况 3), 称为欠阻尼状态; $R = R_d$ 时(情况 2), 称为临界阻尼状态。

假设 $u_C(0_+) = 0$, $i(0_+) = I_0$, 即电感元件具有原始储能 $\frac{1}{2}LI_0^2$, 下面分别对三种情况的零输入响应进行分析。

1) 过阻尼状态 $\left(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$

此状态下, 特征根 s_1, s_2 互不相等, 且均为负实数。式(5-7-5)的通解可以写成如下形式:

$$u_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (5-7-8)$$

根据初始条件 $u_C(0_+) = 0$, $i(0_+) = I_0$, 得

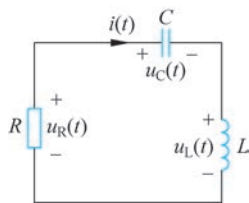


图 5-7-3 RLC 串联电路的零输入响应

^① RLC 串联电路零输入响应的 Multisim 仿真实例参见附录 A 例 2-5。

$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 + A_2 = 0 \\ i(0_+) = C \frac{du_C(t)}{dt} \Big|_{t=0_+} = CA_1 s_1 + CA_2 s_2 = I_0 \end{cases}$$

解得

$$A_1 = \frac{I_0}{Cs_1 - Cs_2}, \quad A_2 = -\frac{I_0}{Cs_1 - Cs_2}$$

所以,零输入响应电压

$$u_C(t) = \frac{I_0}{Cs_1 - Cs_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \epsilon(t)$$

零输入响应电流

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \epsilon(t)$$

图 5-7-4 给出了过阻尼状态时零输入响应电压 $u_C(t)$ 与零输入响应电流 $i(t)$ 的典型曲线。由图中曲线可以分析 RLC 串联电路的动态过渡过程: 在 0 时刻, 电流 $i(t)$ 取最大值 I_0 , 电容电压 $u_C(t) = 0$, 此时电感元件具有最大原始储能, 电容元件无储能。在 $[0, t_m]$ 时段, 电流 $i(t)$ 逐渐减小, 而电容电压 $u_C(t)$ 逐渐上升, 这表明电感元件逐渐释放能量, 而电容元件在不断吸收能量, 同时电阻元件在耗能。在 t_m 时刻, 电感元件原始储能全部释放完毕, 电容元件储能达到峰值。在 $[t_m, 2t_m]$ 时段, 电流 $i(t)$ 反转极性且电流取值再次增加, 而电容元件电压逐渐下降, 这表明电容元件开始释放能量, 而电感元件再次吸收能量, 同时电阻元件在耗能。在 $2t_m$ 时刻, 电感元件储能再次达到某个较小的峰值。在 $2t_m$ 时刻以后, 电流 $i(t)$ 和电容电压 $u_C(t)$ 逐渐衰减至 0, 表明二者同时释放能量, 不再出现能量交互现象, 二者所释放的能量被电阻元件全部消耗。可见, 在过阻尼状态下, RLC 串联电路中电感元件与电容元件存在能量交互的现象, 但交互次数有限, 不会出现振荡现象。其主要原因在于, 电阻元件取值过大, 耗能快。

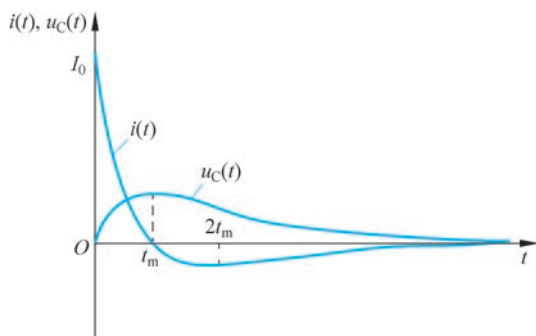


图 5-7-4 RLC 串联电路过阻尼状态的零输入响应曲线

2) 临界阻尼状态 $\left(R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$

此状态下, 特征根 s_1, s_2 为重根, $s_1 = s_2 = s = -\frac{R}{2L}$, 且为负实数。式 (5-7-5) 的通解

可以写成如下形式:

$$u_C(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st} \quad (5-7-9)$$

根据初始条件 $u_C(0_+) = 0, i(0_+) = I_0$, 得

$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 = 0 \\ i(0_+) = C \frac{du_C(t)}{dt} \Big|_{t=0_+} = CA_1 s + CA_2 = I_0 \end{cases}$$

解得

$$A_1 = 0, A_2 = \frac{I_0}{C}$$

所以, 零输入响应电压

$$u_C(t) = \frac{I_0}{C} t e^{st} \epsilon(t)$$

零输入响应电流

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = (I_0 e^{st} + I_0 s t e^{st}) \epsilon(t)$$

图 5-7-5 给出了临界阻尼状态时零输入响应电压 $u_C(t)$ 与零输入响应电流 $i(t)$ 的典型曲线。对比图 5-7-5 与图 5-7-4 可知, 在临界阻尼状态 RLC 串联电路的动态过渡过程与过阻尼状态非常相似, 即电感元件与电容元件存在有限的能量交互现象, 仍不会出现振荡现象。此时的过渡点 $t_m = -\frac{1}{s} = 2 \frac{L}{R}$ 。注意, 电阻元件 R 取值处于临界值, 若电阻值稍小, 则电路将进入欠阻尼状态, 反之, 则进入过阻尼状态。

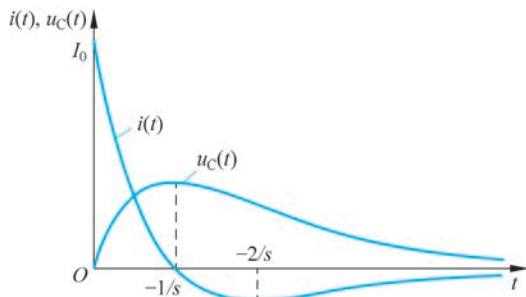


图 5-7-5 RLC 串联电路临界阻尼状态的零输入响应曲线

3) 欠阻尼状态 $(R < 2\sqrt{\frac{L}{C}})$

此状态下, 特征根 $s_{1,2} = \alpha \pm j\omega_d$ 为互共轭的复数, 且实部为负数。其中, $\alpha = -\frac{R}{2L}$,

$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ 。式(5-7-5)的通解可以写成如下形式:

$$u_C(t) = [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] e^{\alpha t} \quad (5-7-10)$$

根据初始条件 $u_C(0_+) = 0, i(0_+) = I_0$, 得

$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 = 0 \\ i(0_+) = C \frac{du_C(t)}{dt} \Big|_{t=0_+} = CA_1\alpha + CA_2\omega_d = I_0 \end{cases}$$

解得

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{I_0}{C\omega_d}$$

所以,零输入响应电压

$$u_C(t) = \frac{I_0}{C\omega_d} e^{\alpha t} \sin(\omega_d t) \varepsilon(t)$$

零输入响应电流

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \left[\frac{\alpha I_0}{\omega_d} e^{\alpha t} \sin(\omega_d t) + I_0 e^{\alpha t} \cos(\omega_d t) \right] \varepsilon(t)$$

图 5-7-6 给出了欠阻尼状态时零输入响应电压 $u_C(t)$ 与零输入响应电流 $i(t)$ 的典型曲线。由图可知,在欠阻尼状态下, $u_C(t)$ 与 $i(t)$ 出现周期振荡现象,其振荡角频率为 ω_d , 振荡周期为 $2\pi/\omega_d$, 但二者的包络(幅度)呈指数下降。这表明,在欠阻尼状态下,电容元件与电感元件周期性地交换能量,但由于电阻元件不断消耗能量,二者的储能随时间推移而不断衰减直至全部被电阻元件消耗。出现振荡现象的原因在于电阻元件的阻值较小,耗能较慢。

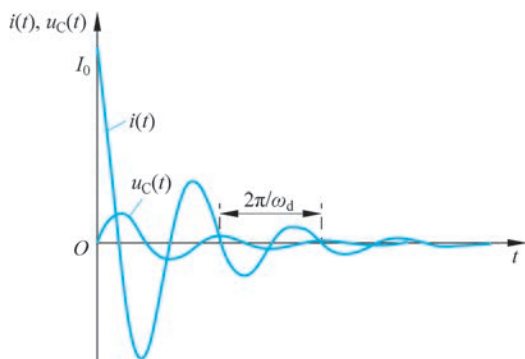


图 5-7-6 RLC 串联电路欠阻尼状态的零输入响应曲线

欠阻尼状态的一种极端情况是 $R=0$, 即如图 5-7-3 所示电路中的电阻元件为短路元件。此时,RLC 串联电路简化为仅包含电容 C 和电感 L 的串联电路,相应参数为

$$\alpha = -\frac{R}{2L} = 0, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

容易求得零输入响应如下:

零输入响应电压

$$u_C(t) = \frac{I_0}{C\omega_d} \sin(\omega_d t) \varepsilon(t) = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_d t) \varepsilon(t)$$

零输入响应电流

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = I_0 \cos(\omega_d t) \epsilon(t)$$

可见,在这种极端情况下电路的零输入响应为等幅简谐波。其物理实质为,电容元件 C 与电感元件 L 周期性地交换能量,交换周期 $T_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi\sqrt{LC}$ 。由于没有耗能元件,电路的储能不会衰减,在任意瞬时,电容元件 C 与电感元件 L 的储能之和为原始储能 $\frac{1}{2}LI_0^2$,读者可自行验证。

2. RLC 并联电路的零输入响应

令如图 5-7-2(b)所示电路中的电流源 $i_S(t) = 0$,此时 RLC 并联电路可简化为如图 5-7-7 所示电路。对应的输入-输出方程式(5-7-4)简化为齐次微分方程:

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0 \quad (5-7-11)$$

根据初始条件 $i_L(0_+)$ 及 $i'_L(0_+) = \frac{1}{L}u(0_+)$,求解式(5-7-11)即可确定 RLC 并联电路的零输入响应 $i_L(t)$,进而可求出 $u(t)$ 、 $i_R(t)$ 和 $i_C(t)$ 。

齐次微分方程式(5-7-11)的特征方程为

$$LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1 = 0 \quad (5-7-12)$$

解得其两个特征根为

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2CR} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2CR}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5-7-13)$$

由式(5-7-13)可见,特征根的取值依赖于 G (即 $1/R$)、 L 、 C 的取值,可分为三种情况:

(1) 当 $\left(\frac{G}{2C}\right)^2 > \frac{1}{LC}$, 即 $G > 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ 时,特征根 s_1, s_2 互不相等,且均为负实数。

(2) 当 $\left(\frac{G}{2C}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, 即 $G = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ 时,特征根 s_1, s_2 为重根,且为负实数,即 $s_1 = s_2 = s = -\frac{G}{2C}$ 。

(3) 当 $\left(\frac{G}{2C}\right)^2 < \frac{1}{LC}$, 即 $G < 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ 时,特征根 s_1, s_2 为互共轭的复数,且实部为负数,即 $s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \alpha \pm j\omega_d$ 。

定义 $G_d = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ 为 RLC 并联电路的阻尼电导,则 $G > G_d$ 时(情况 1),称为过阻尼状态; $G < G_d$ 时(情况 3),称为欠阻尼状态; $G = G_d$ 时(情况 2),称为临界阻尼状态。

由上述分析可见, RLC 并联电路与 RLC 串联电路有着强烈的对偶性。借助这种对

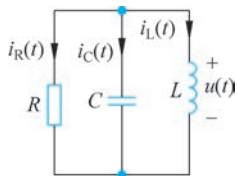


图 5-7-7 RLC 并联电路的零输入响应

偶性,假设 $i_L(0_+) = 0, u(0_+) = U_0$, 即电容元件具有原始储能, 直接给出三种情形的零输入响应。具体分析过程读者可自行完成。

1) 过阻尼状态 $(G > 2\sqrt{\frac{C}{L}})$

零输入响应电流

$$i_L(t) = \frac{U_0}{Ls_1 - Ls_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \epsilon(t)$$

零输入响应电压

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{U_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \epsilon(t)$$

零输入响应电流 $i_L(t)$ 与零输入响应电压 $u(t)$ 的曲线如图 5-7-8 所示。

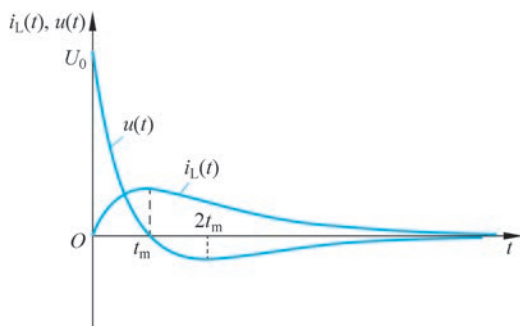


图 5-7-8 RLC 并联电路过阻尼状态的零输入响应曲线

2) 临界阻尼状态 $(G = 2\sqrt{\frac{C}{L}})$

零输入响应电流

$$i_L(t) = \frac{U_0}{L} t e^{st} \epsilon(t)$$

零输入响应电压

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = (U_0 e^{st} + U_0 s t e^{st}) \epsilon(t)$$

零输入响应电流 $i_L(t)$ 与零输入响应电压 $u(t)$ 的曲线如图 5-7-9 所示。

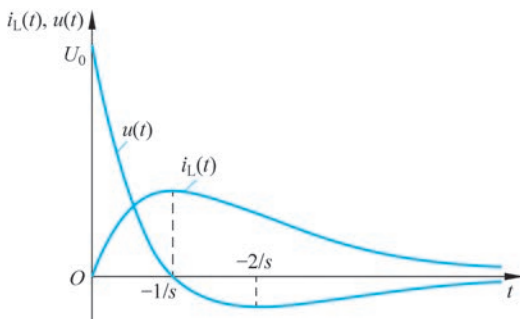


图 5-7-9 RLC 并联电路临界阻尼状态的零输入响应曲线

3) 欠阻尼状态 $(G < 2\sqrt{\frac{C}{L}})$

零输入响应电流

$$i_L(t) = \frac{U_0}{L\omega_d} e^{\alpha t} \sin(\omega_d t) \varepsilon(t)$$

零输入响应电压

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \left[\frac{\alpha U_0}{\omega_d} e^{\alpha t} \sin(\omega_d t) + U_0 e^{\alpha t} \cos(\omega_d t) \right] \varepsilon(t)$$

零输入响应电流 $i_L(t)$ 与零输入响应电压 $u(t)$ 的曲线如图 5-7-10 所示。

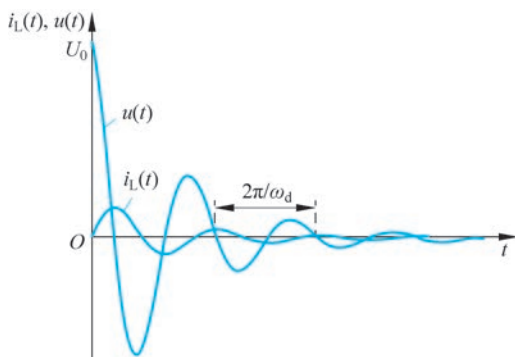


图 5-7-10 RLC 并联电路欠阻尼状态的零输入响应曲线

与 RLC 串联电路类似, 并联电路在欠阻尼状态下的极端情况为 $G=0$ 或 $R=\infty$, 即如图 5-7-7 所示电路中的电阻元件为开路元件。此时, RLC 并联电路简化为仅包含电容 C 电感 L 的并联电路, 相应参数为 $\alpha = -\frac{G}{2C} = 0$, $\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ 。容易求得零输入响应如下:

零输入响应电流

$$i_L(t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_d t) \varepsilon(t)$$

零输入响应电压

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = U_0 \cos(\omega_d t) \varepsilon(t)$$

可见, 在这种极端情况下电路的零输入响应也为等幅简谐波。其物理实质为, 电容元件 C 与电感元件 L 周期性地交换能量, 交换周期 $T_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi\sqrt{LC}$ 。由于没有耗能元件, 电路的储能不会衰减, 在任意瞬时, 电容元件 C 与电感元件 L 的储能之和为原始储能 $\frac{1}{2}CU_0^2$, 读者可自行验证。

5.7.3 二阶电路的冲激响应

5.7.2 节分析了 RLC 串联电路和 RLC 并联电路的零输入响应, 说明了二阶电路中的动态元件之间存在能量交互的过程, 其动态过渡过程的变化规律与元件参数紧密相

关。在分析二阶电路全响应时,还必须分析电路在激励源作用下的零状态响应^①。若求出电路的单位冲激响应,则可以了解电路基本属性,同时可以利用冲激响应方便地求出电路对任意激励信号的零状态响应。因此,本节内容主要分析 RLC 串联电路与 RLC 并联电路的冲激响应。

1. RLC 串联电路的冲激响应

如图 5-7-11(a)所示 RLC 串联电路,电压源为单位冲激函数 $\delta(t)$ 。在 0_- 时刻,电容 C 的端电压 $u_C(0_-)=0$,回路电流 $i(0_-)=0$,即电容 C 与电感 L 均处于零状态,无原始储能。下面分析电路的响应电压 $u_C(t)$ 和响应电流 $i(t)$ 。

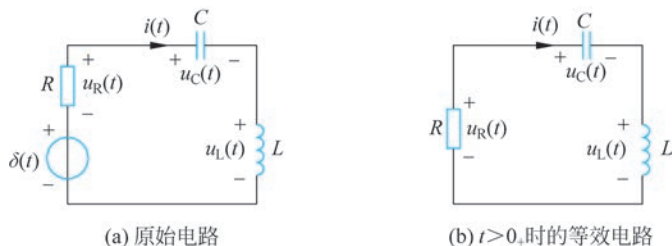


图 5-7-11 RLC 串联电路的冲激响应

由于 0_- 时刻,电容 C 的端电压 $u_C(0_-)=0$,而回路电流 $i(0_-)=0$,电容 C 处于短路状态,电感 L 处于开路状态。因此,冲激电压 $\delta(t)$ 全部施加于电感 L 端,致使电感电流产生突变。 0_+ 时刻,回路电流可计算如下:

$$i(0_+) = i(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{L} \quad (5-7-14)$$

可见,在冲激电压源的作用下电感元件瞬间获得初始能量,能量为 $\frac{1}{2} Li^2(0_+) = \frac{1}{2L}$ 。由于回路电流为有限值,电容在 0_+ 时刻的电压仍为 0,即 $u_C(0_+)=0$ 。

当 $t > 0_+$ 时,冲激电压源失去作用,相当于短路,电路可等效为图 5-7-11(b)。因此,电感元件将通过电阻 R 、电容 C 释放能量,进入一个动态的过渡过程。该过渡过程与 5.2.7 节介绍的 RLC 串联电路的零输入响应过程完全一致,根据 R 、 L 、 C 参数配置同样分为过阻尼、临界阻尼和欠阻尼三种情况。所以,此处直接给出三种情况下的响应信号如下:

1) 过阻尼状态 $(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}})$

零输入响应电压

$$u_C(t) = \frac{1}{L(Cs_1 - Cs_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \epsilon(t)$$

零输入响应电流

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{L(s_1 - s_2)} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \epsilon(t)$$

^① RLC 并联电路的零状态响应(阶跃响应)的 Multisim 仿真实例参见附录 A 例 2-6。

2) 临界阻尼状态 $(R=2\sqrt{\frac{L}{C}})$

零输入响应电压

$$u_C(t) = \frac{1}{LC} t e^{st} \epsilon(t)$$

零输入响应电流

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{L} (e^{st} + st e^{st}) \epsilon(t)$$

3) 欠阻尼状态 $(R < 2\sqrt{\frac{L}{C}})$

零输入响应电压

$$u_C(t) = \frac{1}{LC\omega_d} e^{at} \sin(\omega_d t) \epsilon(t)$$

零输入响应电流

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \left[\frac{\alpha}{L\omega_d} e^{at} \sin(\omega_d t) + \frac{1}{L} e^{at} \cos(\omega_d t) \right] \epsilon(t)$$

2. RLC 并联电路的冲激响应

如图 5-7-12(a) 所示为 RLC 并联电路, 电流源为单位冲激函数 $\delta(t)$ 。在 0_- 时刻, 电容 C 的端电压 $u(0_-) = 0$, 电感电流 $i_L(0_-) = 0$, 即电容 C 与电感 L 均处于零状态, 无原始储能。下面分析电路的响应电流 $i_L(t)$ 和响应电压 $u(t)$ 。

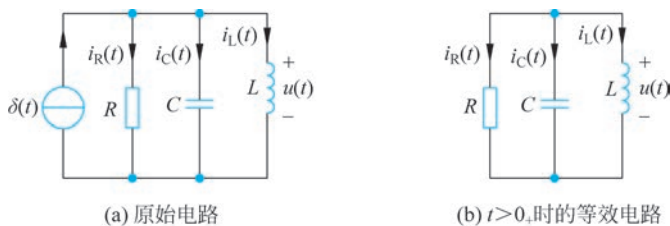


图 5-7-12 RLC 并联电路的冲激响应

由于 0_- 时刻, 电容 C 的端电压 $u(0_-) = 0$, 而电感电流 $i_L(0_-) = 0$, 电容 C 处于短路状态, 电感 L 处于开路状态。因此, 冲激电流 $\delta(t)$ 全部通过电容 C 支路, 致使电容电压产生突变。 0_+ 时刻, 电容端电压可计算如下:

$$u(0_+) = u(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{C} \quad (5-7-15)$$

可见, 在冲激电流源的作用下电容元件瞬间获得初始能量, 能量为 $\frac{1}{2} C u^2(0_+) = \frac{1}{2C}$ 。由于电容端电压取有限值, 电感电流在 0_+ 时刻仍为 0, 即 $i_L(0_+) = 0$ 。

当 $t > 0_+$ 时, 冲激电流源失去作用, 相当于开路, 电路可等效为图 5-7-12(b)。因此, 电容元件将通过电阻 R 、电感 L 释放能量, 进入一个动态的过渡过程。该过渡过程与 5.7.2 节介绍的 RLC 并联电路的零输入响应过程完全一致, 根据 R 、 L 、 C 参数配置同样

分为过阻尼、临界阻尼和欠阻尼三种情况。所以,此处直接给出三种情况下的响应信号如下:

$$1) \text{ 过阻尼状态 } \left(G = \frac{1}{R} > 2\sqrt{\frac{C}{L}} \right)$$

零输入响应电流

$$i_L(t) = \frac{1}{C(Ls_1 - Ls_2)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})\epsilon(t)$$

零输入响应电压

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{C(s_1 - s_2)}(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})\epsilon(t)$$

$$2) \text{ 临界阻尼状态 } \left(G = \frac{1}{R} = 2\sqrt{\frac{C}{L}} \right)$$

零输入响应电流

$$i_L(t) = \frac{1}{LC} t e^{st} \epsilon(t)$$

零输入响应电压

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{C}(e^{st} + st e^{st})\epsilon(t)$$

$$3) \text{ 欠阻尼状态 } \left(G = \frac{1}{R} < 2\sqrt{\frac{C}{L}} \right)$$

零输入响应电流

$$i_L(t) = \frac{1}{LC\omega_d} e^{at} \sin(\omega_d t) \epsilon(t)$$

零输入响应电压

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \left[\frac{\alpha}{C\omega_d} e^{at} \sin(\omega_d t) + \frac{1}{C} e^{at} \cos(\omega_d t) \right] \epsilon(t)$$

【思考与练习】

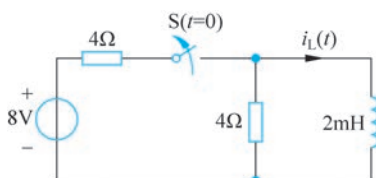
5-7-1 结合电路元件之间的能量交互过程,对比分析二阶电路零输入响应与一阶电路零输入响应的异同。

5-7-2 将图 5-7-11 与图 5-7-12 二阶电路中激励信号换为单位阶跃信号,求解对应的零状态响应信号。

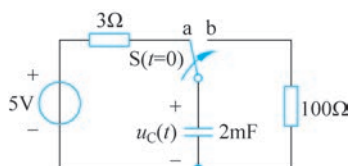
习题

5-1 如题图 5-1 所示电路,开关已经闭合很久, $t=0$ 时断开开关,求 $t>0$ 时的电感电流 $i_L(t)$ 。

5-2 如题图 5-2 所示电路,开关接在 a 点已经很久, $t=0$ 时开关接至 b 点,求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。



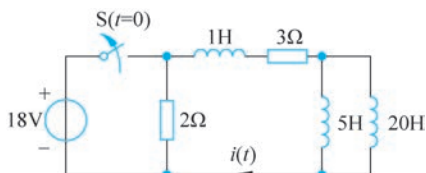
题图 5-1



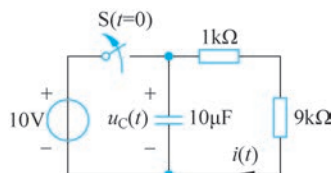
题图 5-2

5-3 如题图 5-3 所示电路,开关已经闭合很久, $t=0$ 时断开开关,求 $t>0$ 时的电流 $i(t)$ 。

5-4 如题图 5-4 所示电路,开关已经闭合很久, $t=0$ 时断开开关,求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 和电流 $i(t)$ 。



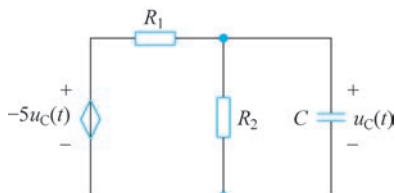
题图 5-3



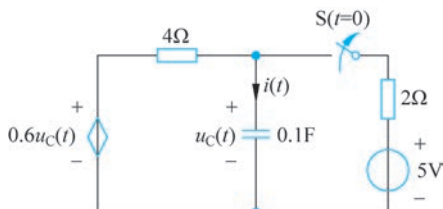
题图 5-4

5-5 求如题图 5-5 所示电路从电容端口向左看的等效电阻,进而求电路的零输入响应 $u_C(t)$ 。已知 $R_1=200\Omega$, $R_2=300\Omega$, $C=50\mu\text{F}$, $u_C(0_-)=100\text{V}$ 。

5-6 如题图 5-6 所示电路,在换路前已工作了很长时间,求零输入响应电流 $i(t)$ 。



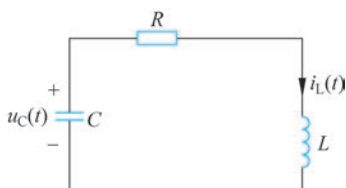
题图 5-5



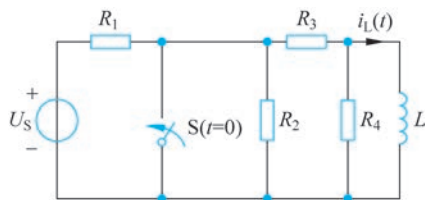
题图 5-6

5-7 如题图 5-7 所示电路,已知 $i_L(0_+)=2\text{A}$, $u_C(0_+)=20\text{V}$, $R=9\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=0.05\text{F}$,求:(1)零输入响应电压 $u_C(t)$; (2)零输入响应电流 $i_L(t)$ 。

5-8 如题图 5-8 所示电路,已知 $R_1=10\Omega$, $R_2=10\Omega$, $L=1\text{H}$, $R_3=10\Omega$, $R_4=10\Omega$, $U_S=15\text{V}$,设换路前电路已工作了很长时间,求零输入响应电流 $i_L(t)$ 。



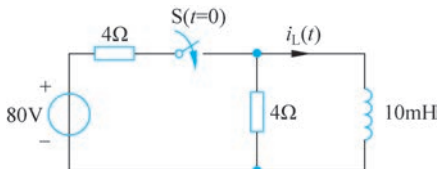
题图 5-7



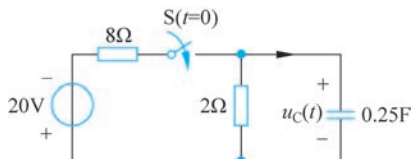
题图 5-8

5-9 如题图 5-9 所示电路,开关已经断开很久, $t=0$ 时闭合开关,求 $t>0$ 时的电感电流 $i_L(t)$ 。

5-10 如题图 5-10 所示电路,开关已经断开很久, $t=0$ 时闭合开关,求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。



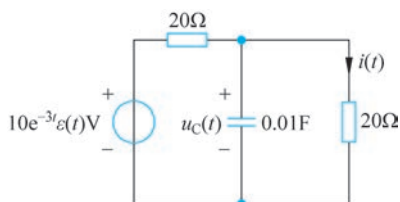
题图 5-9



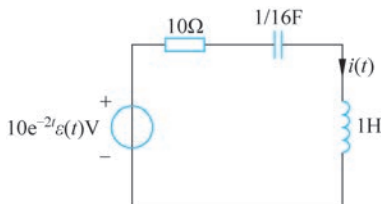
题图 5-10

5-11 求如题图 5-11 所示电路的零状态响应电压 $u_C(t)$ 和电流 $i(t)$ 。

5-12 求如题图 5-12 所示电路的零状态响应电流 $i(t)$ 。



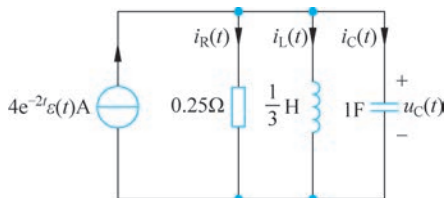
题图 5-11



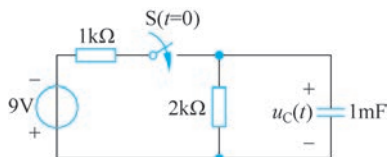
题图 5-12

5-13 求如题图 5-13 所示电路的零状态响应电压 $u_C(t)$ 。

5-14 如题图 5-14 所示电路,已知 $u_C(0_-)=12\text{V}$, $t=0$ 闭合开关,求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。



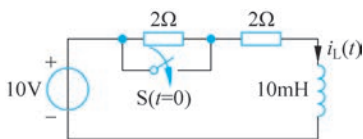
题图 5-13



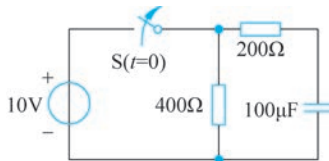
题图 5-14

5-15 如题图 5-15 所示电路,开关切换前电路已经稳定, $t=0$ 时闭合开关,求 $t=5\text{ms}$ 时的电感电流 $i_L(t)$ 。

5-16 如题图 5-16 所示电路,换路前电路已工作了很长时间,求电容上电荷量的初始值以及电容上电荷量在 $t=0.02\text{s}$ 时的值。



题图 5-15

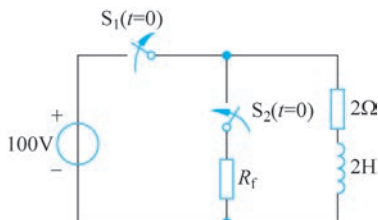


题图 5-16

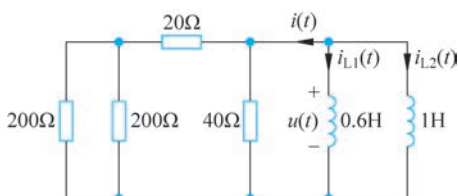
5-17 如题图 5-17 所示电路,换路前电路已工作了很长时间,开关 S_1 和 S_2 同时开、闭,以切断电源并接入放电电阻 R_f ,试选择 R_f 的取值,以便同时满足下列要求:

- (1) 放电电阻端电压的初始值不超过 500V;
- (2) 放电过程在 1s 内基本结束。

5-18 如题图 5-18 所示电路,已知 $i_{L1}(0_-) = 20\text{A}$, $i_{L2}(0_-) = 5\text{A}$,求: (1) $i(t)$; (2) $u(t)$; (3) $i_{L1}(t)$, $i_{L2}(t)$; (4) 各电阻从 $t=0$ 到 $t \rightarrow \infty$ 时所消耗的能量; (5) $t \rightarrow \infty$ 时电感中的能量。



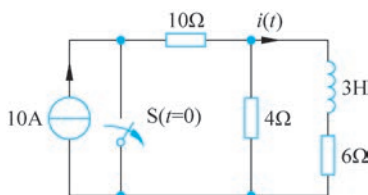
题图 5-17



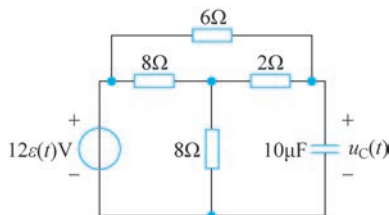
题图 5-18

5-19 求如题图 5-19 所示电路换路后的零状态响应电流 $i(t)$ 。

5-20 将如题图 5-20 所示电路中电容端口左方的部分电路转换成戴维南模型,然后求解电容电压的零状态响应电压 $u_C(t)$ 。



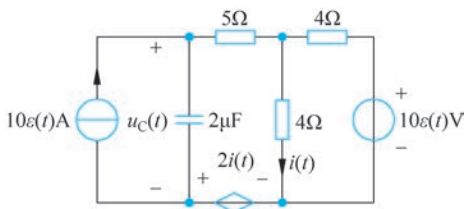
题图 5-19



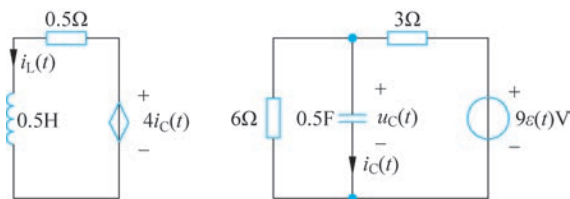
题图 5-20

5-21 求如题图 5-21 所示电路的零状态响应电压 $u_C(t)$ 。

5-22 求如题图 5-22 所示电路的零状态响应电流 $i_L(t)$ 和电压 $u_C(t)$; 将受控源的控制变量 $i_C(t)$ 改为电容电压 $u_C(t)$,重新求解 $i_L(t)$ 。



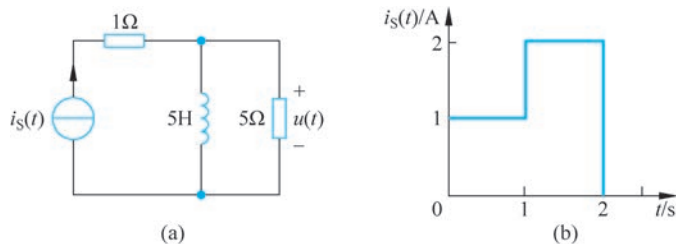
题图 5-21



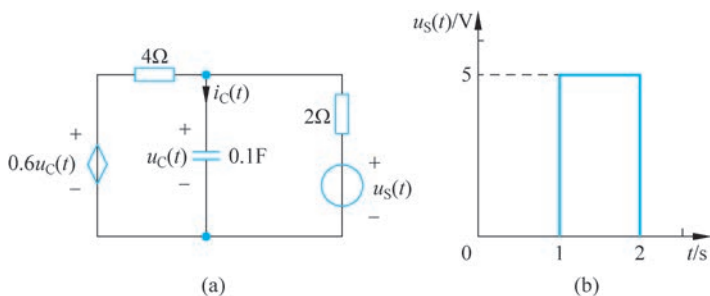
题图 5-22

5-23 如题图 5-23(a)所示电路,电流源电流 $i_S(t)$ 的波形如题图 5-23(b)所示,求零状态响应电压 $u(t)$,并画出它的曲线。

5-24 求如题图 5-24(a)所示电路在下列两种情况下的电容电流 $i_C(t)$: (1) $u_C(0_-) = 6\text{V}$, $u_S(t) = 0\text{V}$; (2) $u_C(0_-) = 0\text{V}$, $u_S(t)$ 如题图 5-24(b)所示。



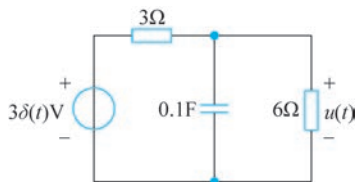
题图 5-23



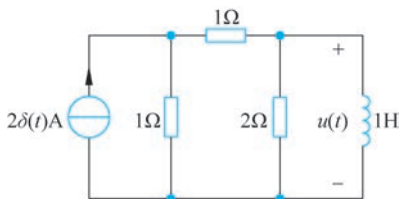
题图 5-24

5-25 求如题图 5-25 所示电路的零状态响应电压 $u(t)$ 。

5-26 求如题图 5-26 所示电路的零状态响应电压 $u(t)$, 并画出它的曲线。



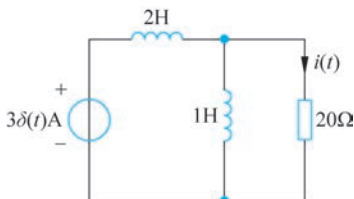
题图 5-25



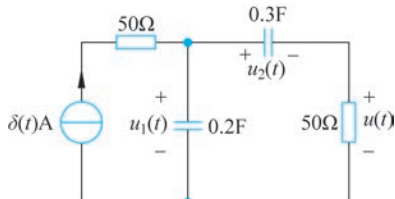
题图 5-26

5-27 求如题图 5-27 所示电路的零状态响应电流 $i(t)$ 。

5-28 求如题图 5-28 所示电路的冲激响应电压 $u(t)$ 、电压 $u_1(t)$ 和电压 $u_2(t)$ 。



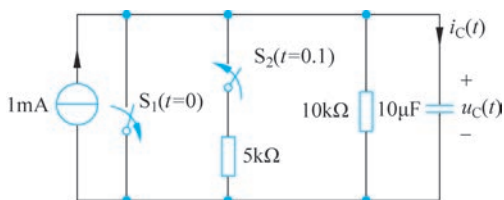
题图 5-27



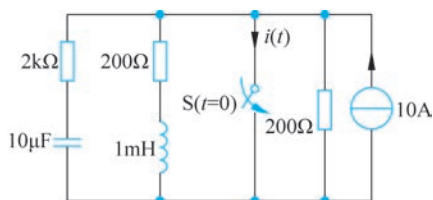
题图 5-28

5-29 如题图 5-29 所示电路, 在 $t=0$ 时先断开开关 S_1 使电容充电, 到 $t=0.1\text{s}$ 时再闭合开关 S_2 , 求响应 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$, 并画出它们的曲线。

5-30 求如题图 5-30 所示电路中的电流 $i(t)$ 。设换路前电路处于稳定状态。



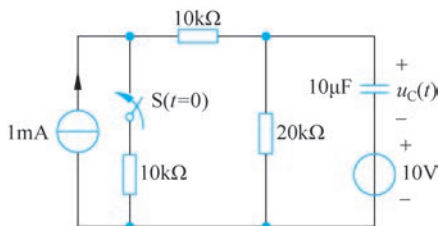
题图 5-29



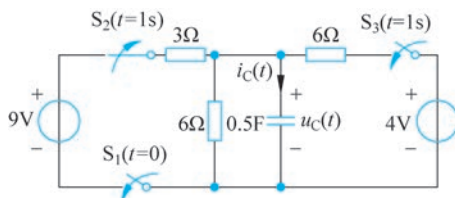
题图 5-30

5-31 如题图 5-31 所示电路,换路前已处于稳定状态,求开关闭合后的全响应 $u_C(t)$,并画出它的曲线。

5-32 如题图 5-32 所示电路将进行两次换路,试用三要素法求解电路中电容的电压响应 $u_C(t)$ 和电流响应 $i_C(t)$,并绘出 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$ 的曲线。



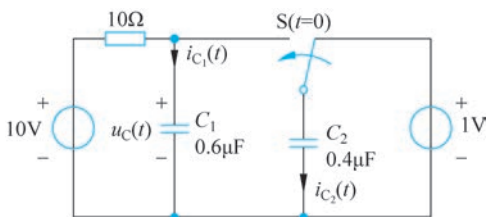
题图 5-31



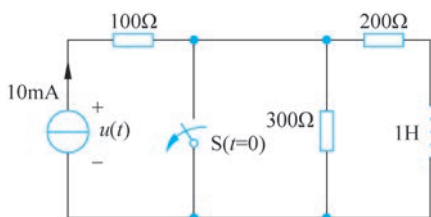
题图 5-32

5-33 试用三要素法求解如题图 5-33 所示电路的电容电压 $u_C(t)$ (全响应),并根据两个电容电压的取值求解电容电流 $i_{C_1}(t)$ 和 $i_{C_2}(t)$ 。设换路前电路处于稳定状态。

5-34 如题图 5-34 所示电路,换路前已处于稳定状态, $t=0$ 时断开开关 S,求电压 $u(t)$ 。



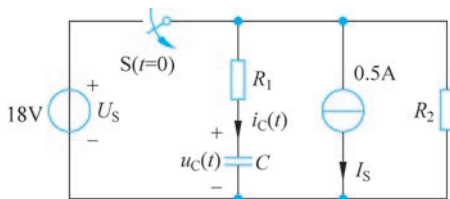
题图 5-33



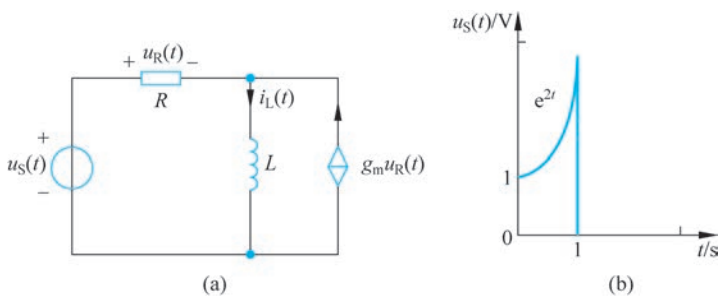
题图 5-34

5-35 如题图 5-35 所示电路,换路前已处于稳定状态,在 $t=0$ 时,将开关 S 断开,已知 $R_1=8\Omega$, $R_2=12\Omega$, $C=50\mu\text{F}$,用三要素法求换路后的 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$ 。

5-36 如题图 5-36(a)所示含有受控源的电路,已知 $R=6\Omega$, $L=0.5\text{H}$, $g_m=0.25\text{S}$,电压源的电压 $u_s(t)$ 为如题图 5-36(b)所示的指数脉冲,电感电流的初始值为零,求电感电流 $i_L(t)$ 。



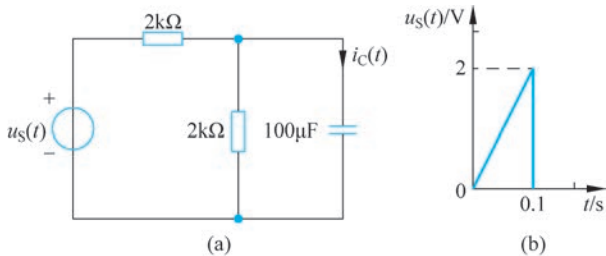
题图 5-35



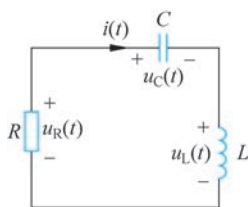
题图 5-36

5-37 如题图 5-37(a)所示电路,电压源电压 $u_S(t)$ 的波形如题图 5-37(b)所示,求零状态响应电流 $i_C(t)$ 。

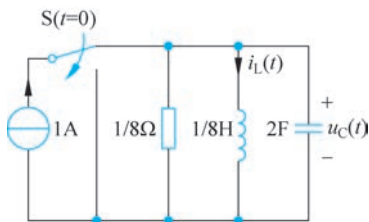
5-38 如题图 5-38 所示电路,已知 $R=1\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$, $i(0_+)=4\text{A}$, $u_C(0_+)=4\text{V}$,求 $i(t)$ 、 $u_C(t)$ 、 $u_R(t)$ 和 $u_L(t)$ 。



题图 5-37



题图 5-38

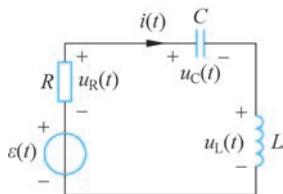


题图 5-39

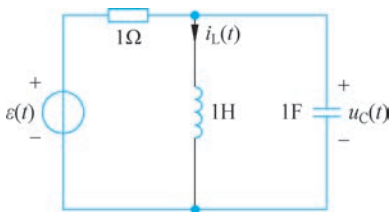
5-39 如题图 5-39 所示电路,在开关切换前已工作了很长时间,求开关切换后的电感电流 $i_L(t)$ 和电容电压 $u_C(t)$ 。

5-40 如题图 5-40 所示电路,已知 $R=1\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$, $i(0_+)=2\text{A}$, $u_C(0_+)=2\text{V}$,求电路的全响应 $i(t)$ 、 $u_C(t)$ 。

5-41 求如题图 5-41 所示电路的阶跃响应 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 。



题图 5-40



题图 5-41