

# 第3章

## 计算机控制系统分析

在进行连续控制系统的分析与设计时,要研究判断所设计的系统是否稳定,并计算有多大的稳定裕量以及怎样满足暂态指标的要求和稳态控制精度。同样,在离散控制系统中也存在稳定性、动态响应和稳态准确度的分析,这是对任何一个自控系统都需要解决的问题。

### 3.1 S平面与Z平面的关系

在分析连续系统的稳定性时,主要是根据系统的闭环传递函数的极点是否都分布在S平面的左半部分(即左半面),如果有极点出现在S平面的右半部分(即右半面),则系统是不稳定的,所以,S平面的虚轴是连续系统稳定与不稳定的分界线。描述离散系统的数学模型是闭环Z传递函数,其变量为 $z$ ,而 $z$ 与 $s$ 之间具有指数关系,即 $z=e^{Ts}$ ,如果将S平面按这个指数关系映射到Z平面,就可由连续系统的规则直接得出相应的离散系统的规则。S平面与Z平面的映射关系可由 $z=e^{Ts}$ 来确定。

设 $s=\delta+j\omega$ ,则有

$$\begin{cases} z = e^{\delta T} e^{j\omega T} \\ |z| = e^{\delta T} \\ \angle z = \omega T \end{cases}$$

由于 $e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数,所以有

$$\begin{aligned} \angle z &= \omega T + 2k\pi \\ &= \left(\omega + k \frac{2\pi}{T}\right) T \\ &= (\omega + k\omega_s) T \end{aligned}$$

在Z平面上,当 $\delta$ 为某个定值时 $z=e^{Ts}$ 随 $\omega$ 由 $-\infty$ 变到 $\infty$ 的轨迹是一个圆,圆心位于原点,半径为 $|z|=e^{\delta T}$ ,而圆心角是随 $\omega$ 线性增大的。

S平面上, $\omega$ 每变化一个 $\omega_s$ 时,Z平面圆心角就变化 $2\pi$ ,则对应在Z平面上就重复画出一个圆,这表明S平面上频率相差采样频率整数倍的所有点都映射到Z平面上同一点上。

当 $\delta=0$ 时, $|z|=1$ 时,S平面虚轴上的点映射到Z平面上的复变量模为 $|z|=1$ 的点,也就是映射到以原点为圆心的单位圆的圆周上,即S平面上的虚轴映射到Z平面上的的是以原点为圆心的单位圆的圆周。

当  $\delta < 0$  时,  $|z| < 1$  时, S 平面左半面的点映射到 Z 平面上的复变量模为  $|z| < 1$  的点, 也就是映射到以原点为圆心半径为  $|z| < 1$  的圆周上, 即 S 平面的左半面映射到 Z 平面上的的是以原点为圆心单位圆的内部。

当  $\delta > 0$  时,  $|z| > 1$ , S 平面右半面的点映射到 Z 平面上的复变量模为  $|z| > 1$  的点, 也就是映射到以原点为圆心半径为  $|z| > 1$  的圆周上, 即 S 平面的右半面映射到 Z 平面上的的是以原点为圆心单位圆的外部。S 平面与 Z 平面的映射关系如图 3.1 所示。

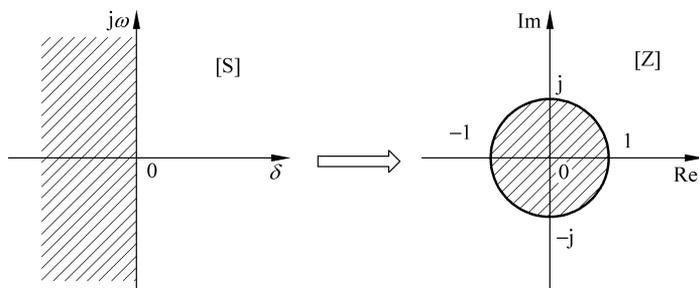


图 3.1 S 平面与 Z 平面的映射关系

从上述角频率  $\omega$  与 Z 平面的相角关系可见, 当  $\omega$  从  $-\omega_s/2$  到  $\omega_s/2$  变化时, 相角从  $-\pi$  变化为  $\pi$  逆时针旋转一圈; 当  $\omega$  从  $\omega_s/2$  到  $3\omega_s/2$  变化时, 相角从  $\pi$  变化为  $3\pi/2$  还是逆时针旋转一圈, 以此类推。由此可见, S 平面被分成了无穷多平行于实轴的带状区, 其宽度为  $\omega_s$ , 每个带状区都映射为整个 Z 平面, 其中  $-\omega_s/2 \sim \omega_s/2$  区域称为主频区, 其余为辅频区 (有无限多个), 主频区映射如图 3.2 所示。

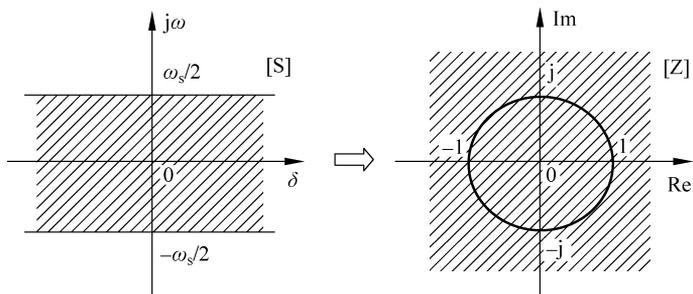


图 3.2 主频区映射

S 平面的主频区和辅频区映射到 Z 平面的重叠称为频率混叠现象, 由于实际系统正常工作时的频率较低, 因此, 实际系统的工作频率都在主频区内。将 S 平面左半面主频区的点映射到 Z 平面如图 3.3 所示, 其中点(15)为 S 平面负实轴无穷远处。

于是得到下面结论:

- (1) S 平面的虚轴对应于 Z 平面的单位圆的圆周。
- (2) S 平面的左半面对应于 Z 平面的单位圆内部。
- (3) S 平面的右半面对应于 Z 平面单位圆的外部。
- (4) S 平面负实轴的无穷远处对应于 Z 平面单位圆的圆心。
- (5) S 平面的原点对应于 Z 平面正实轴上  $z=1$  的点。
- (6) S 平面的虚轴上  $\pm\omega_s/2$  点对应于 Z 平面正实轴上  $z=-1$  的点。

(7) S平面的负实轴对应于Z平面的单位圆内正实轴。

(8) S平面左半面等频率线  $\omega = \pm\omega_s/2$  对应于Z平面的单位圆内负实轴。

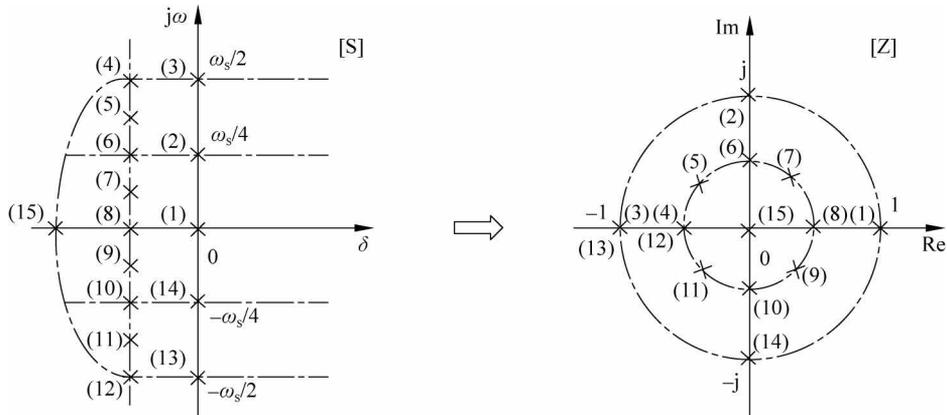


图 3.3 左半面主频区映射

## 3.2 离散系统的稳定性分析

一个控制系统稳定是它能正常工作的前提条件。连续系统的稳定性分析是在S平面进行的,离散系统的稳定性分析是在Z平面进行的。分析或设计一个控制系统,稳定性历来是首要问题。对于连续系统和离散系统,所谓稳定,就是在有界输入作用下,系统的输出也是有界的。如果有一个线性定常系统是稳定的,那么它的微分方程的解必须是收敛和有界的。

在连续系统中,如果其闭环传递函数的极点都在S平面的左半部分,或者说它的闭环特征方程的根的实部小于零,则该系统是稳定的。由S平面与Z平面的映射关系可知,当离散系统的闭环Z传递函数的全部极点(特征方程的根)在Z平面中的单位圆内时,离散系统是稳定的。

### 3.2.1 离散系统输出响应的一般关系式

设离散系统的闭环Z传递函数为

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{Y(z)}{R(z)} \\ &= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \\ &= \frac{\Delta B(z)}{A(z)} \end{aligned}$$

设有  $n$  个闭环极点  $z_i$  互异,  $m < n$ , 输入为单位阶跃函数  $R(z) = \frac{z}{z-1}$ , 则有

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{C_0}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{z-z_i}$$

其中

$$\begin{cases} C_0 = \frac{B(1)}{A(1)} = w(1) \\ C_i = \frac{B(z_i)}{(z_i - 1)A(z_i)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

取 Z 反变换得

$$y(k) = w(1)1(k) + \sum_{i=1}^n C_i z_i^k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

上式为采样系统在单位阶跃函数作用下输出响应序列的一般关系, 第一项为稳态分量, 第二项为暂态分量。

若离散系统稳定, 则当时间  $k \rightarrow \infty$  时, 输出响应的暂态分量应趋于 0, 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n C_i z_i^k = 0$ , 这就要求  $z_i < 1, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

因此得到结论: 离散系统稳定的充分必要条件是闭环 Z 传递函数的全部极点应位于 Z 平面的单位圆内。

**例 3.1** 某离散系统的闭环 Z 传递函数为

$$W(z) = \frac{3.16z^{-1}}{1 + 1.792z^{-1} + 0.368z^{-2}}$$

判断该系统的稳定性。

**解:** 求得  $W(z)$  的极点为

$$z_1 = -0.237, \quad z_2 = -1.556$$

由于  $|z_2| > 1$ , 故该系统是不稳定的。

### 3.2.2 离散系统稳定性判据

通过以上分析可知, 离散系统稳定的充要条件是闭环 Z 传递函数的全部极点应位于 Z 平面的单位圆内。当离散系统的阶数较低时, 求出其特征根即可判别系统的稳定性, 但当系统的阶数较高时求特征根就变得很困难了。为此, 可采用间接的方法来判别离散系统的稳定性, 即使用朱利稳定性判据和劳斯稳定性判据。

#### 1. 朱利稳定性判据

朱利稳定性判据是根据离散系统特征方程的系数来判别离散系统的稳定性, 其特点是不用求出特征方程的根。

设离散系统特征方程为

$$\Delta(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

要求式中  $a_0 > 0$ , 则  $n$  阶离散系统特征方程的根位于 Z 平面单位圆内的必要条件是

$$\begin{cases} \Delta(z) \Big|_{z=1} > 0 \\ (-1)^n \Delta(z) \Big|_{z=-1} > 0 \end{cases}$$

若此条件不成立, 则离散系统不稳定, 否则, 构造朱利矩阵

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & & \\ c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ l_0 & l_1 & & & & & \\ l_1 & l_0 & & & & & \\ m_0 & & & & & & \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} b_k = a_k - a_{n-k} \frac{a_n}{a_0} \\ c_k = b_k - b_{n-k-1} \frac{b_{n-1}}{b_0} \\ \vdots \\ m_0 = l_0 - l_1 \frac{l_1}{l_0} \end{cases}$$

则离散系统稳定的充要条件为： $a_0 > 0, b_0 > 0, c_0 > 0, \dots, l_0 > 0, m_0 > 0$ 。

即当朱利矩阵中所有奇数行第一列元素均大于零时，离散系统是稳定的；若有小于零的元素，则离散系统是不稳定的，其中小于零的元素的个数就是特征根在 Z 平面单位圆外的个数。

**例 3.2** 某离散系统如图 3.4 所示，试用朱利稳定性判据判别该系统的稳定性，设系统开环增益  $k=1$ ，采样周期  $T=1\text{s}$ 。

**解：**该系统的开环 Z 传递函数为

$$\begin{aligned} W_k(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{k}{s(s+1)} \right] \\ &= \frac{kz^{-1}[(T-1+e^{-T}) + (1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-1}]}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} \end{aligned}$$

则该系统的闭环 Z 传递函数为

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{W_k(z)}{1+W_k(z)} \\ &= \frac{kz^{-1}[(T-1+e^{-T}) + (1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-1}]}{1 + [k(T-1+e^{-T}) - 1 - e^{-T}]z^{-1} + [k(1-e^{-T}-Te^{-T}) + e^{-T}]z^{-2}} \\ &= \frac{k[(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})]}{z^2 + [k(T-1+e^{-T}) - 1 - e^{-T}]z + k(1-e^{-T}-Te^{-T}) + e^{-T}} \end{aligned}$$

当  $k=1, T=1\text{s}$  时，该系统的闭环 Z 传递函数为

$$W(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

则该系统的特征方程为

$$\Delta(z) = z^2 - z + 0.632$$

检验

$$\begin{cases} \Delta(z)|_{z=1} = 0.632 > 0 \\ (-1)^n \Delta(z)|_{z=-1} = 2.632 > 0 \end{cases}$$

则满足系统稳定的必要条件,构造朱利矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.632 \\ 0.632 & -1 & 1 \\ 0.601 & -0.368 & \\ -0.368 & 0.601 & \\ 0.226 & & \end{bmatrix}$$

可见,朱利矩阵中所有奇数行第一列元素均大于零,故该系统是稳定的。

**例 3.3** 某离散系统如图 3.5 所示,试用朱利稳定性判据确定使该系统稳定开环增益  $k$  值的范围,设采样周期  $T=0.25\text{s}$ 。

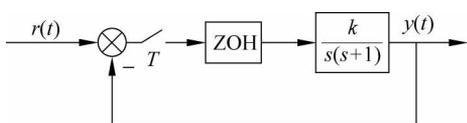


图 3.4 例 3.2 离散系统

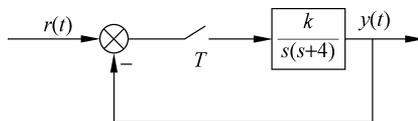


图 3.5 例 3.3 离散系统

**解:** 该系统的开环 Z 传递函数为

$$\begin{aligned} W_k(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{k}{s(s+4)} \right] \\ &= \frac{k(1 - e^{-4T})z^{-1}}{4(1 - z^{-1})(1 - e^{-4T}z^{-1})} \end{aligned}$$

则该系统的闭环 Z 传递函数为

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{W_k(z)}{1 + W_k(z)} \\ &= \frac{k(1 - e^{-4T})z^{-1}}{4 + [k(1 - e^{-4T}) - 4(1 + e^{-4T})]z^{-1} + 4e^{-4T}z^{-2}} \\ &= \frac{k(1 - e^{-4T})z}{4z^2 + [k(1 - e^{-4T}) - 4(1 + e^{-4T})]z + 4e^{-4T}} \end{aligned}$$

当  $T=0.25\text{s}$  时,该系统的闭环 Z 传递函数为

$$W(z) = \frac{0.158kz}{z^2 + (0.158k - 1.368)z + 0.368}$$

求得该系统的特征方程为

$$\Delta(z) = z^2 + (0.158k - 1.368)z + 0.368$$

根据系统稳定的必要条件,要求

$$\begin{cases} \Delta(z)|_{z=1} = 0.158k > 0 \\ (-1)^n \Delta(z)|_{z=-1} = 2.736 - 0.158k > 0 \end{cases}$$

则得

$$0 < k < 17.3$$

构造朱利矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.158k - 1.368 & 0.368 \\ 0.368 & 0.158k - 1.368 & 1 \\ 0.865 & 0.1k - 0.865 & \\ 0.1k - 0.865 & 0.865 & \\ 0.2k - 0.01156k^2 & & \end{bmatrix}$$

如果系统稳定,则要求朱利矩阵中所有奇数行第一列元素均大于零,即要求

$$0.2k - 0.01156k^2 > 0$$

则得

$$k < 17.3$$

对得到的结果进行综合,是该系统稳定的  $k$  值范围为  $0 < k < 17.3$ 。

## 2. 劳斯稳定性判据

连续系统的劳斯稳定性判据不能直接应用到离散系统中,这是因为劳斯稳定性判据只能用来判断复变量代数方程的根是否位于  $S$  平面的左半面。如果把  $Z$  平面再映射到  $S$  平面,则采样系统的特征方程又将变成  $S$  的超越方程。因此,为了简化计算,可使用双线性变换,将  $Z$  平面变换到  $W$  平面,使得  $Z$  平面的单位圆内映射到  $W$  平面的左半面,这样,就可以应用劳斯稳定性判据判别离散系统的稳定性,这种双线性变换称为  $W$  变换。

设

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad \left( \text{或} \quad z = \frac{1+w}{1-w} \right)$$

其中,  $z, w$  均为复变量,即构成  $W$  变换。令  $z = x + jy, w = u + jv$ , 则得

$$w = u + jv = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

即

$$\begin{cases} u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} \\ v = -\frac{2y}{(x-1)^2 + y^2} \end{cases}$$

根据上式,可以看到:

若  $x^2 + y^2 > 1$ , 则  $u > 0$ , 即  $Z$  平面上的单位圆外部映射到  $W$  平面的右半面。

若  $x^2 + y^2 = 1$ , 则  $u = 0$ , 即  $Z$  平面上的单位圆的圆周映射到  $W$  平面的虚轴。

若  $x^2 + y^2 < 1$ , 则  $u < 0$ , 即  $Z$  平面上的单位圆内部映射到  $W$  平面的左半面。

$Z$  平面与  $W$  平面的映射关系如图 3.6 所示。

通过  $W$  变换,将  $Z$  特征方程变成  $W$  特征方程,这样就可以用劳斯稳定性判据来判断  $W$  特征方程的根是否在  $W$  平面的左半面,即系统是否稳定。

设离散系统  $Z$  特征方程为

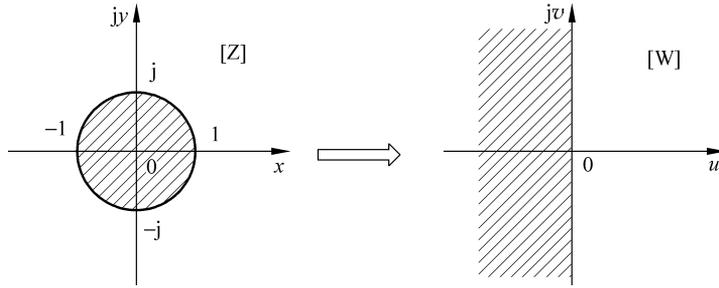


图 3.6 Z 平面与 W 平面的映射关系

$$\Delta(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

经 W 变换后得到 W 特征方程为

$$\Delta(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_{n-1} w + a_n = 0$$

则劳斯表为

$$\begin{array}{r}
 \tau^n \quad a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \quad \cdots \\
 \tau^{n-1} \quad a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \quad \cdots \\
 \tau^{n-2} \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad \cdots \\
 \tau^{n-3} \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \cdots \\
 \tau^{n-4} \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad \cdots \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \tau^2 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \\
 \tau^1 \quad f_1 \quad f_2 \\
 \tau^0 \quad g_1
 \end{array}$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_k = \frac{a_1 a_{2k} - a_0 a_{2k+1}}{a_1} \\
 c_k = \frac{b_1 a_{2k+1} - a_1 b_{k+1}}{b_1} \\
 d_k = \frac{c_1 b_{k+1} - b_1 c_{k+1}}{c_1} \\
 \vdots \\
 g_1 = \frac{f_1 e_2 - e_1 f_2}{f_1}
 \end{array} \right.$$

结论:

(1) W 特征方程系数符号必须相同, 否则系统是不稳定的。

(2) 若劳斯表第一列元素均为正, 则系统稳定, 否则系统不稳定。

下面通过例题说明如何利用 W 变换和劳斯稳定判据来判定系统的稳定性。

**例 3.4** 用劳斯稳定性判据判别例 3.2 中系统的稳定性。

**解:** 例 3.2 系统的 Z 特征方程为

$$\Delta(z) = z^2 - z + 0.632 = 0$$

设  $z = \frac{w+1}{w-1}$ , 则得 W 特征方程为

$$\Delta(w) = 0.632w^2 + 0.736w + 2.632 = 0$$

对应的劳斯表为

$$\begin{array}{r} w^2 \quad 0.632 \quad 2.632 \\ w^1 \quad 0.736 \\ w^0 \quad 2.632 \end{array}$$

由此可见, W 特征方程系数符号相同, 劳斯表第一列元素均为正, 则系统稳定。

**例 3.5** 用劳斯稳定性判据确定使例 3.3 中系统稳定的  $k$  值范围。

解: 求得该系统的 Z 特征方程为

$$\Delta(z) = z^2 + (0.158k - 1.368)z + 0.368 = 0$$

设  $z = \frac{w+1}{w-1}$ , 则得 W 特征方程为

$$0.158kw^2 + 1.264w + (2.736 - 0.158k) = 0$$

其劳斯表为

$$\begin{array}{r} w^2 \quad 0.158k \quad \quad \quad 2.736 - 0.158k \\ w^1 \quad 1.264 \\ w^0 \quad 2.736 - 0.158k \end{array}$$

若使系统稳定, 则要求

$$\begin{cases} 0.158k > 0 \\ 2.736 - 0.158k > 0 \end{cases}$$

解得使系统稳定的  $k$  值范围为  $0 < k < 17.3$ 。

显然, 当  $k \geq 17.3$  时, 该系统是不稳定的, 众所周知, 对于二阶连续系统,  $k$  为任何值时都是稳定的, 这就说明  $k$  对离散系统的稳定性是有影响的。

### 3.2.3 离散系统开环增益、采样周期与稳定性的关系

系统的稳定性是系统的固有特性, 主要取决于系统的结构参数, 与输入信号的形式无关。一般来说, 采样周期  $T$  也对系统的稳定性有影响, 缩短采样周期会改善系统的稳定性。简单起见, 通过例子来说明。

**例 3.6** 对于图 3.4 所示的离散系统, 试分析该系统的开环增益  $k$ 、采样周期  $T$  与稳定性的关系。

解: 根据例 3.2 求得的结果, 该系统的闭环 Z 传递函数为

$$W(z) = \frac{k[(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})]}{z^2 + [k(T-1+e^{-T}) - 1 - e^{-T}]z + k(1-e^{-T}-Te^{-T}) + e^{-T}}$$

则该系统的 Z 特征方程为

$$\Delta(z) = z^2 + [k(T-1+e^{-T}) - 1 - e^{-T}]z + k(1-e^{-T}-Te^{-T}) + e^{-T}$$

设  $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ , 则得 W 特征方程为

$$kT(1-e^{-T})\omega^2 + 2[1-e^{-T} - k(1-e^{-T} - Te^{-T})]\omega + k(3-T-3e^{-T} - 2Te^{-T}) + 2 + 3e^{-T} = 0$$

其劳斯表为

$$\begin{array}{l} \omega^2 \quad kT(1-e^{-T}) \qquad \qquad \qquad k(3-T-3e^{-T} - 2Te^{-T}) + 2 + 3e^{-T} \\ \omega^1 \quad 2[1-e^{-T} - k(1-e^{-T} - Te^{-T})] \\ \omega^0 \quad k(3-T-3e^{-T} - 2Te^{-T}) + 2 + 3e^{-T} \end{array}$$

若使系统稳定, 则要求

$$\begin{cases} kT(1-e^{-T}) > 0 \\ 1-e^{-T} - k(1-e^{-T} - Te^{-T}) > 0 \\ k(3-T-3e^{-T} - 2Te^{-T}) + 2 + 3e^{-T} > 0 \end{cases}$$

当  $T=4\text{s}$  时, 得  $0 < k < 1.081$ 。

当  $T=3\text{s}$  时, 得  $0 < k < 1.187$ 。

当  $T=2\text{s}$  时, 得  $0 < k < 1.456$ 。

当  $T=1\text{s}$  时, 得  $0 < k < 2.392$ 。

当  $T=0.5\text{s}$  时, 得  $0 < k < 4.362$ 。

当  $T=0.1\text{s}$  时, 得  $0 < k < 20.339$ 。

当  $T=0.01\text{s}$  时, 得  $0 < k < 200.334$ 。

可以看出, 当减小采样周期  $T$  时, 使系统稳定的开环增益  $k$  值范围增大; 反之, 增大采样周期  $T$  时, 使系统稳定的开环增益  $k$  值范围缩小。也就是说, 减小采样周期, 系统的稳定性能将升高; 增大采样周期, 系统的稳定性能将下降。但需要指出的是, 对于计算机控制系统, 缩短采样周期就意味着增加计算机的运算时间, 且当采样周期减小到一定程度后, 对改善动态性能无多大意义, 所以应该适当选取采样周期。

### 3.3 离散系统的过渡响应分析

一个控制系统在外信号作用下从原有稳定状态变化到新的稳定状态的整个动态过程称为控制系统的过渡过程, 一般认为被控变量进入新稳态值附近  $\pm 5\%$  或  $\pm 3\%$  的范围内就可以表明过渡过程已经结束。

如果已知线性离散系统在阶跃输入下输出的 Z 变换  $Y(z)$ , 那么, 对  $Y(z)$  进行 Z 反变换, 就可获得动态响应  $y^*(t)$ , 将  $y^*(t)$  连成光滑曲线, 就可得到系统的动态性能指标。离散系统单位阶跃响应曲线如图 3.7 所示。

通常, 线性离散系统的动态特征是系统在单位阶跃信号输入下的过渡过程特性(或者说系统的动态响应特性), 原因是单位阶跃输入信号容易产生, 并且能够提供动态响应和稳态响应的有用信息。与连续系统相似, 离散系统的主要性能指标有上升时间、峰值时间、过渡过程时间和超调量等, 具体定义如下:

**上升时间  $t_r$**  响应曲线从稳态值的  $10\%$  上升到稳态值  $90\%$  所需的时间。

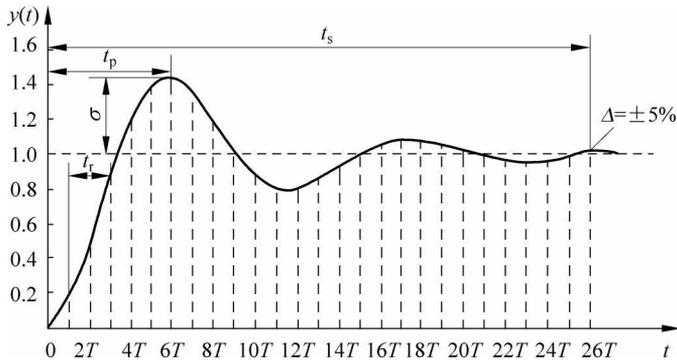


图 3.7 离散系统单位阶跃响应曲线

**峰值时间  $t_p$**  响应曲线从零时刻起到达超过其稳态值时的第一个峰值所需的时间。

**过渡过程时间  $t_s$**  响应曲线从零时刻起进入并稳定在稳态值的某一范围所需的时间,以稳态值的百分数来表示,通常取 $\pm 5\%$ 。

**超调量  $\sigma$**  响应曲线超过其稳态值的最大峰值与稳态值的差值,用百分数来表示,定义为

$$\sigma = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

首先研究离散系统在单位脉冲信号作用下的瞬态响应,以了解离散系统的动态性能。设离散系统的闭环 Z 传递函数可以写成如下形式:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - z_j)} \quad n > m$$

式中,  $z_i$  与  $z_j$  分别表示闭环零点和极点。利用部分分式法,可将  $W(z)$  展开成

$$W(z) = \frac{A_1 z}{z - z_1} + \frac{A_2 z}{z - z_2} + \dots + \frac{A_n z}{z - z_n}$$

由此可见,离散系统的时间响应是它各个极点时间响应的线性叠加。如果了解位于任意位置的一个极点所对应的瞬态响应,则整个离散系统的瞬态响应也就容易解决了。

与连续系统类似,离散系统的零点和极点在 Z 平面上的分布对系统的瞬态响应起着决定性的作用,特别是系统的极点不但决定了系统的稳定性而且还决定了系统响应速度。假设某系统的闭环 Z 传递函数只有一个实极点,考虑当极点位于不同的位置时系统的单位脉冲响应。对于单位脉冲序列  $\delta(k)$ ,它的 Z 变换为 1,在单位脉冲序列的作用下系统的动态过程,称为系统的单位脉冲响应。设系统输入为  $R(z)$ ,输出为  $Y(z)$ ,系统闭环 Z 传递函数为  $W(z)$ 。使用单位脉冲作为系统的输入时,由于  $R(z)=1$ ,则系统输出为

$$Y(z) = W(z)R(z) = W(z)$$

因此,若记系统单位脉冲响应序列为  $y(k)$ ,则有

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[W(z)]$$

即系统闭环 Z 传递函数  $W(z)$  的 Z 反变换即为系统的单位脉冲响应函数。

假设系统有一个位于实轴的单极点  $z_i$ , 则在系统闭环 Z 传递函数的部分分式中必含有  $A_i z / (z - z_i)$  项, 在单位脉冲作用下, 对应于这一项的输出序列为  $y(k) = A_i z_i^k$ 。当极点  $z_i$  位于 Z 平面实轴不同位置时, 它所对应的脉冲响应序列如图 3.8 所示。

(1) 当  $z_i > 1$  时, 即极点在单位圆外的正实轴上, 对应的暂态响应  $y(kT)$  单调发散。

(2) 当  $z_i = 1$  时, 即极点在单位圆与正实轴的交点, 对应的暂态响应  $y(kT)$  是等幅的。

(3) 当  $0 < z_i < 1$  时, 即极点在单位圆内的正实轴上, 对应的暂态响应  $y(kT)$  单调衰减。

(4) 当  $-1 < z_i < 0$  时, 即极点在单位圆内的负实轴上, 对应的暂态响应  $y(kT)$  是以  $2T$  为周期正负交替地衰减振荡。

(5) 当  $z_i = -1$  时, 即极点在单位圆与负实轴的交点, 对应的暂态响应  $y(kT)$  是以  $2T$  为周期正负交替地等幅振荡。

(6) 当  $z_i < -1$  时, 即极点在单位圆外的负实轴上, 对应的暂态响应  $y(kT)$  是以  $2T$  为周期正负交替地发散振荡。

对于有一对共轭复数极点的情况, 请读者参阅有关参考书。

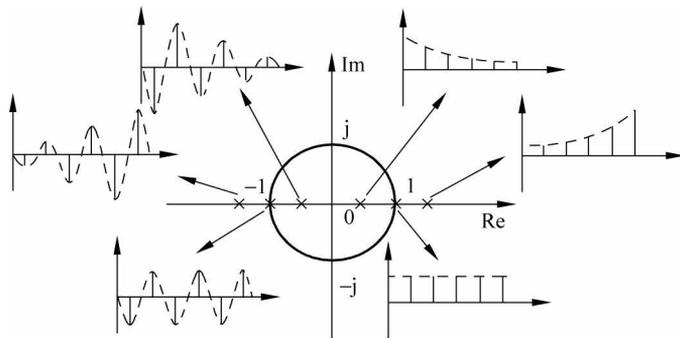


图 3.8 不同位置的实极点与脉冲响应的关系

下面通过实例对离散系统的过渡过程进行分析。

**例 3.7** 分析图 3.4 所示系统的过渡过程, 设系统输入是单位阶跃信号  $R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ 。

**解:** 根据例 3.2 求得的结果, 该系统的闭环 Z 传递函数为

$$W(z) = \frac{k(T - 1 + e^{-T})z^{-1} + k(1 - e^{-T} - Te^{-T})z^{-2}}{1 + [k(T - 1 + e^{-T}) - 1 - e^{-T}]z^{-1} + [k(1 - e^{-T} - Te^{-T}) + e^{-T}]z^{-2}}$$

(1) 设  $k=1, T=1s$ , 则

$$W(z) = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.632z^{-2}}$$

$$Y(z) = W(z)R(z)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.632z^{-2}} \times \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= 0.368z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5} + 0.895z^{-6} + 0.802z^{-7} + \\ &\quad 0.868z^{-8} + 0.993z^{-9} + 1.077z^{-10} + 1.081z^{-11} + 1.032z^{-12} + 0.981z^{-13} + \\ &\quad 0.961z^{-14} + 0.973z^{-15} + 0.997z^{-16} + \dots \end{aligned}$$

从上述数据可以看出,系统在单位阶跃函数作用下的过渡过程具有衰减振荡的形式,故系统是稳定的。其超调量  $\sigma \approx 40\%$ ,且峰值出现在第 3、4 个采样点之间,峰值时间  $t_p \approx 3.5s$ ,约经 12 个采样周期后过渡过程结束,过渡过程时间  $t_s \approx 12s$ ,其响应曲线如图 3.9 所示。

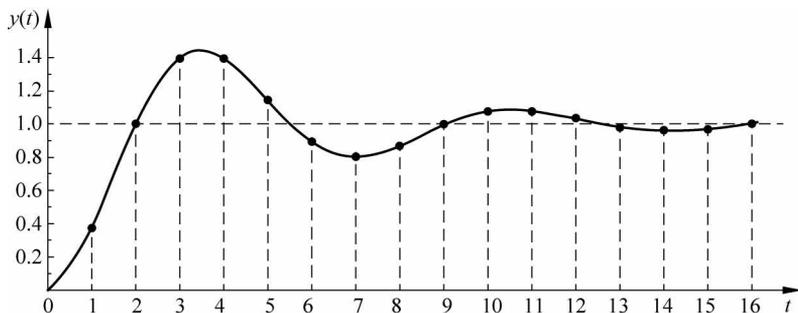


图 3.9  $k=1, T=1s$  时的响应曲线

(2) 设  $k=1, T=0.5s$ , 则

$$W(z) = \frac{0.107z^{-1} + 0.09z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.697z^{-2}}$$

$$Y(z) = W(z)R(z)$$

$$= \frac{0.107z^{-1} + 0.09z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.697z^{-2}} \times \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$= 0.107z^{-1} + 0.358z^{-2} + 0.659z^{-3} + 0.937z^{-4} + 1.142z^{-5} + 1.258z^{-6} + \\ 1.287z^{-7} + 1.251z^{-8} + 1.177z^{-9} + 1.090z^{-10} + 1.012z^{-11} + 0.955z^{-12} + \\ 0.924z^{-13} + 0.918z^{-14} + 0.929z^{-15} + 0.951z^{-16} + 0.976z^{-17} + 0.998z^{-18} + \\ 1.014z^{-19} + \dots$$

从上述数据可以看出,系统在单位阶跃函数作用下的过渡过程具有衰减振荡的形式,故系统是稳定的。其超调量  $\sigma \approx 28.7\%$ ,且峰值出现在第 7 个采样点附近,峰值时间  $t_p \approx 3.5s$ ,约经 16 个采样周期后过渡过程结束,过渡过程时间  $t_s \approx 8s$ ,其响应曲线如图 3.10 所示。

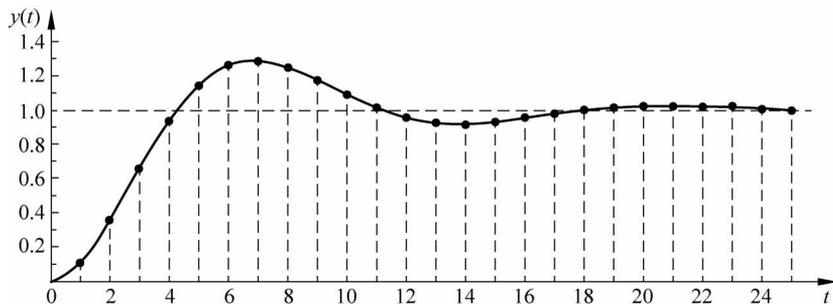


图 3.10  $k=1, T=0.5s$  时的响应曲线

(3) 设  $k=1.5, T=1s$ , 则

$$W(z) = \frac{0.552z^{-1} + 0.396z^{-2}}{1 - 0.816z^{-1} + 0.764z^{-2}}$$

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= W(z)R(z) \\
 &= \frac{0.552z^{-1} + 0.396z^{-2}}{1 - 0.816z^{-1} + 0.764z^{-2}} \times \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
 &= 0.552z^{-1} + 1.399z^{-2} + 1.668z^{-3} + 1.240z^{-4} + 0.686z^{-5} + 0.560z^{-6} + \\
 &\quad 0.881z^{-7} + 1.239z^{-8} + 1.286z^{-9} + 1.051z^{-10} + 0.823z^{-11} + 0.817z^{-12} + \\
 &\quad 0.986z^{-13} + 1.129z^{-14} + 1.116z^{-15} + 0.996z^{-16} + 0.908z^{-17} + 0.928z^{-18} + \\
 &\quad 1.011z^{-19} + 1.064z^{-20} + 1.044z^{-21} + 0.987z^{-22} + 0.956z^{-23} + 0.974z^{-24} + \\
 &\quad 1.013z^{-25} + \dots
 \end{aligned}$$

由以上数据可知该离散系统仍是稳定的,其超调量  $\sigma \approx 66.8\%$ ,且峰值出现在第 3 个采样点附近,峰值时间  $t_p \approx 3s$ ,约经 21 个采样周期后过渡过程结束,过渡过程时间  $t_s \approx 21s$ ,其响应曲线如图 3.11 所示。

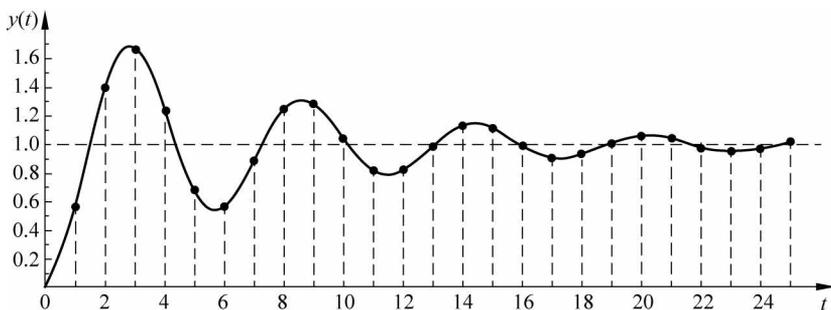


图 3.11  $k=1.5, T=1s$  时的响应曲线

由以上数据分析可知,减小采样周期可使系统的振荡次数、超调量和过渡过程时间减小,增大开环增益系数可使系统的响应加快,同时振荡次数、超调量和过渡过程时间增加。因此,增加采样频率可以改善系统的动态性能,增大系统的开环增益使系统动态性能变差。

### 3.4 离散系统的稳态准确度分析

在连续系统中,稳态误差的计算可以通过两种方法进行:一种是建立在拉普拉斯变换终值定理基础上的计算方法,可以求出系统的终值误差;另一种是从系统误差传递函数出发的动态误差系数法,可以求出系统动态误差的稳态分量。这两种计算稳态误差的方法,在一定条件下可以推广到离散系统。

由于离散系统没有唯一的典型结构形式,所以误差  $Z$  传递函数也给不出一般的计算公式,离散系统的稳态误差需要针对不同形式的离散系统来求取。这里仅介绍利用  $Z$  变换的终值定理方法求取离散系统的稳态误差。

设单位负反馈离散系统如图 3.12 所示。

其中,  $e(t)$  为系统的连续误差信号,  $e^*(t)$  为系统误差采样信号,  $D(z)$  为数字控制器的

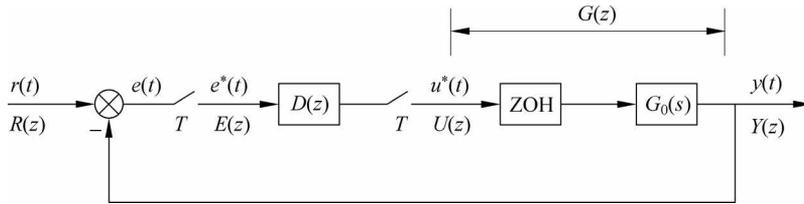


图 3.12 单位负反馈离散系统

Z 传递函数,  $ZOH = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$  为零阶保持器的传递函数, 令  $G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_0(s)$ ,  $G_0(s)$  为被控对象连续部分的传递函数, 系统闭环误差 Z 传递函数为

$$\begin{aligned} W_e(z) &= \frac{E(z)}{R(z)} \\ &= \frac{1}{1 + D(z)G(z)} \end{aligned}$$

如果  $W_e(z)$  的极点(即闭环极点)全部严格位于 Z 平面的单位圆内, 即若离散系统是稳定的, 则可用 Z 变换的终值定理求出离散系统的稳态误差为

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^{-1}}{1 + D(z)G(z)} R(z) \end{aligned}$$

上式表明, 线性定常离散系统的稳态误差, 不但与系统本身的结构和参数有关, 而且与输入序列的形式及幅值有关。

与连续系统类似, 可以把离散系统开环 Z 传递函数  $D(z)G(z)$  中具有  $z=1$  的极点个数  $\nu$  作为划分离散系统型别的标准, 把  $D(z)G(z)$  中  $\nu=0, 1, 2, \dots$  的系统分别称为 0 型、I 型和 II 型系统等。下面讨论图 3.12 所示的不同类别的离散系统在三种典型输入信号作用下的稳态误差, 并建立离散系统稳态误差系数的概念。

### 1. 单位阶跃输入时的稳态误差

对于单位阶跃输入  $r(t) = 1(t)$  时, 其 Z 变换为

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{z}{z-1} \\ E(z) &= \frac{1}{1 + D(z)G(z)} \times \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

由 Z 变换终值定理, 得

$$\begin{aligned} e_p(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) E(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + D(z)G(z)} \\ &= \frac{1}{K_p} \end{aligned}$$

称  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + D(z)G(z)]$  为位置放大系数。

对于 0 型离散系统, 由于开环 Z 传递函数  $D(z)G(z)$  中没有  $z=1$  的极点, 则  $K_p$  为某一定值, 从而  $e_p(\infty) \neq 0$ ; 对于 I 型及以上离散系统, 由于  $D(z)G(z)$  中有  $z=1$  的极点, 则  $K_p = \infty$ , 从而  $e_p(\infty) = 0$ 。因此, 在单位阶跃输入作用下, 0 型离散系统存在稳态误差, I 型或 I 型以上的离散系统没有稳态误差, 这与连续系统相似。

## 2. 单位速度输入时的稳态误差

对于单位速度输入  $r(t) = t$  时, 其 Z 变换为

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + D(z)G(z)} \times \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

由 Z 变换终值定理, 得

$$e_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z)$$

$$= \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z)G(z)}$$

$$= \frac{1}{K_v}$$

称  $K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z)G(z)$  为速度放大系数。

对于 0 型离散系统, 由于开环 Z 传递函数  $D(z)G(z)$  中没有  $z=1$  的极点, 则  $K_v = 0$ , 从而  $e_v(\infty) = \infty$ ; 对于 I 型离散系统, 由于  $D(z)G(z)$  中有一个  $z=1$  的极点, 则  $K_v$  为某一定值, 从而  $e_v(\infty) \neq 0$ ; 对于 II 型及以上的离散系统, 由于  $D(z)G(z)$  中有两个及两个以上  $z=1$  的极点, 则  $K_v = \infty$ , 从而  $e_v(\infty) = 0$ 。因此, 在单位速度输入作用下, 0 型离散系统稳态误差为无穷大, I 型离散系统存在稳态误差; II 型及 II 型以上的离散系统没有稳态误差。

## 3. 单位加速度输入时的稳态误差

对于单位加速度输入  $r(t) = \frac{1}{2}t^2$  时, 其 Z 变换函数为

$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + D(z)G(z)} \times \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

由 Z 变换终值定理, 得

$$e_a(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z)$$

$$= \frac{T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 D(z)G(z)}$$

$$= \frac{1}{K_a}$$

称  $K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 D(z)G(z)$  为加速度放大系数。

对于 0 型及 I 型离散系统  $K_a = 0$ , 从而  $e_a(\infty) = \infty$ ; 对于 II 型离散系统,  $K_a$  为某一定值, 从而  $e_a(\infty) \neq 0$ ; III 型及 III 型以上离散系统,  $K_a = \infty$ , 从而  $e_a(\infty) = 0$ 。因此, 在单位加速度输入作用下, 0 型和 I 型离散系统稳态误差为无穷大, II 型离散系统存在稳态误差, III 型或 III 型以上的离散系统没有稳态误差。

**例 3.8** 对于图 3.12 所示的离散系统, 设  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ ,  $D(z) = 1$ ,  $T = 1\text{s}$ , 求该系统在三种典型信号的作用下的稳态误差。

**解:** 求得

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) \right] \\ &= \frac{0.368(z + 0.718)}{(z - 1)(z - 0.368)} \\ D(z)G(z) &= \frac{0.368(z + 0.718)}{(z - 1)(z - 0.368)} \end{aligned}$$

此系统为 I 型离散系统, 闭环误差 Z 传递函数为

$$\begin{aligned} W_e(z) &= \frac{1}{1 + D(z)G(z)} \\ &= \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 - z + 0.632} \end{aligned}$$

(1) 单位阶跃输入时, 有

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} [1 + D(z)G(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ 1 + \frac{0.368(z + 0.718)}{(z - 1)(z - 0.368)} \right] \\ &= \infty \end{aligned}$$

所以

$$e_p(\infty) = \frac{1}{K_p} = 0$$

系统无稳态误差, 系统的误差响应为

$$\begin{aligned} E(z) &= W_e(z)R(z) \\ &= \frac{1 - 1.368z^{-1} + 0.368z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.632z^{-2}} \times \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= 1 + 0.632z^{-1} + 0z^{-2} - 0.4z^{-3} - 0.4z^{-4} - 0.147z^{-5} + 0.105z^{-6} + 0.198z^{-7} + \\ &\quad 0.132z^{-8} + 0.007z^{-9} - 0.077z^{-10} - 0.081z^{-11} - 0.032z^{-12} + 0.019z^{-13} + \\ &\quad 0.039z^{-14} + 0.027z^{-15} + 0.003z^{-16} + \dots \end{aligned}$$

从数据上可以看出, 经过 12 个采样周期, 系统的误差在  $\pm 5\%$  范围内, 系统的过渡过程结束, 单位阶跃输入下的误差响应曲线如图 3.13 所示。

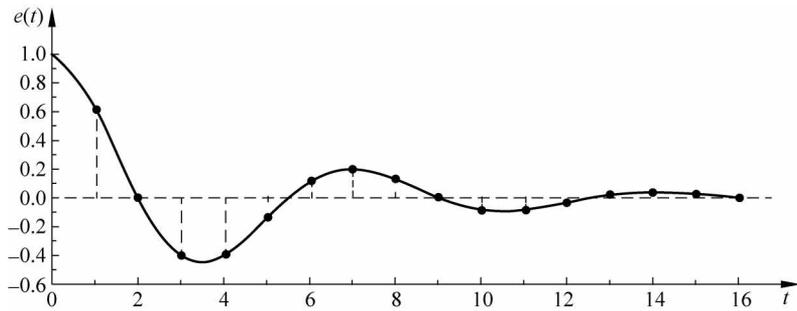


图 3.13 单位阶跃输入下的误差响应曲线

(2) 单位速度输入时,有

$$\begin{aligned} K_v &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z)G(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.368(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

所以

$$e_v(\infty) = \frac{T}{K_v} = 1$$

系统有恒为 1 的稳态误差,系统的误差响应为

$$\begin{aligned} E(z) &= W_e(z)R(z) \\ &= \frac{1 - 1.368z^{-1} + 0.368z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.632z^{-2}} \times \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= z^{-1} + 1.632z^{-2} + 1.632z^{-3} + 1.233z^{-4} + 0.833z^{-5} + 0.686z^{-6} + 0.792z^{-7} + \\ &\quad 0.990z^{-8} + 1.122z^{-9} + 1.128z^{-10} + 1.051z^{-11} + 0.970z^{-12} + 0.938z^{-13} + \\ &\quad 0.957z^{-14} + 0.996z^{-15} + 1.023z^{-16} + \dots \end{aligned}$$

从数据上可以看出,经过 14 个采样周期,系统的误差在  $\pm 5\%$  范围内,系统的过渡过程结束,单位速度输入下的误差响应曲线如图 3.14 所示。

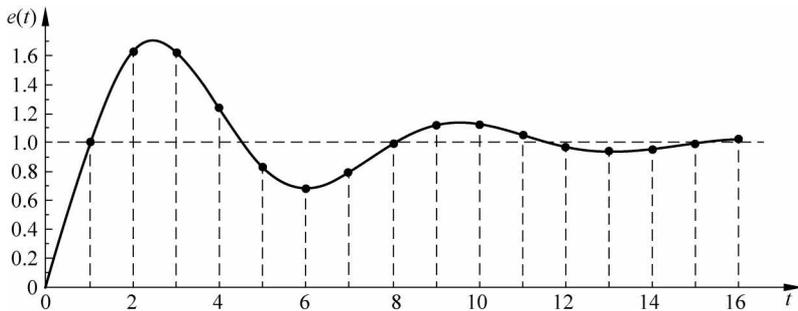


图 3.14 单位速度输入下的误差响应曲线

(3) 单位加速度输入时,有

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 D(z)G(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{0.368(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以

$$e_a(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

系统稳态误差为无穷大,系统的误差响应为

$$\begin{aligned} E(z) &= W_e(z)R(z) \\ &= \frac{1 - 1.368z^{-1} + 0.368z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.632z^{-2}} \times \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3} \\ &= 0.5z^{-1} + 1.816z^{-2} + 3.448z^{-3} + 4.88z^{-4} + 5.913z^{-5} + 6.673z^{-6} + 7.412z^{-7} + \\ &\quad 8.302z^{-8} + 9.358z^{-9} + 10.483z^{-10} + 11.573z^{-11} + 12.583z^{-12} + 13.537z^{-13} + \\ &\quad 14.485z^{-14} + 15.461z^{-15} + 16.471z^{-16} + \dots \end{aligned}$$

从数据上可以看出,系统的误差是逐渐增大的,单位加速度输入下的误差响应曲线如图 3.15 所示。

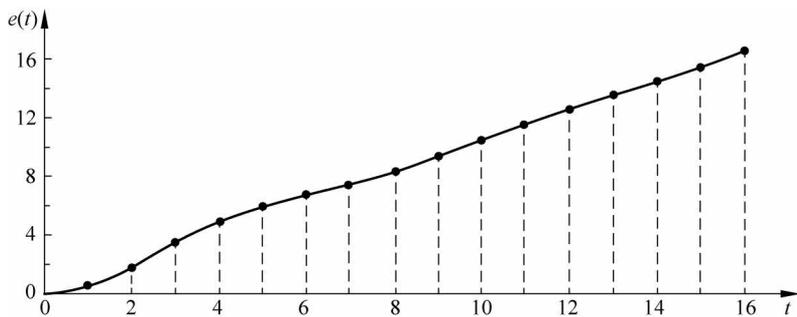


图 3.15 单位加速度输入下的误差响应曲线

由此可见, I 型离散系统在稳态时能准确地复现单位阶跃输入信号,在单位速度输入作用下存在恒定的稳态误差,而在单位加速度输入作用下稳态误差为 $\infty$ ,所以 I 型系统不能跟踪加速度信号。

### 3.5 离散系统的输出响应

前面分析了离散系统的过渡过程和稳态过程的特性。但是计算机控制系统被控对象的输出多为连续信号,要想得到采样点间的响应,可用广义 Z 变换和广义 Z 传递函数来求得。

### 3.5.1 离散系统在采样点间的输出响应

单位负反馈离散系统如图 3.12 所示, 设  $G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_0(s)$ , 可以想象其输出  $y(t)$  是经过假想延迟  $e^{-qTs}$  之后再输出的, 令  $\beta = 1 - q$ , 于是其闭环广义 Z 传递函数为

$$W(z, \beta) = \frac{Y(z, \beta)}{R(z)}$$

式中

$$Y(z, \beta) = G(z, \beta)U(z)$$

$$U(z) = D(z)E(z)$$

$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

则得到闭环广义 Z 传递函数为

$$W(z, \beta) = \frac{D(z)G(z, \beta)}{1 + D(z)G(z)}$$

其输出广义 Z 变换为

$$Y(z, \beta) = W(z, \beta)R(z)$$

求得上式的 Z 反变换后, 当  $\beta$  为  $0 \sim 1$  时, 就可得到在采样点间的输出响应  $y^*(t)$ 。

**例 3.9** 对于图 3.12 所示的离散系统, 设  $G_0(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $D(z) = 1.5$ ,  $T = 1s$ , 求该系统在单位阶跃信号的作用下, 在采样点间的响应。

解:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_0(s) \right] \\ &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s+1} \right] \\ &= \frac{0.632z^{-1}}{1 - 0.368z^{-1}} \\ G(z, \beta) &= \mathcal{Z}[G(s, \beta)] \\ &= \mathcal{Z}[G(s)e^{-(1-\beta)Ts}] \\ &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s+1} e^{-(1-\beta)Ts} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left( \frac{1}{s(s+1)} e^{-(1-\beta)Ts} \right) \\ &= (1 - z^{-1}) \left( \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{e^{-\beta} z^{-1}}{1 - 0.368z^{-1}} \right) \\ &= \frac{[(1 - e^{-\beta}) + (e^{-\beta} - 0.368)z^{-1}] z^{-1}}{1 - 0.368z^{-1}} \end{aligned}$$

于是可得闭环 Z 传递函数为

$$\begin{aligned}
 W(z, \beta) &= \frac{Y(z, \beta)}{R(z)} \\
 &= \frac{D(z)G(z, \beta)}{1 + D(z)G(z)} \\
 &= \frac{1.5 [(1 - e^{-\beta}) + (e^{-\beta} - 0.368)z^{-1}] z^{-1}}{1 + 0.58z^{-1}}
 \end{aligned}$$

当输入  $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ ,  $\beta=0.8$  时, 系统输出的广义 Z 变换为

$$\begin{aligned}
 Y(z, 0.8) &= W(z, 0.8)R(z) \\
 &= \frac{0.826z^{-1} + 0.122z^{-2}}{1 - 0.42z^{-1} - 0.58z^{-2}} \\
 &= 0.826z^{-1} + 0.469z^{-2} + 0.676z^{-3} + 0.556z^{-4} + 0.626z^{-5} + 0.585z^{-6} + \dots
 \end{aligned}$$

### 3.5.2 被控对象含延时的输出响应

在计算机控制系统中, 被控对象常常固定地含有延时环节。另外, 如果计算机的计算时间和 A/D 转换时间等不能忽略, 则可以把这些时间集中起来考虑, 看成是被控对象的延迟时间, 即把这些时间当作被控对象含有延时环节, 如图 3.16 所示。利用广义 Z 变换法和广义 Z 传递函数, 可以方便地计算被控对象含有延时的输出响应。

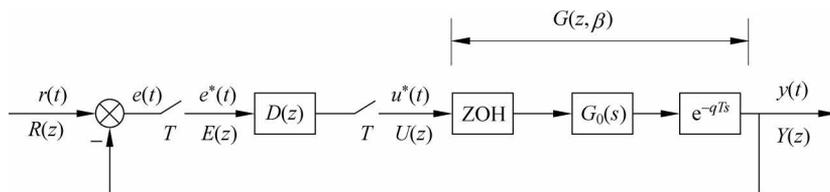


图 3.16 被控对象含有延时环节的离散系统

设

$$G(z, q) = \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_0(s) e^{-qTs} \right]$$

令  $\beta = 1 - q$ , 则有

$$G(z, \beta) = \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_0(s) e^{-(1-\beta)Ts} \right]$$

其闭环广义 Z 传递函数为

$$W(z, \beta) = \frac{Y(z, \beta)}{R(z)}$$

式中

$$Y(z, \beta) = G(z, \beta)U(z)$$

$$U(z) = D(z)E(z)$$

$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

$$Y(z) = G(z, \beta)U(z)$$

得到闭环广义 Z 传递函数

$$W(z, \beta) = \frac{D(z)G(z, \beta)}{1 + D(z)G(z, \beta)}$$

其输出广义 Z 变换为

$$Y(z, \beta) = W(z, \beta)R(z)$$

求得上式的 Z 反变换后, 当  $\beta$  为  $0 \sim 1$  时, 就可得到在采样点的输出响应  $y^*(t)$ 。

**例 3.10** 对于图 3.13 所示的离散系统, 设  $G_0(z) = \frac{1}{s+1}$ ,  $D(z) = 1.5$ ,  $T = 1s$ ,  $q = 0.3$ , 求该系统在单位阶跃信号的作用下的输出响应。

**解:**  $q = 0.13$ ,  $\beta = 1 - 0.13 = 0.87$ , 则

$$\begin{aligned} G(z, \beta) &= \mathcal{Z}\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s+1} e^{-1} e^{0.87}\right) \\ &= (1 - z^{-1})z^{-1} \mathcal{Z}\left[\frac{e^{0.87}}{s(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})z^{-1} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{e^{-0.87}}{1 - 0.368z^{-1}}\right) \\ &= \frac{0.581(1 + 0.088z^{-1})z^{-1}}{1 - 0.368z^{-1}} \end{aligned}$$

闭环广义 Z 传递函数为

$$\begin{aligned} W(z, \beta) &= \frac{D(z)G(z, \beta)}{1 + D(z)G(z, \beta)} \\ &= \frac{0.872z^{-1} + 0.077z^{-2}}{1 + 0.504z^{-1} + 0.077z^{-2}} \end{aligned}$$

当输入信号为  $R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$  时, 其输出广义 Z 变换为

$$\begin{aligned} Y(z, \beta) &= W(z, \beta)R(z) \\ &= \frac{0.872z^{-1} + 0.077z^{-2}}{1 - 0.496z^{-1} - 0.427z^{-2} - 0.077z^{-3}} \\ &= 0.872z^{-1} + 0.51z^{-2} + 0.625z^{-3} + 0.601z^{-4} + 0.600z^{-5} + \dots \end{aligned}$$

这样就得到系统在采样点的输出响应。

## 3.6 离散系统的根轨迹分析

有经验的工程师常常在初始设计中采用根轨迹法, 将闭环的主导极点配置到 Z 平面希望的位置上, 然后通过数字仿真对闭环性能再加以改进。Z 平面上的根轨迹是控制系统开环 Z 传递函数中的某一参数(如放大系数)连续变化时, 闭环 Z 传递函数的极点连续变化的轨线, Z 平面轨迹的绘制原则同 S 平面基本相同。

针对图 3.12 所示的单位负反馈离散控制系统, 设开环 Z 传递函数  $D(z)G(z)$  有  $n$  个极点,  $m$  个零点, 且有  $n \geq m$ , 即

$$D(z)G(z) = k \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

其中  $k$  是放大系数或其他参数,绘制根轨迹依据是闭环  $Z$  特征方程  $1+D(z)G(z)=0$ ,将其分为两个方程:

$$\begin{cases} \angle D(z)G(z) = \sum_{i=1}^m \angle(z - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - p_i) = (2l+1)\pi \quad l=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ |D(z)G(z)| = 1 \end{cases}$$

对于给定的开环  $Z$  传递函数  $D(z)G(z)$ ,凡是符合相角条件(即轨迹方程)的  $Z$  平面的点,都是根轨迹上的点,而该点对应的  $k$  值则由幅值条件确定。

根轨迹图的绘制要点(当  $k$  为  $0 \sim \infty$ )如下。

- (1) 根轨迹对称于实轴。
- (2) 有  $n$  条分支( $n \geq m$ )。
- (3) 出发点: 每个极点。
- (4) 终点:  $m$  条终止于  $m$  个零点,而  $n-m$  条趋向无穷远点。
- (5) 无穷远分支的渐近线。
  - ① 渐近线与实轴夹角。

$$\theta = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \quad l=0, 1, 2, \dots, n-m-1$$

- ② 渐近线与实轴上的交点。

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

- (6) 实轴上的根轨迹段(若有)其右边实轴上的极点和零点总数为奇数个。
- (7) 实轴上的分离点或汇合点(若有)是如下方程的解:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d-z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i}$$

- (8) 出发角与终止角。

- ① 令极点为  $p_k$ ,重数为  $r_k$ ,出发角记为  $\theta_{p_k}$ ,求  $\theta_{p_k}$  的方程为

$$\sum_{i=1}^m \theta_{z_i} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \theta_{p_i} - r_k \theta_{p_k} = (2l+1)\pi \quad l=0, 1, 2, \dots$$

- ② 令零点为  $z_k$ ,重数为  $r_k$ ,出发角记为  $\theta_{z_k}$ ,求  $\theta_{z_k}$  的方程为

$$r_k \theta_{z_k} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \theta_{z_i} - \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} = (2l+1)\pi \quad l=0, 1, 2, \dots$$

- (9) 当  $n-m \geq 2$  时,所有闭环极点之和为常数,即根轨迹某些向左,必有另一些向右。

(10) 含两个极点和一个零点的根轨迹是以零点为圆心,以零点到分离点的距离为半径的圆周或部分圆周。

用根轨迹法分析系统闭环稳定性,可知  $k$  变化时的极点变化趋势以及对特定的点求取增益值,因此用它来指导参数整定是很直观的。

**例 3.11** 已知反馈系统开环  $Z$  传递函数为

$$D(z)G(z) = \frac{k(z+0.5)}{z(z-0.5)(z^2-z+0.5)}$$

绘制  $k$  为  $-\infty \sim \infty$  的根轨迹。

**解：**由于此开环  $Z$  传递函数有一个零点  $z_1 = -0.5$ ；四个极点  $p_1 = 0, p_2 = 0.5, p_{3,4} = 0.5 \pm j0.5$ ，可分成  $k$  为  $0 \sim \infty$  和  $k$  为  $-\infty \sim 0$  两部分绘制。

根轨迹的关键数据为：

由要点(2)，已知  $n=4$ ，故根轨迹的分支条数为 4 条；

由要点(3)，根轨迹的出发点分别是  $p_1 = 0, p_2 = 0.5, p_{3,4} = 0.5 \pm j0.5$ ；

由要点(4)，根轨迹一条终止于  $z_1 = -0.5$  点，另外三条趋向无穷远点；

由要点(5)，渐近线方向角  $\theta = (2l+1)\pi/3$ ，得  $\theta$  为  $\pm 60^\circ$  和  $\pm 180^\circ$ ，渐近线与实轴交点为  $\sigma = (0+0.5+2 \times 0.5+0.5)/3 = 0.67$ ；

由要点(6)，实轴上根轨迹有两段， $p_1$  与  $p_2$  之间和零点  $z_1$  的左面；

由要点(7)，实轴的分离点为 0.159，汇合点为  $-0.797$ ；

由要点(8)，复极点处轨迹出发角  $\theta = \pm 18.4^\circ$ 。

所得的根轨迹如图 3.17 所示。

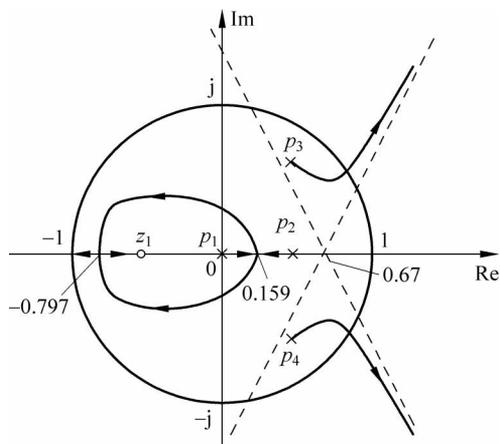


图 3.17 例 3.11 根轨迹图

对于  $z = -1$  点，闭环  $Z$  特征方程  $1 + D(z)G(z) = 0$  时，计算得增益临界值为  $k = 7.5$ 。

**例 3.12** 试用根轨迹法确定使例 3.3 中系统稳定的  $k$  值范围。

**解：**该系统的开环  $Z$  传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{k}{s(s+4)} \right] \\ &= \frac{0.158kz}{(z-1)(z-0.368)} \end{aligned}$$

**解：**此开环  $Z$  传递函数有一个零点  $z_1 = 0$ ；两个极点  $p_1 = 1, p_2 = 0.368$ 。

正向根轨迹的关键数据为：

由要点(2)，已知  $n=2$ ，故根轨迹的分支条数为 2 条；

由要点(3)，根轨迹的出发点分别是  $p_1 = 1, p_2 = 0.368$ ；

由要点(4)，根轨迹一条终止于  $z_1 = 0$  点，另外一条趋向无穷远点；

由要点(5)，渐近线方向角  $\theta = (2l+1)\pi$ ，得  $\theta = \pm 180^\circ$ ；

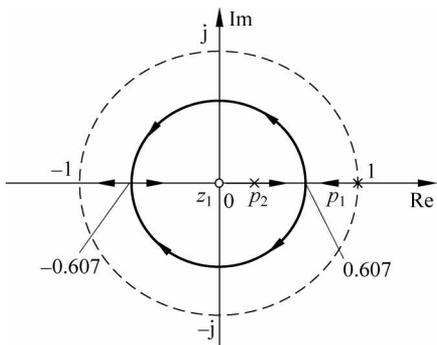


图 3.18 例 3.12 根轨迹图

由要点(6),实轴上根轨迹有两段, $p_1$ 与 $p_2$ 之间和零点 $z_1$ 的左面;

由要点(7),实轴的分离点为 0.607,汇合点为 -0.607;

由要点(10),根轨迹是以零点为圆心,半径为 0.607 的圆周。

所得的根轨迹如图 3.18 所示。

由该图可知, $z = -1$  为系统稳定的临界点,闭环 Z 特征方程  $1 + G(z) = 0$  时,计算得增益临界值为  $k = 17.3$ ,因此,当  $0 < k < 17.3$  时,系统是稳定的。

### 3.7 离散系统的频率分析

和连续系统类似,用频率法分析离散系统时,可用 Bode 图进行分析,离散系统的 Bode 图是用双线性变换即 W 变换,将复变量 Z 变换成复变量  $w$ 。

若已知离散系统的开环传递函数为  $G(z)$ ,对其做 W 变换,即  $z = \frac{1+w}{1-w}$ ,将其代入  $G(z)$  中可得到以  $w$  为变量的开环 W 传递函数  $G(w)$ 。为了得到离散系统的开环频率特性,则可令离散系统的  $G(w)$  的复变量  $w = u + jv$ ,取  $jv$  代入  $G(w)$  中,便可得到离散系统的开环频率特性

$$G(jv) = G(w) \Big|_{w=jv}$$

这里的  $v$  称为虚拟频率,简称虚频或伪频。

Bode 图的绘制要点:

(1) 离散系统的开环频率特性  $G(jv)$  分解成若干基本因子的乘积,即

$$G(jv) = G_1(jv)G_2(jv)\cdots G_n(jv)$$

式中  $G_i(jv) = G_i(v)e^{j\varphi_i(v)}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

对数幅频特性

$$\mathcal{L}(v) = 20 \sum_{i=1}^n \lg |G_i(jv)|$$

相频特性

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(v)$$

基本因子包括比例因子  $k$ 、积分因子  $\frac{1}{jv}$ 、一阶滞后因子  $\frac{1}{1 \pm jT_i v}$ 、一阶超前因子  $1 \pm jT_i v$ 、

二阶滞后因子  $\frac{1}{1 \pm j2\xi T_i v - T_i^2 v^2}$  和二阶超前因子  $1 \pm j2\xi T_i v - T_i^2 v^2$ 。

(2) 求出各一、二阶因子的转折频率  $v_i = 1/T_i$ 。

(3) 起始渐近线或其延长线穿过点  $(1, 20 \lg k)$ , 起始渐近线一般由积分因子产生,如果

没有积分因子,则由转折频率最小的因子产生,起始渐近线斜率为该因子产生的斜率。

(4) 按转折频率由小到大的顺序绘制各因子的渐近线,各渐近线经过转折频率时,渐近线的斜率就会发生变化,变化规则为每个积分因子产生的斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 、每个一阶滞后因子产生的斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 、每个二阶滞后因子产生的斜率为 $-40\text{dB}/\text{dec}$ 、每个一阶超前因子产生的斜率为 $+20\text{dB}/\text{dec}$ 、每个二阶超前因子产生的斜率为 $+40\text{dB}/\text{dec}$ ,当前的渐近线的斜率是前一个渐近线的斜率与当前因子产生的斜率进行叠加而成的,渐近线可用 $y=ax+b$ 来表示,其中, $a$ 由各基本因子确定的, $b$ 可用渐近线通过已知点来求出,注意这里的 $x$ 是Bode图横坐标的对数。

(5) 绘制相频特性时,可挑选一些特征点,如转折频率处以及转折频率的 $1/3$ 、 $1/2$ 、 $2/3$ 的10倍频程处等,利用 $\varphi(\nu) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\nu)$ 来计算各个特征点,将这些点用光滑曲线连接起来即可。

积分因子的相频特性为 $\varphi(\nu) = -90^\circ$ ,一阶滞后因子的相频特性为 $\varphi(\nu) = -\arctan(\nu T)$ ,二阶滞后因子的相频特性为 $\varphi(\nu) = -\arctan\left(\frac{2\xi\nu T}{1-\nu^2 T^2}\right)$ ,一阶超前因子的相频特性为 $\varphi(\nu) = \arctan(\nu T)$ ,二阶超前因子的相频特性为 $\varphi(\nu) = \arctan\left(\frac{2\xi\nu T}{1-\nu^2 T^2}\right)$ 。

**幅值裕量**是指系统开环频率特性相位为 $-180^\circ$ 时,对应到幅频特性的点到横轴的距离,记为 $m$ 。当该点位于横轴下方时, $m>0$ ;当该点位于横轴上方时, $m<0$ 。

**相位裕量**是指开环频率特性幅值为0时,对应到相频特性的点到以 $-180^\circ$ 为横轴的距离,记为 $r$ 。当该点位于横轴上方时, $r>0$ ;当该点位于横轴下方时, $r<0$ 。

如果系统的幅值裕量 $m$ 和相位裕量 $r$ 均大于零,则闭环系统是稳定的;如果均为零,则闭环系统是临界稳定的;否则,闭环系统是不稳定的。

用Bode图法判断离散系统的稳定性准则和连续系统一样,即闭环离散系统稳定的充要条件是:在 $20\lg|G(j\nu)|>0$ 范围内, $G(j\nu)$ 对于 $-180^\circ$ 线的正穿越和负穿越数之差 $N=P/2$ ,其中 $P$ 为开环 $W$ 传递函数 $G(\omega)$ 的不稳定极点个数,即 $G(\omega)$ 在 $W$ 平面右半面极点的个数。

**例 3.13** 设线性离散系统如图 3.19 所示,设 $T=0.1\text{s}$ , $J=41\ 822$ , $k_0=3.17\times 10^5$ ,当 $k=10^7$ 、 $6.32\times 10^6$ 和 $1.65\times 10^6$ 时,试用频率法分析该系统稳定性,并确定幅值的稳定裕度和相角的稳定裕度。

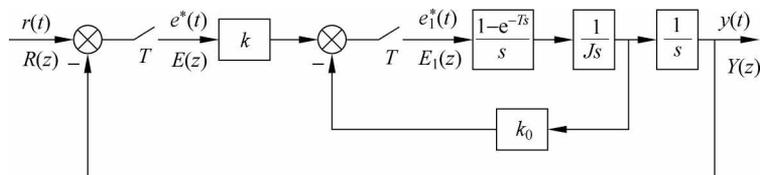


图 3.19 例 3.13 线性离散系统

**解:** 求得系统的开环传递函数为

$$G(z) = \frac{T^2 k (z + 1)}{2Jz^2 + (2k_0 T - 4J)z + 2J - 2k_0 T}$$

$$= \frac{1.2 \times 10^{-7} k (z + 1)}{(z - 1)(z - 0.242)}$$

则求得

$$G(w) = \frac{1.583 \times 10^{-7} k (1 - w)}{w(1 + 1.638w)}$$

将  $w = jv$  代入上式,得到开环频率特性为

$$G(jv) = \frac{1.583 \times 10^{-7} k (1 - jv)}{jv(1 + 1.638jv)}$$

由要点 1,得  $G(jv) = 1.583 \times 10^{-7} k \times \frac{1}{jv} \times \frac{1}{1 + 1.638jv} \times (1 - jv)$ 。

由要点 2,得转折频率为 0.611 和 1。

由要点 3,得起始渐近线或其延长线穿过点  $(1, 20\lg(1.583 \times 10^{-7} k))$ ,由积分因子产生,斜率为  $-20\text{dB/dec}$ ,当  $k = 10^7$  时,穿过点  $(1, 3.99)$ ;当  $k = 6.32 \times 10^6$  时,穿过点  $(1, 0)$ ;当  $k = 1.65 \times 10^6$  时,穿过点  $(1, -11.66)$ 。

由要点 4,得对应每个  $k$  值,分别有三条渐近线,其斜率分别为  $-20\text{dB/dec}$ 、 $-40\text{dB/dec}$  和  $-20\text{dB/dec}$ 。

以  $k = 1.65 \times 10^6$  为例说明产生渐近线过程。设起始渐近线为  $y = -20x + b$ ,且经过点  $(1, -11.66)$ ,带入渐近线方程  $-11.66 = -20\lg 1 + b$ ,求得  $b = -11.66$ ,于是得到起始渐近线为

$$y = -20x - 11.66$$

此渐近线经过以转折频率为 0.611 的点,带入得  $y = -20\lg 0.611 - 11.66 = -7.381$ ,即经过点  $(0.611, -7.381)$ 。

设第二条渐近线为  $y = -40x + b$ ,且经过点  $(0.611, -7.381)$ ,带入渐近线方程  $-7.381 = -40\lg 0.611 + b$ ,求得  $b = -15.94$ ,于是得到渐近线为

$$y = -40x - 15.94$$

此渐近线经过以转折频率为 1 的点,带入得  $y = -40\lg 1 - 15.94 = -15.94$ ,即经过点  $(1, -15.94)$ 。

设第三条渐近线为  $y = -20x + b$ ,且经过点  $(1, -15.94)$ ,带入渐近线方程  $-15.94 = -20\lg 1 + b$ ,求得  $b = -15.94$ ,于是得到渐近线为

$$y = -20x - 15.94$$

由此得到三条渐近线方程,画出渐近线即可。

由要点 5,得共有三个因子,其相频特性为

$$\varphi(v) = -90^\circ - \arctan(1.368v) - \arctan(v)$$

取特征点  $(0.2, -119.5^\circ)$ 、 $(0.3, -132.6^\circ)$ 、 $(0.4, -145^\circ)$ 、 $(0.6, -165.5^\circ)$ 、 $(0.8, -181.3^\circ)$ 、 $(1, -193.6^\circ)$ 、 $(1.2, -203.2^\circ)$ 、 $(1.6, -217.1^\circ)$ 、 $(2, -226.5^\circ)$ ,用光滑曲线将这些特征点连接起来。

其 Bode 图如图 3.20 所示。

从系统的 Bode 图可以看出当  $k = 10^7$  时,其幅值裕量  $m < 0$  和相位裕量  $r < 0$ ,所以闭环系统是不稳定的;当  $k = 6.32 \times 10^6$  时,其幅值裕量  $m = 0$  和相位裕量  $r = 0$ ,所以闭环系统

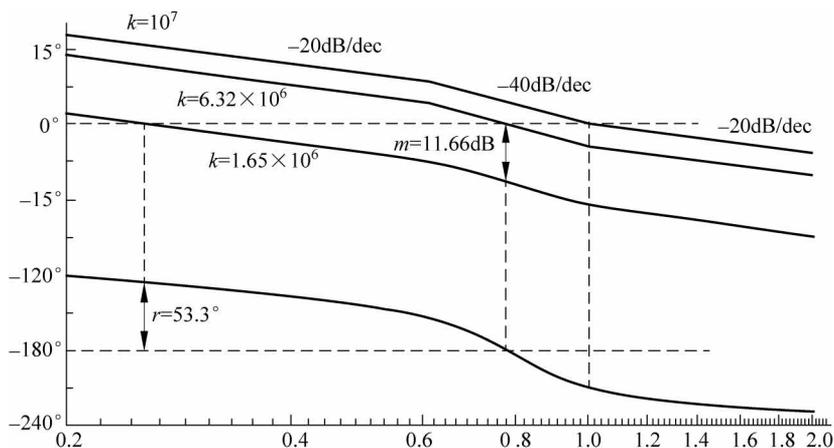


图 3.20 例 3.13 的 Bode 图

是临界稳定的；当  $k = 1.65 \times 10^6$  时，其幅值裕量  $m > 0$  和相位裕量  $r > 0$ ，所以闭环系统是稳定的。

另外，在图 3.20 中，在幅值大于零的情况下，当  $k = 10^7$  时，相位的正穿越数为 0，负穿越数为 1， $G(\omega)$  无不稳定极点，即  $P = 0$ ，正、负穿越数之差为  $N = -1 \neq P/2 = 0$ ，故该闭环系统不稳定。

当  $k = 6.32 \times 10^6$  时，对应的闭环系统处于临界稳定状态，常认为临界稳定状态是不稳定的。

当  $k = 1.65 \times 10^6$  时，相位的正穿越数和负穿越数均为 0，所以对应的闭环系统是稳定的。

### 习题 3

1. 试求如图 3.21 所示的采样控制系统在单位阶跃信号作用下的输出响应  $y^*(t)$ 。

$$\text{设 } G(s) = \frac{20}{s(s+10)}, \text{ 采样周期 } T = 0.1 \text{ s}.$$

2. 试求如图 3.21 所示的采样控制系统在单位速度信号作用下的稳态误差。

$$\text{设 } G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}, \text{ 采样周期 } T = 0.1 \text{ s}.$$

3. 对于图 3.21 所示的采样控制系统，设  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ ，采样周期  $T = 1 \text{ s}$ ， $r(t) = 1(t)$ 。

试确定其输出的广义 Z 变换式  $Y(z, \beta)$ 。

4. 对于图 3.22 所示的采样控制系统，设  $G_0(s) = \frac{ae^{-1.5Ts}}{s+a}$ ，试求系统输出的广义 Z 变换式  $Y(z, \alpha)$ 。

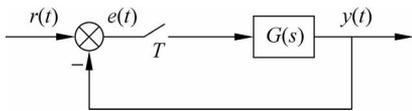


图 3.21 第 1 题图

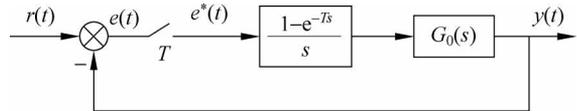


图 3.22 第 4 题图

5. 对于图 3.21 所示的采样控制系统, 设  $G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ , 采样周期  $T=1\text{s}$ 。

- (1) 试分析该系统是否满足稳定的充要条件。
- (2) 试用劳斯稳定性判据判断其稳定性。

6. 设线性离散控制系统的特征方程为  $45z^3 - 117z^2 - 119z - 39 = 0$ , 试判断此系统的稳定性。

7. 设单位负反馈数字控制系统的开环传递函数为

$$(1) G(z) = \frac{k}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$(2) G(z) = \frac{k}{(1-z^{-1})^2}$$

试用劳斯稳定性判据分析稳定性, 确定使系统稳定的  $k$  值范围。

8. 对于图 3.21 所示的采样控制系统, 设  $G(s) = \frac{k}{s(s+1)}$ , 采样周期  $T=0.1\text{s}$ 。

- (1) 试画出根轨迹图。
- (2) 试用根轨迹法确定使系统稳定的  $k$  的范围。

9. 一闭环系统如图 3.22 所示, 设  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , 采样周期  $T=1\text{s}$ 。

- (1) 绘制开环系统的 Bode 图。
- (2) 确定相位裕度和幅值裕度。
- (3) 判断闭环系统的稳定性。