频率法

3.1 基础知识

第3章

控制系统的频率特性反映正弦信号作用下的响应性能。频率法是研 究控制系统的一种常用方法,根据系统的频率特性能间接地揭示系统的动 态特性和稳定特性。可以简单迅速地判断某些环节或者参数对系统的动 态特性和稳态特性的影响,并能指明改进系统的方向。

频率法的特点:

(1)可以通过实验测量获得系统的频率特性,这在难以写出系统动态 模型时更为有用,但不稳定的系统,无法用实验方法测量获得;

(2)频率特性可以用图形来表示,无须求解系统的微分方程,直接根据频率特性曲线分析系统性能。

3.1.1 频率特性的基本概念

线性定常系统或者环节,在正弦信号的作用下,输出量与输入量是同频的正弦信号,其幅值比 $A(\omega) = |W(j\omega)|$,称为幅频特性,它是随频率而变化的。输出量与输入量的相位差 $\varphi(\omega) = \angle W(j\omega)$ 称为相频特性。两者结合的矢量形式 $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 称为系统的频率特性。

系统的频率特性可由该系统传递函数,以 j ω 代替 s 求得,即 $W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$ 。

频率特性的复数表达形式为:

 $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$

式中, $P(\omega)$ 是频率特性的实部,称为实频特性; $Q(\omega)$ 是频率特性的虚部,称为虚频特性。

频率特性表示为指数形式:

 $W(j\omega) = \sqrt{P^{2}(\omega) + Q^{2}(\omega)} e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

式中, $A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$,为频率特性的模,即幅频特性; $\varphi(\omega) =$

arctan $\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$,为频率特性的辐角或相位移,即相频特性。

3.1.2 频率特性的表示方法

系统(或环节)的频率特性的表示方法很多,最常用的有幅相频特性、对数频率 特性和对数幅相频特性。

1. 幅相频特性

幅相频特性又称奈氏图或极坐标图,它是以 ω 为参变量,当 ω 从0变化到 ∞ ,复 平面上的矢量 $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 端点轨迹的几何图像。

2. 对数频率特性

对数频率特性又称伯德图,横坐标为 ω ,按常用对数 lg ω 分度,使得高频段横坐标压缩,而低频段相对展开,图示的频率范围大。对数相频特性的纵坐标表示 $\varphi(\omega)$,单位为弧度(rad)或度(°);对数幅频特性的纵坐标为 $L(\omega)=20$ lg $A(\omega)$,单位为分贝(dB)。对数频率特性将传递函数中的环节的乘积关系变为对数坐标图上的加减运算。

3. 对数幅相频特性

对数幅相频特性又称为尼氏图,它是将对数幅频特性和对数相频特性绘在一个 平面上,以对数幅值作纵坐标(单位为 dB),以相位移作横坐标(单位为弧度或度),以 频率为参变量构成的图像。

3.1.3 典型环节的频率特性

一个自动控制系统由若干环节组成,根据传递函数特性,归纳为六种:比例环 节、惯性环节、积分环节、微分环节、振荡环节、时滞环节,其频率特性如表 3-1 所示。

从伯德图上看,一个对数幅频特性所代表的环节,能给出最小可能相位移,称为 最小相位系统。最小相位系统在右半 *s* 平面上既无极点也无零点,同时无纯滞后环 节。反之,在右半 *s* 平面上有极点或无零点,或有纯滞后环节的系统为非最小相位 系统。

最小相位环节或系统有一个重要特征:对数幅频特性可以唯一确定其相频特性,反之亦然,对数幅频特性和对数相频特性的变化趋势是一致的,所以可只根据幅频特性或相频特性对系统性能进行分析。分析非最小相位系统时,必须同时考虑幅频特性和相频特性。



表 3-1 典型环节的频率特性

33

第3章 频率法





续表

第3章 频率法



••

自动控制原理综合实验教程



3.1.4 开环频率特性

在复平面上绘制幅相频特性时,可以写成代数形式为 $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, 给出不同的 ω ,计算相应的 $P(\omega)$ 和 $Q(\omega)$,在直角坐标中得出相应的点。当 ω 由 0 变到+ ∞ ,就可以得到系统的开环幅频特性和相频特性。

幅相频特性写成指数形式为 $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$,给出不同的 ω ,计算相应的 $A(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$,在极坐标中得出相应的点。当 ω 由0变到+ ∞ ,就可以得到系统的开环幅相频特性。

在对数坐标中绘制频率特性时,先绘制各环节的频率特性,然后相加,就可以得 到开环系统的频率特性。

1. 系统的开环幅相频率特性

开环系统的频率特性一般的表达式为:

$$W_{K}(j\omega) = \frac{K_{K}\prod_{i=1}^{m}(j\omega T_{i}+1)}{(j\omega)^{N}\prod_{j=1}^{n-N}(j\omega T_{j}+1)} \quad (n > m)$$

绘制系统开环幅相频率特性,通过求出 $\omega=0$ 和 $\omega=\infty$ 的相角和幅值,确定图像的起点和终点。

幅相频率特性与负实轴和虚轴的交点可由下式求出:

$$\operatorname{Im}[W_{K}(j\omega)] = Q(\omega) = 0$$

$$\operatorname{Re}[W_{K}(j\omega)] = P(\omega) = 0$$

如果传递函数中没有零点,则当ω由0增大到∞过程中,特性的相位角连续减 小,特性平滑变化。如果分子中存在零点,特性的相位角可能不是以同一方向连续 地变化,这时,特性可能出现凹部。不同类型系统的幅相频特性如表 3-2 所示。

系统	系统开环幅相频特性
0 型: $W_{K}(j\omega) = \frac{K_{K}\prod_{i=1}^{m}(j\omega T_{i}+1)}{\prod_{j=1}^{n}(j\omega T_{j}+1)} (n > m)$ $A(0) = K_{K}, \varphi(0) = 0$ $A(\infty) = 0, \varphi(\infty) = -(n-m) \times 90^{\circ}$	$jQ(\omega)$ $jQ(\omega)$ $\omega = \infty$ $\omega = 0$ $\omega = \infty$ $\omega = 0$ K_K $P(\omega)$ $M(\omega)$ ω R $n-m=3$, 当系统没有零点时,相位移 $\varphi(\omega)$ 以一 个方向连续变化; 当系统有零点时, $\varphi(\omega)$ 可能不按一个 方向变化。

表 3-2 不同类型系统的幅相频特性

39



2. 系统的开环对数频率特性

绘制系统开环对数幅频特性时,可以不用将各环节特性单独绘出,按照以下步骤进行:

(1)确定各基本环节的交接频率ω₁,ω₂,…,标在角频率轴ω上。

(2) 在 $\omega = 1$ 处,求出 20lg K_K ,通过该点作出一条-20NdB/dec 的直线,直到第 一个交接频率 $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ 。如果 $\omega_1 < 1$,则低频渐进性的延长线经过该点。

(3) 依次在各交接频率处改变直线斜率,其改变量取决于该转折频率对应的环 节类型,环节<u>1</u>,渐近线斜率增加-20dB/dec;环节<u>1</u>,渐近线斜率增加 20dB/dec;当遇到环节<u> ω_n^2 </u>,渐近线斜率增加-40dB/dec。 (4) 求出穿越频率 ω_c ,系统开环对数幅频特性 $L(\omega_c)=0$ 或 $A(\omega_c)=1$ 。 [型 系统的穿越频率为 $\omega_c = K_K$, []型系统的穿越频率为 $\omega_c = \sqrt{K_K}$ 。

绘制系统开环对数相频特性时,可先绘制出各分量的对数相频特性,然后将各 分量的纵坐标相加,开环系统对数相频特性有如下特点:

(1) 低频区,对数相频特性由 $-N \times (90^{\circ})$ 开始。

(2) 高频区,ω→∞,相频特性趋于-(n-m)×(90°)。

如果在某一频率范围内,对数幅频特性 L(ω)的斜率保持不变,则在此范围内相 位也几乎不变。

3.1.5 奈奎斯特稳定判据

1. 奈奎斯特稳定判据

当 ω 按 $-\infty \sim +\infty$ 变化时,在 W_K (j ω)平面上奈氏曲线绕(-1,j0)点逆时针旋转的周数为 N,则有 Z = P - N, Z 为在 s 右半复平面的闭环极点数, P 为在 s 右半复平面的开环极点数。

如果开环系统稳定,即P=0,则闭环系统稳定的充分必要条件为 $W_K(j\omega)$ 曲线 不包围(-1,j0)点。

如果开环不稳定,且已知有 P 个开环极点在 s 右半复平面,则闭环系统稳定的充分必要条件为开环 $W_{K}(j\omega)$ 曲线按逆时针方向围绕(-1,j0)点旋转 P 周。

显然,用奈奎斯特稳定判据判定闭环系统稳定性时,首先要知道 *P* 是多少,画出 *W_K*(jω)曲线,找出其围绕(-1,j0)点逆时针旋转多少圈,求出 *N*;然后再根据奈奎 斯特稳定判据求出 *Z* 是否为 0,*Z* 为 0 时系统稳定,*Z* 不为 0 时系统不稳定。

2. 对数频域稳定判据

开环系统的极坐标图与对数坐标图有如下对应关系:

(1) 极坐标图上的单位圆对应于对数幅频特性图中的 0dB 线。

(2) 极坐标图上的负实轴对应于对数相频特性图中的一π相位线。

如果系统开环传递函数的极点全部位于 *s* 左半复平面,即 P=0,则在 $L(\omega)>$ 0dB 的所有频段内,对数相频特性与 $-\pi$ 相位线正穿越和负穿越次数之差为 0 时,闭 环系统是稳定的;否则,闭环系统是不稳定的。如果系统开环传递函数有 P 个极点 在 *s* 右半复平面,则在 $L(\omega)>$ 0dB 的所有频段内,对数相频特性与 $-\pi$ 相位线正穿 越和负穿越次数之差为 P/2 时,闭环系统是稳定的;否则,闭环系统不稳定。

3.1.6 闭环频率特性

单位反馈系统的闭环特性为:

$$W_{B}(j\omega) = M(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

式中, $M(\omega)$ 为闭环频率特性的幅值; $\theta(\omega)$ 为闭环频率特性的相角。

为了便于用闭环频率特性的 M_P 和 ω_P 来分析和设计系统,常采用等 M 圆和等 θ 圆,如图 3-1 所示。



图 3-1 等 M 圆和等 θ 圆

M=1时,是通过 $\left(-\frac{1}{2}, j_{0}\right)$ 这一点平行于虚轴的直线,当 M 变为无穷大时,缩 小到 $(-1,j_{0})$ 这一点,这说明当 M_{P} 为无穷大时,系统处于不稳定边缘,M 大于 1 的 圆位于 M=1 线的左侧,M 小于 1 的圆位于 M=1 线的右侧。

将等 M 圆和等 θ 圆绘于对数幅相频坐标中,在对数幅相平面上,由等 M 轨迹和



等θ轨迹构成的曲线簇称为尼克尔斯图,简称尼氏图,如图 3-2 所示。

图 3-2 尼氏图

在分析系统时,我们由伯德图绘出开环系统对数频率特性,将其重叠在尼氏图上。那么,开环对数幅相频特性与等 M 圆和等 θ 圆的交点就给出了每一频率上闭环 系统频率特性的幅值M 和相角 θ 。如果对数幅相频特性等 M 轨迹相切,切点就是闭 环频率响应的谐振峰值 M_p ,切点的频率就是谐振频率 ω_p 。

3.1.7 系统动态性能与频率特性的关系

1. 开环频率特性的性能指标

在频域中,通常用相位裕度和增益裕度这两个量来表示系统的相对稳定性。

(1) 相位裕度

开环系统幅相频特性不包围(-1,j0)这一点,即在开环幅相频特性的幅值 $|W_{K}(j\omega_{c})|=1$ 时,相角位移 $\varphi(\omega_{c})$ 应该大于-180°,如图 3-3(a)、图 3-3(b)所示。 一般以 $|W_{K}(j\omega_{c})|=1$ 或 $L(\omega_{c})=20lgA(\omega_{c})=0$ 时,相位移 $\varphi(\omega_{c})$ 距-180°的角度 来衡量系统的相对稳定性,并以 $\gamma(\omega_{c})$ 或 PM 来表示这个角度,称为相位裕度:

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

为了使最小相位系统是稳定的, $\gamma(\omega_c)$ 必须为正值。





(2) 增益裕度

在相角位移 $\varphi(\omega) = -180^{\circ}$ 时的频率 ω_j 称为相位截止频率;在 $\omega = \omega_j$ 时,幅相 频率特性的幅值 $|W_K(j\omega_j)|$ 的倒数称为系统的增益裕度,计为 GM(如图 3-3):

 $\mathbf{G}\mathbf{M} = -20 \lg | W_K(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}_j) | \mathbf{d}\mathbf{B}$

对于最小相位系统,增益裕度的分贝数为正表示闭环系统是稳定的,分贝数为 负表示系统是不稳定的。

系统开环对数幅频特性分为三个频段:低频段、中频段和高频段。

低频段是第一个转折点之前的频段,其特性由积分和开环增益决定,反映系统的稳定精度。中频段为截止频率 ω_c 附近的频段,其特性反映系统的稳定性和快速 性。高频段为频率大于 $10\omega_c$ 的频段,其特性反映系统对高频干扰的抑制能力,高频 特性的分贝值越低,系统抗干扰能力越强。

三频段的概念适用的前提是系统闭环稳定具有最小相位性质的单位负反馈 系统。

2. 闭环频率特性的性能指标

(1) 谐振峰值 M_P 。谐振峰值是闭环系统幅频特性的最大值,通常 M_P 越大,系统的单位阶跃响应的超调量 σ %也越大。

(2) 谐振频率 ω_P。谐振频率是闭环系统幅频特性出现谐振峰值时的频率。

(3)频带宽 BW。闭环系统频率特性幅值,由其初始值 M(0)减小到 0.707M(0) 时的频率(或由 ω=0 的增益减低 3dB 时的频率),称为频带宽。频带越宽,上升时间 越短,但对高频的干扰的过滤能力越差。

(4)剪切速度。剪切速度是指在高频段时频率特性衰减的快慢。在高频区衰减 得越快,对于信号和干扰信号两者的分辨能力越快,谐振峰值越大。

闭环系统频率特性的这些参数如图 3-4 所示。



图 3-4 闭环系统频率特性指标

3. 系统性能指标的计算

典型二阶系统的频域指标可解析计算,高阶系统频域指标一般由频率特性曲线 确定。

典型二阶系统开环传递函数为:

$$W_{K}(s) = \frac{\omega_{n}^{2}}{s(s+2\xi\omega_{n})} \quad (0 < \xi < 1)$$
(1) 穿越频率: $\omega_{c} = \omega_{n}\sqrt{-2\xi^{2}+\sqrt{4\xi^{4}+1}}$
(2) 相位裕度: $\gamma(\omega_{c}) = \arctan\frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^{2}+\sqrt{4\xi^{4}+1}}}$
(3) 调节时间: $t_{s}\omega_{c} = \frac{6}{\tan^{\gamma}(\omega_{c})}$

对于典型二阶系统,调节时间 t_s 与相位裕度 $\gamma(\omega_c)$ 有关。如果有两个系统,其 $\gamma(\omega_c)$ 相同,那么它们的超调量大致是相同的,但它们的动态过程时间与 ω_c 成反比。 穿越频率 ω_c 越大的系统,调节时间 t_s 越短。所以, ω_c 在对数频率特性中是一个重 要的参数,它不仅影响系统的相位裕度,也影响系统的动态过程时间。

(4) 带宽频率:
$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2 + \sqrt{2-4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

(5) 谐振频率:
$$\omega_P = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} (0 < \xi < 0.707)$$

(6) 谐振峰值:
$$M_P = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}} (0 < \xi < 0.707)$$

高阶系统由图解法近似确定相位裕度和幅值裕度。若系统存在一对欠阻尼主导极点时,也可用典型二阶系统的解析式近似分析。为了估算高阶系统频域指标和 时域指标的关系,有时可以采用如下经验公式:

(1) 谐振峰值:
$$M_P \approx \frac{1}{\sin\gamma(\omega_c)}$$

(2) 超调量: $\sigma\% = 0.16 + 0.4(M_P - 1)(1 \le M_P \le 1.8)$
(3) 调节时间: $t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} (1 \le M_P \le 1.8),$ 式中 $K = 2 + 1.5(M_P - 1) + 2.5(M_P - 1)^2$

3.2 【实验七】 惯性环节频率特性的测试

3.2.1 实验目的

- 1. 掌握测量惯性环节的频率特性的方法。
- 2. 根据所测得的频率特性,作出伯德图,据此求得环节的传递函数。

3.2.2 实验设备

- 1. ELVIS Ⅱ 实验平台
- 2. 自动控制原理基础实验板
- 3. Keysight InfiniiVision 2000X 系列示波器
- 4. FLUKE 12E 数字万用表

3.2.3 实验原理

对于稳定的线性定常系统或环节,当其输入端加入正弦信号 $x(t) = X_{m} \sin \omega t$, 它的稳态输出是一个与输入信号同频率的正弦信号,但其幅值和相位将随着输入信 号频率 ω 的变化而变化。即输出信号为:

 $y(t) = Y_{\rm m} \sin(\omega t + \varphi) = X_{\rm m} | W(j\omega) | \sin(\omega t + \varphi)$ $\Rightarrow \psi(j\omega) = Y_{\rm m} / X_{\rm m}, \varphi(\omega) = \arctan W(j\omega)_{\circ}$

只要改变输入信号 x(t)的频率 ω,就可测得输出信号与输入信号的幅值比

 $|W(j\omega)|$ 和它们的相位差 $\varphi(\omega) = \arctan W(j\omega)$ 。不断改变 x(t)的频率,就可测得被测环节的幅频特性 $|W(j\omega)|$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$ 。图 3-5 为测试结构图,图 3-6 给出其相应的模拟电路图。



图 3-5 典型环节的测试结构图



图 3-6 惯性环节的模拟电路图

3.2.4 实验内容

1. 仿真实验

(1)登录信息学院网络化实验课程平台进入自动控制原理虚拟仿真实验课程,选择开环频率特性实验,设定系统为一阶系统,其表达式为: $W(s) = \frac{1}{0.01s+1}$ 。

(2) 在右侧图形显示区域,观察惯性环节的伯德图及奈氏图。

(3)登录信息学院网络化实验课程平台进入自动控制原理虚拟仿真实验课程, 选择开环系统伯德图绘制实验,观察特性曲线的绘制过程。

2. 硬件实验

(1) 按图 3-6 接线,设定给定信号为正弦波信号,其幅值为 3V(建议值,方便测试),逐步改变正弦波形的频率即可进行频率特性的测试工作。测量时,根据表 11-2 改变正弦信号频率值,输入信号的频率ω要取均匀。测试惯性环节频率特性的相关数据。

(2) 按实验数据分别画出该惯性环节的幅频、相频特性及对数频率特性,并与仿

真实验结果对比分析。

(3) 作 $20lg(Y_m/X_m) \sim \omega$ 渐近线,并且根据图像求解环节的传递函数。

3.3 【实验八】 线性系统频率特性的测试

3.3.1 实验目的

1. 掌握测试线性系统的频率特性的方法。

2. 根据所测得的频率特性,写出系统的传递函数。

3.3.2 实验设备

- 1. ELVIS Ⅱ实验平台
- 2. 自动控制原理基础实验板
- 3. Keysight InfiniiVision 2000X 系列示波器
- 4. FLUKE 12E 数字万用表

3.3.3 实验原理



闭环二阶系统如图 3-7 所示,图 3-8 为它的模拟 电路图。其中 $K = R_2/R_1$, $T_1 = R_2C_1$, $T_2 = R_3C_2$ 。

图 3-7 闭环二阶系统结构图



图 3-8 闭环二阶系统的模拟电路图

3.3.4 实验内容

1. 仿真实验

(1)登录信息学院网络化实验课程平台进入自动控制原理虚拟仿真实验课程, 选择闭环频率特性实验,设定开环系统表达式为: $W_{K}(s) = \frac{1}{s(0, 1s+1)}$,反馈通道传 递函数为1。

(2) 在右侧图形显示区域,观察闭环二阶环节的伯德图及奈氏图,求取系统的带 宽频率 ω_b,谐振频率 ω_P 和谐振峰值 M_P 的理论值。

2. 硬件实验

(1) 按图 3-8 接线,测试闭环系统频率特性的相关数据,填入表 11-3 中并整理。

(2) 根据计算的实验数据分别画出闭环系统的幅频、相频特性及对数频率特性, 并与仿真实验结果对比分析。

(3) 做出闭环系统幅频特性的渐近线,据此求出传递函数,并与理论求得 W(s) 的比较,分析误差原因。

(4)根据绘制的二阶系统闭环幅频特性曲线,求取系统的带宽频率 ω_b ,谐振频率 ω_p 和谐振峰值 M_p 的实验值,并与理论计算的结果进行比较。