

第 5 章 图

5.1 考纲要求及分析

【考纲要求】

- (一) 图的基本概念
- (二) 图的存储及基本操作
 - 1. 邻接矩阵
 - 2. 邻接表
 - 3. 邻接多重表、十字链表
- (三) 图的遍历
 - 1. 深度优先搜索
 - 2. 广度优先搜索
- (四) 图的基本应用
 - 1. 最小(代价)生成树
 - 2. 最短路径
 - 3. 拓扑排序
 - 4. 关键路径

【考纲分析】

本章的特点是概念多、算法多、难度大、应用广,因此,需要深刻理解每个知识点,反复练

习,抓住规律,强化记忆,才能很好地解答这部分试题。本章要求如下。

- (1) 深刻理解图的定义和基本术语。图的基本概念比较复杂,复习时注意与线性结构和树结构进行比较。
- (2) 掌握图的邻接矩阵、邻接表、邻接多重表、十字链表等存储结构,重点是邻接矩阵和邻接表存储结构下基本操作的实现方法。
- (3) 熟练掌握图的深度优先遍历和广度优先遍历,以及遍历的算法实现。
- (4) 对于图的基本应用,掌握经典算法的基本思想和求解过程,包括 Prim 算法、Kruskal 算法、Dijkstra 算法、Floyd 算法、拓扑排序算法和关键路径算法等。

【试题分析】

从历年考题情况看,图是每年必考的内容,而且考试内容几乎覆盖本章所有知识点,出题形式包括单项选择题和综合应用题。单项选择题的主要出题点是图的基本概念(不是单纯考概念,而是在理解的基础上进行辨析)、图的存储结构(邻接矩阵和邻接表)、图的遍历、图的基本应用(根据算法思想和求解过程回答问题);综合应用题的主要出题点是根据给定的实际应用问题(例如网络拓扑结构)综合运用图的定义、图的存储结构、图的基本应用等知识点求解问题。图是最复杂的数据结构,也是应用最广的数据结构,出题频度最高,出题分值最大,因此考生要特别关注本章,投入一定的精力进行复习,有针对性地多做习题。

5.2 图的基本概念

5.2.1 考核知识点



课件

知识点名称	重要程度	难易程度	出题情况(年份用后两位表示)
图的定义	★★★★☆	◆◆◇◇◇	单选: 19 综合(应用): 11、14
图的基本术语	★★★★★	◆◆◆◇◇	单选: 09-11、17 综合(应用): 18

5.2.2 典型题解析

【试题点拨】 主要考查图中各顶点的度、入度和出度之和与边数的关系(握手定理)、路径和路径长度的含义、连通图、连通分量的含义、生成树的含义、完全图的特点等,需要在透彻理解图基本概念的基础上回答问题。

一、单项选择题



1. 在一个无向图中,所有顶点的度数之和等于所有边数的()倍。

- A. 1/2 B. 1 C. 2 D. 4



答案 C



分析 握手定理: 设无向图中含有 n 个顶点 e 条边, 则 $\sum_{i=1}^n D(v_i) = 2e$ 。



2. n 个顶点的强连通图至少有()条边, 其形状是()。

- A. n B. $n+1$ C. $n-1$ D. $n \times (n-1)$
E. 无回路 F. 有回路 G. 环状 H. 树状



答案 A, G



分析 例如, 4 个顶点的强连通图含有边数最少的情况如图 5-1(a) 所示, 有回路的强连通图含有的边数不一定最少。

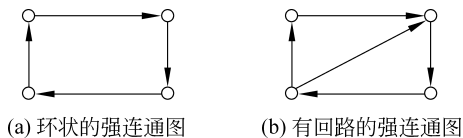


图 5-1 强连通图分析



3. 具有 10 个顶点的无向连通图最少有()条边, 最多有()条边。

- A. 0 B. 9 C. 45 D. 90



答案 B, C



分析 n 个顶点的无向连通图最少含有 $n-1$ 条边, 最多含有 $n(n-1)/2$ 条边。



4. 在含有 n 个顶点的连通图中, 任意一条简单路径的长度不可能超过()。

- A. 1 B. $n/2$ C. $n-1$ D. n



答案 C



分析 若路径长度超过 $n-1$, 则路径中必存在重复的顶点。

均小于 3, 则图 G 至少有()个顶点。

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

答案

B

分析

设图 G 至少有 x 个顶点, 根据顶点的度数之和与边数之间的关系, 可以列出不等式: $3 \times 4 + 4 \times 3 + (x - 3 - 4) \times 2 \geq 16 \times 2$, 解得 x 至少为 11。



10.

在如图 5-2 所示的有向图中, 强连通分量的个数为()。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案

D

分析

该有向图的强连通分量如图 5-3 所示。需要注意的是, 强连通分量实际上是对有向图的一种划分, 设有有向图 $G = \{V, E\}$, $V_1, V_2, \dots, V_k$ 是 V 的 k 个子集, 则满足: ① $V_i \neq \emptyset (1 \leq i \leq k)$; ② $V_i \cap V_j = \emptyset (1 \leq i \neq j \leq k)$; ③ $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ 。

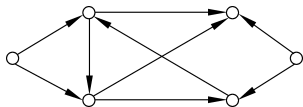


图 5-2 一个有向图

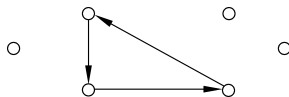


图 5-3 有向图的 4 个强连通分量

二、综合应用题

【试题点拨】 本节证明题要求掌握结论及证明过程。此类题目可能会以单项选择题的形式给出。



1.

证明: 生成树中最长路径的起点和终点的度均为 1。

解答

用反证法证明。设 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是生成树的一条最长路径, 其中, v_1 为起点, v_k 为终点。若 v_k 的度为 2, 取 v_k 的另一个邻接点 v , 由于生成树中无回路, 所以, v 在最长路径上, 显然 $v_1, v_2, \dots, v_k, v$ 的路径最长, 与假设矛盾。所以生成树中最长路径的终点的度为 1。同理可证起点 v_1 的度不能大于 1, 只能为 1。



2.

证明: 若无向图中各顶点的度均大于或等于 2, 则该图必然存在回路。

解答

设无向图 G 中含有 n 个顶点 e 条边, 顶点 v_i 的度为 $TD(v_i)$, 则:

$$\sum_{i=1}^n TD(v_i) = 2e \quad (1)$$

由于无向图中各顶点的度均大于或等于 2, 则:

$$\sum_{i=1}^n TD(v_i) \geq 2n \quad (2)$$

由式(1)和式(2),得:

$$e \geq n$$

具有 n 个顶点的无向连通图最少有 $n-1$ 条边,多于 $n-1$ 条边必然存在回路,该图至少有 n 条边,因而一定存在回路。

5.3 图的存储结构

5.3.1 考核知识点



课件

知识点名称	重要程度	难易程度	出题情况(年份用后两位表示)
邻接矩阵	★★★★★	◆◆◇◇◇	单选: 11-13 综合(应用): 11、15 综合(算法): 21
邻接表	★★★★★	◆◆◆◇◇	单选: 11、12、16 综合(应用): 14
邻接多重表	★☆☆☆☆	◆◆◆◆◇	
十字链表	★☆☆☆☆	◆◆◆◆◇	

5.3.2 典型题解析

一、单项选择题

【试题点拨】 主要考查邻接矩阵和邻接表的存储方法、存储特点、所需存储空间,以及基于邻接矩阵和邻接表存储结构基本操作的实现方法及时空性能分析。



1.

有一个图的邻接矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, 则该图共有()个顶点。

A. 3

B. 6

C. 9

D. 以上答案均不正确



答案

A

 **分析** 邻接矩阵是 3 阶非对称方阵,则该图一定是具有 3 个顶点的有向图。



2. 具有 n 个顶点 e 条边的无向图采用邻接矩阵存储,则零元素的个数为()。

- A. e B. $2e$ C. $n^2 - e$ D. $n^2 - 2e$

 **答案** D

 **分析** 无向图的邻接矩阵共有 n^2 个元素,每条边在邻接矩阵中表示为对称位置,即非零元素的个数为 $2e$,则零元素的个数为 $n^2 - 2e$ 。



3. 用邻接表存储图所用的空间大小()。

- A. 与图的顶点数和边数都有关 B. 只与图的边数有关系
C. 只与图的顶点数有关 D. 与边数的平方有关

 **答案** A

 **分析** 设图具有 n 个顶点 e 条边,则图的邻接表存储所需的存储空间为 $O(n+e)$ 。



4. 下列()的邻接矩阵是对称矩阵。

- A. 有向图 B. 无向图 C. AOV 网 D. AOE 网

 **答案** B

 **分析** AOV 网和 AOE 网都是有向图,有向图的邻接矩阵不一定对称。



5. 在有向图的邻接表存储结构中,顶点 v 在边表中出现的次数是()。

- A. 顶点 v 的度 B. 顶点 v 的出度
C. 顶点 v 的入度 D. 依附于顶点 v 的边数

 **答案** C

 **分析** 在有向图的邻接表存储结构中,顶点 v 的出度是该顶点出边表中的结点个数,顶点 v 的入度是该顶点在所有边表中的出现次数。



6. 具有 n 个顶点的无向图,其邻接表最多有()个边表结点。

- A. n^2 B. $n(n-1)$ C. $n(n+1)$ D. $n(n-1)/2$

 **答案** B

 **分析** 无向图最多有 $n(n-1)/2$ 条边,在邻接表中每条边对应两个边表结点,即最多有 $n(n-1)$ 个边表结点。



7. 带权有向图 G 采用邻接矩阵存储,则顶点 i 的入度等于邻接矩阵中()。

- A. 第 i 行非 ∞ 的元素之和
B. 第 i 列非 ∞ 的元素之和
C. 第 i 行非 ∞ 且非 0 的元素个数
D. 第 i 列非 ∞ 且非 0 的元素个数

答案

D

分析

在带权有向图的邻接矩阵中,主对角线是 0,其他元素是对应边上的权值,则顶点 i 的入度等于邻接矩阵中第 i 列非 ∞ 且非 0 的元素个数。

8.

假设一个有向图具有 n 个顶点 e 条边,该有向图采用邻接矩阵存储,则删除与顶点 i 相关联的所有边的时间复杂度是()。

- A. $O(n)$ B. $O(e)$ C. $O(n+e)$ D. $O(n * e)$

答案

A

分析

只需要将邻接矩阵第 i 行和第 i 列的所有元素置为 0。

9.

假设一个有向图具有 n 个顶点 e 条边,该有向图采用邻接表存储,则删除与顶点 i 相关联的所有边的时间复杂度是()。

- A. $O(n)$ B. $O(e)$ C. $O(n+e)$ D. $O(n * e)$

答案

C

分析

首先需要删除该顶点的出边表中的所有结点,然后遍历所有边表,删除边表中邻接点域为该顶点的所有结点,最坏情况下的时间复杂度是 $O(n+e)$ 。

二、综合应用题

【试题点拨】 主要考查给定一个图,写出其邻接矩阵和邻接表存储示意图;给定一个邻接矩阵或邻接表,画出对应的图;计算图的某种存储结构具体需要多少存储空间等。此类题目可能以单项选择题的形式给出。

1.

已知一个连通图如图 5-4 所示,试给出图的邻接矩阵和邻接表存储示意图。

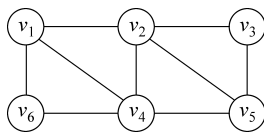


图 5-4 第 1 题图

解答

邻接矩阵表示如图 5-5 所示,邻接表表示如图 5-6 所示。

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

图 5-5 图的邻接矩阵表示

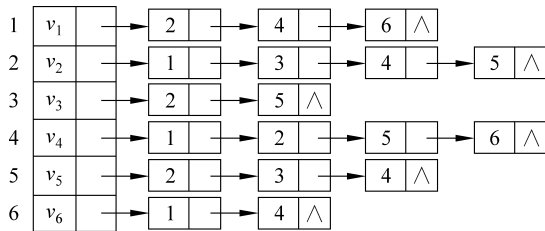


图 5-6 图的邻接表表示

2.

设无向网图 G 含有 n 个顶点 e 条边, 每个顶点的信息(假设只存储编号)占用 2 字节, 每条边的权值信息占用 4 字节, 每个指针占用 4 字节, 计算采用邻接矩阵和邻接表分别占用多少存储空间?

 解答

邻接矩阵存储顶点信息的一维数组需要 $2n$ 字节, 存储权值信息的二维数组需要 $4n^2$ 字节, 因此, 邻接矩阵共需要 $4n^2 + 2n$ 字节。邻接表的顶点表存储顶点信息和边表的头指针, 需要 $(2+4) \times n = 6n$ 字节, 边表中共 $2e$ 个结点, 每个结点需要存储顶点编号、权值和指针信息, 需要 $(2+4+4) \times 2e = 20e$ 字节, 因此, 邻接表共需要 $6n + 20e$ 字节。

三、算法设计题

【试题点拨】 主要考查在邻接矩阵和邻接表存储结构下, 图的基本操作的实现。邻接矩阵的算法本质上是对二维数组的操作, 邻接表的算法本质上是对单链表的操作, 因此, 只要理解了图的邻接矩阵和邻接表存储结构, 这部分的算法并不难。由于图的存储结构定义篇幅较大, 一般题目会给出相关定义, 本节算法省略图的存储结构定义, 请参考相关教材或本书附带课件。

1.

设有向图 G 采用邻接表存储, 设计算法求图 G 中每个顶点的入度。

 解答

由于有向图的邻接表存储了出边的信息, 因此求某顶点 i 的入度需要扫描所有出边表, 统计出边表中顶点 i 的出现次数。为此, 设一个累加器数组 $\text{indegree}[n]$, 数组下标为顶点的编号。

```
void CountIn(ALGraph &G, int indegree[])
{
    for (int i = 0; i < G.vertexNum; i++)    //初始化各顶点的入度
        indegree[i] = 0;
    for (i = 0; i < G.vertexNum; i++)        //依次遍历每个边表
    {
        Node *p = G.adjlist[i].firstedge;
        while (p != NULL)
        {
            indegree[p->adjvex]++;           //将编号为 p->adjvex 的顶点的入度加 1
            p = p->next;
        }
    }
}
```

2.

设计算法, 计算图中出度为零的顶点个数。

 **解答** 在有向图的邻接矩阵中,顶点的出度等于该行非零元素的个数。据此,从第一行开始,判断每行的非零元素个数是否为零,若是则计数器加 1。

```
int SumZero(MGraph &G)
{
    int count = 0, i, j;                //记载出度为 0 的顶点个数
    for (i = 0; i < G.vertexNum; i++)
    {
        for (j = 0; j < G.vertexNum; j++)
            if (arcs[i][j] != 0) break;    //该顶点的出度不为 0
        if (j == G.vertexNum) count++;
    }
    return count;
}
```

5.4 图的遍历

5.4.1 考核知识点



课件

知识点名称	重要程度	难易程度	出题情况(年份用后两位表示)
图的深度优先遍历操作	★★★★☆	◆◆◆◇◇	单选: 15、16、20
图的广度优先遍历操作	★★★★☆	◆◆◆◇◇	单选: 13
图的深度优先遍历算法	★★☆☆☆	◆◆◆◆◇	
图的广度优先遍历算法	★★☆☆☆	◆◆◆◆◇	单选: 12

5.4.2 典型题解析

一、单项选择题

【试题点拨】 图的遍历是本章的重点,主要考查给定一个图或图的存储结构,写出图的深度优先遍历序列和广度优先遍历序列;判断是否为图的深度优先遍历序列和广度优先遍