

极化信号接收

为了聚焦于理论结论,本章把接收问题单纯化,设想接收天线的极化是固定的,而到达天线口面信号的极化方式确定且相同。在信号极化方式已知的情况下,不同极化的接收天线,对信号的接收效果是不同的。接收效果的不同表现在两个极端和一个平常。两个极端:一是最佳地接收了信号,即接收功率最大,二是完全收不到信号,即接收功率为零。一个平常,即接收效果介于最佳和最差两个极端之间。

本章共七节。3.1节介绍极化匹配接收,这是最佳接收效果,即接收功率最大。特别注意接收电压方程及其赖以建立的同一坐标系,而极化匹配条件则是关键内容。3.2节是3.1节内容的延伸,主要讨论极化失配的条件,有了3.1节的思路和分析方法作为基础,本节内容显得比较简单。3.3节是前两节的总结和升华,从特殊到普遍,为此引出了极化匹配系数或极化效率的概念和计算式,并涵括了前两节的特殊情况。3.4节试图从物理角度阐释极化匹配的条件,加深对数学结论的理解以助力于知识点的掌握和灵活运用。在3.4节思路和方法的基础上,3.5节的内容能够轻而易举被接受。3.6节是面向实际系统而迈出的重要一步,极化问题的讨论由单色波拓展到了非单色波,触及了实际的窄带系统。该节内容比较多,围绕非单色波的极化度量和表征,深入讨论了相干矩阵、相关度、极化度等概念,以及基于极化参数的表征方法。针对非单色波的另一个重要问题是讨论对它的接收。3.7节简要介绍天线的空域极化特性,天线极化并不单纯,不是固定不变的,因为它所固有的辐射方向性使得天线极化随不同空域而不同,即使在主波束内也会有所变化。

3.1 极化匹配接收

读者要高度重视坐标系的问题,极化匹配条件是与坐标系相伴的。后面将会看到,极化匹配的数学结果会因坐标系的不同选择而带来某些差别,坐标系是极化匹配的观测条

件,观测条件不同,描述会有某些差别,因此得出的匹配数学结果不同。

3.1.1 接收电压方程

1. 天线有效长度

天线具有能量转换、阻抗匹配、频率选通、聚焦辐射以及极化选择等功能,而决定极化选择功能的就是天线有效长度。天线有效长度是一个矢量,完全体现了天线的极化特性。

如图 3.1.1 所示的垂直短偶极天线,因为没有方位向分量,故其辐射区内的电场为

$$E^t(r, \theta, \varphi) = \frac{jZ_0 Il \sin\theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \hat{\theta} \quad (3.1.1)$$

式中: Z_0 为自由空间特性阻抗; k 为自由空间传播常数; λ 为波长; I 为输入电流; r 为径向距离。

对式(3.1.1)做细微调整,即

$$\begin{aligned} E^t(r, \theta, \varphi) &= \frac{jZ_0 Il \sin\theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \hat{\theta} \\ &\triangleq \frac{jZ_0 I}{2\lambda r} e^{-jkr} \mathbf{h}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

垂直短偶极天线在俯仰向的投影为 $l \sin\theta$, 加上方向性后成一个矢量, 记为 $\mathbf{h}(\theta, \varphi)$, 这就是短偶极天线的有效长度, 体现了天线的极化。式(3.1.2)的表达具有普遍性, 但并不意味着任何天线的有效长度都与其尺寸有关联。

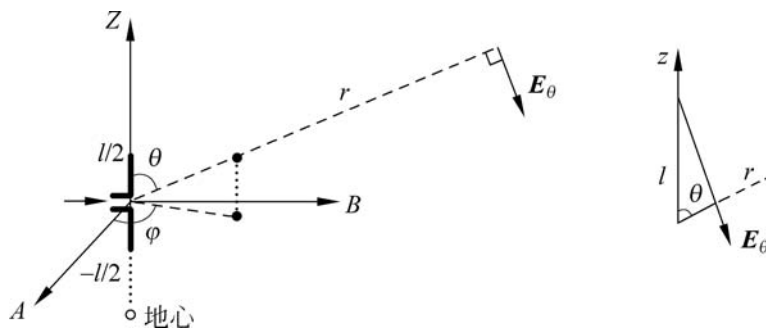


图 3.1.1 垂直短偶极天线及其辐射场

如图 3.1.2 所示的水平短偶极天线, 它所产生的远场各分量为

$$E_r = 0, \quad E_\theta = -\frac{j\omega\mu Il}{4\pi r} \cos\theta \cos\phi e^{-jkr}, \quad E_\phi = \frac{j\omega\mu Il}{4\pi r} \sin\phi e^{-jkr} \quad (3.1.3)$$

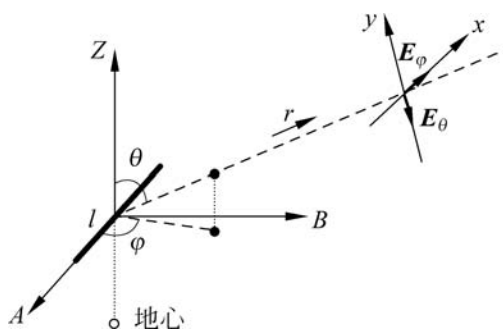


图 3.1.2 水平短偶极天线及其辐射场

根据图中坐标系转换,显然有

$$E_{\varphi} = E_x, \quad -E_{\theta} = E_y \quad (3.1.4)$$

则得到水平偶极子的线极化比为

$$P = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-E_{\theta}}{E_{\varphi}} = \cos\theta \cot\phi \quad (3.1.5)$$

如图 3.1.3 所示正交偶极子(绕杆天线)可用来产生圆极化波:以振幅相同、相位差为 90° 的电流馈电,在 Z 向辐射的是圆极化波。

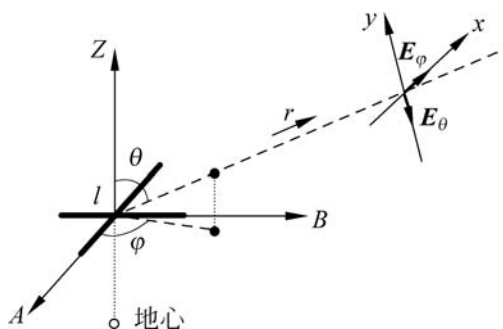


图 3.1.3 正交偶极天线及其辐射场

若以 A 向偶极子的馈电电流或电压作参考,而馈给 B 向偶极子的电流超前 90° ,其合成场为

$$E_{\theta} = -\frac{j\omega\mu Il}{4\pi r} (\cos\theta \cos\phi + j\cos\theta \sin\phi) \exp(-jkr) \hat{\theta} \quad (3.1.6)$$

$$E_{\phi} = \frac{j\omega\mu Il}{4\pi r} (\sin\phi - j\cos\phi) \exp(-jkr) \hat{\phi} \quad (3.1.7)$$

则在 x 轴和 y 轴组成的横截面坐标系中的线极化比为

$$P = \frac{E_x}{E_y} = \frac{-E_\theta}{E_\phi} = \frac{\cos\theta\cos\phi + j\cos\theta\sin\phi}{\sin\phi - j\cos\phi} = j\cos\theta \quad (3.1.8)$$

在 Z 轴上, 有 $\theta=0$ 及 $P=j$, 故沿 Z 轴传播为左旋圆极化波。若 B 向偶极子馈入相位滞后 $\pi/2$, 则沿 Z 轴的波是右旋圆极化波。

2. 坐标系的选择

为了使辐射区径向上没有分量, 需要适当地选择坐标系。在 TEM 波传播方向的横截面上建立笛卡儿坐标系, 则它只在水平和垂直方向上有分量, 传播方向即径向上无分量, 故选择水平、垂直线极化基对 TEM 波做正交分解, 简化了表达。

球坐标系原点是地心连线与地层表面相交点, 并过这点作切平面, 即 AB 平面; 在波的传播方向某距离点建立右手坐标系, 水平轴平行于 AB 切平面, 垂直轴定义为与水平轴和传播方向相垂直。球坐标系 E_θ 和 E_ϕ 分量与右手系中波场两个分量的关系: x 轴与 E_ϕ 同向, r' 轴与 r 轴重合, 那么 E_ϕ 是波的水平分量 E_x , $-E_\theta$ 是波的垂直分量 E_y 。电压方程的坐标系如图 3.1.4 所示。

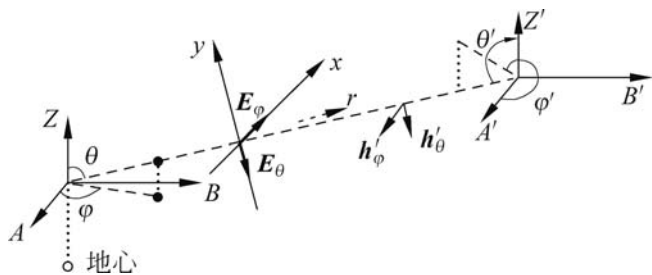


图 3.1.4 电压方程的坐标系

选择合适的坐标系能够规范、方便问题的研究, 所有相关方面有了统一的参照标准, 数学表达也变得更加清晰。坐标系所起作用仅仅是方便于描述和表达, 而不会改变物理事实的本身属性。

3. 接收电压方程

以接收天线口面中心为原点建立同一笛卡儿坐标系, 将接收天线和外部波场的各自分量进行统一描述, 那么接收天线和外部波场用坐标向量表示为

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}, \quad E(x, y) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

根据电磁网络理论可知,外部场在天线中感应的开路电压正比于天线的有效长度,即电压方程为

$$V = \mathbf{h}^T(x, y) \mathbf{E}(x, y) = h_x E_x + h_y E_y \quad (3.1.9)$$

注意,电压一般为复数。

3.1.2 最大接收功率

如前所述,天线和外部波场已建立了同一笛卡儿坐标系,这里无须考虑传播方向。按照电磁网络理论,任何方向到达天线的外部场,只要天线有效长度正交分量的方向上有场的投影量存在,就都会有感应,而获得天线端口电压的大小取决于天线和外部场两者的极化配准情况。

假设被接收信号的极化是已知的,用坐标向量表示波场矢量(算式中的符号 $|\cdot|$ 表示取模),即

$$\mathbf{E}^i(x, y) = e^{j\alpha} \begin{bmatrix} |E_x^i| \\ |E_y^i| e^{j\delta_1} \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

在同一笛卡儿坐标系中,反映接收天线极化的两个正交分量,用天线有效长度表示,也是写成坐标向量的形式,即

$$\mathbf{h}(x, y) = e^{j\beta} \begin{bmatrix} |h_x| \\ |h_y| e^{j\delta_2} \end{bmatrix} \quad (3.1.11)$$

则根据电压方程得到接收功率表达式为

$$\begin{aligned} W \propto VV^* &= |V|^2 = |\mathbf{h}^T(x, y) \mathbf{E}^i(x, y)|^2 \\ &= ||E_x^i| |h_x| + |E_y^i| |h_y| e^{j(\delta_1 + \delta_2)}|^2 \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

一般来说,实际中希望获得理想的接收效果,即接收功率最大。在这种情况下,接收天线的极化会是什么?它与被接收信号的极化会是怎样的关系?下面通过详细推导过程来回答这两个问题。

1. 第一步功率极大化

调节天线有效长度两个分量的相位差,使之与来波反相,即有

$$\delta_1 + \delta_2 = 0 \quad (3.1.13)$$

式(3.1.13)代入式(3.1.12)得到

$$W \stackrel{\delta_1+\delta_2=0}{=} W_{\max 1} = (|E_x^i| |h_x| + |E_y^i| |h_y|)^2 \quad (3.1.14)$$

说明: 考虑到数学推导时能简化表达式, 又不至于影响结果, 式(3.1.14)直接用等号而不是用正比号, 并不会改变物理含义和结果。式(3.1.14)是功率最大化的第一个步骤, 简称第一步极大化。

2. 第二步功率极大化

对固定来波 E^i , 改变天线有效长度 $|h_x|$ 或 $|h_y|$, $W_{\max 1}$ 可否进一步极大化? 显然, $|h_x|$ 和 $|h_y|$ 一定存在某种约束, 否则增大 $|h_x|$ 和 $|h_y|$ 可使 $W_{\max 1}$ 任意增大。天线无论是辐射还是接收的角色, 其坡印廷矢量(功率密度)均与其有效长度算式 $h_x^T h_y^*$ 成正比, 因此天线合理的约束是当 h 变化时其坡印廷矢量保持恒定。所以 $W_{\max 1}$ 中改变 h 获得最大 $W_{\max 1}$ 的约束为

$$h_x^T h_y^* = |h_x|^2 + |h_y|^2 = c \quad (3.1.15)$$

由式(3.1.15)得到

$$|h_y| = \sqrt{c - |h_x|^2} \quad (3.1.16)$$

代入式(3.1.14)后得到接收功率

$$W_{\max 1} = [|E_x^i| |h_x| + |E_y^i| (c - |h_x|^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \triangleq A^2 (|h_x|) \quad (3.1.17)$$

式(3.1.17)是关于天线有效长度水平分量的函数, 对其求导并令导数为零, 即

$$\frac{\partial W_{\max 1}}{\partial |h_x|} = 2A (|h_x|) \left[|E_x^i| - \frac{|h_x| |E_y^i|}{(c - |h_x|^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0 \quad (3.1.18)$$

由式(3.1.18)得到

$$\frac{|h_x|}{|h_y|} = \frac{|E_x^i|}{|E_y^i|} \quad (3.1.19)$$

式(3.1.19)的物理含义: 相对大的入射分量, 用相对大的同类天线有效长度接收, 而相对小的入射分量用相对小的同类天线有效长度接收; 并且, 天线有效长度两个正交分量比值, 须

与接收波场两个正交分量的比值相同。所以,给出的是最大功率从物理上来讲是合理的。将天线有效长度调节到与来波两个分量构成上述对等关系,即天线两个正交分量的比值与被接收波场两个对应分量的比值相等,就可以使天线的接收功率最大,至此就形成了最佳接收效果。第二步极大化后,最终获得了最大接收功率,推算如下:

$$\begin{aligned}
 W_{\max 1} &= (|E_x^i| |h_x| + |E_y^i| |h_y|)^2 \\
 &= |E_x^i|^2 |h_x|^2 + |E_y^i|^2 |h_y|^2 + \\
 &\quad |E_y^i| |h_x| |E_x^i| |h_y| + |E_y^i| |h_x| |E_x^i| |h_y| \\
 \text{将 } \frac{|h_x|}{|h_y|} &= \frac{|E_x^i|}{|E_y^i|} \text{ 代入 } W_{\max 1}, \text{ 得到} \\
 W_{\max 1} &= |E_x^i|^2 |h_x|^2 + |E_y^i|^2 |h_y|^2 + \\
 &\quad |E_x^i| |h_y| |E_x^i| |h_y| + |E_y^i| |h_x| |E_y^i| |h_x| \\
 &= (|E_x^i|^2 + |E_y^i|^2)(|h_x|^2 + |h_y|^2) \\
 &= \mathbf{h}^* \mathbf{T} \mathbf{h} ((\mathbf{E}^i)^* \mathbf{T} \mathbf{E}^i) = \|\mathbf{h}\|^2 \|\mathbf{E}^i\|^2 \triangleq W_{\max 2} \quad (3.1.20)
 \end{aligned}$$

式中: $\|\cdot\|$ 表示 F 范数,其平方 $\|\cdot\|^2$ 的物理意义是功率密度。

3. 极化匹配条件

接收功率最大时,或者说最佳接收时,天线极化与被接收波场极化的相应关系称为极化匹配条件,故最佳接收也称为极化匹配接收。综合上述两步功率极大化:

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = 0 \\ \frac{|h_y|}{|h_x|} = \frac{|E_y^i|}{|E_x^i|} \end{cases} \quad (3.1.21)$$

可以进一步明确式(3.1.21)的极化含义。被接收波场的线极化比为

$$P_i = \frac{E_y^i}{E_x^i} = \frac{|E_y^i|}{|E_x^i|} e^{j\delta_1} \quad (3.1.22)$$

则由式(3.1.21)可以得到接收天线的线极化比与被接收波场线极化比的关系为

$$P_h = \frac{h_y}{h_x} = \frac{|h_y|}{|h_x|} e^{j\delta_2} = \frac{|E_y^i|}{|E_x^i|} e^{-j\delta_1} = P_i^* \quad (3.1.23)$$

重写上式:

$$P_h = P_i^*$$

式(3.1.23)说明,接收天线线极化比与被接收信号线极化复共轭相等,这就是最佳接收的极化匹配条件。该表达式的物理内涵在 3.4 节详细阐释。读者应记住这个数学结果,并要强烈地意识到它是同一笛卡儿坐标系中的结果,即接收天线与被接收信号的正交分解是在同一笛卡儿坐标系而非右手系中描述和表征的。

3.2 极化失配接收

极化失配接收的物理含义是天线的接收电压为零,即接收功率为零,这是最差的接收效果,完全没有接收到信号。按照极化失配的物理含义,利用 3.1 节的接收功率表达式,令接收功率为零,即有

$$\begin{aligned} W \propto VV^* &= |V|^2 = |\mathbf{h}^T(xy)\mathbf{E}^i(xy)|^2 \\ &= ||E_x^i||h_x| + |E_y^i||h_y|e^{j(\delta_1+\delta_2)}|^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

上式重写为

$$|E_x^i||h_x| + |E_y^i||h_y|e^{j(\delta_1+\delta_2)} = 0 \quad (3.2.2)$$

式(3.2.2)可变形为

$$\begin{aligned} \frac{|h_y|}{|h_x|}e^{j\delta_1} &= -\frac{|E_x^i|}{|E_y^i|}e^{-j\delta_2} \\ \frac{|h_y|}{|h_x|}e^{j\delta_1} &= -1/\left(\frac{|E_y^i|}{|E_x^i|}e^{j\delta_2}\right) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

显然,式(3.2.3)可以写为

$$P_r = -\frac{1}{P_i}, \quad P_r P_i = -1 \quad (3.2.4)$$

极化失配条件:接收天线的线极化比与被接收信号的线极化比互为负倒数,或者说乘积等于负 1。与最佳接收情况相同的是,接收天线与被接收信号分量的表征,采用的是同一笛卡儿坐标系而非右手系。它的物理内涵在 3.5 节详细讨论。

3.3 极化匹配系数

天线极化和来波极化是在同一笛卡儿坐标系中描述和表征的,在此基础上讨论了极化匹配接收和极化失配接收的问题,并给出了对应情况的极化关系。本节考虑一般情形,既不最佳也不最差,是介于两者之间的常规接收情况。

3.3.1 极化匹配系数的定义

天线的接收效果随其极化的不同而有差别。针对常规或者说一般的接收情况,用极化匹配系数来描述,定义为实际接收功率与最佳接收功率之比,利用式(3.1.9)和式(3.1.20)得到极化匹配系数的表达式为

$$\rho = \frac{VV^*}{\|h\|^2 \|E^i\|^2} = \frac{|h^T E^i|^2}{\|h\|^2 \|E^i\|^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (3.3.1)$$

极化匹配系数也称为极化效率。最佳接收、最差接收是常规接收情况的特例,匹配系数分别对应 $\rho=1$ 和 $\rho=0$ 。有必要再次强调,因为电压方程是在同一笛卡儿坐标系中建立的,故式(3.3.1)也是在同一笛卡儿坐标系中定义的。

3.3.2 极化匹配系数的坐标系

3.1节、3.2节讨论的极化信号接收问题,基础是同一笛卡儿坐标系中的电压方程,信号无论来自何方都适用,不需要涉及极化的旋向。但是,在讨论两部天线互为收发的时候,极化旋向问题就不可回避,不然会带来表述的麻烦,因此,两部天线的极化旋向有统一说法显得尤为重要。因为极化旋向是在右手系中定义的,为确保互为收发的两部天线极化旋向说法的一致,互为收发的双方必须选择相向右手笛卡儿坐标系,简称相向右手系,如图3.3.1所示。坐标轴的空间关系:两部天线相向或波场相向传播,垂直轴指向相同,水平轴指向相反。

在相向右手系中,假如两部天线发射同旋向椭圆极化波,则意味着两个波的场矢量端点在空中相遇时出现反向旋转,如图3.3.2所示。

3.3.3 相向右手系中的极化匹配系数

开路电压 $V=h^T(x,y)E^i(x,y)$ 用的是同一笛卡儿坐标系,所以在相向右手系中,计算

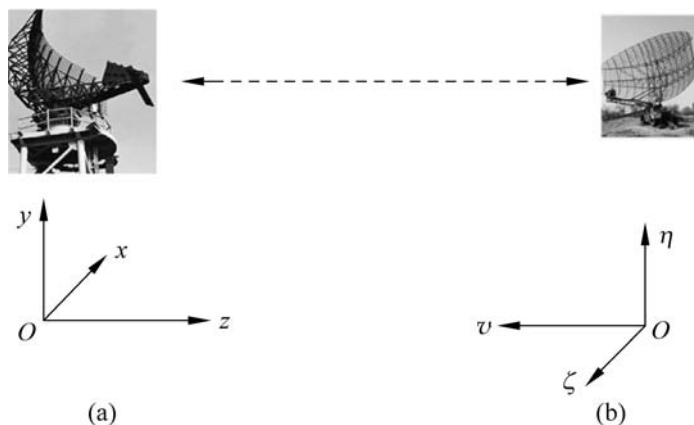


图 3.3.1 相向右手系

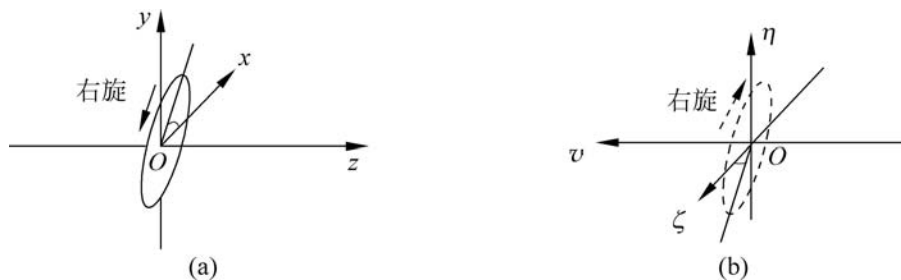


图 3.3.2 同旋向极化的端点运动方向示意

电压时必须转化到同一笛卡儿坐标系中。相向右手系如图 3.3.3 所示。

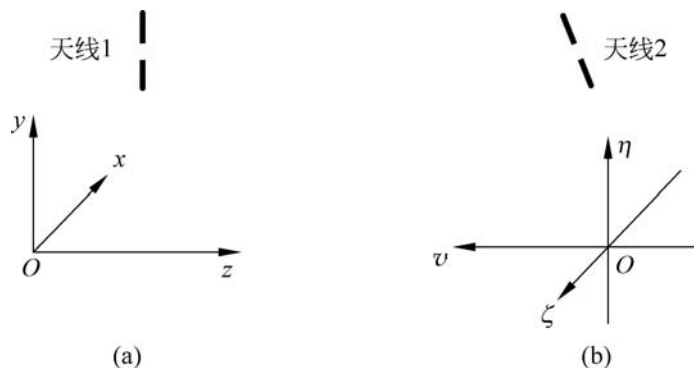


图 3.3.3 相向坐标系中的轴向关系

假定天线 1 发射、天线 2 接收,则天线 2 的端口开路电压为

$$V = \mathbf{h}^T(\zeta, \eta) \mathbf{E}^i(\zeta, \eta) = E_{\zeta}^i h_{\zeta} + E_{\eta}^i h_{\eta} \quad (3.3.2)$$

在相向右手系中,天线辐射场的两个正交分量有如下关系:

$$E_x^i = -E_\zeta^i, \quad E_y^i = E_\eta^i \quad (3.3.3)$$

天线 1 作为发射天线,其辐射场的矢量相量表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i &= E_x^i \hat{\mathbf{x}} + E_y^i \hat{\mathbf{y}} = E_0^i a_i (\hat{\mathbf{x}} + P_i \hat{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{E}^i &= E_0^i a_i \begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

式中, P_i 为线极性比。

因为任意天线的辐射场的矢量相量可以写为

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{jZ_0 I}{2\lambda r} e^{-jkr} \mathbf{h}(\theta, \varphi)$$

给上式做变形,则由辐射场可以得到任意天线的有效长度,并将它转换到同一个笛卡儿坐标系中,以符合电压方程的坐标系条件,得到表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \frac{2\lambda r}{jZ_0 I} e^{jkr} \mathbf{E} = \frac{2\lambda r}{jZ_0 I} e^{jkr} (E_\zeta^i \hat{\boldsymbol{\zeta}} + E_\eta^i \hat{\boldsymbol{\eta}}) \\ &= \frac{2\lambda r}{jZ_0 I} e^{jkr} E_0^i a_i (\hat{\boldsymbol{\zeta}} + P_i \hat{\boldsymbol{\eta}}) \\ &\triangleq h_0 (-\hat{\mathbf{x}} + P_i \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

式中, P_h 为接收天线的线极化比。

天线 2 作为接收天线,它的有效长度矢量,即天线极化的坐标向量为

$$\mathbf{h} = h_0 \begin{bmatrix} -1 \\ P_h \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

根据电压方程,接收天线 2 的端口开路电压为

$$V = \mathbf{h}^T \mathbf{E}^i = -E_0^i a_i h_0 (1 - P_i P_h) \quad (3.3.6)$$

由式(3.3.4)和式(3.3.5)可分别求得照射波功率密度及接收天线等效功率密度为

$$\|\mathbf{E}^i\|^2 = |E_0^i a_i|^2 \begin{bmatrix} 1 & P_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix} = |E_0^i a_i|^2 (1 + P_i P_i^*) \quad (3.3.7)$$

$$\| \mathbf{h} \|^2 = |h_0|^2 \begin{bmatrix} 1 & P_h^* \\ & P_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ P_h \end{bmatrix} = |h_0|^2 (1 + P_h P_h^*) \quad (3.3.8)$$

将式(3.3.6)~式(3.3.8)代入式(3.3.1),得到

$$\rho = \frac{VV^*}{\| \mathbf{E}^i \|^2 \| \mathbf{h} \|^2} = \frac{(1 - P_i P_h)(1 - P_i^* P_h^*)}{(1 + P_i P_i^*)(1 + P_h P_h^*)} \quad (3.3.9)$$

根据式(3.3.9),极化匹配时,可以得到接收天线极化比与被接收信号极化比的数学关系。

由 $\rho=1$ 可得

$$\begin{aligned} (P_i + P_h^*)(P_h + P_i^*) &= 0 \\ P_i &= -P_h^* \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

结论:在相向坐标系下,极化匹配时,接收天线的线极化比与被接收信号的线极化比互反复共轭,比同一笛卡儿坐标系中的极化关系多了一个负号。

若被接收信号是左旋圆极化,即线极化比为

$$P_i = \tan \gamma e^{j\phi}, \quad P_i \xrightarrow{\gamma=\pi/4, \phi=\pi/2} j$$

那么求得接收天线的线极化比为

$$P_h = -(P_i)^* = j \quad (3.3.11)$$

上式说明,左旋圆极化的天线可以最佳接收左旋圆极化的信号,达到极化匹配接收,获得最大接收功率,即得到了最佳接收效果。对右旋圆极化结论相同。所以,正面相向的、旋向相同的圆极化天线可以最佳地实现互为收发。

3.4 极化匹配条件的物理解释

前面已知,同一笛卡儿坐标系和相向右手系中的极化匹配条件有不同的数学表达式,很容易搞混淆。本节将基于物理事实,从这个角度来证明两套坐标体系中的极化匹配条件是等价的。

3.4.1 极化匹配条件的坐标系因素

同一笛卡儿坐标系中的极化匹配条件是 $P_r = P_i^*$ ，而相向右手系中的极化匹配条件是 $P_r = -P_i^*$ 。既然都是匹配，而且都是描述同一情形的事件，理应等价。

3.4.2 同一坐标系中的“物理事实”

观测和描述的参照系可以不同，但物理事实不应该被改变，这是两套坐标体系中极化匹配条件等价性证明的根本思路。为了叙述简洁，定义两个说法，即简单的两个术语：“物理事实”是指波场端点运动轨迹；“直观展示”是指对物理事实的图示。

同一坐标系中，设被接收波场的线极化比为

$$P_i = \tan\gamma e^{j\phi} \quad (3.4.1)$$

根据式(2.3.29)，被接收波场的极化椭圆几何参数为

$$\begin{cases} \tan 2\tau_i = \tan 2\gamma \cos \phi \\ \sin 2\epsilon_i = \sin 2\gamma \sin \phi \end{cases} \quad (3.4.2)$$

根据式(3.1.23)，极化匹配天线的线极化比为

$$P_r = P_i^* = \tan\gamma e^{-j\phi} \quad (3.4.3)$$

将式(3.4.3)代入式(2.3.29)，得到极化匹配天线的极化椭圆几何参数为

$$\begin{cases} \tan 2\tau_r = \tan 2\gamma \cos \phi \\ \sin 2\epsilon_r = -\sin 2\gamma \sin \phi \end{cases} \quad (3.4.4)$$

将式(3.4.2)与式(3.4.4)进行对比，得到

$$\epsilon_r = -\epsilon_i, \quad \tau_r = \tau_i \quad (3.4.5)$$

根据式(3.4.5)的参数关系，即接收天线极化椭圆和被接收波场极化椭圆的倾角相等、椭圆率角互反，因此可以得出“物理事实”的结论：极化椭圆形状完全相同、摆放一致，即长轴与长轴平行，短轴与短轴平行；波场端点轨迹的时针旋转方向相反，因为椭圆率角互反。设

图 3.4.1 中实线代表天线的极化椭圆并依据极化旋向定义的右手法则得出为右旋,而虚线所代表的被接收波场的极化只能称为轨迹走向。

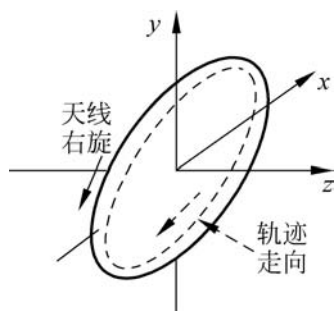


图 3.4.1 “物理事实”的直观展示

将同一坐标系中的“物理事实”进行拆分,拆分出的极化椭圆套上一个右手系,并与原坐标系共同建立相向右手系,以便确定极化旋向,如图 3.4.2 所示。

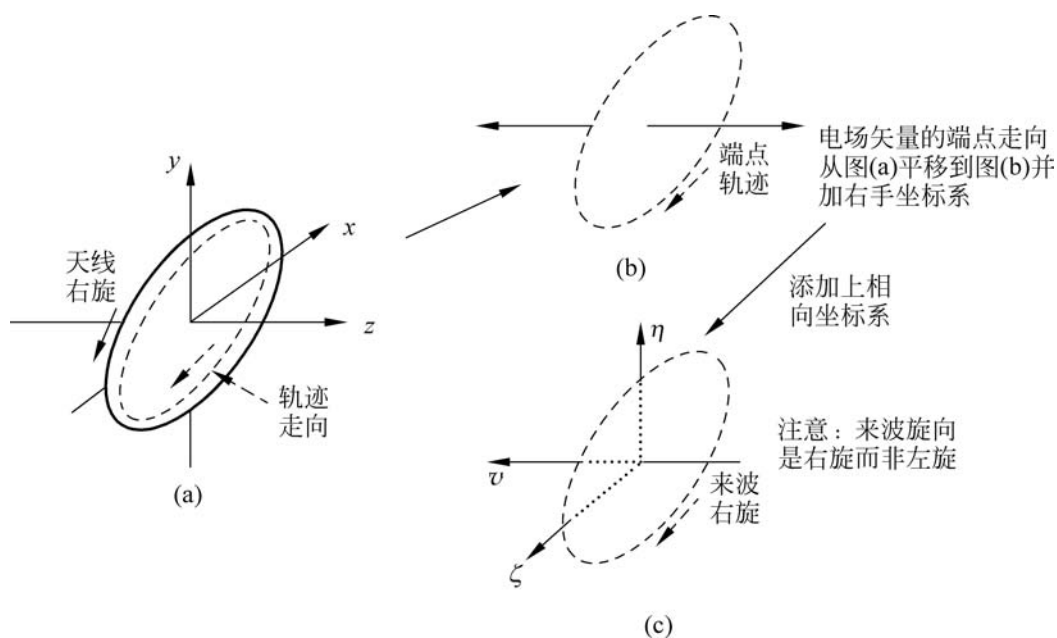


图 3.4.2 “物理事实”的拆分

结论: 同一坐标系中波场端点轨迹运动方向转化到相向右手系后统一了极化旋向说法,且推得波场极化也是右旋,与接收天线极化旋向相同。该结论可表述为,极化椭圆形状和极化旋向相同、椭圆长轴平行的两部天线能够实现最佳互为收发。

3.4.3 相向右手系中的“物理事实”

讨论分析思路与前面相同。在相向右手系中,被接收波场的线极化比为

$$P_i = \tan\gamma e^{j\phi} \quad (3.4.6)$$

根据式(2.3.29),被接收波场的极化椭圆几何参数为

$$\begin{cases} \tan 2\tau_i = \tan 2\gamma \cos \phi \\ \sin 2\epsilon_i = \sin 2\gamma \sin \phi \end{cases} \quad (3.4.7)$$

根据式(3.3.10),极化匹配天线的线极化比为

$$P_r = -P_i^* = -\tan\gamma e^{-j\phi} = \tan(\pi - \gamma) e^{-j\phi} = \tan(\gamma - \pi) e^{j(\pi - \phi)} \quad (3.4.8)$$

将式(3.4.8)代入式(2.3.29),得到极化匹配天线的极化椭圆几何参数为

$$\begin{cases} \tan 2\tau_r = \tan 2\gamma \cos(\pi - \phi) = -\tan 2\gamma \cos \phi \\ \sin 2\epsilon_r = \sin 2\gamma \sin(\pi - \phi) = \sin 2\gamma \sin \phi \end{cases} \quad (3.4.9)$$

将式(3.4.7)与式(3.4.9)进行对比,得到

$$\epsilon_r = \epsilon_i, \quad \tau_r = -\tau_i \quad (3.4.10)$$

根据式(3.4.10)的参数关系对极化匹配时“物理事实”做“直观展示”,如图 3.4.3 所示。

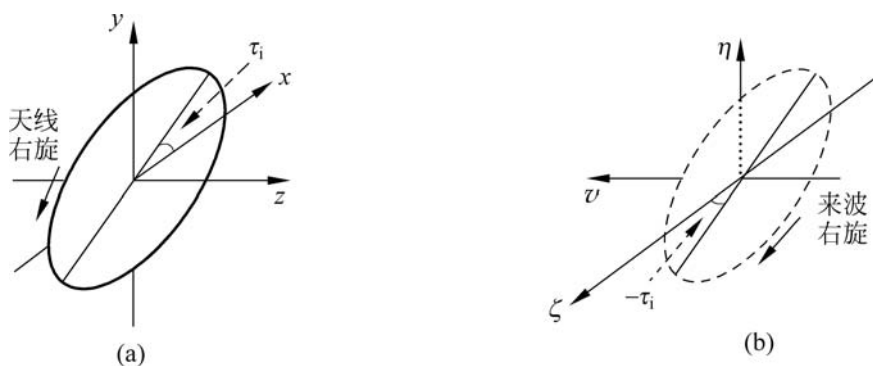


图 3.4.3 “物理事实”的直观展示

从式(3.4.10)及图 3.4.3 很容易看出,接收天线极化椭圆和被接收波场极化椭圆的椭圆率角相等、倾角互反,因此可以得出“物理事实”的结论:极化椭圆形状完全相同;因为倾角互反,故椭圆摆放一致,即椭圆的长轴与长轴平行,短轴与短轴平行;天线极化与波场极化的旋向相同。

将图 3.4.3 两个右旋极化轨迹合并置于左边的右手系,如图 3.4.4 所示,结果与上面介绍的同一坐标系中的物理事实相同(图 3.4.1),即波场端点轨迹走向相反。

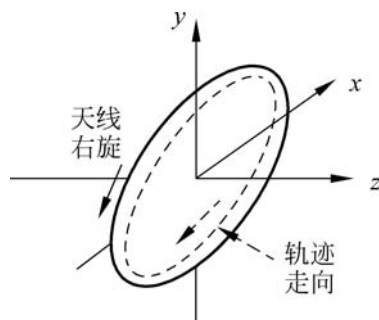


图 3.4.4 “物理事实”的合并

上面的讨论已充分说明,虽然在同一坐标系和相向右手系中的极化匹配条件的数学表达式不同,但它们各自所蕴含的基本“物理事实”是相同的,而且同一坐标系的“物理事实”可以拆分成相向右手系,反过来相向右手系的“物理事实”又可以合并成同一坐标系的。据此可以说明它们是等价的。

为了更直观地理解极化匹配条件的物理含义,再举一个简单例子:斜线极化天线的相互收发情况。

设被接收波场是斜线极化,它的线极化比为

$$P_i = \tan\gamma e^{j\phi} = \pm \tan\gamma, \quad \text{当 } \phi = 0 \text{ 或 } \pm\pi \text{ 时} \quad (3.4.11)$$

则根据相向右手系中的极化匹配条件,得到接收天线的线极化比为

$$P_r = -P_i^* = \mp \tan\gamma \quad (3.4.12)$$

它也是斜线极化。

任选波场带正号的线极化比,即 $P_i = +\tan\gamma$ 的情况来作图示,得到“物理事实”的直观展示结果如图 3.4.5 所示。从图中可直观地看出,两个收发双方的斜线极化是平行的,完全符合最佳收发的情况。

3.4.4 极化匹配条件的物理内涵

物理事实不因参照系的选择而改变,上面基于这个思路证明了两套坐标体系下极化匹

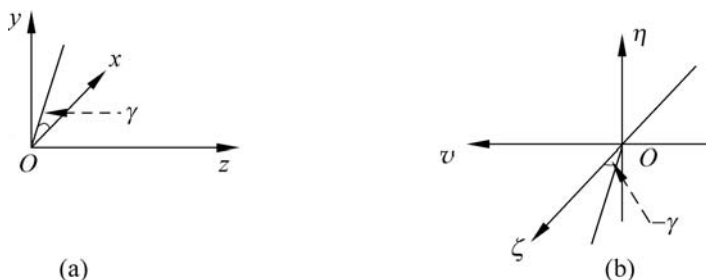


图 3.4.5 斜线极化天线的相互收发

配条件的等价性。下面任选相向坐标系的情形为例(同一坐标系为例也可),剖析极化匹配条件所蕴含的物理原理。

在图 3.4.3 中,根据极化匹配条件得到的“物理事实”做直观展示后,很容易看出:椭圆形状相同,长、短轴同类型平行。因此,接收天线极化椭圆保持与来波极化椭圆在朝向上最佳对准,类似于给来波创建了一个最佳通道以方便其顺畅地进入天线接收系统,这是最佳接收时天线与来波各自分量比例关系

$$\frac{|h_x|}{|h_y|} = \frac{|E_x^i|}{|E_y^i|}$$

在一个完整周期上的延伸,即在波场振荡周期内所有时刻都保持最佳的比例关系

$$\begin{aligned} \frac{|h_x(t)|}{|h_y(t)|} &= \frac{|E_x^i(t)|}{|E_y^i(t)|} \rightarrow \\ &= \frac{|h_x e^{j\omega_0 t} e^{-jkz} e^{j\phi_x^r}|}{|h_y e^{j\omega_0 t} e^{-jkz} e^{j(\phi_y^r + \delta_2)}|} \\ &= \frac{|E_x^i e^{j\omega_0 t} e^{-jkz} e^{j\phi_x^i}|}{|E_y^i e^{j\omega_0 t} e^{-jkz} e^{j(\phi_y^i + \delta_1)}|} = \frac{|h_x|}{|h_y|} = \frac{|E_x^i|}{|E_y^i|} \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

让天线极化椭圆上每个位置时刻都最佳地匹配“迎接”来波的电场强度矢量,每个时刻都保持着最佳感应。

为了更好地理解,可以将产生来波的天线看作一个旋转的理想线振子天线,那么接收天线也是线振子天线,它也能旋转并时刻保持与来波线振子天线的平行。如果互为收发双方的极化都是普通极化椭圆的情况,它们极化匹配接收时的椭圆形状相同、长轴与长轴平行对齐,这种情况应该使接收天线有效长度矢量与被接收信号的电场强度矢量,它们的指向在相同时刻都保持平行于一条直线上,时刻保持着最强感应。因为从物理上来讲,推测

的这种情况绝对是最佳的接收效果。

为此,考察接收天线和来波两者极化矢量的指向,对理解极化匹配条件的物理内涵是极有价值的。被接收的波场为

$$\begin{aligned}\xi(\omega_0 t, x, y, z) &= \operatorname{Re}[(|E_x| e^{j\phi_x} \hat{x} + |E_y| e^{j\phi_y} \hat{y}) e^{-jkz} e^{j\omega_0 t}] \\ &= \xi_x(t) \hat{x} + \xi_y(t) \hat{y}\end{aligned}$$

零时刻的电场强度矢量位置和指向由矢量相量决定,即

$$E(x, y, z) = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2} e^{j\phi_x} e^{-jkz} (\cos\gamma \hat{x} + \sin\gamma e^{j\phi} \hat{y})$$

零距离点上来波的矢量相量为

$$E_i(x, y) = \cos\gamma \hat{x} + \sin\gamma e^{j\phi} \hat{y}$$

由上式矢量相量表达式可以获得单色波场的线极化比为

$$P_i = \tan\gamma e^{j\phi}$$

根据极化匹配条件,接收天线的线极化比为

$$P_r = -P_i^* = -\tan\gamma e^{-j\phi} = \tan(\pi - \gamma) e^{-j\phi} = \tan(\gamma - \pi) e^{j(\pi - \phi)}$$

所以接收天线的矢量相量为

$$\begin{aligned}E_r(x, y) &= \cos(\gamma - \pi) \hat{x} + \sin(\gamma - \pi) e^{j(\pi - \phi)} \hat{y} \\ &= -\cos\gamma \hat{x} - \sin\gamma e^{j(\pi - \phi)} \hat{y}\end{aligned}$$

两个矢量起始指向如图 3.4.6 所示。

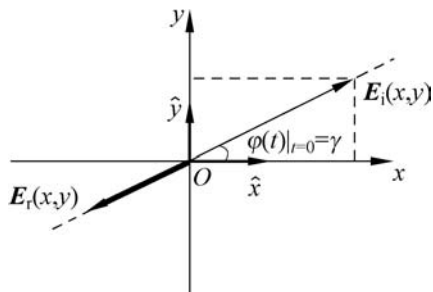


图 3.4.6 接收天线与来波两者的矢量起始指向

图中, $E_i(x, y)$ 是来波的矢量相量, $E_r(x, y)$ 是根据匹配条件得到的接收天线的矢量相量, 显然它们起始是在同一条平行线上(相位差只决定旋向)。

但是从图 3.4.4 可以看到, 接收天线极化和波场极化朝着相反的、空中交叉的方向旋转, 这种相互间的转向, 乍一想象, 觉得它们的指向几乎是不可能平行的。好在这种平行的条件是存在的, 即

$$\varphi_r(t) = \varphi_i(t) - \pi \quad (3.4.14)$$

$\varphi_i(t)$ 是某时刻被接收波场的极化指向, $\varphi_r(t) = \varphi_i(t) - \pi$ 是接收天线的极化指向, 时刻保持 180° 的指向差。一个周期内, 各自的指向形成一个形状相同的椭圆。因为振荡频率一样, 转一圈的时间相同, 如图 3.4.7 所示。

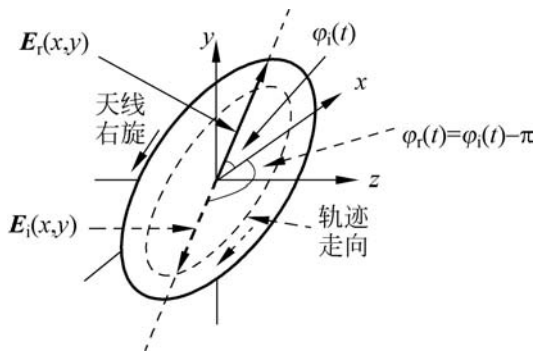


图 3.4.7 天线极化与被接收波极化匹配时的极化指向

需要特别注意, 不同频率可以有相同的极化椭圆, 但是各自频率周期内的电场强度矢量会因各自转速的不同而导致同时刻矢量指向的不同。这在讨论极化信号收发时特别重要, 即只有在频率相同的前提下才有极化匹配和极化失配的问题, 这也类似于电子系统中的信号分析, 只有在相同频率点上, 信号加、减等运算才有意义。

3.5 极化失配条件的物理解释

3.4 节从数学表征到“物理事实”再到“直观展示”, 详细讨论了极化匹配条件的物理内涵。本节关于极化失配条件的讨论思路与 3.3 节是一样的。“匹配”和“失配”这两个概念从数学角度似乎可以看成是正交的或者说相反的。这样, 基于极化匹配条件的物理解释, 可以运用极化对称性的认知先给极化失配条件的物理事实做个推测, 再给出具体的证明。推测结果如图 3.5.1 所示。

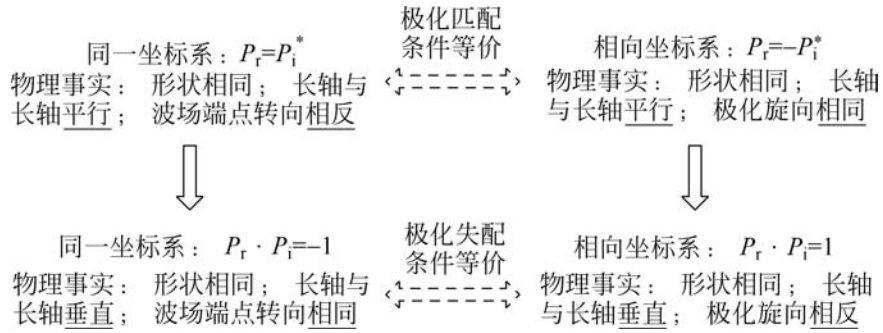


图 3.5.1 极化对称性的运用

3.5.1 极化失配条件的坐标系因素

同一坐标系中的极化失配条件为

$$P_r P_i = -1$$

相向右手系中极化失配条件可令式(3.3.9)为零时得到,推导过程如下:

$$\rho = \frac{VV^*}{\|E^i\|^2 \|h\|^2} = \frac{(1 - P_i P_r)(1 - P_i^* P_r^*)}{(1 + P_i P_i^*)(1 + P_r P_r^*)} = 0 \quad (3.5.1)$$

即

$$(1 - P_i P_r)(1 - P_i^* P_r^*) = 0$$

可推得

$$P_i = \frac{1}{P_r}, \quad P_i P_r = 1 \quad (3.5.2)$$

上式就是相向右手系中接收天线极化与被接收信号极化失配时的关系: 两者线极化比的乘积等于 1, 比同一坐标系中极化失配的条件少了一个负号。

例如, 被接收的来波是左旋圆极化, 线极化比为

$$P_i = \tan \gamma e^{j\phi} = j, \quad \gamma = \pi/4, \quad \phi = \pi/2 \quad (3.5.3)$$

根据式(3.5.2)得到接收天线的线极化比为

$$P_r = \frac{1}{P_r} = -j \quad (3.5.4)$$

结论：右旋圆极化的天线接收不到左旋圆极化的信号。该结论表述为：旋向相反的圆极化天线互为收发时，极化失配，接收信号功率为零。

两套坐标体系中的极化失配条件虽然不同，但它们应该是等价的；否则，就成了因为数学工具的运用而改变了事物本身，这显然不符合逻辑。下面予以证明。

3.5.2 同一坐标系中的“物理事实”

同一坐标系中，设被接收波场的极化比为

$$P_i = \tan\gamma e^{j\phi} \quad (3.5.5)$$

根据式(2.3.29)，被接收波场的极化椭圆几何参数为

$$\begin{cases} \tan 2\tau_i = \tan 2\gamma \cos \phi \\ \sin 2\epsilon_i = \sin 2\gamma \sin \phi \end{cases} \quad (3.5.6)$$

根据式(3.2.4)，极化失配天线的极化比为

$$P_r = -\frac{1}{P_i} = -\cot\gamma e^{-j\phi} = \tan(\pi/2 - \gamma) e^{j(\pi - \phi)} \quad (3.5.7)$$

将式(3.5.7)代入式(2.3.29)，得到极化失配天线的极化椭圆几何参数为

$$\begin{aligned} \tan 2\tau_r &= \tan 2(\pi/2 - \gamma) \cos(\pi - \phi) = \tan 2\gamma \cos \phi \\ &= \tan 2\tau_i = \tan(k\pi + 2\tau_i), k = 0, 1, \dots \\ &\stackrel{k=1}{=} \tan 2\left(\frac{\pi}{2} + \tau_i\right) \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\epsilon_r &= \sin 2(\pi/2 - \gamma) \sin(\pi - \phi) \\ &= \sin 2\gamma \sin \phi = \sin 2\epsilon_i \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

将式(3.5.6)与式(3.5.8)、式(3.5.9)进行对比，得到

$$\epsilon_r = \epsilon_i, \quad \tau_r = \frac{\pi}{2} + \tau_i \quad (3.5.10)$$

根据式(3.5.10)的参数关系,即接收天线极化椭圆的椭圆率角与被接收波场极化椭圆的椭圆率角相等、倾角相差 90° ,可以得出“物理事实”的结论:极化椭圆形状完全相同,并且长轴与长轴垂直;波场端点轨迹的时针旋转方向相同(因为椭圆率角相同)。图 3.5.2 对极化失配时“物理事实”做了“直观展示”,实线代表天线的极化椭圆并依据极化旋向定义的右手法则得出为右旋,那么虚线代表来波极化椭圆的旋向,只能称为端点轨迹走向。

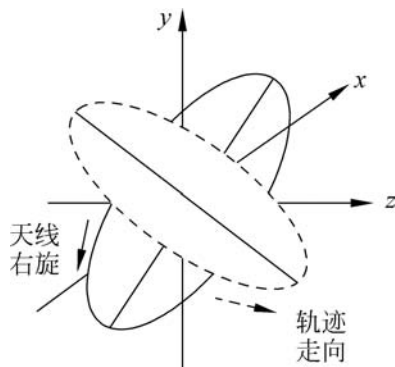


图 3.5.2 极化失配时的“物理事实”

3.5.3 相向右手系中的“物理事实”

相向右手系中,设被接收波场的极化比为

$$P_i = \tan\gamma e^{j\phi} \quad (3.5.11)$$

根据式(2.3.29),被接收波场的极化椭圆几何参数为

$$\begin{cases} \tan 2\tau_i = \tan 2\gamma \cos \phi \\ \sin 2\epsilon_i = \sin 2\gamma \sin \phi \end{cases} \quad (3.5.12)$$

根据式(3.5.2),极化失配天线的极化比为

$$P_r = \frac{1}{P_i} = \cot\gamma e^{-j\phi} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) e^{-j\phi} \quad (3.5.13)$$

将式(3.5.13)代入式(2.3.29),得到极化失配天线的极化椭圆几何参数为

$$\begin{aligned}\tan 2\tau_r &= \tan 2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \cos(-\phi) = -\tan 2\gamma \cos \phi \\ &= -\tan 2\tau_i = \tan 2\left(\frac{\pi}{2} - \tau_i\right)\end{aligned}\quad (3.5.14)$$

$$\sin 2\epsilon_r = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \sin(-\phi) = -\sin 2\gamma \sin \phi \quad (3.5.15)$$

将式(3.5.12)与式(3.5.14)、式(3.5.15)进行对比,得到

$$\epsilon_r = -\epsilon_i, \quad \tau_r = \frac{\pi}{2} - \tau_i \quad (3.5.16)$$

根据式(3.5.16)的参数关系,即接收天线极化椭圆的椭圆率角与被接收波场极化椭圆的椭圆率角互反、倾角相差 90° ,因此可以得出“物理事实”的结论:极化椭圆形状完全相同,并且长轴与长轴垂直;极化旋向相反(因为椭圆率角互反)。对极化失配时“物理事实”做“直观展示”如图3.5.3所示。

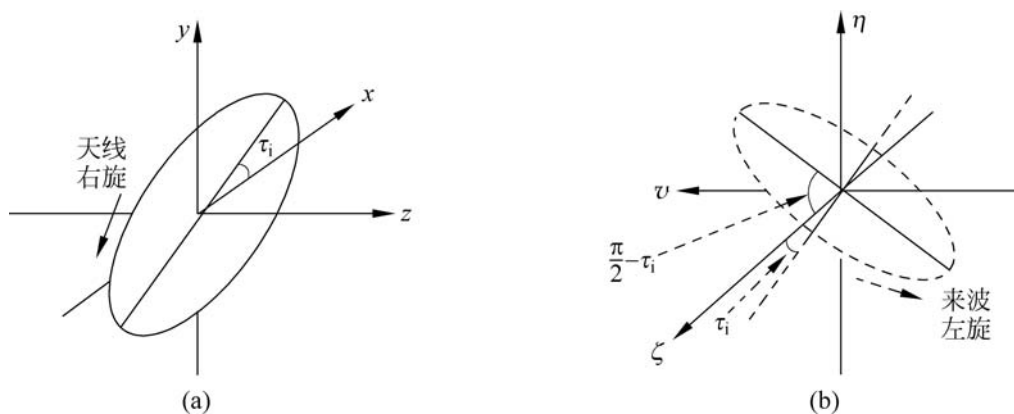


图 3.5.3 相向右手系的“物理事实”

将图3.5.3的右旋极化和左旋极化的端点轨迹合并置于左边的右手系,也就是图3.5.2,结果与同一右手系中的“物理事实”相同,端点轨迹走向相同。说明两个不同坐标系中的极化失配条件,从相同的直观展示说明它们完全等价,图3.5.4是等价性的物理事实总结。再次强调:同一右手系中任意一个如果叫了旋向,则另一个就不能用旋向概念了,只能表述为端点轨迹,而相向右手系就克服了这一缺陷,都可以用旋向的概念。

为了更直观地理解极化失配条件的物理含义,再举一个简单例子:斜线极化天线的相互收发情况。

设被接收波场是斜线极化,它的线极化比为

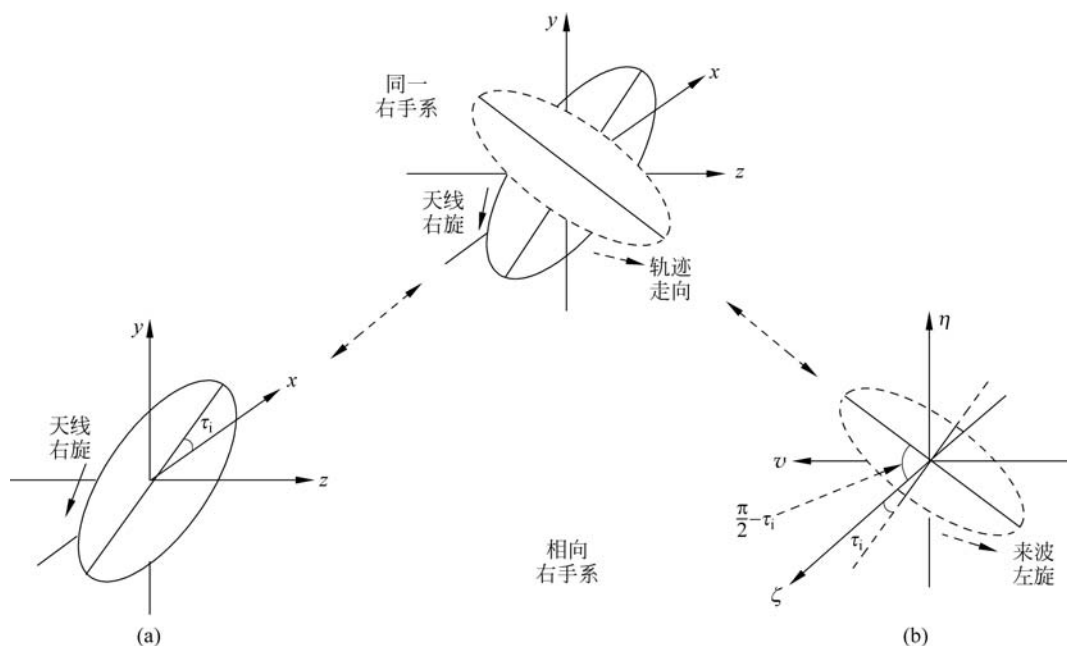


图 3.5.4 两套坐标系中“物理事实”的分与合

$$P_i = \tan \gamma e^{j\phi} = \pm \tan \gamma, \quad \phi = 0, \pm \pi \quad (3.5.17)$$

则根据相向右手系中的极化失配条件,得到接收天线的线极化比为

$$P_r = \frac{1}{P_i} = \pm \cot \gamma = \pm \tan \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \quad (3.5.18)$$

它也是斜线极化。

任选波场线极化比带正号($P_i = +\tan \gamma$)的情况来作极化图形,得到物理事实的直观展示结果如图 3.5.5 所示。

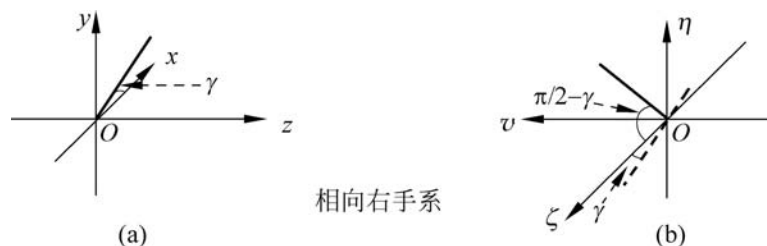


图 3.5.5 相向右手系斜线极化天线的相互收发

从图 3.5.6 中可直观地看出,两个收发双方的斜线极化是垂直的,完全符合最差收发的

情况,相互间收不到信号。

3.5.4 极化失配条件的物理内涵

物理事实不因参照系的选择而改变,基于这个思路证明了两套坐标体系中极化失配条件的等价性。下面任选相向坐标系的情形为例(同一坐标系为例也可),来剖析极化失配条件所蕴含的物理原理。

在图 3.5.4 中,根据极化失配条件得到的“物理事实”做“直观展示”后,很容易看得出:椭圆形状相同,长轴之间垂直。这意味着接收天线的极化椭圆保持着与来波极化椭圆的最差面向,是最差接收时天线与来波的各自分量比例关系

$$\begin{aligned}\frac{|h_y|}{|h_x|} e^{j\delta_1} &= -\frac{|E_x^i|}{|E_y^i|} e^{-j\delta_2} \\ \frac{|h_y|}{|h_x|} e^{j\delta_1} &= -1 / \left(\frac{|E_y^i|}{|E_x^i|} e^{j\delta_2} \right)\end{aligned}$$

即分量间的大小比例关系为

$$\frac{|h_y|}{|h_x|} = \frac{|E_x^i|}{|E_y^i|} \quad (3.5.19)$$

在一个完整周期的时间上延伸,即在波场振荡周期内所有时刻都保持着最差的比例关系,每个时刻上的大小比例关系为

$$\begin{aligned}\frac{|h_y(t)|}{|h_x(t)|} &= \frac{|E_x^i(t)|}{|E_y^i(t)|} \\ \frac{|h_y e^{j\omega_0 t} e^{-jkz} e^{j(\phi_y^r + \delta_2)}|}{|h_x e^{j\omega_0 t} e^{-jkz} e^{j\phi_x^r}|} &= \frac{|E_x^i e^{j\omega_0 t} e^{-jkz} e^{j\phi_x^i}|}{|E_y^i e^{j\omega_0 t} e^{-jkz} e^{j(\phi_y^i + \delta_1)}|} = \frac{|h_y|}{|h_x|} = \frac{|E_x^i|}{|E_y^i|} \quad (3.5.20)\end{aligned}$$

这种关系使得每时刻的天线有效长度都“拒绝”来波的电场强度矢量,即在每个时刻天线有效长度与被接收波场矢量都保持着正交而没有感应。这样,没有感应电压,也就没有接收到信号,天线的接收功率为零。

考查接收天线和来波两者矢量指向对理解极化失配是极有价值的。波场的表达式为

$$\begin{aligned}\xi(\omega_0 t, x, y, z) &= \text{Re}[(|E_x| e^{j\phi_x} \hat{x} + |E_y| e^{j\phi_y} \hat{y}) e^{-jkz} e^{j\omega_0 t}] \\ &= \xi_x(t) \hat{x} + \xi_y(t) \hat{y}\end{aligned}$$

零时刻的电场强度矢量位置由矢量相量决定,即

$$E(x, y, z) = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2} e^{j\phi_x} e^{-jkz} (\cos\gamma \hat{x} + \sin\gamma e^{j\phi} \hat{y})$$

零距离点上来波的矢量相量为

$$E_i(x, y) = \cos\gamma \hat{x} + \sin\gamma e^{j\phi} \hat{y}$$

单色波场的线极化比为

$$P_i = \tan\gamma e^{j\phi}$$

根据失配条件,接收天线的线极化比为

$$P_r = \frac{1}{P_i} = \cot\gamma e^{-j\phi} = \tan(\pi/2 - \gamma) e^{-j\phi} = \tan(\gamma - \pi/2) e^{j(\pi - \phi)}$$

所以接收天线极化的矢量相量为

$$\begin{aligned} E_r(x, y) &= \cos(\gamma - \pi/2) \hat{x} + \sin(\gamma - \pi/2) e^{j(\pi - \phi)} \hat{y} \\ &= \sin\gamma \hat{x} - \cos\gamma e^{-j\phi} \hat{y} \end{aligned}$$

两个矢量起始指向如图 3.5.6 所示。

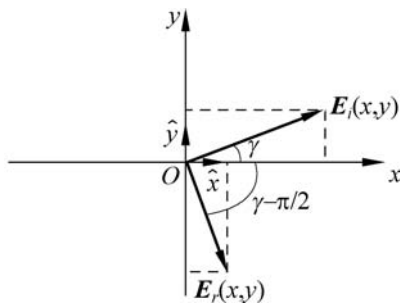


图 3.5.6 接收天线与来波两者的极化指向关系

图中, $E_i(x, y)$ 是来波的矢量相量, $E_r(x, y)$ 是根据失配条件得到的接收天线的矢量相量。显然, 它们是正交的。而且从图 3.5.2 看到, 它们朝相同方向旋转, 起始后的每个时刻都保持着垂直正交, 产生不了感应电压, 接收功率为零。

利用式(3.5.20)和图 3.5.2 的直观展示, 以及图 3.5.6 接收天线与来波两者的极化指向关系, 可以画出图 3.5.7 所示的“物理事实”: 极化失配时, 天线与来波的极化指向始终保持正交, 即

$$\varphi_r(t) = \varphi_i(t) + \pi/2 \quad (3.5.21)$$

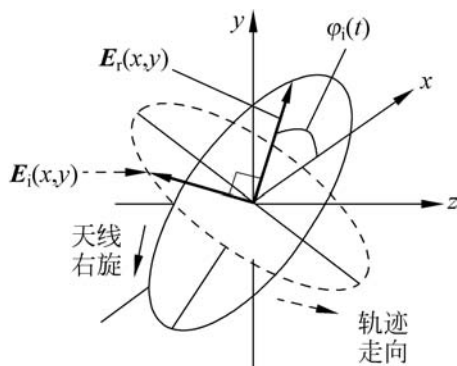


图 3.5.7 天线与来波的极化指向

为了更好地理解,将产生来波的天线看作一个旋转的理想线振子天线,那么接收天线也是线振子天线,它也能够旋转并时刻保持与辐射来波线振子天线的垂直。同样,对于收发双方都是普遍极化椭圆的情况,长轴与长轴垂直就意味着同时刻的接收天线有效长度矢量与被接收信号的电场强度矢量每个时刻都保持在正交状态,不产生感应电压。

思考:不同频但极化椭圆可以相同,这种情况下能互为正交吗?结果是什么?

3.5.5 应用举例:线极化与圆极化的互为收发

对抗中的双方要面临的是功率博弈,这与极化选择密切相关。

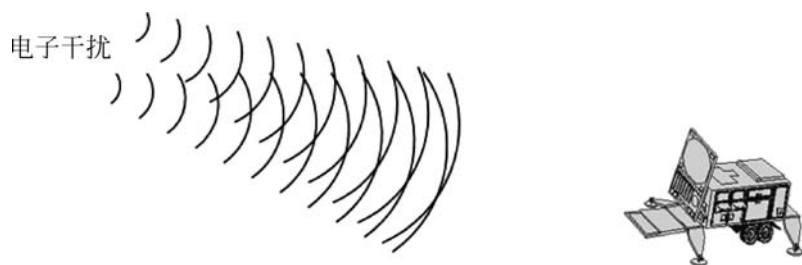


图 3.5.8 对抗中的极化选择

1. 极化选择

假如只有线极化和圆极化可控选择,那么雷达是选择线极化还是圆极化?而红方干扰机的极化相应地选择什么方式?

2. 功率分析

(1) 用圆极化去干扰线极化,功率损失 3dB,见下式:

$$P_i = \pm \tan \gamma e^{j\phi} = \pm j, \quad P_r = \tan \gamma$$

$$\rho = \frac{(1 - P_i P_h)(1 - P_i^* P_h^*)}{(1 + P_i P_i^*)(1 + P_h P_h^*)} = \frac{1}{2} \quad (3.5.22)$$

(2) 用线极化去干扰圆极化, 功率同样损失 3dB, 见下式:

$$P_i = \tan \gamma, \quad P_r = \pm \tan \gamma e^{j\phi} = \pm j$$

$$\rho = \frac{(1 - P_i P_h)(1 - P_i^* P_h^*)}{(1 + P_i P_i^*)(1 + P_h P_h^*)} = \frac{1}{2} \quad (3.5.23)$$

3. 接收效果解释

线极化与圆极化互为收发, 为何都会损失 3dB? 理论上, 代入极化效率公式都得到 1/2。物理上, 圆极化接收线极化时, 不能想当然地认为接收时无损失, 误以为是最佳接收极化。事实上, 与它平行的某个线极化才是最佳接收极化, 图解如图 3.5.9 所示。

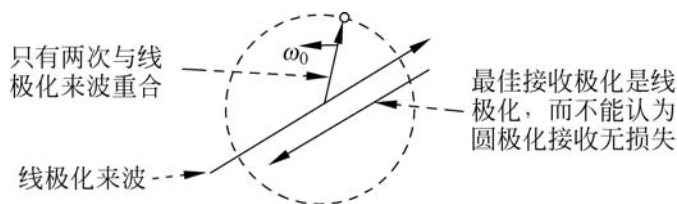


图 3.5.9 圆极化接收线极化来波效果示意

3.5.6 伪本征极化、天线互为收发、正交极化基等问题综合比较

多种情况下的极化关系对比如表 3.5.1 所示。

表 3.5.1 多种情况下的极化关系对比

对比内容	坐标系	匹配	失配
伪本征方程	同一坐标系	$P_s = P_i^*$	$P_s P_i^* = -1$
天线互为收发	同一坐标系	$P_r = P_i^*$	$P_r P_i^* = -1$
	相向坐标系	$P_r = -P_i^*$	$P_r P_i^* = 1$
正交极化基	同一坐标系	内积 $\langle E_{\perp}^H, E_{\parallel} \rangle = E_{\perp}^H E_{\parallel} = 0 \rightarrow P_{\perp} P_{\parallel}^* = -1$	

伪本征方程(第4章将介绍)源自电压方程, 故采用的是同一坐标系, 目标回波接收时的极化匹配和失配条件等同于天线互为收发时采用同一坐标系情况。

天线互为收发与雷达目标二次反射的接收情况在物理含义上是一致的, 采用同一坐标

系,发和收二者是不能同时表达旋向的,其中一个只能表达电场强度矢量端点随时间的走向。而采用相向右手系时,就符合了关于旋向的定义,那么无论对发射还是对接收来讲,极化旋向的叫法就一致了。

正交极化基建立在同一右手系下的描述和表征,支撑波场正交分解,任一波场做正交分解,两个正交分量的波是朝同一方向传播的。构成极化基的两个同方向传播的正交波(其矢量相量分别为 $E_{//}$ 、 $E_{\perp}$)的极化关系推导如下:

$$\begin{aligned} E_{//} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad E_{\perp} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ E_{//}^H E_{\perp} &= 0 \\ \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= 0 \\ P_{//}^* P_{\perp} &= -1 \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

正交极化定义的直观展示:

令 $P_1 = \tan\gamma e^{j\phi}$, 由条件

$$P_1 P_2^* = -1, \quad \begin{cases} \sin 2\epsilon_1 = \sin 2\gamma \sin \phi \\ \tan 2\tau_1 = \tan 2\gamma \cos \phi \end{cases}$$

可得

$$P_2 = -\frac{1}{P_1^*} = -\cot\gamma e^{j\phi} = \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) e^{j\phi} \quad (3.5.25)$$

$$\sin 2\epsilon_2 = \sin 2\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \sin \phi = -\sin 2\gamma \sin \phi = -\sin 2\epsilon_1 \quad (3.5.26)$$

$$\begin{aligned} \tan 2\tau_2 &= \tan 2\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \cos \phi = -\tan(\pi - 2\gamma) \cos \phi = \tan 2\gamma \cos \phi \\ &= \tan 2\tau_1 = \tan(k\pi + 2\tau_1), \quad k=0,1,\dots \\ &\stackrel{k=1}{=} \tan 2\left(\frac{\pi}{2} + \tau_1\right) \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

则它们极化椭圆几何参数的关系为

$$\epsilon_2 = -\epsilon_1, \quad \tau_2 = \frac{\pi}{2} + \tau_1 \quad (3.5.28)$$

式(3.5.28)表明,极化基的“物理事实”是:正交波的传播方向相同;极化椭圆形状相同、旋向相反;长轴与长轴垂直。总之是一对正交波,如图3.5.10所示(坐标系原点符号表达波传播方向是向着读者的)。

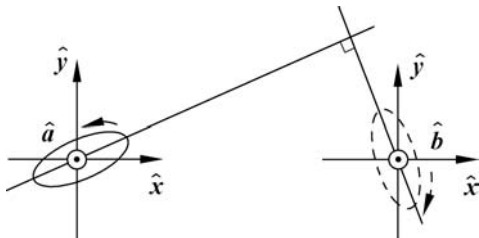


图 3.5.10 构成极化基的一对正交波

3.6 非单色波的极化与接收

传统的部分极化概念,其内涵包括完全极化波、部分极化波和未极化波,很容易让读者迷惑,主要问题是“部分极化”概念与其涵括的“部分极化波”在含义上有重叠,同时部分极化概念中涵括“完全极化波”又让人觉得概念不明晰有冲突。考虑到部分极化波在频域具有窄带性而非单色,故作者用“非单色波极化”术语替代传统的部分极化概念,内涵不变,仍然包括全极化波、部分极化波和未极化波,这样避免了含义上的重叠与混淆。非单色波极化术语还有另外的好处,与单色波极化的对比鲜明,利于学习和把握全面的内容。

单色 TEM 波可以表达成

$$\xi(\omega_0 t, x, y, z) = \text{Re}\{[|E_x| e^{j\phi_x} \hat{x} + |E_y| e^{j\phi_y} \hat{y}] e^{-jkz} e^{j\omega_0 t}\}$$

实际中,振荡源做不到绝对的稳定,其产生的波场不会是绝对相干单色的,两个正交分量的振幅与相位差随时间会有慢变化,此时两个正交分量的合成场矢量端点运动轨迹随时间变化,不再是一个确定的椭圆,这样的波称为非单色波,它的带宽一般很窄。如果两个正交分量的幅度和相位随时间做随机变化,则称为随机极化波。雷达目标回波因环境噪声和接收机内部噪声等因素的影响,一般是随机极化波。如果两个正交分量之间没有任何关系,这种情况下的波是完全随机极化波,也称为未极化波。本节主要有两项内容:一是非单色波极化的描述和表征;二是非单色波的接收。非单色波极化的描述和表征是接收该类波的基础,思路主要有两点:一是窄带内频率取平均;二是两个正交分量的相关性度量和非单色波极化度的定义与表征。

3.6.1 非单色波的特征

现实中只有实信号,故非单色波的数学表达式是一个实数函数,即

$$E^r(t) = a(t) \cos[\omega t + \phi(t)] \quad (3.6.1)$$

式中:上标 r 意为 real; $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 是时变实数。

非单色波一般是准单色的,原因是其两个正交分量的振幅和相位都随时间做慢变化,这时的波场近似为某个余弦振荡。为了研究分析的方便,上述实函数通常采用指数函数形式来表示,而解析信号就是这样一个与实函数有关的复函数,其虚部可由实部的希尔伯特变换而得到

$$E(t) = a(t) \exp\{j[\omega t + \phi(t)]\} = E^r(t) + jE^i(t) \quad (3.6.2)$$

虚部为实部的希尔伯特变换,积分号上的短画线表示该积分的柯西主值:

$$E^i(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^r(t')}{t' - t} dt'$$

非单色波两个正交分量也就是解析信号两个正交分量(两正交分量均省略相位项 $-kz$),即

$$\begin{cases} E_x(t) = a_x(t) \exp\{j[\omega_{\Delta} t + \phi_x(t)]\} \\ E_y(t) = a_y(t) \exp\{j[\omega_{\Delta} t + \phi_y(t)]\} \end{cases} \quad (3.6.3)$$

式中: $a(t)$ 、 $\phi(t)$ 为慢时变; ω_{Δ} 为平均角频率。

非单色波场矢量可以写成坐标向量的形式,即

$$E(t) = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

与单色波表达类似,角频率取平均后的非单色波或准单色波的矢量相量表征为

$$E(t) = a_x(t) \exp[j\phi_x(t)] \hat{x} + a_y(t) \exp[j\phi_y(t)] \hat{y} \quad (3.6.5)$$

而与单色波表征式不同的是,非单色波两个正交分量的振幅和相位差随时间而变。关于角频率取平均,为了加深理解、强化印象,做如下两点说明:

(1) 相参性的近似。假设有一个载频,其频率稳定度是 10^{-9} ,其含义是每秒振荡 10 亿次时,会多振荡 1 次或少振荡 1 次。比如,少振荡 1 次,那么振荡源的波长误差为 $\lambda \times 10^{-9}$,

相位误差为 $2\pi \times 10^{-9}$ 。从数据中看到相位几乎没有变化,足以确保每个振荡的相参性。

(2) 联系实际系统。假设发射脉宽为 $1\mu\text{s}$ 的实际雷达系统,如图 3.6.1 所示的是发射脉冲。

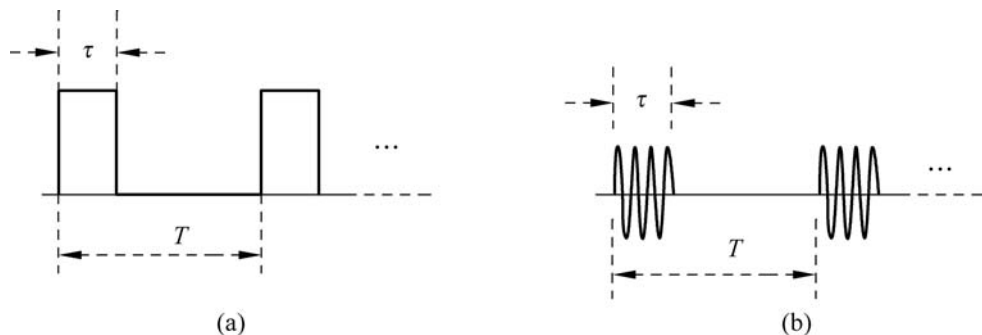


图 3.6.1 发射脉冲

该脉冲对应的带宽约 1MHz ,显然是一个窄带系统,若载频 $f_0 = 10\text{GHz}$,那么 1MHz 带宽内的所有频率,最大相位误差为

$$\Delta\phi = \frac{0.5\text{MHz}}{10 \times 1000\text{MHz}} \times 360^\circ = 0.018^\circ$$

从上述计算结果显然可以看出,带宽内的所有振荡近似于相参叠加,即近似于矢量同向合成。而一般的慢变化,其信号时域波形远比 $1\mu\text{s}$ 的脉冲延展得更宽,即比 $1\mu\text{s}$ 脉宽信号的带宽更窄,则它们的最大相位差更小,基本上可以认为是同相起振。窄带内所有振荡矢量同时刻近似同向叠加,窄带内每个振荡的特性几乎是相同的,因此慢变化时的频率可做平均运算。在式(3.6.3)中,振幅、相位函数变化很慢,则在麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ 中的时间导数可用平均角频率代替。下面对慢变化的窄带性进行简单推导说明:

(1) 慢变振幅,其频谱在零频附近,设为 $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$,如图 3.6.2 所示。

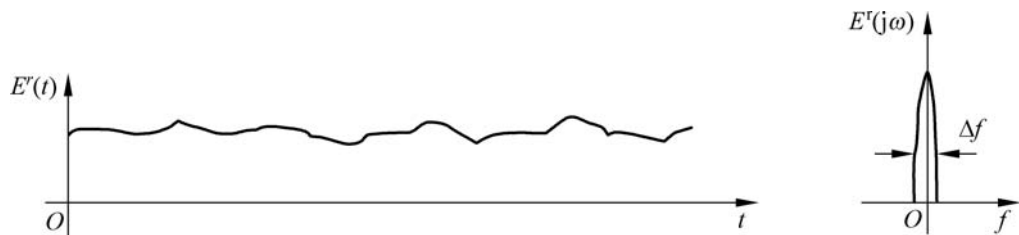


图 3.6.2 慢变振幅

(2) 慢变相位,有如下近似:

$$\varphi(t) = \omega_{\Delta} t + \phi(t)$$

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \omega_{\Delta} + \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \quad (3.6.6)$$

式(3.6.3)时域相乘的表达式,对应在频域是卷积,按快速定理法,最大频率为

$$\omega_{\max} = \omega_{\Delta} + \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} + 2\pi(\Delta f/2)$$

因为

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \ll \omega_{\Delta}, \quad \pi \Delta f \ll \omega_{\Delta}$$

所以

$$\omega_{\max} \approx \omega_{\Delta} \quad (3.6.7)$$

最大频率约等于平均频率,说明频谱很窄,窄带内所有振荡矢量同时刻可近似同向合成。

3.6.2 非单色波的相干矩阵

单色波振荡具有规律性,时空特性很明确,表征起来简单而明晰。而非单色波包括大量频率成分,不同振荡之间相互影响,表征它需要新思路。非单色波具有窄带性,其样本在一定时间内能够遍历,这样就可以研究波场分量间的相关度,乃至获得非单色波极化的表征和度量方法。

1. 信号截断平均

在某一观测横截面上建立笛卡儿坐标系如图 3.6.3 所示,将波场写成与 x 轴成 $\theta(t)$ 角的形式,由图可得如下复标量关系:

$$E(t, \theta(t)) = E_x(t) \cos \theta(t) + E_y(t) \sin \theta(t) \quad (3.6.8)$$

观测一定时间获得截断函数:

$$E_T = \begin{cases} E(t, \theta(t)), & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (3.6.9)$$

式中: T 为采样时间。

做时间平均运算:

$$I = \langle E(t, \theta(t)) E^*(t, \theta(t)) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E_T E_T^* dt \quad (3.6.10)$$

$T \rightarrow \infty$ 表示确保样本遍历,并不是说时间一定要到无穷大。比如,若是周期的,则一个周期时间的样本即可。

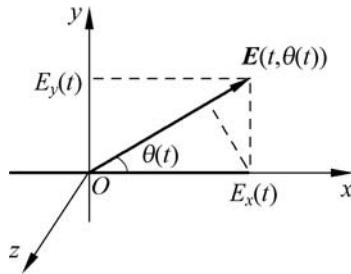


图 3.6.3 波场的分解

2. 相干矩阵

非单色波场矢量(同时刻所有振荡矢量的合成)写成坐标向量形式为

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} \quad (3.6.11)$$

则相干矩阵定义为

$$\mathbf{J} = \langle \mathbf{E}(t) \mathbf{E}(t)^H \rangle \quad (3.6.12)$$

按照式(3.6.10)时间平均的定义,则有

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_x(t) E_x^*(t) \rangle & \langle E_x(t) E_y^*(t) \rangle \\ \langle E_y(t) E_x^*(t) \rangle & \langle E_y(t) E_y^*(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (3.6.13)$$

再利用式(3.6.5)的两个分量,得到相干矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle a_x^2(t) \rangle & \langle a_x(t) a_y(t) e^{j[\phi_x(t) - \phi_y(t)]} \rangle \\ \langle a_x(t) a_y(t) e^{j[\phi_y(t) - \phi_x(t)]} \rangle & \langle a_y^2(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (3.6.14)$$

与处理单色波一样,场的时平均坡印廷矢量(功率密度)正比于相干矩阵的迹:

$$S = (\langle a_x^2(t) \rangle + \langle a_y^2(t) \rangle) = \text{tr}[\mathbf{J}] = J_{xx} + J_{yy} \quad (3.6.15)$$

波的分解对应相干矩阵的分解,且具有唯一性。相干矩阵的物理内涵:一是能够表达波的能量意义;二是描述了波场两个分量之间的相关度。下面紧接着给出相关度的概念和特殊相干矩阵。

3. 相关度

相干矩阵的次对角线项可以归一化为

$$\mu_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}} \sqrt{J_{yy}}} = |\mu_{xy}| \exp(j\beta_{xy}) \quad (3.6.16)$$

利用施瓦茨不等式可以证明

$$|\mu_{xy}| \leq 1 \quad (3.6.17)$$

式(3.6.16)是衡量波场正交分量之间相关性的量(时平均运算),称为相关度。其值为1时称为分量间互为相干,其值为零时称为分量互不相关。从相干矩阵定义式(3.6.13)中可以看出 J_{xx} 、 J_{yy} 为正实数,且有 $J_{xy} = J_{yx}^*$ 。因而相干矩阵的行列式为

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx}^* = J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2 \\ &= J_{xx}J_{yy}(1 - |\mu_{xy}|^2) \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

可见

$$0 \leq |\mathbf{J}| \leq J_{xx}J_{yy} \quad (3.6.19)$$

4. 特殊相干矩阵

1) 全极化波的相干矩阵

单色波是全极化波,非单色波也可以是全极化波,所以全极化波相干矩阵分为单色波相干矩阵和非单色波相干矩阵两种情况。

(1) 单色波的相干矩阵。因为单色波的振幅、相位与时间无关,这种情况下的时平均运算符号 $\langle \cdot \rangle$ 消失,式(3.6.14)变为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_y e^{-j\phi} \\ a_x a_y e^{j\phi} & a_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.6.20)$$

单色波场两个正交分量之间的相关度为

$$\mu_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}} \sqrt{J_{yy}}} = \frac{a_x a_y e^{-j\phi}}{a_x a_y} = e^{-j\phi} \quad (3.6.21)$$

由式(3.6.21)得到

$$|\mu_{xy}| = 1 \quad (3.6.22)$$

即单色波的两个正交分量之间具有完全的相干性。

(2) 非单色波的相干矩阵。非单色波也可以成为完全极化波,条件是振幅比及相位差与时间无关,即

$$\frac{a_y(t)}{a_x(t)} = c_1 = \text{const}, \quad \phi = \phi_y(t) - \phi_x(t) = c_2 = \text{const} \quad (3.6.23)$$

式中的条件说明在图 3.6.3 中, $\tan\theta(t) = c_1, \theta(t) = \gamma$ 是与时间无关的常数,代入式(3.6.14)得到非单色波的相干矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle a_x^2(t) \rangle & c_1 \langle a_x^2(t) \rangle e^{-jc_2} \\ c_1 \langle a_x^2(t) \rangle e^{jc_2} & c_1^2 \langle a_x^2(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (3.6.24)$$

显然有

$$\mu_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}} \sqrt{J_{yy}}} = e^{-jc_2}$$

$$|\mu_{xy}| = 1 \quad (3.6.25)$$

可见此时的非单色波为完全极化波,它的两个正交分量为

$$E_x = \sqrt{\langle a_x^2(t) \rangle} e^{j(\omega t + \phi_x)}, \quad E_y = c_1 \sqrt{\langle a_x^2(t) \rangle} e^{j(\omega t + \phi_x + c_2)} \quad (3.6.26)$$

对完全极化波,相干矩阵的行列式为零,即

$$|\mathbf{J}| = J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2 = J_{xx}J_{yy}(1 - |\mu_{xy}|^2) = 0 \quad (3.6.27)$$

2) 线极化波的相干矩阵

线极化波成为完全极化条件,波场分量间的相位差必须满足 $\phi = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \pm m\pi, m=0,1,2, \dots$ 。

(1) 单色线极化波的相干矩阵为

$$e^{-j\phi} = \cos\phi - j\sin\phi \stackrel{\phi=\pm m\pi}{=} e^{-jm\pi} = e^{jm\pi} = (-1)^m, \quad m=0,1, \dots$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_x^2 & (-1)^m a_x a_y \\ (-1)^m a_x a_y & a_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.6.28)$$

(2) 非单色完全线极化波的相干矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle a_x^2(t) \rangle & (-1)^m c_1 \langle a_x^2(t) \rangle \\ (-1)^m c_1 \langle a_x^2(t) \rangle & c_1^2 a_x^2(t) \end{bmatrix} \quad (3.6.29)$$

(3) 特殊线极化: x 向、 y 向、 45° 、 135° , 相干矩阵分别为

$$\mathbf{J} = \omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; |\mathbf{J}| = 0 \quad (3.6.30)$$

3) 圆极化波的相干矩阵

圆极化波两个正交分量的振幅相等, 而它们之间的相位差为正负 90° , 即

$$|E_x| = |E_y|, \quad \phi = \pm \frac{1}{2}\pi \quad (3.6.31)$$

相位差的正、负号分别对应左、右旋圆极化。相干矩阵分别为

$$\mathbf{J} = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}; \quad |\mathbf{J}| = 0 \quad (3.6.32)$$

4) 未极化波的相干矩阵

未极化波就是极化度为零(3.6.3节即将介绍), 条件为

$$J_{xy} = J_{yx} = 0, \quad J_{xx} = J_{yy} \quad (3.6.33)$$

则波场两个分量是完全不相关的。这时, 相干矩阵简化为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 \\ 0 & J_{yy} \end{bmatrix} \xrightarrow{J_{xx}=J_{yy}} \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6.34)$$

式(3.6.30)、式(3.6.32)、式(3.6.34)中的 $\omega = J_{xx} + J_{yy}$, 是波场的功率密度。

3.6.3 非单色波的极化度

一个平面波可以认为是同方向传播的 N 个独立平面波之和。以此类推, 可以设想, 一

个非单色波(准单色波)可看成一个未极化波和一个完全极化波之和,波的这种分解对应着相干矩阵的分解,具有唯一性。

1. 相干矩阵分解

相干矩阵分解相应于准单色波的分解,可以证明,任何相干矩阵可唯一地分解为一个未极化波的相干矩阵加上一个全极化波的相干矩阵,即

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_f \quad (3.6.35)$$

式中

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} B & D \\ D^* & C \end{bmatrix} \quad (3.6.36)$$

根据相干矩阵元素的性质以及全极化波相干矩阵行列式为零,即有

$$A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0, BC - DD^* = |\mathbf{J}_f| = 0 \quad (3.6.37)$$

下面证明式(3.6.35)这种分解的唯一性。由式(3.6.35)和式(3.6.36)可以得到如下关系式:

$$\begin{cases} A + B = J_{xx}, & D = J_{xy} \end{cases} \quad (3.6.38a)$$

$$\begin{cases} D^* = J_{yx}, & A + C = J_{yy} \end{cases} \quad (3.6.38b)$$

将式(3.6.38)代入式(3.6.37)中的 $BC - DD^* = |\mathbf{J}_f| = 0$,可以得到一个关于 A 的一元二次方程:

$$(J_{xx} - A)(J_{yy} - A) - J_{xy}J_{yx} = 0 \quad (3.6.39)$$

化简后为

$$A^2 - (J_{xx} + J_{yy})A + (J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx}) = 0 \quad (3.6.40)$$

解此方程得到

$$A = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) \pm \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|]^{1/2} \quad (3.6.41)$$

将式(3.6.41)代入式(3.6.38a),得到

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) \mp \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) \mp \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{xy}^*]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6.42)
\end{aligned}$$

如果 B 的解取对应于“ $-$ ”的结果,则

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) - \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{xy}^*]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) - \frac{1}{2}[(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xx}J_{yy} + 4J_{xy}J_{xy}^*]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) - \frac{1}{2}[(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xx}J_{yy}(1 + |\mu_{xy}|^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6.43)
\end{aligned}$$

因为 J_{xx} 、 J_{yy} 都是正实数,则进一步得到

$$B = \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) - \frac{1}{2}[(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xx}J_{yy}(1 + |\mu_{xy}|^2)]^{\frac{1}{2}} < 0 \quad (3.6.44)$$

式(3.6.44)与 $B \geq 0$ 是矛盾的,是一个不可取之解。因此, B 的解必须取对应于“ $+$ ”的结果,则 A 、 B 、 C 、 D 的一组解就是

$$\begin{cases}
A = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) - \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|]^{\frac{1}{2}} \\
B = \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) + \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|]^{\frac{1}{2}} \\
C = \frac{1}{2}(J_{yy} - J_{xx}) + \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|]^{\frac{1}{2}} \\
D = J_{xy} \\
D^* = J_{yx}
\end{cases} \quad (3.6.45)$$

式(3.6.45)唯一地确定了式(3.6.36)中 A 、 B 、 C 、 D 的值。这样,分解的唯一性就得到了证明。由相干矩阵及其分解,可以得到两个能量方面的值:

(1) 总波的坡印廷矢量值(能量、功率密度)的如下求解式:

$$w_t = \text{tr}(\mathbf{J}) = J_{xx} + J_{yy} \quad (3.6.46)$$

相干矩阵次对角线元素只表征了波场两个正交分量的相关性而不涉及能量。

(2) 波完全极化部分的坡印廷矢量值

$$w_p = \text{tr}(\mathbf{J}_f) = B + C = \{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|\}^{1/2} \quad (3.6.47)$$

2. 极化度

一个非单色波(准单色波)可以分解成一个未极化波和一个完全极化波之和。相应地,对应非单色波的相干矩阵可唯一地分解为一个未极化波的相干矩阵加上一个全极化波的相干矩阵,并由相干矩阵可以获得总波的坡印廷矢量值和波完全极化部分的坡印廷矢量值。这为表征非单色波的极化打下了坚实的理论基础,极化度的概念就应运而生。

1) 极化度定义

非单色波中完全极化部分功率密度与总波的功率密度之比称为非单色波的极化度,即

$$R = \frac{w_p}{w_t} = \frac{\{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|\}^{1/2}}{J_{xx} + J_{yy}} = \left[1 - \frac{4|\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}\right]^{1/2} \quad (3.6.48)$$

因为

$$0 \leqslant (J_{xx} - J_{yy})^2 \quad (3.6.49)$$

对式(3.6.49)做一定的变化,可得

$$\begin{aligned} 4J_{xx}J_{yy} &\leqslant (J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xx}J_{yy} \\ 4J_{xx}J_{yy} &\leqslant (J_{xx} + J_{yy})^2 \\ J_{xx}J_{yy} &\leqslant \frac{1}{4}(J_{xx} + J_{yy})^2 \end{aligned} \quad (3.6.50)$$

式(3.6.50)和式(3.6.19)比较后得到

$$0 \leqslant |\mathbf{J}| \leqslant J_{xx}J_{yy} \leqslant \frac{1}{4}(J_{xx} + J_{yy})^2 \quad (3.6.51)$$

所以得到极化度的取值范围为

$$0 \leqslant R = \left[1 - \frac{4|\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}\right]^{1/2} \leqslant 1 \quad (3.6.52)$$

即

$$0 \leq R \leq 1 \quad (3.6.53)$$

2) 极化度特例

由式(3.6.52)可以研究极化度的特殊情况,大致可以分为下面三种情况:

(1) 当极化度 $R=1$ 时,有

$$R = \left[1 - \frac{4 |\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2} \right]^{1/2} = 1 \quad (3.6.54)$$

得到

$$|\mathbf{J}| = 0, \quad |\mu_{xy}| = 1 \quad (3.6.55)$$

极化度为 1 时,属于完全极化的情况,非单色波场两个正交分量之间互为相干。

(2) 当极化度 $R=0$ 时,根据式(3.6.52)可得

$$\begin{aligned} R &= \left[1 - \frac{4 |\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2} \right]^{1/2} = 0 \\ (J_{xx} + J_{yy})^2 - 4 |\mathbf{J}| &= 0 \\ (J_{xx} + J_{yy})^2 - 4(J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx}) &= 0 \\ (J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx} &= 0 \\ (J_{xx} - J_{yy})^2 + 4|\mu_{xy}|^2 &= 0, \quad J_{xy} = J_{yx}^* \end{aligned} \quad (3.6.56)$$

式(3.6.56)两边恒等后得到

$$\begin{cases} J_{xx} = J_{yy} \\ J_{xy} = J_{yx} = 0, \quad |\mu_{xy}| = 0 \end{cases} \quad (3.6.57)$$

所以当极化度为零时,属于未极化波的情况,并由此得到波场两个正交分量之间互不相关且能量相等的结论。

(3) 未极化波的物理等效:

$$\mathbf{J} = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\omega}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} + \frac{\omega}{4} \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6.58)$$

未极化波可以看成由两个相互正交且功率密度相等的独立线极化波组成,也可看成由两个旋向相反的、功率密度相等的独立圆极化波组成。若对雷达采用未极化波的干扰方式,

式(3.6.58)就是生成这种干扰的理论依据。

3) 极化度与相关性的关系

极化度 $R=0$ 时可以得到两个分量互不相关的结论;但反过来不成立,即两个分量互不相关得不到极化度为零的结论。

将互不相关的条件

$$J_{xy} = J_{yx} = 0, \quad |\mu_{xy}| = 0 \quad (3.6.59)$$

代入式(3.6.48)得到

$$R = \left[1 - \frac{4J_{xx}J_{yy}}{(J_{xx} + J_{yy})^2} \right]^{1/2} = \frac{|J_{xx} - J_{yy}|}{J_{xx} + J_{yy}} \quad (3.6.60)$$

由式(3.6.60)可知,互不相关对未极化波还不充分。若要得到未极化波的结论,还需增加 $J_{xy} = J_{yx}$ 的条件,这两个条件加起来才与式(3.6.57)的条件相同。

3.6.4 相干矩阵的 Stokes 参数表征与分解

从上面的内容可以看到,相干矩阵是研究非单色波极化的有力工具。而极化的描述和表征手段很多,包括 Stokes 参数表征。相干矩阵和其他极化表征参数之间能建立起关系,并且既然相干矩阵能对应波的分解来进行分解,那么极化表征参数也应该能对应相干矩阵的分解来进行分解。

1. 相干矩阵的 Stokes 参数表征

极化度是描述波已极化的程度,它可以从相干矩阵的唯一分解中求得,而极化又可用 Stokes 参数来表征,故两者之间必然互通。

单色波的 Stokes 参数组如下:

$$\begin{cases} s_0 = |E_x|^2 + |E_y|^2 \\ s_1 = |E_x|^2 - |E_y|^2 \\ s_2 = 2|E_x||E_y|\cos\phi \\ s_3 = 2|E_x||E_y|\sin\phi \end{cases} \quad (3.6.61)$$

式中: s_0 为波的功率密度。

准单色波的振幅和相位都是慢时变的,它的 Stokes 参数组定义为时平均的运算:

$$\begin{cases} s_0 = \langle a_x^2(t) \rangle + \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_1 = \langle a_x^2(t) \rangle - \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_2 = 2 \langle a_x(t) a_y(t) \cos \phi(t) \rangle \\ s_3 = 2 \langle a_x(t) a_y(t) \sin \phi(t) \rangle \end{cases} \quad (3.6.62)$$

显然,若波分量的振幅和相位差均非时变,则式(3.6.62)就蜕变为式(3.6.61)。将式(3.6.62)中的参数与式(3.6.14)中相干矩阵元素对照并做适当的运算,可以得到如下关系式:

$$J_{xy} = \langle a_x(t) a_y(t) e^{j[\phi_x(t) - \phi_y(t)]} \rangle = \langle a_x(t) a_y(t) [\cos \phi(t) - j \sin \phi(t)] \rangle$$

$$J_{yx} = \langle a_x(t) a_y(t) e^{j[\phi_y(t) - \phi_x(t)]} \rangle = \langle a_x(t) a_y(t) [\cos \phi(t) + j \sin \phi(t)] \rangle$$

由以上两式可推得

$$J_{xy} + J_{yx} = 2 \langle a_x a_y \cos \phi \rangle = s_2 \quad (3.6.63)$$

$$J_{xy} - J_{yx} = -2j \langle a_x a_y \sin \phi \rangle, \quad s_3 = j(J_{xy} - J_{yx}) \quad (3.6.64)$$

从而得到

$$\begin{cases} s_0 = J_{xx} + J_{yy} \\ s_1 = J_{xx} - J_{yy} \\ s_2 = J_{xy} + J_{yx} \\ s_3 = j(J_{xy} - J_{yx}) \end{cases} \quad (3.6.65)$$

由式(3.6.65)解出相干矩阵元素为

$$\begin{cases} J_{xx} = s_0 + s_1 \\ J_{yy} = s_0 - s_1 \\ J_{xy} = s_2 - js_3 \\ J_{yx} = s_2 + js_3 \end{cases} \quad (3.6.66)$$

则相干矩阵也可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_x(t) E_x^*(t) \rangle & \langle E_x(t) E_y^*(t) \rangle \\ \langle E_y(t) E_x^*(t) \rangle & \langle E_y(t) E_y^*(t) \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_0 + s_1 & s_2 - js_3 \\ s_2 + js_3 & s_0 - s_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6.67)$$

根据前面已经推得的结果

$$|\mathbf{J}| = J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2 = J_{xx}J_{yy}(1 - |\mu_{xy}|^2) \geq 0$$

将式(3.6.66)的相干矩阵元代入上式,得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} \\ &= (s_0 + s_1)(s_0 - s_1) - (s_2 - js_3)(s_2 + js_3) \\ &= s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.6.68)$$

即 $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq s_0^2$ 。

式(3.6.68)说明,当非单色波为部分极化情况时,所有代表极化的点都退化为球内点。而对于一个完全极化波,包括单色和非单色的,有

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 = 0 \\ s_0^2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \end{aligned} \quad (3.6.69)$$

式(3.6.69)就是第2章讨论单色波的极化问题时,Stokes参数组的结论,所有极化态都分布在极化球面上。

2. 相干矩阵的 Stokes 参数分解

准单色波的相干矩阵可以用 Stokes 参数来表征,而相干矩阵能够分解成未极化波和完全极化波的两个组成部分。据此推论,准单色波相干矩阵同样可用 Stokes 参数来分别表征未极化部分和完全极化部分,即非单色波可通过 Stokes 参数进行分解。具体表示如下:

$$\begin{cases} s_0 = s_{0,n} + s_{0,f} \\ s_1 = s_{1,n} + s_{1,f} \\ s_2 = s_{2,n} + s_{2,f} \\ s_3 = s_{3,n} + s_{3,f} \end{cases} \quad (3.6.70)$$

式中:下标 n 表示未极化波,则 $s_{0,n}$ 为波的未极化部分的功率密度;下标 f 表示完全极化波,则 $s_{0,f}$ 为波的已极化部分的功率密度。

1) 未极化波

根据前面的结论,当波属于未极化波时,存在如下关系:

$$J_{xx} = J_{yy}, \quad J_{xy} = J_{yx} = 0 \quad (3.6.71)$$

将式(3.6.71)代入式(3.6.65),得到

$$\begin{cases} s_{1,n} = 0 \\ s_{2,n} = 0 \\ s_{3,n} = 0 \end{cases} \quad (3.6.72)$$

从式(3.6.72)可以看出,代表极化的点 $(s_{1,n}, s_{2,n}, s_{3,n}) = (0, 0, 0)$ 是极化球心,所以未极化波属于球心点。

2) 完全极化波

当非单色波是完全极化波时,即总波中不存在未极化波,其相干矩阵行列式为零,即

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0 \\ J_{xx}J_{yy} &= J_{xy}J_{yx} \end{aligned} \quad (3.6.73)$$

将式(3.6.72)代入式(3.6.70),得到

$$\begin{cases} s_{0,f} = s_0 = J_{xx} + J_{yy} \\ s_{1,f} = s_1 \\ s_{2,f} = s_2 \\ s_{3,f} = s_3 \end{cases} \quad (3.6.74)$$

将式(3.6.65)代入式(3.6.74),得到

$$\begin{aligned} s_{1,f} &= J_{xx} - J_{yy}, \quad s_{2,f} = J_{xy} + J_{yx} \\ s_{3,f} &= j(J_{xy} - J_{yx}), \quad s_{0,f} = J_{xx} + J_{yy} \end{aligned} \quad (3.6.75)$$

利用式(3.6.75)的结果作如下运算:

$$\begin{aligned} & s_{1,f}^2 + s_{2,f}^2 + s_{3,f}^2 \\ &= (J_{xx} - J_{yy})^2 + (J_{xy} + J_{yx})^2 + [j(J_{xy} - J_{yx})]^2 \\ &= (J_{xx} - J_{yy})^2 + 2J_{xy} \cdot 2J_{yx} \end{aligned} \quad (3.6.76)$$

将式(3.6.73)代入式(3.6.76),得到

$$\begin{aligned}
 s_{1,f}^2 + s_{2,f}^2 + s_{3,f}^2 &= (J_{xx} - J_{yy})^2 + 2J_{xy}2J_{yx} \\
 &= (J_{xx} + J_{yy})^2 = s_0^2
 \end{aligned} \tag{3.6.77}$$

可得到结论：完全极化波的 Stokes 参数组 $(s_{1,f}, s_{2,f}, s_{3,f})$ 是极化球面上的点。

3.6.5 极化度的 Stokes 参数表征

将式(3.6.72)代入式(3.6.70),得到

$$\begin{cases} s_0 = s_{0,n} + s_{0,f} \\ s_1 = s_{1,f} \\ s_2 = s_{2,f} \\ s_3 = s_{3,f} \end{cases} \tag{3.6.78}$$

由式(3.6.78)得到已极化部分的波的功率密度为

$$s_{0,f} = \sqrt{s_{1,f}^2 + s_{2,f}^2 + s_{3,f}^2} \tag{3.6.79}$$

则未极化部分的波的功率密度为

$$s_{0,n} = s_0 - s_{0,f} = s_0 - \sqrt{s_{1,f}^2 + s_{2,f}^2 + s_{3,f}^2} \tag{3.6.80}$$

极化度是已极化部分的功率密度和总波的功率密度之比,则极化度的 Stokes 参数表征形式为

$$R = \frac{s_{0,f}}{s_0} = \frac{\sqrt{s_{1,f}^2 + s_{2,f}^2 + s_{3,f}^2}}{s_0} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0} \tag{3.6.81}$$

3.6.6 非单色极化波的线极化比

1. 线极化比的 Stokes 参数表征

波的完全极化部分的极化比,既可用完全极化部分参数表征,也可用总波的参数表示。根据线极化比与 Stokes 参数的关系,极化部分的极化比为

$$P = \frac{s_{2,f} + js_{3,f}}{s_{0,f} + s_{1,f}} \tag{3.6.82}$$

根据式(3.6.78),式(3.6.82)也可以用总波的参数表示为

$$P = \frac{s_2 + \mathrm{j}s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} + s_1} \quad (3.6.83)$$

圆极化比与 Stokes 参数的关系为

$$q = \frac{s_1 - \mathrm{j}s_2}{s_0 - s_3} \quad (3.6.84)$$

根据式(3.6.78)可得出波的已极化部分的参数和总波参数表征的圆极化比为

$$q = \frac{s_{1,\mathrm{f}} - \mathrm{j}s_{2,\mathrm{f}}}{s_{0,\mathrm{f}} - s_{3,\mathrm{f}}} = \frac{s_1 - \mathrm{j}s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} - s_3} \quad (3.6.85)$$

2. 线极化比的极化度表征

将式(3.6.81)做如下变形:

$$R = \frac{s_{0,\mathrm{f}}}{s_0} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0} \rightarrow \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = Rs_0$$

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} + s_1 = Rs_0 + s_1 \quad (3.6.86)$$

将式(3.6.65)的有关参数代入,可以得到式(3.6.86)的另一个表达式,即

$$\begin{aligned} Rs_0 + s_1 &= R(J_{xx} + J_{yy}) + (J_{xx} - J_{yy}) \\ &= (R+1)J_{xx} + (R-1)J_{yy} \end{aligned} \quad (3.6.87)$$

将式(3.6.87)和式(3.6.65)中的有关参数代入式(3.6.83),最终得到线极化比的极化度表达式为

$$\begin{aligned} P &= \frac{s_2 + \mathrm{j}s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} + s_1} \\ &= \frac{2J_{yx}}{(R+1)J_{xx} + (R-1)J_{yy}} \end{aligned} \quad (3.6.88)$$

若非单色波是完全极化波时,则无须做时平均运算 $\langle \cdot \rangle$,并有

$$R=1, \quad J_{xx} = \langle E_x E_x^* \rangle = E_x E_x^*, \quad J_{yx} = \langle E_x^* E_y \rangle = E_x^* E_y \quad (3.6.89)$$

则式(3.6.88)简化为

$$P = \frac{E_y}{E_x} \quad (3.6.90)$$

这就是单色波线极化比的定义。同时,也验证了非单色极化波的相干矩阵描述及衍生的各种表征的正确性。

3.6.7 部分极化波的接收

部分极化波是极化度在 $0 \sim 1$ 的非单色波。当电磁波照射到接收天线时,其电场强度矢量作用于天线有效长度而在天线端口产生开路电压。

1. 接收总功率

电磁波电场强度矢量 E 在天线 h 端口产生的开路电压(波场分量无论是否相干都成立)为

$$V = E^T h \quad (3.6.91)$$

波和天线写成如下坐标向量的形式:

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \quad (3.6.92)$$

则馈给天线匹配负载的功率为

$$W = \frac{\langle VV^* \rangle}{8R_a} \quad (3.6.93)$$

式中: $\langle \cdot \rangle$ 表示时间平均运算; R_a 为天线阻抗,且等于辐射阻抗与损耗阻抗之和,具体表达式为

$$R_a = \frac{Z_0 h^H h}{4A_e} \quad (3.6.94)$$

其中: A_e 为天线有效接收面积。

则接收总功率为

$$W = \frac{A_e}{2Z_0 \mathbf{h}^H \mathbf{h}} \langle (\mathbf{E}^T \mathbf{h})(\mathbf{E}^T \mathbf{h})^* \rangle \quad (3.6.95)$$

接收天线是不随时间而变化的,无须做时间平均运算,因此可提取到算符外面,即

$$W = \frac{A_e}{2Z_0 \mathbf{h}^H \mathbf{h}} (|h_x|^2 \langle E_x E_x^* \rangle + h_x h_y^* \langle E_x E_y^* \rangle + h_x^* h_y \langle E_x^* E_y \rangle + |h_y|^2 \langle E_y E_y^* \rangle) \quad (3.6.96)$$

根据相干矩阵元素定义,将矩阵元代入式(3.6.96)得到接收总功率为

$$W = \frac{A_e}{\mathbf{h}^H \mathbf{h}} (|h_x|^2 J_{xx} + h_x h_y^* J_{xy} + h_x^* h_y J_{yx} + |h_y|^2 J_{yy}) \quad (3.6.97)$$

特别说明,为了简化叙述和表达又不会影响结果和结论,之前和之后算式中的 $2Z_0$ 都省略掉了。

2. 接收总功率的分解

非单色波可分解成未极化波和完全极化波两部分之和,相应的相干矩阵也可以对应地分解并表示为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_f, \quad \mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} B & D \\ D^* & C \end{bmatrix} \quad (3.6.98)$$

将式(3.6.97)、式(3.6.98)结合起来,替换一些相应参数后,得到对应的未极化波和完全极化波的接收功率为

$$\begin{aligned} W &= \frac{A_e}{\mathbf{h}^H \mathbf{h}} [|h_x|^2 (A+B) + h_x h_y^* D + h_x^* h_y D^* + |h_y|^2 (A+C)] \\ &= A_e A + \frac{A_e}{\mathbf{h}^H \mathbf{h}} (|h_x|^2 B + h_x h_y^* D + h_x^* h_y D^* + |h_y|^2 C) \triangleq W' + W'' \end{aligned} \quad (3.6.99)$$

上式总功率分解为两个部分: W' 表示对未极化波的接收功率,这部分的功率与天线的极化无关但取决于天线有效接收面积的大小; W'' 表示对完全极化波的接收功率,功率大小取决于非单色波极化与天线极化的匹配程度。

3. 未极化部分的接收功率

这部分的功率,是天线接收到的与接收天线极化无关的功率:

$$W' = A_e A \quad (3.6.100)$$

根据极化度定义,有

$$R = \left[1 - \frac{4 |\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2} \right]^{1/2} = \frac{[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4 |\mathbf{J}|]}{J_{xx} + J_{yy}}^{1/2}$$

上式变形后得到

$$[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4 |\mathbf{J}|]^{1/2} = R(J_{xx} + J_{yy}) \quad (3.6.101)$$

前面已经推得了如下的结果

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) - \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4 |\mathbf{J}|]^{1/2} \\ B = \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) + \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4 |\mathbf{J}|]^{1/2} \\ C = \frac{1}{2}(J_{yy} - J_{xx}) + \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4 |\mathbf{J}|]^{1/2} \\ D = J_{xy} \\ D^* = J_{yx} \end{cases}$$

利用 A 的结果,再结合极化度的定义,因此得到

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) - \frac{1}{2}[(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4 |\mathbf{J}|]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy})(1 - R) \end{aligned} \quad (3.6.102)$$

代入未极化部分的接收功率表达式,可得

$$W' = A_e A = A_e \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy})(1 - R) = A_e \frac{1}{2} \omega_t (1 - R) \quad (3.6.103)$$

式中: $\omega_t = J_{xx} + J_{yy}$, 是总波功率密度。若总波为未极化波 ($R=0, W''=0$), 则根据式(3.6.103)计算可接收到全部功率的一半, 是固定值, 不因接收天线极化的改变而改变; 但接收功率正比于天线接收面积。

4. 完全极化部分的最佳接收

已完全极化部分的接收功率, 并力图使它达到最大:

$$W'' = \frac{A_e}{\mathbf{h}^H \mathbf{h}} (|h_x|^2 B + h_x h_y^* D + h_x^* h_y D^* + |h_y|^2 C) \quad (3.6.104)$$

第一步极大化：式中 B, C 是实数。天线有效长度和 D 的复数形式如下：

$$h_x = |h_x| e^{j\phi_x}, \quad h_y = |h_y| e^{j\phi_y}, \quad D = |D| e^{j\delta} \quad (3.6.105)$$

显然,当 $\phi_y - \phi_x = \delta$ 时, $h_x h_y^* D + h_x^* h_y D^*$ 达到最大
 W'' 变为

$$W''_{\max} = \frac{A_e}{\mathbf{h}^H \mathbf{h}} (|h_x|^2 B + 2 |h_x| |h_y| |D| + |h_y|^2 C) \quad (3.6.106)$$

第二步极大化：能量不变性约束,调节天线有效长度,功率可以进一步极大化。能量约束为

$$\mathbf{h}^H \mathbf{h} = |h_x|^2 + |h_y|^2 = c \quad (3.6.107)$$

并有

$$|h_x| = (c - |h_y|^2)^{1/2} \quad (3.6.108)$$

将 $W''_{\max}$ 对 $|h_x|$ 求导,并令导数为零,得到

$$\frac{|h_y|^2 - |h_x|^2}{|h_x| |h_y|} = \frac{C - B}{|D|} \quad (3.6.109)$$

其解为

$$\frac{|h_y|}{|h_x|} = \frac{C}{|D|}, \quad \frac{|h_x|}{|h_y|} = \frac{B}{|D|} \quad (3.6.110)$$

因为是部分极化波,所以 $D = J_{xy} \neq 0$,而完全极化波的相干矩阵 $[J_f]$ 有 $BC - |D|^2 = 0$,从而得到 $B \neq 0, C \neq 0$ 。由式(3.6.110)和 $\phi_y - \phi_x = \delta$,得到

$$\frac{h_y}{h_x} = \frac{C}{D^*}, \quad \frac{h_x}{h_y} = \frac{B}{D} \quad (3.6.111)$$

将式(3.6.111)代入式(3.6.106),再利用式(3.6.47)、式(3.6.48),对波已完全极化了的的那部分接收,得到最佳接收功率为

$$W''_{\max 2} = A_e(B + C) = A_e w_p = A_e w_t R \quad (3.6.112)$$

为了使总的接收功率最大,只需将接收天线极化与波的完全极化部分的极化相匹配就可以达到,并且总的接收功率为

$$\begin{aligned} W &= W' + W''_{\max 2} \\ &= \frac{1}{2} A_e w_t (1 - R) + A_e w_t R \\ &= \frac{1}{2} A_e w_t (1 + R) \end{aligned} \quad (3.6.113)$$

从上式可以得出:当来波是未极化波时,可接收到其总功率(密度)的一半,接收天线任意极化方式都行;而当来波是完全极化波时,极化度等于1,根据式(3.6.113)的计算结果知道,可匹配接收到波的全部功率。

5. 完全极化部分的最差接收

如果接收天线极化与波已完全极化部分的极化失配,则这部分信号完全被抑制:

$$W''_{\max 2} = A_e(B + C) = A_e w_p = A_e w_t R = 0 \quad (3.6.114)$$

那么总的接收功率只涉及未极化波的那部分。根据式(3.6.113)的计算结果知道,有一半进入接收天线且正比于天线接收面积:

$$\begin{aligned} W' &= A_e A = A_e \frac{w_t}{2} \\ &= A_e \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) (1 - R) = A_e \frac{1}{2} w_t (1 - R) \end{aligned} \quad (3.6.115)$$

3.7 天线的空域极化特性

一般来说,天线是用于发射或接收电磁信号的装置,可以把传输结构上的导波转换成自由空间波。电子与电气工程师协会(IEEE)官方对天线的定义是“发射或接收系统中,经设计用于辐射或接收电磁波的部分”。天线的极化是天线发射或接收的电磁信号的极化方式。天线极化既是固定的也是相对发生变化的。

(1) 天线极化方式是固定的。一般是指天线在法线方向的极化是固定的,天线的极化也是定义在这个方向上。喇叭天线(图3.7.1)是水平极化的,就是在垂直口面的传播方向上,喇叭辐射电磁波极化是水平极化的,可以通过标准的仪器测量。

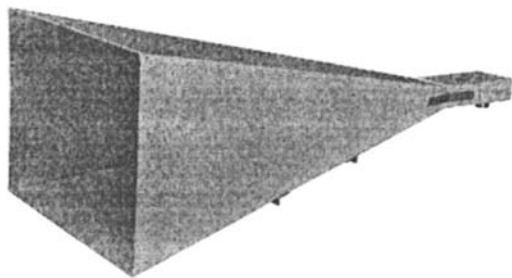


图 3.7.1 喇叭天线

(2) 天线的极化方式是变化的。这是因为天线具有方向特性,即天线是朝着一个空间范围辐射电磁信号的,在这个空间范围内信号有强弱,电磁信号功率密度的强度与天线法向所成角度有关,天线的极化也与天线法向所成角度有关。随着这个夹角的增大,天线的极化会偏离原来所设计的极化。例如喇叭天线,波束宽度是 60° ,那么在 0° 方向上,它是绝对意义上的水平极化,那么在 20° 、 30° 、 40° 等方向上就不再是水平极化。

根据天线原理,在天线辐射的电磁波中,除占优势的主极化分量外,还包含一些正交极化分量,称为交叉极化分量。如图 3.7.2 所示,垂直极化分量的幅度图就是天线主极化方向图,水平极化分量的幅度图就是天线交叉极化方向图,从幅度上可以看出,垂直极化分量比水平极化分量高很多,说明两者之间垂直极化分量起到了主要作用。我们可以这样定义,垂直极化(主极化)分量功率密度在全部功率密度中所占的比例称为天线的极化纯度。精心设计的天线,在中心频率和中心方位上的极化纯度是比较高的,但在方位偏离中心方位后,极化纯度就会下降。将天线辐射场的电磁计算数据经过处理可以得到图 3.7.3 所示的极化纯度灰度图表示,颜色越深表示极化纯度越高,不同颜色代表不同极化纯度,天线极化纯度是在二维空间(方位和俯仰方向)变化的,横轴表示方位,纵轴表示俯仰,可以很明显地看出,在某一固定的俯仰上,极化纯度关于方位角变化很显著,在 0° 方位上,极化纯度最高,是深黑色。而在某一固定方位上,极化纯度随俯仰角的变化很小,颜色几乎没有变化。

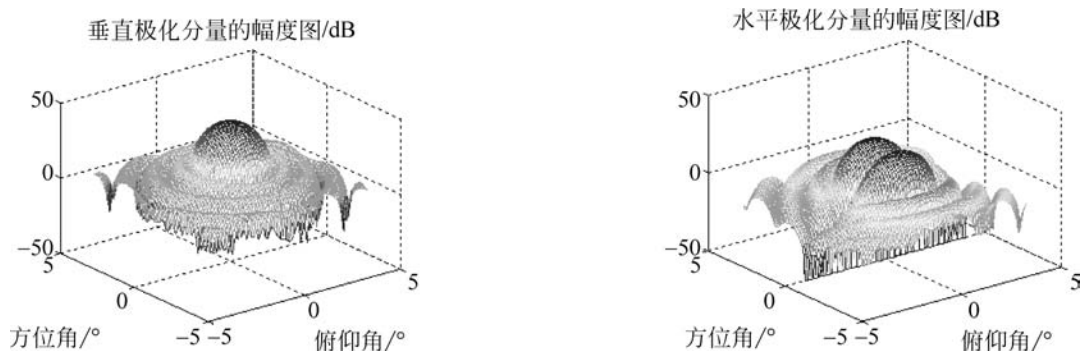


图 3.7.2 某抛物面天线的主极化(垂直极化)和交叉极化(水平极化)幅度图

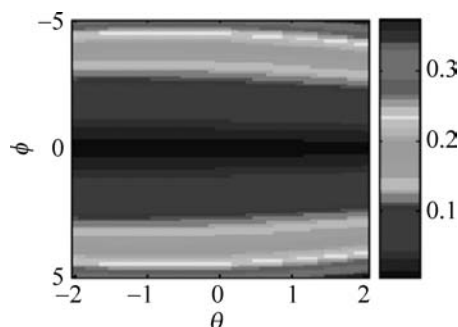


图 3.7.3 天线极化纯度的变化规律

电磁波的极化和天线的极化在本质上是没有任何区别的,天线的极化特性可以看作天线辐射电磁波的极化特性。根据天线辐射的电磁波是线极化或是圆极化,相应的天线称为线极化天线或圆极化天线。因此,所有关于电磁波极化的讨论都适用于天线的极化。

需要注意的是,天线辐射波的极化随方向而变,传统关于天线极化的定义中隐含了一个因素,即波束中心位置的极化。通常,天线的极化特性在主瓣中心方向上保持相对恒定,在这个意义上,主瓣峰值位置的极化就用来描述天线极化,而旁瓣辐射的极化就与主瓣的极化大不一样。

综上所述,天线极化是指最大辐射方向或最大接收方向的极化,对机械扫描天线而言,可以用天线口径面法线方向的极化来定义。对于相控阵体制天线而言,相控阵天线的极化不仅与所讨论的空间方向有关,而且与相对阵面主波瓣的扫描方向有关。当其波束扫描时,波束最大辐射方向与天线阵面的法线方向并不重合,而是随着扫描角度的增大,两者的夹角增大。

图 3.7.4 给出了相控阵天线扫描多个角度时的极化方向图,天线的主极化是垂直极化,交叉极化是水平极化。当天线没有进行相位控制电子扫描时,天线方向图的照射方向和天线物理法线方向一致,极化纯度最高,如图 3.7.4(a) 主波束在阵面法线方向,交叉极化分量(水平极化)方向图的幅度最小,两者差异约为 60dB。当主波束在偏离阵面 5° 、 10° 、 15° 时,交叉极化分量(水平极化)方向图的幅度越来越大,而且形状也发生变化,形状很接近主极化方向图,主极化和交叉极化差异逐渐减小到 40dB。

由图可以很明显地看出,主极化即垂直极化的方向图随扫描角的增大而逐渐展宽,天线增益有所下降,旁瓣呈现不对称的结构;同时,交叉极化电平逐渐增大,从电轴方向的一 ∞ 增大到约 30dB。由于相控阵天线的扫描特性会发生变化,单一指向的极化方向图难以描述完整的空域极化特性,因此通过计算多个波位,然后通过插值拟合可以得到波束在空域 $0^\circ \sim 60^\circ$ 扫描时,极化纯度的变化情况如图 3.7.5 所示。可见,相控阵天线波束扫描时,在多个波位下的极化特性近似线性变化。当波束在空域连续扫描时,相控阵天线的极化特性服从一定规律变化,天线极化状态偏移了所期望的状态,极化状态的改变取决于扫描角、阵元特性以及阵元耦合等非理想因素。

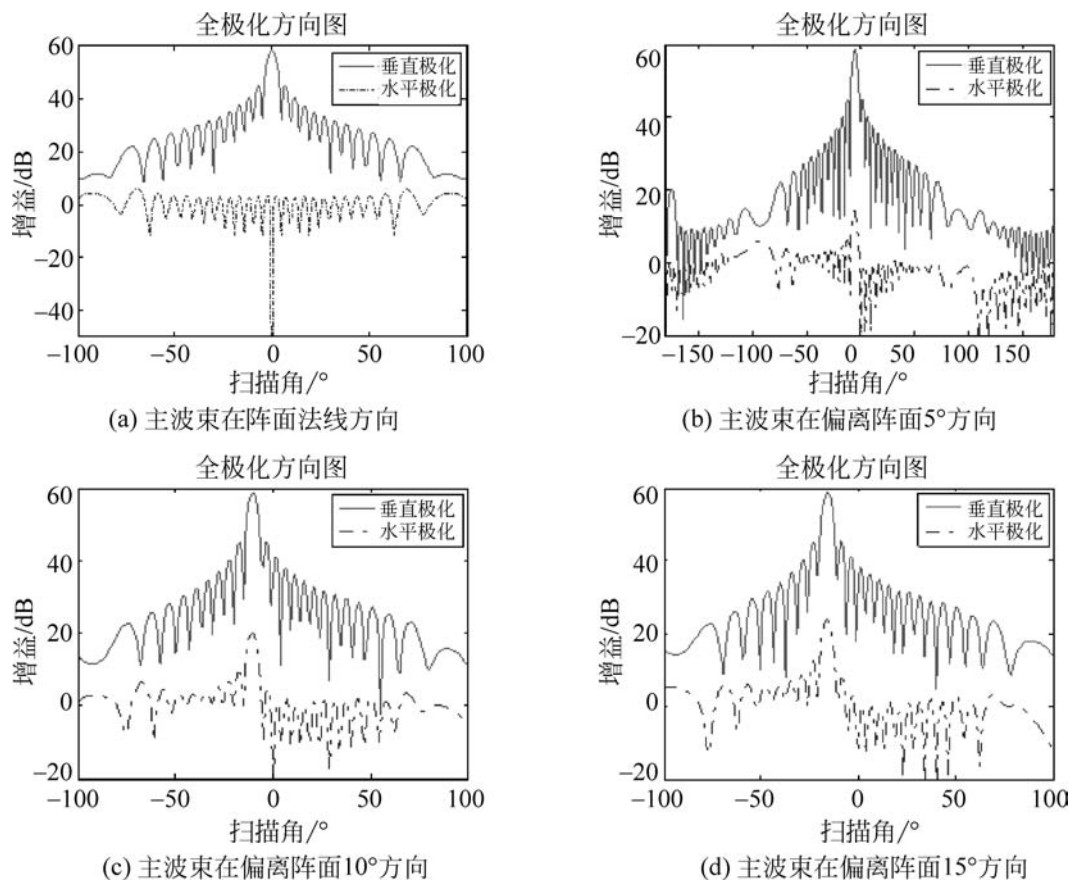


图 3.7.4 相控阵天线波束在多个扫描角下的极化方向图

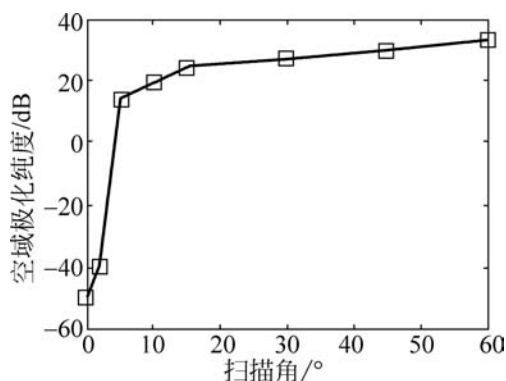


图 3.7.5 空域极化纯度随扫描角变化曲线

天线的空域极化特性在电子对抗领域的应用非常广泛。早在 20 世纪 90 年代末期,美国和俄罗斯就发现了单脉冲雷达天线的方向图具有复杂的极化结构,并且单脉冲雷达测角精度容易受到通道一致性、目标的变极化作用、多径散射造成的变极化等因素的影响,并根

据单脉冲雷达天线的这种固有属性设计了交叉极化干扰样式。最新一版的美国《应对新一代威胁的电子战》一书中,将交叉极化干扰归结为下一代雷达干扰技术,图 3.7.6 给出了交叉极化干扰的示意图,干扰机收到雷达信号后,发射一个与雷达信号极化完全正交的信号——交叉极化干扰信号,以干扰雷达测角。2010 年,美国空军实验室对某 X 波段雷达导引头在交叉极化电磁波条件下的测角性能进行了大量的测量试验,图 3.7.7 为暗室测量试验的场景照片。

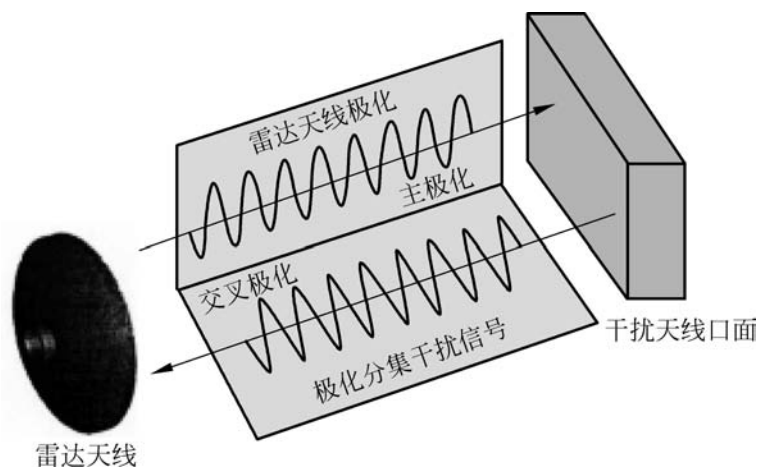


图 3.7.6 交叉极化干扰机对雷达天线极化产生极化正交的响应



图 3.7.7 美国空军实验室试验的场景照片

在实际应用方面,随着交叉极化干扰技术相关的元器件、信号处理技术趋于成熟,交叉极化干扰技术已被 Northrop Grumman 公司应用于“猎鹰利刃”干扰机上,并装备于美军的 F-16CD Block60 战斗机上。EA6B “徘徊者”电子战飞机上的电子干扰吊舱也具备交叉极化干扰样式,可以对一些地空跟踪制导雷达、空空制导雷达导引头进行有效的自卫式角度欺骗干扰。美军的 APECS-II 舰载电子战系统具有自适应交叉极化干扰功能,拥有噪声/欺骗多种干扰波形。APECS-II 舰载电子战系统是美国 Argo System 公司研制生产的新型水

面舰艇电子战系统,干扰机采用相控阵多波束天线,可覆盖方位 360° 和俯仰角 30° 的范围,它以脉冲和连续波方式辐射大功率干扰,可同时对付 16 个目标。与以前的相控阵天线相比,此系统可实现变极化(专门对付单脉冲威胁源),能对付多种复杂信号,是世界上第一部以“交叉极化干扰”为主要手段、以单脉冲主动雷达导引头为作战对象的电子对抗(ECM)系统。该系统已经出口葡萄牙、荷兰、希腊等多个国家,美国海军的 SLQ-32(V) 电子战系统、法国的 ARBB33 干扰机和以色列的 SEWS 电子战系统也采用了类似技术。据报道,美军新一代干扰机 AN/ALQ-167、美军航空兵机载威胁仿真模拟器上也都具备极化调制的干扰样式。

美国雷声公司下一代干扰机(NGJ)已完成飞行试验,该系统为吊舱形式,其中最重要的技术是有源电子扫描阵列天线(AESA)。AESA 带宽非常大,采用瓦片式发射/接收(T/R)组件,包含 T 支路的高效高功率氮化镓放大器和 R 支路的低噪声放大器,两个支路都包含移相器和增益控制元件。双极化孔径元件使系统极化可以选择。极化分集技术 AESA 使得该干扰系统具有多极化变极化干扰的能力。2016 年 10 月 27 日,该干扰机进行了飞行试验, AESA 每间隔约 50s 改变一次发射极化,所对应的极化倾角分别为 0° 、 90° 、 45° 、 15° 、 75° 、 30° 、 60° ,地面测试设备对所接收的极化数据进行测量和记录,获得如图 3.7.8 的数据。

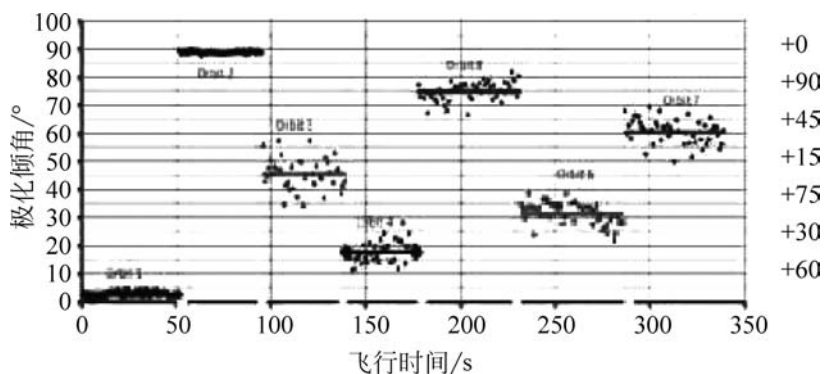


图 3.7.8 系统的极化测试结果

综上所述,读者对天线的空域极化特性有了一个大致的了解,对天线极化的概念已经比较明晰了。可以说,天线的极化就是雷达的极化,而电磁波的极化概念就比较纯粹了,不涉及空域的讨论。