

第3章

随机过程的功率谱密度

在电路与信号分析理论中,傅里叶变换是一种非常有用的工具。应用傅里叶变换可以确立时域和频域的关系。由于确定信号在时域上的卷积积分在频域中是简单的乘积运算,这样,在许多情况下可以使问题的分析大大简化。那么,在研究随机过程中,傅里叶分析方法是否仍然适用呢?回答是肯定的。不过,由于随机过程的特殊性,在应用傅里叶变换时须对其做某些限制。本章将介绍平稳随机过程的傅里叶分析方法。

3.1 功率谱密度函数

首先回顾一下电路与信号分析理论中确定时间函数的频谱和能量谱密度等概念,然后引入随机过程的功率谱密度函数。

3.1.1 确知信号的频谱和能量谱密度

在电路与信号分析理论中,确知信号 $x(t)$ 的能量定义为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad (3.1.1)$$

它表示信号 $x(t)$ 在单位电阻上消耗的能量。

确知信号 $x(t)$ 的功率定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \quad (3.1.2)$$

它表示信号 $x(t)$ 在单位电阻上消耗的功率。

若一个确知信号 $x(t)$, 在 $-\infty < t < +\infty$ 满足狄里赫利条件,且绝对可积,即满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.1.3)$$

那么 $x(t)$ 的傅里叶变换存在,有

$$F_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.4)$$

$F_x(j\omega)$ 也称为确知信号 $x(t)$ 的频谱。

根据帕塞瓦尔(Parseval)定理,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.1.5)$$

式中, $|F_x(j\omega)|^2 = F_x(j\omega)F_x(-j\omega)$ 。

式(3.1.5)左端表示信号 $x(t)$ 的总能量。因此,式(3.1.5)右端积分中的被积函数 $|F_x(j\omega)|^2$ 相应地称为 $x(t)$ 的能量谱密度,它表示信号能量沿频率轴的分布情况。这种确知信号称为总能量有限的信号。

3.1.2 随机过程的功率谱密度

对于随机过程来说,由于它的持续时间为无限长,其总能量是无限的。因而随机过

程的任意一个样本函数不满足绝对可积条件,其傅里叶变换不存在。

那么,随机过程如何运用傅里叶变换呢?下面讨论这个问题。

一个随机过程的样本函数 $x(t)$,尽管它的总能量是有限的,但它的平均功率却是有限的。因此,对于这类函数,研究它的能量谱没有意义,研究其平均功率谱才有意义。

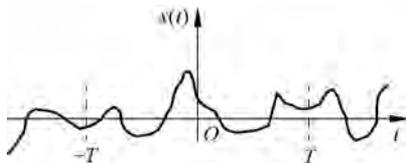


图 3.1 $X(t)$ 的样本函数 $x(t)$ 及其截短函数 $x_T(t)$

首先把随机过程的一个样本函数 $x(t)$ 任意截取一段,长度为 $2T$ 并记为 $x_T(t)$ 。称 $x_T(t)$ 为 $x(t)$ 的截短函数,如图 3.1 所示。于是有

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & (t \leq |T|) \\ 0 & (t > |T|) \end{cases} \quad (3.1.6)$$

对于持续时间有限的 $x_T(t)$ 而言,傅里叶变换是存在的,为

$$F_x(j\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.7)$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(j\omega, T) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.1.8)$$

根据帕塞瓦尔定理,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(j\omega, T)|^2 d\omega \quad (3.1.9)$$

式(3.1.9)两端除 $2T$,得

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F_x(j\omega, T)|^2}{2T} d\omega \quad (3.1.10)$$

式(3.1.10)的左端是样本函数 $x(t)$ 在时间区间 $(-T, T)$ 内的平均功率,在 $T \rightarrow \infty$ 时,它不能代表整个随机过程的平均功率。而且,由于 $x(t)$ 是随机过程的任意一个样本函数,它取决于试验结果,不同的样本函数在时间区间 $(-T, T)$ 内的平均功率是不同的。因此,式(3.1.10)左端的平均功率具有随机性,其右端的被积函数也具有随机性,它们都是试验结果的函数。由此可见,为了求出随机过程 $X(t)$ 的平均功率,还须将式(3.1.10)扩展为对所有样本(所有试验结果)取统计平均,得

$$E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X^2(t) dt \right] = E \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F_X(j\omega, T)|^2}{2T} d\omega \right] \quad (3.1.11)$$

式(3.1.11)两端再取极限,得

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E[X^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|F_X(j\omega, T)|^2]}{2T} d\omega \quad (3.1.12)$$

式(3.1.12)的左端即是随机过程 $X(t)$ 的平均功率。因此,式(3.1.12)右边的被积函数表示随机过程 $X(t)$ 在单位频带内在单位电阻上消耗的平均功率,即随机过程的平均功率沿频率轴的分布,称为随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度函数,简称为功率谱密度,记为

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|F_X(j\omega, T)|^2]}{2T} \quad (3.1.13)$$

功率谱密度 $S_X(\omega)$ 是从频率角度描述随机过程 $X(t)$ 的统计特性的最主要的数字特征。

因此,式(3.1.12)可以表示为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E[X^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (3.1.14)$$

当随机过程 $X(t)$ 为宽平稳时,此时 $X(t)$ 的均方值为常数,则有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E[X^2(t)] dt = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (3.1.15)$$

式(3.1.15)说明:平稳随机过程的平均功率等于该过程的均方值,它可以由随机过程的功率谱密度在全频域上的积分得到。

3.2 平稳随机过程功率谱密度的性质

功率谱密度函数是平稳随机过程的频率域的重要统计参量,它具有如下重要性质。

(1) 功率谱密度为非负函数。即

$$S_X(\omega) \geq 0 \quad (3.2.1)$$

根据功率谱密度的定义式(3.1.13),有

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|F_X(j\omega, T)|^2]}{2T}$$

因为 $|F_X(j\omega, T)|^2 \geq 0$, 所以 $S_X(\omega) \geq 0$ 。

(2) 功率谱密度为 ω 的实函数。

同样,根据式(3.1.13)可知, $|F_X(j\omega, T)|^2$ 是 ω 的实函数,所以 $S_X(\omega)$ 必为 ω 的实函数。

(3) 功率谱密度为 ω 的偶函数。即

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega) \quad (3.2.2)$$

这也可由功率谱密度函数的定义式直接得出。

(4) 功率谱密度为可积函数。即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega < \infty \quad (3.2.3)$$

由式(3.1.15),有

$$E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (3.2.4)$$

即功率谱密度函数的积分等于随机过程的均方值。由于平稳随机过程的均方值是有限的,故 $S_X(\omega)$ 可积。

3.3 功率谱密度与自相关函数之间的关系

通过上面的讨论可以看出,自相关函数是从时间角度描述随机过程统计特性的最主要的数字特征,而功率谱密度函数则是从频率角度描述随机过程的统计特性的,它们之

间是否有联系呢? 维纳-辛钦定理作出了回答。

维纳-辛钦定理: 平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度函数是傅里叶变换对。即

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.3.1)$$

$$B_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.3.2)$$

它揭示了从时间角度描述随机过程 $X(t)$ 的统计规律和从频率角度描述 $X(t)$ 的统计规律之间的联系。

证明: 由功率谱密度的定义式, 有

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|F_X(j\omega, T)|^2]}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[F_X(-j\omega, T)F_X(j\omega, T)]}{2T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \int_{-T}^T X(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right] \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

将式(3.3.3)改写为重积分, 并变更积分和取统计平均的运算次序, 得

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T dt_2 \int_{-T}^T X(t_1) X(t_2) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt_2 \int_{-T}^T E[X(t_1) X(t_2)] e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

式(3.3.4)的被积函数中的统计平均值即为随机过程截取部分的自相关函数, 它也定义在区间 $(-T, T)$ 中。即

$$\begin{cases} E[X(t_1) X(t_2)] = B_X(t_1, t_2) & (|t_1|, |t_2| < T) \\ E[X(t_1) X(t_2)] = 0 & (\text{其他 } t_1, t_2 \text{ 值}) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

对 t_2 进行积分变量代换, 令 $\tau = t_2 - t_1$, 则 $dt_2 = d\tau$ 。代入式(3.3.4), 适当改变运算次序, 得

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-t_1}^{T+t_1} d\tau \int_{-T}^T E[X(t_1) X(t_1 + \tau)] e^{-j\omega\tau} dt_1 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-t_1}^{T+t_1} \left\{ \int_{-T}^T B_X(t_1, t_1 + \tau) dt_1 \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

令 $t = t_1$, 式(3.3.6)又可以写成

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B_X(t, t + \tau) dt \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{B_X(t, t + \tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

其中,

$$\widetilde{B_X(t, t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B_X(t, t + \tau) dt \quad (3.3.8)$$

表示自相关函数的时间平均。

式(3.3.7)说明, 随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度是此过程的自相关函数时间平均值的

傅里叶变换。这是一般随机过程的自相关函数和功率谱密度函数的关系,也适用于非平稳随机过程。

根据傅里叶变换的唯一性,必有

$$\widetilde{B_X(t, t + \tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.3.9)$$

因此,式(3.3.7)和式(3.3.9)说明:任意随机过程 $X(t)$ 的自相关函数的时间平均值与该随机过程的功率谱密度函数是一对傅里叶变换。

宽平稳随机过程是最常见、最重要的一类随机过程。对于宽平稳随机过程,其自相关函数不随 t 取值不同而变,仅是 τ 的函数,即

$$B_X(t, t + \tau) = B_X(\tau)$$

所以,有

$$\widetilde{B_X(t, t + \tau)} = \widetilde{B_X(\tau)} = B_X(\tau)$$

于是有

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.3.10)$$

$$B_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.3.11)$$

即平稳随机过程的自相关函数与该随机过程的功率谱密度函数是一对傅里叶变换。

维纳-辛钦定理是分析随机信号的一个最重要、最基本的定理,在实际中有着重要的应用价值。

由于随机过程的自相关函数 $B_X(\tau)$ 是 τ 的偶函数,从 $S_X(\omega)$ 的定义也可看出它也是 ω 的偶函数,根据欧拉公式,式(3.3.10)可写为

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) (\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) \cos\omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) \sin\omega\tau d\tau \end{aligned}$$

由于 $B_X(\tau) \cos\omega\tau$ 是 τ 的偶函数, $B_X(\tau) \sin\omega\tau$ 是 τ 的奇函数,因此,有

$$S_X(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} B_X(\tau) \cos\omega\tau d\tau \quad (3.3.12)$$

同理,式(3.3.11)可写为

$$B_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_X(\omega) \cos\omega\tau d\omega \quad (3.3.13)$$

式(3.3.12)和式(3.3.13)是维纳-辛钦定理的另一形式。

根据前面对确知信号的讨论,对照现在的 $S_X(\omega)$ 的定义,可知 $S_X(\omega)$ 是随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度,它是从频率角度描述随机过程统计特性的重要的数字特征。

当 $\tau=0$ 时,式(3.3.10)成为

$$B_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (3.3.14)$$

式(3.3.14)是随机过程 $X(t)$ 的平均功率,那么,式(3.3.14)右边的被积函数 $S_X(\omega)$ 当然

也就是功率谱密度函数了。这又从另一个角度证实了 $S_X(\omega)$ 的物理意义。

根据以上的讨论, $S_X(\omega)$ 应分布在 $-\infty \sim +\infty$ 的频率范围内, 这种对正、负频率都有意义的谱密度称为双边谱密度。

这样一来, 在已知随机过程 $X(t)$ 的功谱密度 $S_X(\omega)$ 后, 它在任何特定频率范围 (ω_1, ω_2) 内消耗在单位电阻上的平均功率可以表示为

$$P_X(\omega_1, \omega_2) = \frac{2}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_X(\omega) d\omega \quad (3.3.15)$$

由于实际上负频率并不存在, 在公式中采用频率区间从负到正, 纯粹只有数学上的意义和为了运算方便。也可以采用只分布在 $\omega \geq 0$ 的频率范围内的功谱密度表示, 记为 $S'_X(\omega)$, 称为单边谱密度, 也称为物理谱密度。单边谱密度 $S'_X(\omega)$ 与双边谱密度 $S_X(\omega)$ 如图 3.2 所示, 其关系为

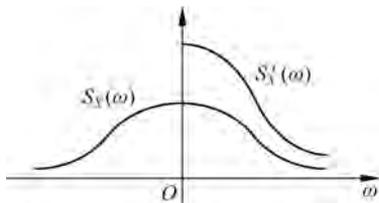


图 3.2 单边谱密度与双边谱密度

$$S'_X(\omega) = \begin{cases} 2S_X(\omega) & (\omega \geq 0) \\ 0 & (\omega < 0) \end{cases} \quad (3.3.16)$$

例 3.1 平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$B_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad (\alpha > 0)$$

求该随机过程的功率谱密度函数。

解: 由维纳-辛钦定理, 有

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{e^{(\alpha-j\omega)\tau}}{\alpha-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(\alpha+j\omega)\tau}}{\alpha+j\omega} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

例 3.2 平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度函数为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$$

求该随机过程的自相关函数和平均功率。

解: 因为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 2)(\omega^2 + 3)} = \frac{-1}{\omega^2 + 2} + \frac{2}{\omega^2 + 3}$$

根据例 3.1 的结果, 可得随机过程的自相关函数为

$$B_X(\tau) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|\tau|} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}|\tau|}$$

所以, 随机过程的平均功率为

$$\overline{X^2(t)} = B_X(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

以上讨论的都是不含有直流成分或周期性成分的随机过程的功率谱密度。而随机过程的任何直流分量和周期性分量, 在频域上都表现为频率轴上某点的零带宽内的有限

平均功率,都在频域的相应位置上产生离散谱线。而且在零带宽上的有限功率等效于无限的功率谱密度。于是当随机过程包含有直流成分时,其功率谱密度在零频率上应是无限的。而在其他频率上是有限的,换言之,该过程的功率谱密度在 $\omega=0$ 处存在一个 δ 函数。同理,若随机过程含有某个周期成分,则其功率谱密度函数将在相应的离散频率点上存在 δ 函数。这样,若借助于 δ 函数,维纳-辛钦定理可推广应用于含有直流或周期性分量的平稳随机过程的情况。

δ 函数的定义为

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \\ \delta(x) = 0, x \neq 0 \end{cases} \quad (3.3.17)$$

对于 δ 函数,有如下的基本性质。

对任意连续函数 $f(x)$,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (3.3.18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (3.3.19)$$

因此,可以写出以下傅里叶变换:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad (3.3.20)$$

即 $\frac{1}{2\pi}$ 的傅里叶变换为 $\delta(\omega)$,则常数 1 的傅里叶变换就是 $2\pi\delta(\omega)$ 。

又有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega t} d\tau = 1 \quad (3.3.21)$$

即 $\delta(\tau)$ 的傅里叶变换是常数 1,则常数 1 的傅里叶反变换就是 $\delta(\tau)$,若用 \leftrightarrow 表示傅里叶变换对,有

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \\ \delta(\tau) &\leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

根据式(2.5.7),当 $\overline{X(t)} \neq 0$ 时,有

$$B_X(\tau) = B_{X_0}(\tau) + \overline{X(t)}^2$$

$B_{X_0}(\tau)$ 是 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 的自协方差,有

$$B_{X_0}(\infty) = \overline{X_0(t)X_0(t+\infty)} = 0$$

它的傅里叶变换显然存在,记为 $S_{X_0}(\omega)$ 。但由于 $B_X(\tau)$ 中有一常数 $\overline{X(t)}^2$ 项,使得 $B_X(\tau)$ 不满足绝对可积条件,它的傅里叶变换只能借助 δ 函数,此时,

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{X_0}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X(t)}^2 e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= S_{X_0}(\omega) + 2\pi \overline{X(t)}^2 \delta(\omega) \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

当平稳随机过程含有周期分量时,该成分就在频域的相应频率上产生 δ 函数。

例 3.3 平稳随机过程的自相关函数为

$$B_X(\tau) = \frac{1}{4}(1 + \cos\omega_0\tau)$$

求它的功率谱密度。

解：根据欧拉公式，可得

$$B_X(\tau) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{e^{-j\omega_0\tau} + e^{j\omega_0\tau}}{2} \right)$$

所以，有

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \frac{1}{4} \left[2\pi\delta(\omega) + \frac{2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} [2\delta(\omega) + \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

若随机过程的功率谱密度函数为常数，则其自相关函数 $B_X(\tau)$ 就是 δ 函数。如

$$S_X(\omega) = n_0 \quad (n_0 \text{ 为常数})$$

$$B_X(\tau) = n_0\delta(\tau)$$

3.4 平稳随机过程的自相关时间和等效功率谱带宽

随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $B_X(\tau)$ 反映了它自身在两个不同时刻的关联程度，而功率谱密度函数 $S_X(\omega)$ 则反映了它的平均功率沿频率轴的分布情况，说明 $S_X(\omega)$ 占有一定的频带。那么具体用什么参数来衡量随机过程 $X(t)$ 的自相关性的强弱和它到底占有多宽的频带呢？下面讨论这两个问题。

3.4.1 自相关时间

图 3.3 表示两个平稳随机过程 $X_1(t)$ 及 $X_2(t)$ 实现的记录，设它们具有相同的数学期望和相同的均方值，即 $\overline{X_1(t)} = \overline{X_2(t)}$, $\overline{X_1^2(t)} = \overline{X_2^2(t)}$ 。

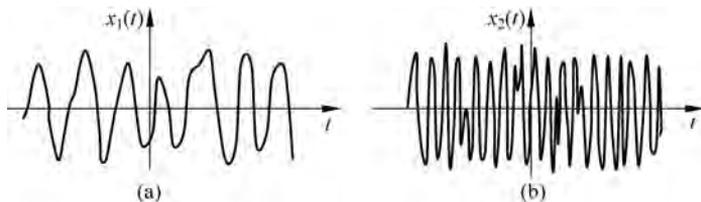


图 3.3 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 的样本函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的曲线

二者有一个显著的区别，那就是二者的起伏频繁程度不同， $X_1(t)$ 起伏频繁程度低，而 $X_2(t)$ 起伏较频繁。这个区别，揭示了二者的自相关性不同，也就是说，二者在后继时间上的取值受先行时间上的取值的波及关系不一样。所谓波及，就是随机过程在先行时

间点上的取值有尾迹(由于系统惯性影响),它波及后继时间点,使得后继时间点上的取值要受先行时间点上取值的影响。这种波及的大小,表现在自相关函数 $B_X(\tau)$ 上,如图 3.4 所示。

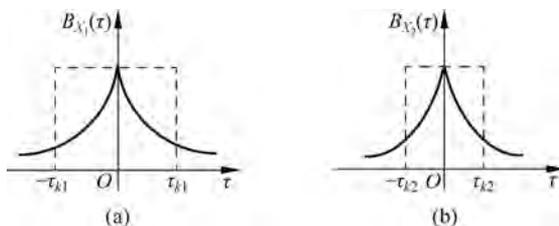


图 3.4 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 的自相关函数

从图 3.4 中看出,不管是 $B_{X_1}(\tau)$ 还是 $B_{X_2}(\tau)$,随着 $|\tau|$ 的增加(正向或负向),相应的 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 的相关性单调下降,但在相同的 τ 值,有 $B_{X_1}(\tau) > B_{X_2}(\tau)$,而在相同的自相关函数值上, $B_{X_1}(\tau)$ 的相应 $|\tau|$ 值大于 $B_{X_2}(\tau)$ 的相应 $|\tau|$ 值,这都是因为 $B_{X_1}(\tau)$ 相对于 $B_{X_2}(\tau)$ 要张得开些,即 $X_1(t)$ 的自相关性强于 $X_2(t)$ 的自相关性。

为了定量地描述随机过程自相关性的强弱,定义随机过程 $X(t)$ 的自相关时间为

$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) d\tau}{2B_X(0)} = \frac{S_X(0)}{2B_X(0)} \quad (3.4.1)$$

自相关时间的概念可用图 3.4 进行说明。图中有一虚线方框,其高为 $B_X(0)$,宽为 $2\tau_k$ 。定义式(3.4.1)规定这个方框的面积等于 $B_X(\tau)$ 曲线下的面积。可以理解,当 $B_X(\tau)$ 张开范围越大,或所谓自相关性越强,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) d\tau$ 也随之增大,因而 τ_k 随之成正比地增大。因此, τ_k 可以用来描述一个随机过程的自相关程度。

从图 3.4 看到, $\tau_{k1} > \tau_{k2}$,因此,可以说 $X_1(t)$ 的自相关性强于 $X_2(t)$ 的自相关性。

3.4.2 等效功率谱带宽

图 3.5 表示 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 的功率谱密度函数。由于 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 有相同的平均功率,因此有

$$B_{X_1}(0) = B_{X_2}(0)$$

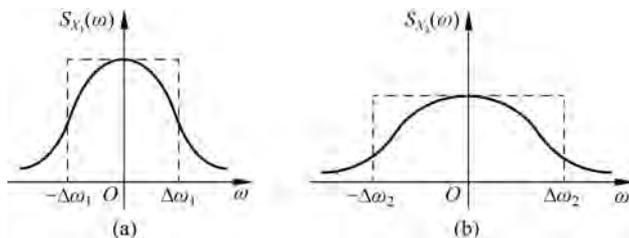


图 3.5 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 的功率谱密度函数

这使得 $S_{X_1}(\omega)$ 和 $S_{X_2}(\omega)$ 与横坐标所围成的面积相等。但是 $S_{X_1}(0) > S_{X_2}(0)$ ($S_X(0)$ 是 $B_X(\tau)$ 曲线与横坐标所围成的面积)。 $S_X(0)$ 较大占带必然较窄, 反之亦然。为了定量描述随机过程所占的宽窄, 定义等效功率谱带宽(简称等效带宽)为

$$\Delta f = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega}{2S_X(0)} = \frac{B_X(0)}{2S_X(0)} \quad (3.4.2)$$

等效功率谱带宽的概念也可用图 3.5 进行说明。图中有一虚线方框, 其高为 $S_X(0)$, 宽为 $2\Delta\omega$ ($\Delta\omega = 2\pi\Delta f$), 定义式(3.4.2)规定这个方框面积等于 $S_X(\omega)$ 曲线下的面积。

定义了 Δf 后, 就可以得到 $\Delta f_1 < \Delta f_2$, Δf 大的随机过程占有宽的频带。

按上述定义的 τ_k , 当 $\tau > \tau_k$ 时, 工程实际中就可以认为 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 实际上已经不相关了, 并非要 $\tau \rightarrow \infty$ 时, 它们才不相关。而按上述定义的 Δf , 则说明了 $X(t)$ 中起伏最高频率的大小。若某 $X(t)$ 的 $\Delta f = 1\text{MHz}$, 则认为 $X(t)$ 所含的最高频率成分即为 1MHz 。

综上所述, 对随机过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$, 若 $X_1(t)$ 的起伏频繁程度低, 变化缓慢, 而 $X_1(t)$ 变化较快, 这就使得 $\tau_{k1} > \tau_{k2}$, 而 $\Delta f_1 < \Delta f_2$, 即 $X_1(t)$ 的自相关性强于 $X_2(t)$, 但 $X_1(t)$ 的低频成分多, 占有频带较窄, 而 $X_2(t)$ 高频成分多, 占有较宽的频带。总的来说, 一个随机过程的自相关性的强弱与它所占有的频带是成反比关系的, 这是 $B_X(\tau)$ 与 $S_X(\omega)$ 为傅里叶变换对的当然结果。这从下面的关系式也可看出。

$$\tau_k \Delta f = \frac{S_X(0)}{2B_X(0)} \frac{B_X(0)}{2S_X(0)} = \frac{1}{4} \quad (3.4.3)$$

从式(3.4.3)可知, 无论怎样的随机过程, 它的自相关时间与等效带宽的乘积恒为 $\frac{1}{4}$ 。

最后需要说明的是, 当 $E[X(t)] \neq 0$ 时, $B_X(\tau)$ 中将有恒定的分量, $S_X(\omega)$ 中将有 $\delta(\omega)$ 成分, 在这种情况下, τ_k 和 Δf 的定义分别依据 $B_X(\tau)$ 中的 $B_{X_0}(0)$ 部分和 $S_X(\omega)$ 中的 $S_{X_0}(\omega)$ 部分, 即

$$\tau_k = \frac{S_{X_0}(0)}{2B_{X_0}(0)}$$

$$\Delta f = \frac{B_{X_0}(0)}{2S_{X_0}(0)}$$

若 $E[X(t)] \neq 0$, 说明 $X(t)$ 中含有直流成分。这时如果把横轴向上移 $E[X(t)]$, $X(t)$ 的波形的形状完全不会变, 只是这时 $X(t)$ 变成了 $X_0(t)$ 。因此, 用 $X_0(t)$ 的自相关函数和功率谱密度函数来定义的自相关时间 τ_k 及等效功率谱带宽 Δf 当然也适合 $X(t)$ 。也就是说, 随机过程是否含有直流成分并不影响它的自相关性的强弱和占有频带的宽窄。

例 3.4 设有随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$B(\tau) = A e^{-\left|\frac{\tau}{T}\right|} \quad (T > 0, A \text{ 为常数})$$

试求该随机过程的自相关时间和等效功率谱带宽。

$$\text{解: } S_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_X(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-|\frac{\tau}{T}|} d\tau = 2 \int_0^{+\infty} A e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau = 2AT$$

$$\tau_k = \frac{S_X(0)}{2B_X(0)} = \frac{2AT}{2A} = T$$

$$\Delta f = \frac{B_X(0)}{2S_X(0)} = \frac{A}{4AT} = \frac{1}{4T}$$

例 3.5 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20\left(1 - \frac{|\omega|}{10}\right) & (|\omega| \leq 10) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

求随机过程 $X(t)$ 的自相关函数、自相关时间和等效功率谱带宽。

$$\begin{aligned} \text{解: } B_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-10}^{+10} 8\delta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega + \frac{40}{2\pi} \int_0^{+10} \left(1 - \frac{\omega}{10}\right) \cos\omega\tau d\omega \\ &= \frac{4}{\pi} + \frac{20}{\pi} \int_0^{+10} \left(1 - \frac{\omega}{10}\right) \cos\omega\tau d\omega \\ &= \frac{4}{\pi} + \frac{20}{\pi} \left[\frac{\sin\omega\tau}{\tau} \Big|_0^{10} - \frac{1}{10} \int_0^{+10} \omega \cos\omega\tau d\omega \right] \\ &= \frac{4}{\pi} + \frac{20}{\pi} \left[\frac{\sin 10\tau}{\tau} - \frac{1}{10} \left(\frac{\omega \sin\omega\tau}{\tau} \Big|_0^{10} - \int_0^{+10} \frac{\sin\omega\tau}{\tau} d\omega \right) \right] \\ &= \frac{4}{\pi} + \frac{20}{\pi} \left[\frac{1}{10\tau^2} (1 - \cos 10\tau) \right] = \frac{4}{\pi} + \frac{20}{\pi} \left[\frac{1}{10\tau^2} (2\sin^2 5\tau) \right] \\ &= \frac{4}{\pi} + \frac{100}{\pi} \text{Sa}^2(5\tau) \end{aligned}$$

$$\text{显然} \quad \overline{X(t)^2} = \frac{4}{\pi}$$

$$\text{则} \quad B_{X_0}(\tau) = \frac{100}{\pi} \text{Sa}^2(5\tau)$$

$$\text{已知} \quad S_{X_0}(\omega) = \begin{cases} 20\left(1 - \frac{|\omega|}{10}\right) & (|\omega| \leq 10) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

$$\text{即} \quad B_{X_0}(0) = \frac{100}{\pi}$$

$$S_{X_0}(0) = 20$$

$$\text{所以} \quad \tau_k = \frac{S_{X_0}(0)}{2B_{X_0}(0)} = \frac{\pi}{10}$$

$$\Delta f = \frac{B_{X_0}(0)}{2S_{X_0}(0)} = \frac{5}{2\pi}$$

交流分量的自相关函数和功率谱密度函数如图 3.6 所示。

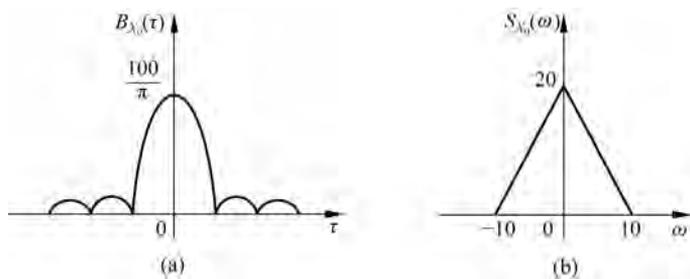


图 3.6 交流分量的自相关函数和功率谱密度函数

3.5 随机序列的功率谱密度

前面讨论了平稳随机过程的功率谱密度函数和维纳-辛钦定理,本节将功率谱密度函数等相关概念推广到平稳随机序列。

3.5.1 随机序列的功率谱密度

设平稳随机序列 $X(n)$ 的均值为 0,其自相关函数为

$$B_X(m) = E[X(n)X(n+m)] \quad (3.5.1)$$

若随机序列的自相关函数满足绝对可和,即 $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |B_X(m)| < \infty$, 则其离散傅里叶变换为

$$S_X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_X(m) e^{-j\omega m} \quad (3.5.2)$$

称 $S_X(\omega)$ 为平稳随机序列 $X(n)$ 的功率谱密度函数。即平稳随机序列的自相关函数和功率谱密度函数构成傅里叶变换对,其功率谱密度函数的傅里叶反变换为

$$B_X(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X(\omega) e^{j\omega m} d\omega \quad (3.5.3)$$

式(3.5.2)和式(3.5.3)构成的一对傅里叶变换即是离散形式的维纳-辛钦定理。

由式(3.5.3)可知,当 $m=0$ 时,有

$$B_X(0) = E[X^2(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X(\omega) d\omega \quad (3.5.4)$$

即功率谱密度函数的积分等于随机序列的均方值,也是随机序列的平均功率。

对于平稳随机序列,其功率谱密度函数具有如下重要性质。

(1) 功率谱密度为非负函数。即

$$S_X(\omega) \geq 0 \quad (3.5.5)$$

(2) 功率谱密度为 ω 的偶函数。即

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega) \quad (3.5.6)$$

这可由平稳随机序列的自相关函数是偶函数直接得出。因为平稳随机序列的自相关函数和功率谱密度都是偶函数,所以式(3.5.2)和式(3.5.3)还可以分别表示为

$$S_X(\omega) = 2 \sum_{m=0}^{+\infty} B_X(m) \cos(\omega m) \quad (3.5.7)$$

$$B_X(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S_X(\omega) \cos(\omega m) d\omega \quad (3.5.8)$$

在离散时间系统的分析中,通常用 z 变换更为方便,所以,平稳随机序列的功率谱密度函数可表示为其自相关函数 $B_X(m)$ 的 z 变换,记为 $S'_X(z)$,有

$$S'_X(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_X(m) z^{-m} \quad (3.5.9)$$

显然, $S_X(\omega)$ 和 $S'_X(z)$ 的关系为

$$S_X(\omega) = S'_X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.5.10)$$

$S'_X(z)$ 的 z 反变换为

$$B_X(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_D S'_X(z) z^{m-1} dz \quad (3.5.11)$$

式中, D 是在 $S'_X(z)$ 的收敛域内环绕平面原点的一条逆时针闭合曲线。

由于平稳随机序列的自相关函数是偶对称的,即 $B_X(m) = B_X(-m)$,因此,功率谱密度函数如下性质:

$$S'_X(z) = S'_X\left(\frac{1}{z}\right) \quad (3.5.12)$$

3.5.2 平稳随机过程的采样定理

香农采样定理在通信系统、信息传输理论等方面占有十分重要的地位,它是建立连续信号与其离散信号之间变换的理论基础。本节讨论将香农采样定理应用于随机过程,将随机过程变换为随机序列的相关理论。

先回顾一下确定性时间信号的采样定理。

确定性时间信号的采样定理:一个频带有限的确定性时间信号 $x(t)$,若其频谱只占据 $0 \sim f_m$ 的范围,当以采样间隔(或采样周期) $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ (或采样频率 $f_s \geq 2f_m$ 或采样角频率 $\omega_s \geq 2\omega_m$) 对该信号等间隔均匀采样时,则该信号可以用这些等间隔采样点 $x(nT_s)$ 唯一地表示。通常把最低允许的采样频率 $f_s = 2f_m$ 称为“奈奎斯特频率”,把最大允许的采样间隔(或采样周期) $T_s = \frac{1}{2f_m}$ 称为“奈奎斯特间隔”(或“奈奎斯特周期”)。

若在满足采样定理的条件下对确定性时间信号 $x(t)$ 进行理想采样,则利用理想低通滤波器可从采样后的离散信号中无失真地恢复原信号 $x(t)$ 。

设理想低通滤波器的频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s & (|\omega| \leq \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_m) \end{cases} \quad (3.5.13)$$

式中, ω_c 是理想低通滤波器的截止频率, T_s 是采样周期。则理想低通滤波器恢复的信号可表示为

$$x(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \quad (3.5.14)$$

为讨论方便,通常取 $\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}$, 则式(3.5.14)可表示为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{Sa}\left[\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s}\right] \quad (3.5.15)$$

下面,将确定性时间信号的采样定理推广到随机过程中。

对于零均值的平稳随机过程 $X(t)$,若它的功率谱密度 $S_X(\omega)$ 只占据 $0 \sim \omega_m$ 的范围,即

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_X(\omega) & (|\omega| \leq \omega_m) \\ 0 & (|\omega| > \omega_m) \end{cases}$$

则称 $X(t)$ 为带限随机过程。当采样间隔(或采样周期) T_s 满足 $T_s \leq \frac{\pi}{\omega_m}$ (或采样频率 $f_s \geq 2f_m$ 或采样角频率 $\omega_s \geq 2\omega_m$) 时,则该随机过程可以用这些等间隔采样点 $X(nT_s)$ 唯一地表示。平稳随机过程 $X(t)$ 可表示为

$$X(t) = \text{l. i. m}_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N X(nT_s) \text{Sa}\left[\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s}\right] \quad (3.5.16)$$

式中, l. i. m 表示均方意义下的极限,即均方极限。也就是说,在均方意义下, $X(t)$ 和 $\sum_{n=-N}^N X(nT_s) \text{Sa}\left[\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s}\right]$ 相等,即在 $N \rightarrow \infty$ 时,它们的均方误差等于零。

$$\text{l. i. m}_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[X(t) - \sum_{n=-N}^N X(nT_s) \text{Sa}\left(\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s}\right) \right]^2 \right\} = 0 \quad (3.5.17)$$

3.6 联合平稳随机过程的互功率谱密度

在第2章中已经建立了两个随机过程联合平稳的概念。本节将把单个随机过程的功率谱密度的概念推广到两个随机过程的情况。

3.6.1 互功率谱密度

设 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 为两个平稳随机过程,仿照 3.1 节中的方法,对 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的样本函数 $x(t)$ 、 $y(t)$ 分别取截短函数 $x_T(t)$ 、 $y_T(t)$ 为

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & (|t| < T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (3.6.1)$$

$$y_T(t) = \begin{cases} y(t) & (|t| < T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (3.6.2)$$

则 $x_T(t)$ 、 $y_T(t)$ 的傅里叶变换存在, 所以有

$$x_T(t) \longleftrightarrow F_x(j\omega, T)$$

$$y_T(t) \longleftrightarrow F_y(j\omega, T)$$

两个随机过程的样本函数在 $(-T, T)$ 区间内的互功率为

$$P_{xy}(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t)y_T(t)dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t)dt \quad (3.6.3)$$

根据帕塞瓦尔定理, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)y_T(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(-j\omega, T)F_y(j\omega, T)d\omega \quad (3.6.4)$$

由式(3.6.3)和式(3.6.4)得

$$P_{xy}(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_x(-j\omega, T)F_y(j\omega, T)}{2T} d\omega \quad (3.6.5)$$

同样, 由于 $x(t)$ 、 $y(t)$ 以及 $F_x(j\omega, T)$ 、 $F_y(j\omega, T)$ 都具有随机性, 所以互功率 $P_{xy}(T)$ 是一个随机变量。为了求出两个随机过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的互功率, 须将式(3.6.5)扩展为对所有样本取统计平均, 得

$$E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)Y(t)dt \right] = E \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_X(-j\omega, T)F_Y(j\omega, T)}{2T} d\omega \right] \quad (3.6.6)$$

式(3.6.6)两边取极限(令 $T \rightarrow \infty$), 得

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)Y(t)]dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[F_X(-j\omega, T)F_Y(j\omega, T)]}{2T} d\omega \quad (3.6.7)$$

式(3.6.7)的左边即是随机过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的互功率 P_{XY}

$$P_{XY} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)Y(t)]dt \quad (3.6.8)$$

因此, 定义两个随机过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的互功率谱密度(简称为互谱密度)为

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[F_X(-j\omega, T)F_Y(j\omega, T)]}{2T} \quad (3.6.9)$$

于是有

$$P_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) d\omega \quad (3.6.10)$$

类似地, 还可以定义两个随机过程 $Y(t)$ 、 $X(t)$ 的互功率谱密度为

$$S_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[F_X(j\omega, T)F_Y(-j\omega, T)]}{2T} \quad (3.6.11)$$

由式(3.6.8)可知

$$P_{XY} = P_{YX} \quad (3.6.12)$$

3.6.2 互功率谱密度和互相关函数的关系

正如随机过程的自相关函数和其功率谱密度函数是傅里叶变换对一样,两个随机过程的互相关函数和互功率谱密度也有类似的关系。

对于两个随机过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$, 其互相关函数 $B_{XY}(t, t + \tau)$ 和互功率谱密度 $S_{XY}(\omega)$ 之间的关系为

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{B_{XY}(t, t + \tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.6.13)$$

$$\widetilde{B_{XY}(t, t + \tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.6.14)$$

式(3.6.13)和式(3.6.14)说明,任意随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数的时间平均值与 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率谱密度函数是一对傅里叶变换。

当两个的随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为联合平稳时,有

$$B_{XY}(t, t + \tau) = B_{XY}(\tau) \quad (3.6.15)$$

则

$$\widetilde{B_{XY}(t, t + \tau)} = \widetilde{B_{XY}(\tau)} = B_{XY}(\tau) \quad (3.6.16)$$

所以有

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.6.17)$$

$$B_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.6.18)$$

两个联合平稳的随机过程的互相关函数和互功率谱密度是一对傅里叶变换。

同样,对于两个联合平稳的随机序列 $X(n)$ 、 $Y(m)$, 其互相关函数和互功率谱密度也是一对傅里叶变换,有

$$S_{XY}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{XY}(m) e^{-j\omega m} \quad (3.6.19)$$

$$B_{XY}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(\omega) e^{j\omega m} d\omega \quad (3.6.20)$$

3.6.3 互功率谱密度的性质

两个随机过程的互功率谱密度具有如下性质。

$$(1) \quad S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) \quad (3.6.21)$$

$$S_{YX}(\omega) = S_{XY}^*(\omega) \quad (3.6.22)$$

即互功率谱密度不再是 ω 的实偶函数。

证明:由定义式(3.6.9)有

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[F_X(-j\omega, T)F_Y(j\omega, T)]}{2T} \\ &= \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[F_X(j\omega, T)F_Y(-j\omega, T)]}{2T} \right\}^* \\ &= S_{YX}^*(\omega) \end{aligned}$$

同理可得

$$S_{YX}(\omega) = S_{XY}^*(\omega)$$

$$(2) \quad \operatorname{Re}[S_{XY}(\omega)] = \operatorname{Re}[S_{XY}(-\omega)] \quad (3.6.23)$$

$$\operatorname{Re}[S_{YX}(\omega)] = \operatorname{Re}[S_{YX}(-\omega)] \quad (3.6.24)$$

$$\operatorname{Im}[S_{XY}(\omega)] = -\operatorname{Im}[S_{XY}(-\omega)] \quad (3.6.25)$$

$$\operatorname{Im}[S_{YX}(\omega)] = -\operatorname{Im}[S_{YX}(-\omega)] \quad (3.6.26)$$

即互功率谱密度的实部为 ω 的偶函数, 虚部为 ω 的奇函数。该性质利用性质(1)可以很容易得到证明。

(3) 若随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 正交, 则有

$$S_{XY}(\omega) = 0, \quad S_{YX}(\omega) = 0 \quad (3.6.27)$$

(4) 若随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不相关, 且 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值分别为常数 m_X 、 m_Y , 则

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi m_X m_Y \delta(\omega) \quad (3.6.28)$$

性质(3)和性质(4)的证明留作习题。

例 3.6 已知联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率谱密度为

$$S_{XY}(\omega) = \begin{cases} A + jB\omega, & (|\omega| < \Delta\omega) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

其中, A, B 为常数, $\Delta\omega > 0$ 。求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数 $B_{XY}(\tau)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } B_{XY}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} (A + jB\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} e^{j\omega\tau} d\omega + j \frac{B}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \omega e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{A}{\pi\tau} \sin\Delta\omega\tau + \frac{B}{2\pi\tau} \left[2\Delta\omega \cos\Delta\omega\tau - \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} e^{j\omega\tau} d\omega \right] \\ &= \frac{A}{\pi\tau} \sin\Delta\omega\tau + \frac{\Delta\omega B}{\pi\tau} \cos\Delta\omega\tau - \frac{B}{\pi\tau^2} \sin\Delta\omega\tau \\ &= \frac{1}{\pi\tau^2} [(A\tau - B) \sin\Delta\omega\tau + \Delta\omega B\tau \cos\Delta\omega\tau] \end{aligned}$$

3.7 白噪声与色噪声

随机过程按它的功率谱密度函数的形状来进行分类, 可以分成白噪声和有色噪声两大类。若一个随机过程的功率谱密度是常数, 无论是什么分布, 都称为白噪声。白噪声

的“白”字是借用光学中的白光,白光在它的频谱上包含了所有可见光的频率。而有色噪声的功率谱密度中各种频率分量的大小是不同的。具有均匀功率谱的白噪声是一种最为重要的随机过程。

3.7.1 理想白噪声

若平稳随机过程 $N(t)$ 的数学期望为零,并且在整个频率范围内,其功率谱密度为非零常数,即

$$S_N(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad (-\infty < \omega < +\infty) \quad (3.7.1)$$

则称随机过程 $N(t)$ 为理想白噪声,常简称为白噪声或白色过程。式(3.7.1)中, N_0 是正实常数。

利用傅里叶反变换可求出理想白噪声的自相关函数为

$$B_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (3.7.2)$$

其自相关时间和等效带宽为

$$\tau_k = \frac{S_N(0)}{2B_N(0)} = \frac{N_0/2}{2\delta(\tau)} = 0 \quad (3.7.3)$$

$$\Delta f = \frac{B_N(0)}{2S_N(0)} \rightarrow \infty \quad (3.7.4)$$

平均功率为

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} d\omega \rightarrow \infty \quad (3.7.5)$$

式(3.7.3)说明,理想白噪声在任何两个相邻时刻(不管这两个时刻多么邻近)的取值都是不相关的,所以理想白噪声又称为不自相关的随机过程。

由于理想白噪声的不自相关性质,其组成一定是大量无限窄的彼此独立的脉冲的随机组合。图 3.7 给出了理想白噪声的组成示意图。

可以将此过程中任一个独立成分看成一个平稳的随机过程,因为这个独立过程出现的时间是等概率地分布在全时域上,它在一个时间点 t_1 上取值的概率特性与在任意其他时间点 t 上取值的概率特性是相同的。

按式(3.7.1)定义的理想白噪声只是一种理想化的模型,实际上不可能存在,因为实际的随机过程总是具有有限的平均功率,而且在非常邻近的两个时刻的状态总会存在一定的相关性,也就是说其相关函数不可能是一个严格的 δ 函数,这种被理想化了的模型称为理想白噪声。尽管如此,由于白噪声在数学处理上具有简单方便的优点,所以在实际应

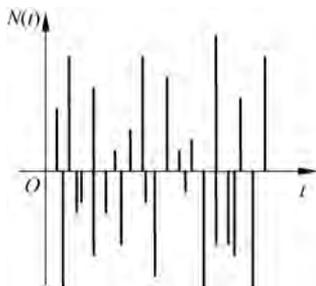


图 3.7 理想白噪声的组成示意图

用中仍占有重要的地位,实际上,当所研究的随机过程在所考虑的有用频带宽得多的范围内,具有均匀的功率谱密度时,就可以把它当作白噪声来处理,而不会带来多大的误差。无线电设备中的许多起伏过程都可以作为白噪声来处理,例如,后面要介绍的散弹噪声和电阻热噪声在相当宽的频率范围内都具有均匀的功率谱密度,一般就当作白噪声。其他许多干扰过程,只要它的功率谱比电子系统的频带宽得多,而其功率谱密度又在系统通带内及其附近分布比较均匀,都可以作为白噪声来处理。这种白噪声,就是下面要介绍的带限白噪声。

3.7.2 低通型带限白噪声

若一个零均值的平稳随机过程 $N(t)$ 在某个有限频带范围内具有非零的常数功率谱,而在此频率范围之外为零,则称此过程为带限白噪声。带限白噪声可分为低通型和带通型两种。

若带限白噪声的功率谱密度为

$$S_N(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} (\text{常数}) & (|\omega| \leq \Delta\omega) \\ 0 & (|\omega| > \Delta\omega) \end{cases} \quad (3.7.6)$$

则称此过程为低通型带限白噪声。其自相关函数为

$$\begin{aligned} B_N(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\Delta\omega N_0}{2\pi} \frac{\sin\Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau} \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

低通型带限白噪声的功率谱密度和自相关函数如图 3.8 所示。

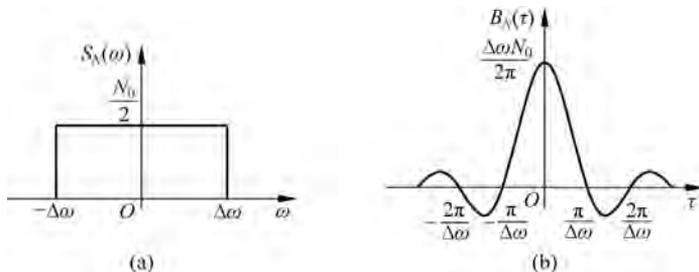


图 3.8 低通型带限白噪声的功率谱密度和自相关函数

3.7.3 带通型带限白噪声

若带限白噪声的功率谱密度为

$$S_N(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} (\text{常数}) & (\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq |\omega| \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (3.7.8)$$

则称此过程为带通型带限白噪声。应用维纳-辛钦定理,不难求出其自相关函数

$$\begin{aligned}
 B_N(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_N(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{N_0}{2} \cos \omega \tau d\omega \\
 &= \frac{N_0}{2\pi\tau} \left\{ \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \tau \right] - \sin \left[\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \tau \right] \right\} \\
 &= \frac{N_0}{2\pi\tau} 2 \cos \omega_0 \tau \sin \left(\frac{\Delta\omega\tau}{2} \right) = \frac{\Delta\omega N_0}{2\pi} \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2} \cos \omega_0 \tau \\
 &= \frac{\Delta\omega N_0}{2\pi} \text{Sa} \left(\frac{\Delta\omega\tau}{2} \right) \cos \omega_0 \tau \quad (3.7.9)
 \end{aligned}$$

带通型带限白噪声的功率谱密度和自相关函数如图 3.9 所示。

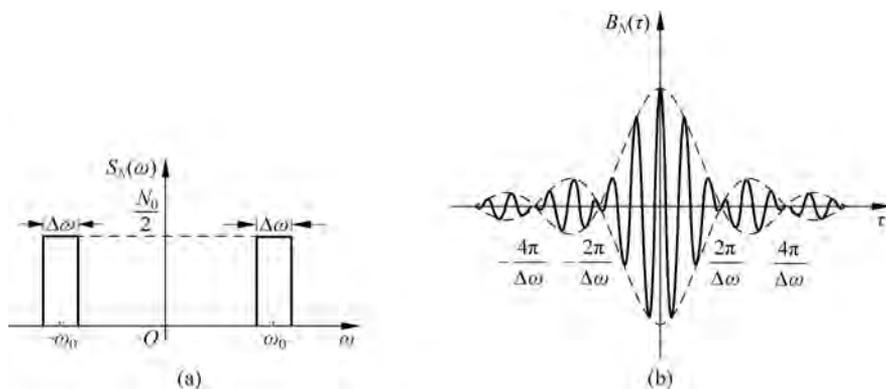


图 3.9 带通型带限白噪声的功率谱密度和自相关函数

还应指出,白噪声只是从随机过程的功率谱密度的角度来定义的,并未涉及随机过程的概率分布。因此可以有各种不同分布的白噪声。其中,正态分布的白噪声最为常见和重要。

若白噪声的 n 维概率密度都服从正态分布,则称此类白噪声为高斯白噪声。

3.7.4 色噪声

按功率谱密度函数的形式来区分随机过程,把除了白噪声以外的所有随机过程都称为有色噪声,简称色噪声,其功率谱密度函数必为频率的函数。下面给出一个色噪声的例子。

例 3.7 若 $N(t)$ 为宽平稳噪声信号,其自相关函数为

$$B_N(\tau) = A e^{-3|\tau|}$$

其中 A 为常数。求其功率谱密度函数。

解: 由维纳-辛钦定理,有

$$\begin{aligned}
 S_N(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-3|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 A e^{(3-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} A e^{-(3+j\omega)\tau} d\tau \\
 &= \frac{A}{3-j\omega} + \frac{A}{3+j\omega} = \frac{6A}{9+\omega^2}
 \end{aligned}$$

由上看出, $S_N(\omega)$ 在频带内不为常数, 故 $N(t)$ 为色噪声。 $B_N(\tau)$ 和 $S_N(\omega)$ 如图 3.10 所示。

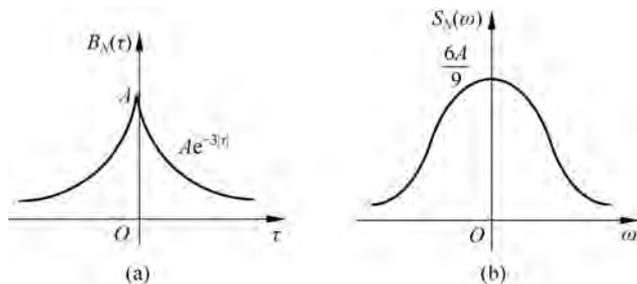


图 3.10 色噪声 $N(t)$ 的自相关函数和功率谱密度函数

习题

3.1 下面哪些函数是平稳随机过程功率谱密度的正确表达式? 为什么? 对正确的功率谱密度表达式, 求其自相关函数。

$$(1) S_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 2)(\omega + 6)^2}$$

$$(2) S_2(\omega) = \frac{2j\omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$$

$$(3) S_3(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 3\omega^2 + 2}$$

$$(4) S_4(\omega) = \frac{\omega^3 + 3}{\omega^4 + 7\omega^2 + 10}$$

$$(5) S_6(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2} + \delta(\omega)$$

$$(6) S_5(\omega) = \frac{e^{-j\omega^4}}{\omega^2 + 5}$$

3.2 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}$$

求 $X(t)$ 的平均功率。

3.3 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$$

求随机过程 $X(t)$ 的自相关函数和平均功率。

3.4 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$B_X(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0\tau \quad (\omega_0 \gg 0)$$

求随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度, 并画出功率谱密度的示意图。

3.5 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$B_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} \cos\pi\tau + \cos 3\pi\tau$$

求随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度。

3.6 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$B_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & (-T < \tau < T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

求随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度。

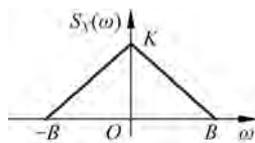
3.7 设随机过程 $X(t) = a \cos(\omega t + \theta)$, 其中 a 为常数, θ 是 $(0, 2\pi)$ 区间均匀分布的随机变量, ω 也是随机变量, 它的概率密度函数为 $P(\omega)$, 且为偶函数, ω 与 θ 相互独立。试求 $X(t)$ 的功率谱密度。

3.8 已知平稳随机过程的自相关函数为

$$(1) B_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} \quad (2) B_X(\tau) = \sigma^2(1 - a|\tau|) \quad (|\tau| \leq 1/a)$$

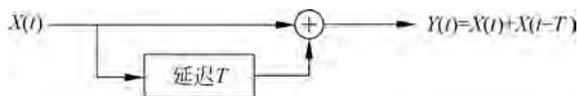
求其自相关时间和等效功率谱带宽。

3.9 一个零均值的随机过程 $X(t)$ 具有如题 3.9 图所示的三角形功率谱密度。试求: (1) 平均功率; (2) 自相关函数; (3) 自相关时间和等效功率谱带宽。



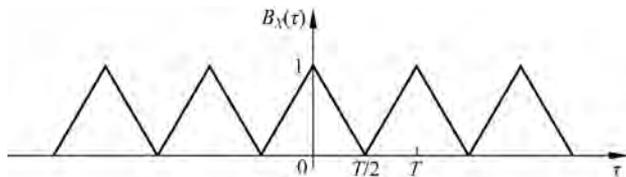
题 3.9 图

3.10 如题 3.10 图所示系统中, 若输入 $X(t)$ 为平稳随机过程, 系统的输出随机过程为 $Y(t) = X(t) + X(t-T)$ 。证明: $Y(t)$ 的功率谱密度为 $S_Y(\omega) = 2S_X(\omega)(1 + \cos\omega T)$ 。



题 3.10 图

3.11 设周期性平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数如题 3.11 图所示, 其周期为 T 。求该随机过程的功率谱密度, 并画出功率谱密度的示意图。



题 3.11 图

3.12 联合宽平稳随机过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 作用于线性时不变系统, 输出响应为 $Y(t)$, 系统的频率特性为 $H(j\omega)$ 。证明: $Y(t)$ 的功率谱为

$$S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 [S_{X_1}(\omega) + S_{X_2}(\omega) + S_{X_1 X_2}(\omega) + S_{X_2 X_1}(\omega)]$$

3.13 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个相互独立的平稳随机过程, 均值分别为常数 m_X 和 m_Y , 且 $X(t)$ 的功率谱密度为 $S_X(\omega)$ 。定义 $Z(t) = X(t) + Y(t)$, 求 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XZ}(\omega)$ 。

3.14 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是正交随机过程, 证明: $S_{XY}(\omega) = 0, S_{YX}(\omega) = 0$ 。

3.15 若随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不相关, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值分别为常数 m_X, m_Y 。证明: $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi m_X m_Y \delta(\omega)$ 。