

稳恒电场是指在导体回路中由稳恒电源提供的电场,处于稳恒电场中定向运动的电荷形成的电流称为稳恒电流,而由稳恒电流激发的磁场称为稳恒磁场。稳恒电场和磁场均与时间无关,是独立于静电场的两类场。本章在总结归纳稳恒电场和磁场主要内容的基础上,重点分析、求解几类典型例题,并对主教材课后习题进行详解,给出部分相关内容的仿真编程代码以及所涉及的科技前沿知识,最后列举有代表性的往年考研试题详解作为相应重点的延伸。

3.1 稳恒电场和磁场思维导图

利用思维导图勾勒出稳恒电场和磁场各部分内容之间的逻辑关系,如图 3-1 所示。读者也可以通过学习,结合自己的理解绘制新的思维导图,从而达到对知识的融会贯通。首

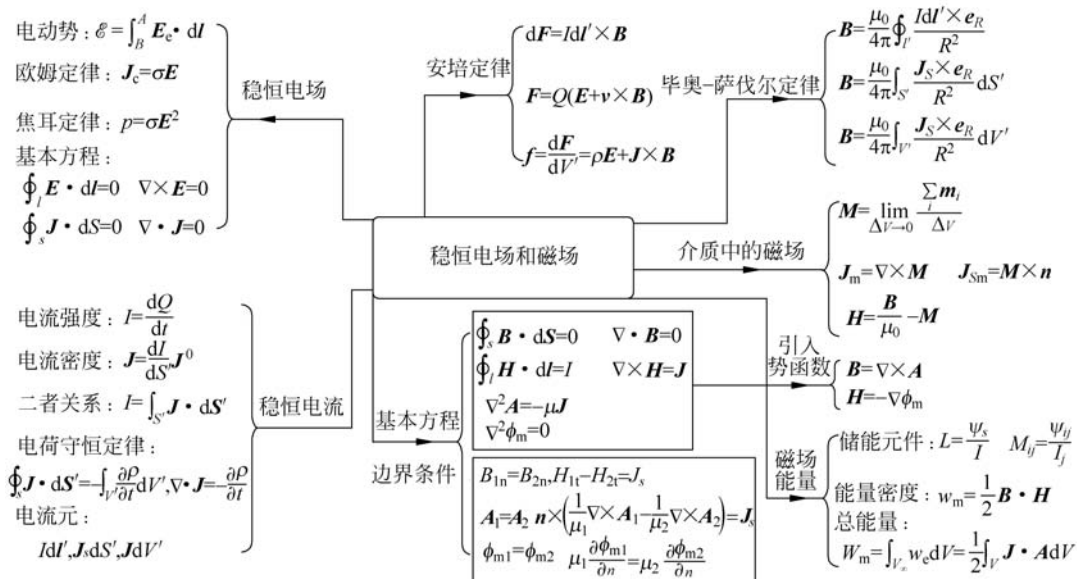


图 3-1 稳恒电场和磁场各部分内容之间的逻辑关系

先,作为过渡,本章介绍了稳恒电场和稳恒电流的概念及性质;由于自然界不存在磁荷,稳恒电流才是磁场的源;在此基础上,介绍了毕奥-萨伐尔定律,用于计算任意电流分布情况下的磁场;与静电场不同,静磁场具有无散性和有旋性,其积分形式就是磁通连续性原理和安培环路定律;在两种材料的分界面上,磁场应该满足相应的边界条件;为方便磁场的计算,引入矢量势函数的概念及库仑规范;此外,通过研究介质中的磁场,引入了磁化强度和磁化电流的概念,并将真空中的方程扩展到磁介质中;最后,针对磁场的能量和能量密度进行了分析。在大多数情况下,静磁场和静电场可以做类比,它们可以看作电磁场的左手和右手。类比学习是一种重要的方法。

3.2 知识点归纳

稳恒电场和磁场涉及的知识点有:

电流密度、电动势;电流元;电荷守恒定律;磁感应强度;磁化强度、磁场强度和磁导率;磁通连续性原理;安培环路定律;磁矢势、磁标势;稳恒电场与磁场的基本方程、边界条件;安培力、洛伦兹力;电感;磁场能量密度和能量。

3.3 主要内容及公式

结合本章知识点归纳,将主要内容及公式做如下分析。

3.3.1 电流密度、电流元和电荷守恒定律

为了描述空间某一点电流分布的大小及方向,引入电流密度的概念,即

$$\mathbf{J} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \mathbf{J}^0 \quad (3-1)$$

体电流密度

$$\mathbf{J} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \mathbf{J}^0 \text{ (面分布)}$$

面电流密度

$$\mathbf{J}_s = \frac{dI}{dl_{\perp}} \mathbf{J}^0 \text{ (线分布)}$$

其中, $\mathbf{J}^0$ 表示电流密度矢量的单位矢量。

电流元: 定义 $\mathbf{J} dV'$ 、 $\mathbf{J}_s dS'$ 和 $I dl'$ 分别为体电流元、面电流元和线电流元。电流元是研究磁场问题中“源”或“场”相互作用规律的基本单元,其地位类同于静电场中的电荷元。

电荷守恒定律的积分形式和微分形式分别为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}' = - \int_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' \quad (3-2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-2b)$$

3.3.2 稳恒电流的电场

1. 传导电流和运流电流

传导电流是指在导电媒质中的电流,其电流密度用 $\mathbf{J}_c$ 表示。服从欧姆定律的微分形式,即

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (3-3)$$

运流电流是指真空或气体中的自由电荷在电场的作用下形成的电流(如电子管、离子管或粒子加速器中的电流)。运流电流的电流密度为

$$\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v} \quad (3-4)$$

2. 电动势

定义 $\mathcal{E}$ 为电源的电动势。它是局外电场力将单位正电荷由负极 B 送至正极 A 所做的功。数学表达式为

$$\mathcal{E} = \int_B^A \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} \quad (3-5)$$

3. 导电媒质中稳恒电场的基本方程及边界条件

积分形式	微分形式	
$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	
$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	(3-6)
$I = GU$	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	

$$\begin{cases} J_{1n} = J_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases} \quad (3-7)$$

或

$$\begin{cases} \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \\ \phi_1 = \phi_2 \end{cases} \quad (3-8)$$

4. 焦耳定律

$$p = \frac{dP}{dV} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{J^2}{\sigma} = \sigma E^2 \quad (3-9)$$

5. 稳恒电场的静电比拟和电导

如果电容器内的介质是非理想的而是有耗的,具有电导率 σ ,可由电容器的电容来类比求其漏电导。由于电容器两极板间有漏电流 I 存在,故其漏电导为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\oint_{S_1} \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (3-10)$$

其中, S_1 是包围任一导体表面的闭合面。而电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\epsilon \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (3-11)$$

将式(3-10)和式(3-11)相除,可得

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (3-12)$$

利用上面的对偶关系直接得出其解,而无须重新求解拉普拉斯方程,该方法称为静电比拟法。

静电比拟法是一种间接法。具体为:利用静电场中 $\mathbf{D}, \epsilon, Q$ 和稳恒电场中 $\mathbf{J}, \sigma, I$ 存在的对偶关系,当电容和电导几何形状及尺寸相同时,将电容计算式中的 ϵ 换成 σ 便得到其漏电导。几种常用电容器的电容与漏电导或漏电阻及其电场如表 3-1 所示。

表 3-1 几种常用电容器的电容与漏电导或漏电阻及其电场

电容器	平行板	双根线	同轴线	球形	孤立球
$C_0(C)$	$\frac{\epsilon S}{d}$	$\frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{D}{a}}$	$\frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	$\frac{4\pi \epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	$4\pi \epsilon a$
$G_0(G)$	$\frac{\sigma S}{d}$	$\frac{\pi \sigma}{\ln \frac{D}{a}}$	$\frac{2\pi \sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	$\frac{4\pi \sigma r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	$4\pi \sigma a$
$R_0(R)$	$\frac{d}{\sigma S}$	$\frac{\ln \frac{D}{a}}{\pi \sigma}$	$\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \sigma}$	$\frac{r_2 - r_1}{4\pi \sigma r_1 r_2}$	$\frac{1}{4\pi \sigma a}$
$\mathbf{E}(Q)$	$\frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{n}$	*	$\frac{\rho_l}{2\pi \epsilon r} \mathbf{e}_r$	$\frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \mathbf{e}_r$	$\frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \mathbf{e}_r$
$\mathbf{E}(U)$	$\frac{U}{d} \mathbf{n}$	* *	$\frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \mathbf{e}_r$	$\frac{r_2 r_1 U}{r^2 (r_2 - r_1)} \mathbf{e}_r$	$\frac{a \phi}{r^2} \mathbf{e}_r$

注: * 双根传输线用其电荷线密度所表示的线外的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon} \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{r - D \cos \varphi}{r^2 + D^2 - 2rD \cos \varphi} \right) \mathbf{e}_r - \frac{D \sin \varphi}{r^2 + D^2 - 2rD \cos \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right]$$

** 双根传输线用其线间电压所表示的线外的电场近似为

$$\mathbf{E} = \frac{U}{2 \ln \frac{D}{a}} \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{r - D \cos \varphi}{r^2 + D^2 - 2rD \cos \varphi} \right) \mathbf{e}_r - \frac{D \sin \varphi}{r^2 + D^2 - 2rD \cos \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right]$$

3.3.3 安培定律与磁感应强度

安培定律表示在线性磁介质中两个电流回路之间相互作用力的规律。真空中安培力的数学表达式为

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{R_{12}})}{R_{12}^2} \quad (3-13)$$

一个电流回路在磁场中所受到的安培力(即磁场力)为

$$\mathbf{F} = \oint_{l'} I d\mathbf{l}' \times \mathbf{B} \quad (3-14)$$

运动电荷 Q 在电场与磁场中所受到的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3-15)$$

或用洛伦兹力密度表示为

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3-16)$$

由安培定律可导出在线性磁介质中计算磁感应强度的毕奥-萨伐尔定律

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \\ \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_S \times \mathbf{e}_R}{R^2} dS' \\ \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \end{cases} \quad (3-17)$$

3.3.4 磁矢势和磁标势

磁矢势: 为简化稳恒磁场问题的分析而引入的一个辅助量。磁感应强度与磁矢势 $\mathbf{A}$ 的关系为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-18)$$

$\mathbf{A}$ 的积分计算式为

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}'}{R} \\ \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_S dS'}{R} \\ \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} dV'}{R} \end{cases} \quad (3-19)$$

磁矢势的微分方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0) \quad (3-20)$$

磁标势: 为了进一步简化磁场的计算,仿照静电场中电势的引入方法,引入一个标量势函数 ϕ_m , 称为磁标势。

因为磁场是有旋场,故在整个场域内不能引入标量势函数。然而,在无电流的区域, $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, 仿照 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, 可令

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m \quad (3-21)$$

注意: 磁标势仅适用于无电流且单连通的场域。

3.3.5 磁偶极子和物质的磁化

磁偶极子的磁矩为 $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$, 它在远处的矢势和磁感应强度分别为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad \text{和} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \quad (3-22)$$

磁偶极子的磁感应强度在球坐标系中为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta) \quad (3-23)$$

稳恒磁场中的磁偶极子所受到的力矩为

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3-24)$$

物质的磁性分为抗磁性、顺磁性和铁磁性等。物质磁化后其内部出现磁化体电流密度 $\mathbf{J}_m$, 其表面上出现磁化面电流密度 $\mathbf{J}_{sm}$, 即

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = (\mu_r - 1)\mathbf{J} \quad \text{和} \quad \mathbf{J}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (3-25)$$

而磁化强度为

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu_r - 1)\mathbf{H} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B} \quad (3-26)$$

这就是物质的磁化规律。在磁介质中利用磁场强度 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$ 进行计算, 可使问题简化。

3.3.6 稳恒磁场的基本方程及边界条件

1. 基本方程

积分形式	微分形式	
$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(3-27)
$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	

用磁矢势表示, 即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (3-28)$$

可见, 磁介质中的稳恒磁场是有旋无散场。

2. 边界条件

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1t} - H_{2t} = J_s \end{cases} \quad (3-29)$$

或

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \end{cases} \quad (3-30)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (3-31)$$

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 \right) = \mathbf{J}_s \quad (3-32)$$

3.3.7 电感与磁场能量

1. 互感

电感器是储存磁能的元件。电感分为自感和互感, 分别与电流回路的固有磁场能(自能)和相互作用能(互能)相联系。两个电流回路之间的互感为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}, \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad \text{且} \quad M_{12} = M_{21} \quad (3-33)$$

其中,

$$\begin{aligned}\Psi_{12} &= N_1 \Psi_{m12} = N_1 \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = N_1 \oint_{l_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \\ \Psi_{21} &= N_2 \Psi_{m21} = N_2 \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = N_2 \oint_{l_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2\end{aligned}$$

2. 自感

电流回路的自感为

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (3-34)$$

自感又分为内自感 L_i (导体内) 与外自感 L_e (导体外), 即

$$L = L_i + L_e = \frac{\Psi_i}{I} + \frac{\Psi_e}{I} \quad (3-35)$$

互感与外自感也可以应用诺埃曼公式来计算, 即

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu N_1 N_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad \text{与} \quad L_e = \frac{\mu N^2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3-36)$$

N 个电流回路系统所储存的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1(j \neq i)}^N M_{ij} I_i I_j \quad (3-37)$$

其中, $\Psi_i = L_i I_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^N M_{ij} I_j$ 。

3. 磁场能量

体电流分布的磁场能量可表示为

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV \quad (3-38)$$

磁场能量可用场量表示为

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \int_V w_m dV \quad (3-39)$$

其中, w_m 是表明磁场能量分布的能量密度。在线性磁介质中, 磁场的能量密度为

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \quad (3-40)$$

3.3.8 稳恒电场与稳恒磁场及静电场的基本特性比较

稳恒电场、稳恒磁场及静电场的基本特性比较如表 3-2 所示。

表 3-2 静电场、稳恒电场与稳恒磁场的基本特性对比

类别	静 电 场	稳 恒 电 场	稳 恒 磁 场
场力	$\mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{e}_{R_{12}}$ $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F}_{\text{静}} = q\mathbf{E}_{\text{恒}}$ $\mathbf{F}_{\text{非静}} = q\mathbf{E}_{\text{局外}}$	$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_R)}{R^2}$ $\mathbf{F} = \oint_i I d\mathbf{l}' \times \mathbf{B}$
洛伦兹力公式 $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$			

续表

类别	静 电 场	稳 恒 电 场	稳 恒 磁 场
场和势函数	$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dQ}{R}$ $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dQ}{R^2} \mathbf{e}_R$	$\phi = \frac{1}{\sigma} \int_P^\infty \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2}$ $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}'}{R}$ $I d\mathbf{l}' = \mathbf{J}_S dS' = \mathbf{J} dV'$
基本方程	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
微分方程	$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\mathbf{E} = -\nabla \phi)$	$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\mathbf{E} = -\nabla \phi)$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A})$ $\nabla^2 \phi_m = 0 \quad (\mathbf{H} = -\nabla \phi_m)$
边界条件	$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$ $E_{1t} = E_{2t}$ $\phi_1 = \phi_2$ $\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$ $(\rho_S = 0)$	$J_{1n} = J_{2n}$ $E_{1t} = E_{2t}$ $\phi_1 = \phi_2$ $\sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$	$H_{1t} - H_{2t} = J_S$ $B_{1n} = B_{2n}$ $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 \right)_t = J_S$ $\phi_{m1} = \phi_{m2}$ $\mu_1 \frac{\partial \phi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \phi_{m2}}{\partial n} \quad (J_S = 0)$
对偶量	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$ $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r$ $Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$		$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r$ $\psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
电路参数	$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$	$G = \frac{I}{U} = \frac{\sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$	$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{\sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$
场的通量	$\psi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$		$\psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$
场源分布	$\rho = \frac{dQ}{dV'}$ $\rho_S = \frac{dQ}{dS'}$ $\rho_l = \frac{dQ}{dl'}$		$J = \frac{dI}{dS'}$ $J_S = \frac{dI}{dl'}$ $I = \frac{dQ}{dt}$
介质的极化或磁化规律	$\mathbf{p} = Q\mathbf{l}$ $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ $= (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$ $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho$ $\rho_{sb} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$		$\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ $\mathbf{M} = n\mathbf{m} = \chi_m \mathbf{H}$ $= (\mu_r - 1) \mathbf{H}$ $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{J}$ $\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$

续表

类别	静 电 场	稳 恒 电 场	稳 恒 磁 场
场能	$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi_i$		$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i$
	$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$		$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$
	$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$		$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$
	$= \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon}$		$= \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu}$

3.4 重点与难点分析

结合本章主要内容及教学实践,将重点与难点分析如下。

3.4.1 导体中电导或电阻的计算

求解导体的电导或电阻,是本章重点之一。主要方法有:基于欧姆定律的设电流法(即设电流 I 求电压)和设电压法(即设电压 U 求电流)、电导公式积分法、静电比拟法等。但各种求解方法的简繁难易不同,要注意掌握和应用简便的分析计算方法,详见例 3.1。

3.4.2 如何理解稳恒电场中的高斯定理

静电场中,高斯定理作为描述该场的基本方程之一,具有重要地位。在稳恒电场中,均匀、线性、各向同性的导电媒质中存在着大量可自由定向移动的电荷形成稳恒电流,但高斯定理却为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\sigma} \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这就意味着,导电媒质中任一闭合面内包围的净电荷量为零。

根据上式的微分形式: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, 不难得到任意位置处的电荷密度 $\rho = 0$ 。然而容易费解的是,明明有运动电荷存在,电荷密度为何又等于零呢?

事实上,在稳恒电场中,电荷守恒定律的微分形式为 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 即有 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。这表明电荷密度不随时间而变,此时导电媒质内电荷密度应包含两项:设 ρ_+ 表示原子核或正离子的体电荷密度; ρ_- 表示电子或负离子的体电荷密度,则二者代数和为零,即 $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$ 。这表明在任一时刻通过导电媒质内某一点的邻域电荷总量不变,即净电荷为零,但这并不排斥 ρ_+ 、 ρ_- 的运动或两者均做运动,从而形成稳恒电流。

3.4.3 用毕奥-萨伐尔定律进行磁场计算

毕奥-萨伐尔定律反映了一定电流分布情形下所产生的磁感应强度的定量表达式,是分

析稳恒磁场问题的理论基础。理论上,对于任意电流分布的磁场问题均适用,是分析计算磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的最基本的一种方法,但由于上述积分是矢量积分,且随着载流体几何结构复杂度增大而计算难度也增大,故用该方法进行严格计算时只有简单电流分布时才适用。对于较为复杂的电流分布问题,可以建立积分式,通过数值计算得到场分布。

求解简单电流分布的磁场,应遵循“三先一找”的原则,即先选择一个合适的坐标系;先小后大——先选择电流元,确定元场,再进行积分计算;先定性分析后定量计算;并善于发现,找出规律。

3.4.4 磁矢势 $\mathbf{A}$ 的物理意义及应用

尽管 $\mathbf{A}$ 没有明确的物理意义,但若对其进行环路积分,则

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

这表明磁矢势 $\mathbf{A}$ 的环量在数值上等于以 l 为边界的任意闭合曲面内对应的磁感应强度的通量。该式在形式上类似于安培环路定律。

正如安培环路定律可以用于求解电流分布具有一定对称性时的磁场一样,用此式也可计算同类电流分布的磁矢势,详见后面例题。

通过引入磁矢势 $\mathbf{A}$,不仅可以使磁场的计算问题得以简化,更重要的是,通过磁矢势 $\mathbf{A}$ 可以方便研究磁场的基本特性。给定电流分布求解磁场的基本问题,也可归结为通过求解满足边界条件的矢势的泊松方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$ 或拉普拉斯方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$,再由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 而得。

用矢势法求磁场的方法可概括为:

$$\text{方法 1: 由已知 } \mathbf{J} (\mathbf{J}_S, \mathbf{I}) \xrightarrow{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV'} \mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \mathbf{B};$$

$$\text{方法 2: 由已知 } \mathbf{J} \xrightarrow{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}} \mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \mathbf{B}.$$

3.4.5 为何要引入磁标势

磁矢势 $\mathbf{A}$ 的引入在一定程度上可以简化磁场的计算,这是由于磁矢势 $\mathbf{A}$ 的方向与电流元的方向一致,比直接用毕奥-萨伐尔定律简单许多。但相应的积分仍为矢量积分,尚需进行矢量分解或先做定性判断以简化计算。那么,自然会想到能不能像静电场一样也可以引入一个标量势函数?

因此,引入磁标势是仿照静电场中引入电势的思想,但它不像电势一样适用于任何场域,只有在静磁场中 $\mathbf{J} = 0$ 且为单连通区域的地方,方可成立。由 $\mathbf{H} = -\nabla \phi_m$ 可得,在均匀、线性、各向同性的磁介质中, $\nabla^2 \phi_m = 0$ 。故磁场的求解同样可归结为求解满足边界条件的磁标势的拉普拉斯方程问题(详见例 3.5)。

对于铁磁材料,有 $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, 由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (3-41)$$

如果将磁偶极子看成是由一对等值异号的磁荷所产生,令磁荷密度 $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$, 与静电场问题相对应,则有

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (3-42)$$

将 $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$ 代入式(3-42),得

$$\nabla^2 \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (3-43)$$

这便是磁标势所满足的一般形式的微分方程。若磁介质被均匀磁化,在其内部有 $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$,可得磁标势 ϕ_m 满足拉普拉斯方程。

3.4.6 应用安培定律计算磁场时回路绕行方向规定

在应用安培环路定律时,闭合回路(安培环路) l 所包围的总电流 I 应为 l 包围的所有电流的代数和,且要求与闭合回路 l 符合右手螺旋关系的电流为正;反之,为负。这一规定是符合毕奥-萨伐尔定律电流与磁场的正交关系。从安培环路定律的微分形式更容易理解:涡旋源的方向与之所产生的涡旋场的方向服从右手关系。应用安培环路定律的三种情形如图3-2所示。

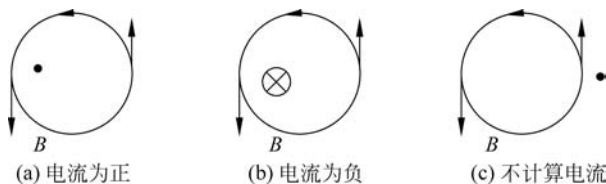


图 3-2 安培环路定律的几种场景

3.4.7 磁场的几种常用计算方法

(1) 毕奥-萨伐尔定律理论上适用于任何电流分布的情形,但需要通过矢量积分计算,随着结构的复杂难度增大。

(2) 安培环路定律仅适用于电流具有某种对称分布的情形。

(3) 用矢势定义法。先通过积分求得矢势 $\mathbf{A}$,再由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 求得 $\mathbf{B}$ 。

(4) 建立矢势 $\mathbf{A}$ 的微分方程(本章主要涉及泊松方程或拉普拉斯方程的特例——一维问题)。

(5) 在无电流的区域,求解磁标势的拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi_m = 0$,然后计算 $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$,再换成 $\mathbf{B}$ 。

3.5 典型例题分析

例 3.1 一圆柱形电容器中内、外极板的半径分别为 r_1 和 r_2 ,纵向长度为 l ,其中的介质是有耗的,电导率为 σ ,介电常数为 ϵ 。若两极板间的电压为 U_0 ,试求该电容器的漏电导。

解 这是一个稳恒电场中涉及稳恒场、电势分布及有关参量的计算问题。本题的计算可以按照几种不同思路进行分析计算。

思路一: 设电量 $Q \Rightarrow \mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} \phi \rightarrow U \\ \mathbf{J} \rightarrow I \end{cases} \Rightarrow G$;

思路二：设电势 $\phi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow U \\ \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{J} \rightarrow I \end{array} \right\} \Rightarrow G$ ；

思路三：设电流 $I \Rightarrow \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{E} \Rightarrow U \Rightarrow G$ ；

思路四：静电比拟法；

思路五：用电阻定义法。

方法 1：设电量法。

采用圆柱坐标系，取极轴为 z 轴。显然，电荷、电势关于 z 轴对称，因此两导体间的电场强度、电势只与径向变量 r 有关。设内外导体表面单位长度所带的电量分别为 $\pm\rho_l$ ，由高斯定理可得两导体间任一点处的电场强度 $\mathbf{E}$ 。由

$$\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon \mathbf{E} \cdot 2\pi r l = \rho_l l$$

得

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r$$

因已知两导体间的电压为 U_0 ，则

$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故

$$\rho_l = \frac{2\pi\epsilon U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

所以

$$\mathbf{E} = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r$$

若规定外导体的电势为 0，则介质任一点的电势则为

$$\phi = \int_r^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r_2} \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1} r} dr = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}$$

因为存在漏电导，故两导体间有漏电流。设漏电流密度为 $\mathbf{J}$ ，由微分形式的欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 得

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r$$

则通过任一半径的柱面(横截面)的电流强度为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J \cdot 2\pi r l = \frac{2\pi\sigma U_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

由电导定义可得

$$G = \frac{I}{U_0} = \frac{2\pi\sigma l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

方法 2: 设电势法。

设两导体间的电势为 ϕ , 不妨规定外导体的电势为 0, 则 ϕ 所满足的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi|_{r=r_1} = U_0 \\ \phi|_{r=r_2} = 0 \end{cases}$$

因电势函数关于 z 轴对称, 故 ϕ 仅为 r 的函数, 即

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

其通解为

$$\phi = A + B \ln r$$

代入 $\phi|_{r=r_1} = U_0, \phi|_{r=r_2} = 0$, 可得

$$A = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r_2, \quad B = -\frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

所以

$$\phi = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}$$

再由 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, 得

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{U_0}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right) r} \mathbf{e}_r$$

其余步骤同上。

方法 3: 设电流法。

采用圆柱坐标系, 取极轴为 z 轴。设由内导体表面流向外导体表面的电流为 I , 取半径为 r 的柱面考察, 则穿过该柱面的电流密度大小为 $J = \frac{I}{2\pi l r}$, 方向为半径方向。因此

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi l r} \mathbf{e}_r$$

得

$$\mathbf{E} = \frac{I}{2\pi l \sigma r} \mathbf{e}_r$$

因已知两导体间的电压为 U_0 , 则

$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{2\pi l \sigma r} dr = \frac{I}{2\pi l \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

由电导定义可得

$$G = \frac{I}{U_0} = \frac{2\pi l \sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

方法 4: 用静电比拟法。

利用第 2 章知识, 已知圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

根据静电比拟的原理,只要将电容器式中的介电常数 ϵ 换成电导率 σ ,即为其电导。

方法 5: 用电阻定义法。

对于一横截面积为 S 、长为 l 、电导率为 σ 的导体,其电阻为

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

本题中的漏电流沿 r 方向,所以对于长为 dl 的电阻元而言,有

$$dR = \frac{dl}{\sigma S} = \frac{dr}{2\pi l \sigma r}$$

那么,半径分别为 r_1 和 r_2 的圆柱形电容器中内、外极板总电阻为

$$R = \int_{r_1}^{r_2} dR = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi \sigma l r} = \frac{1}{2\pi \sigma l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

电导为

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi \sigma l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

例 3.2 如图 3-3 所示,有两根导线沿半径引向圆环电阻上的 A, B 两点,并在很远处与电源相连。求环中心的磁感应强度。

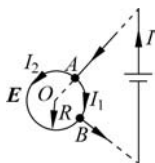


图 3-3 例 3.2 示意图

解 本题属于用毕奥-萨伐尔定律和场的叠加原理求解磁场的问题。载流线由五段构成:沿 AO 线段、沿 OB 线段、与电源相连的线段、优弧 AEB 、劣弧 AB 。其中延长线通过圆心的两根载流线在圆心产生的磁感应强度为零,于是 O 点的磁感应强度由与电源相连的直载流线和两载流圆弧产生。根据题意,与电源相连的直载流线距离 O 点很远,故可近似为无限长直载流线。其在 O 点处的磁

感应强度为

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

由于 $d \rightarrow \infty$,故

$$B_0 = 0$$

两圆弧在中心处的磁感应强度分别为

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \frac{l_1}{2\pi R}$$

方向垂直纸面向里。

$$B_{AEB} = \frac{\mu_0 I_2}{2R} \frac{l_2}{2\pi R}$$

方向垂直纸面向外。

根据并联电路中每一支路中电流与电阻的乘积相等的关系,有

$$I_1 l_1 = I_2 l_2$$

故总磁感应强度为

$$B = B_{AB} - B_{AEB} = 0$$

例 3.3 一载有电流为 I_1 的无限长直导线与一载电流为 I_2 的刚性圆形闭合回路同在一平面内。圆环半径为 R , 其圆心到直导线电流的垂直距离为 d , 如图 3-4 所示。求圆形回路所受的磁场力。

解 本题涉及用安培定律计算两载流线间的相互作用力。由于属于非均匀受力问题, 故需通过积分计算。理论上讲, 两载流线间的相互作用力是相等的, 但从计算难易程度看, 考虑载电流 I_2 处于电流为 I_1 的无限长直导线所产生的磁场中较容易些。

在圆形闭合回路中任取一电流元 $I_2 d\mathbf{l}$, 与直导线的距离为 $d + R \cos \theta$ 。该处磁感应强度大小为

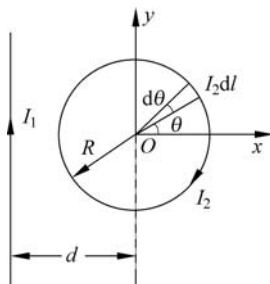


图 3-4 例 3.3 示意图

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{1}{d + R \cos \theta} \mathbf{e}_z$$

电流元 $I_2 d\mathbf{l}$ 受力为

$$d\mathbf{f} = I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I_2 d\mathbf{l} B \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{e}_R = I_2 B R d\theta \mathbf{e}_R$$

方向沿半径向外。

考虑整个圆形回路的受力情况, 由于对称性, 在 y 轴方向上的合力 $\mathbf{F}_y = \int d\mathbf{f}_y = 0$, 则整个线圈受力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_x = \int d\mathbf{f}_x = \int_0^{2\pi} I_2 B R \cos \theta d\theta \mathbf{e}_x \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{I_2 R}{d + R \cos \theta} \cos \theta d\theta \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{d + R \cos \theta} d\theta \mathbf{e}_x \\ &= \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}} \right) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

受力方向沿 x 轴负方向。

例 3.4 在空气中放置一个半径为 a 、磁导率为 μ 的无限长直导线, 其内均匀分布着电流 I , 如图 3-5 所示。求柱内、外的磁矢势 $\mathbf{A}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

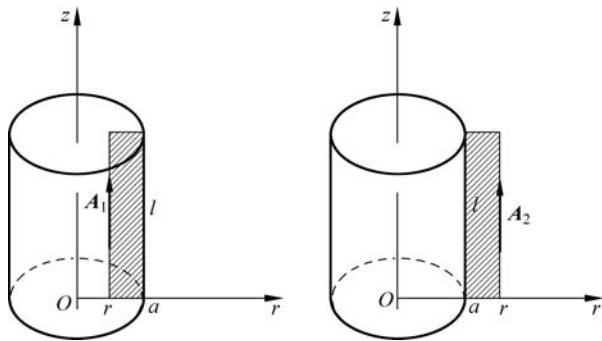


图 3-5 例 3.4 示意图

解 这是一个稳恒磁场中涉及磁感应强度与磁矢势的计算问题。本题的计算可以按照两种思路进行分析计算。

思路一：先求矢势 $\mathbf{A}$ ，再求旋度得到 $\mathbf{B}$ ；

思路二：先由安培环路定律求得 $\mathbf{B}$ ，再由 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 关系求得矢势 $\mathbf{A}$ 。

方法 1：建立圆柱坐标系，设柱内、外的矢势分别为 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ ，则有 $\nabla^2 \mathbf{A}_1 = -\mu \mathbf{J}$ ， $\nabla^2 \mathbf{A}_2 = 0$ 。

其中， $\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z$ 。由于电流具有轴对称性，且为无限长电流线，从而矢势与 φ, z 无关，则柱内、外矢势的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 A_{z1} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{z1}}{dr} \right) = -\mu \frac{I}{\pi a^2} \\ \nabla^2 A_{z2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{z2}}{dr} \right) = 0 \\ A_{z1}|_{r=a} = A_{z2}|_{r=a} \\ \left. \frac{1}{\mu} \frac{dA_{z1}}{dr} \right|_{r=a} = \left. \frac{1}{\mu_0} \frac{dA_{z2}}{dr} \right|_{r=a} \end{cases}$$

容易求得

$$A_{z1} = a_1 + b_1 \ln r - \frac{\mu I r^2}{4\pi a^2}, \quad A_{z2} = a_2 + b_2 \ln r$$

不妨设零势点为 $r=a$ 处，且 $A_{z1}|_{r \rightarrow 0}$ 为有限值，得

$$A_{z1} = \frac{\mu I (a^2 - r^2)}{4\pi a^2}, \quad A_{z2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r}$$

磁感应强度可由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$ 求得。分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1 &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_{z1} \end{vmatrix} = \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2 &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_{z2} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

方法 2：由安培环路定律，得

(1) 当 $r < a$ 时，

由

$$\oint_l \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = H_1 \cdot 2\pi r = I' = \frac{I r^2}{a^2}$$

得

$$\mathbf{H}_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1 = \frac{\mu Ir}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi$$

(2) 当 $a < r$ 时,

由

$$\oint_l \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

得

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

接下来计算磁矢势 $\mathbf{A}$ 。

(1) 当 $r < a$ 时,

由于磁矢势的方向与电流方向相同,取如图 3-5 所示矩形积分环路,正方向沿顺时针。

设 $r=a$ 处为磁矢势的参考点。由 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 得

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_{z1}l + 0 \cdot l = \int_s \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_r^a \frac{\mu Ir}{2\pi a^2} l dr = \frac{\mu Il(a^2 - r^2)}{4\pi a^2}$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu I(a^2 - r^2)}{4\pi a^2} \mathbf{e}_z$$

(2) 当 $a < r$ 时

取如图 3-5 所示矩形积分环路,由 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 得

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -A_{z2}l + 0 \cdot l = \int_s \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} = \int_a^r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r} \mathbf{e}_z$$

例 3.5 求磁化强度为 $\mathbf{M}_0$ 、半径为 R_0 的均匀磁化铁球产生的磁场。

解 本题考查用磁标势求解磁场的方法,解题时要注意磁标势的应用条件。

球内外分别为均匀区域,球外没有磁荷,球内磁化强度为常矢量,故

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}_0 = 0$$

因而球内没有体磁荷,所以磁标势在这两个区域内满足的方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_{m1} = 0, & r < R_0 \\ \nabla^2 \phi_{m2} = 0, & r > R_0 \end{cases}$$

由于铁球磁化后产生的磁场满足轴对称分布,故球内外的通解形式为

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

(1) 根据自然边界条件: ① $\phi_{m1} |_{r=0} \rightarrow$ 有限值; ② $\phi_{m2} |_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ 可得

$$\begin{cases} \phi_{m1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta) \\ \phi_{m2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \end{cases}$$

(2) 当 $r=R_0$ 时,磁标势满足以下边值关系:

① 界面连续,即 $\phi_{m2} = \phi_{m1}$,故

$$b_n = a_n R_0^{2n+1}$$

② 由于不同介质的磁化强度不同,导致球面上存在面束缚磁荷,即

$$\rho_{Sm} = -\mu_0 \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = -\mu_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{M}_0$$

故磁标势的一阶导数在界面不连续,有

$$\left(\frac{\partial \phi_{m2}}{\partial r} - \frac{\partial \phi_{m1}}{\partial r} \right) = -\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{M}_0 = -M_0 \cos\theta$$

由此可得

$$2 \frac{b_1}{R_0^3} + a_1 = M_0 \quad (n=1), \quad b_n = -\frac{n}{n+1} a_n R_0^{2n+1} \quad (n \neq 1)$$

根据以上两个边值关系导出式,可以解出待定系数为

$$a_1 = \frac{M_0}{3}, \quad b_1 = \frac{M_0 R_0^3}{3}, \quad a_n = b_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

代入通解,可得球内外的磁标势分别为

$$\begin{cases} \phi_{m1} = \frac{M_0 r \cos\theta}{3} = \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{3} \\ \phi_{m2} = \frac{R_0^3 (\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r})}{3r^3} \end{cases}$$

根据磁标势的定义和铁磁介质的本构方程式(3-26),得到

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = -\mu_0 \nabla \phi_{m1} + \mu_0 \mathbf{M}_0 = \frac{2\mu_0 \mathbf{M}_0}{3} \\ \mathbf{B}_2 = -\mu_0 \nabla \phi_{m2} = \frac{\mu_0 R_0^3}{3} \left[\frac{3(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}_0}{r^3} \right] \end{cases}$$

可见,在球外空间可以把均匀磁化铁球等效成一个磁偶极子,它的磁矩为

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M}_0 dV = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \mathbf{M}_0$$

则球外空间的势和场可转化为

$$\begin{cases} \phi_{m2} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \\ \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \end{cases}$$

如图 3-6 所示,磁感应强度和磁场强度在球外的分布很相似,但是它们在球内的方向相反。总体来看,磁感应强度从球内到球外再到球内形成一个闭合回路,而磁场强度则不管是在球内还是在球外,总是从右半球面的正磁荷发出,最后终止于左半球面的负磁荷,这种性

质非常类似于静电场分布,即起始于正电荷终止于负电荷。究其原因在于,磁标势与电标势满足类似的方程,因而也具有相似的性质。

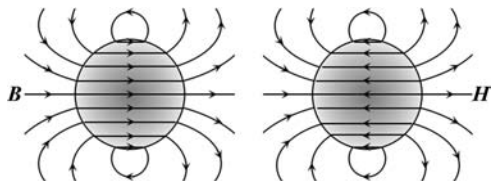


图 3-6 例 3.5 示意图

例 3.6 一无限长直螺线管,横截面的半径为 R ,由表面绝缘的细导线密绕而成,单位长度的匝密度为 n ,当导线中载有 I 时,求管内外的磁矢势。

解 本题基于磁矢势从环量角度看所具有的物理意义,是磁矢势的环量与相应磁场通量的关系在求解磁矢势中的应用。通电螺线管中电流激发的磁矢势方向应与电流方向一致,即沿圆周方向。如果在螺线管内作一半径为 r 的环形闭合回路,则

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A \cdot 2\pi r$$

由式 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 得

$$A(2\pi r) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 n I (\pi r^2)$$

则管内磁矢势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I r}{2} \mathbf{e}_\varphi \quad (r < R)$$

如果把回路作在螺线管外,则磁通为

$$\Psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \pi n I R^2$$

于是可得管外磁矢势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} \mathbf{e}_\varphi \quad (r > R)$$

例 3.7 有一半径为 a 的球壳表面均匀带电,电荷密度为 ρ_s 。如图 3-7 所示,当球壳以角速度 ω 绕固定轴(位于 xOz 平面)旋转时,求 z 轴上任意场点 P 处的磁矢势。

解 本题是对磁矢势定义的考查,针对运流电流所产生的磁矢势问题,只要将磁矢势积分式中的电流元用运流电流面密度元取代即可。

设 $\mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}$ 分别表示球面上电荷源点 P' 和场点 P 相对于坐标原点 O 的位置矢量。 $\mathbf{r}$ 取为沿 z 轴方向,与 $\mathbf{r}'$ 夹角为 θ' ,与 ω 夹角为 ϑ 且 ω 位于 xOz 平面。依题意, O 点到 P' 的距离为

$$|OP'| = |\mathbf{r}'| = a$$

则 P' 到 P 的距离为

$$|P'P| = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta'}$$

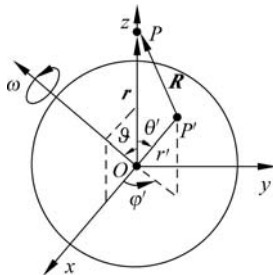


图 3-7 例 3.7 图

利用式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')}{R} dS'$$

式中

$$\mathbf{J}_S = \rho_S \mathbf{v}, \quad dS' = a^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

由于球面上电荷源点 P' 以角速度 ω 绕固定轴旋转, 故其速度可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}' &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \omega \sin\vartheta & 0 & \omega \cos\vartheta \\ a \sin\theta' \cos\varphi' & a \sin\theta' \sin\varphi' & a \cos\theta' \end{vmatrix} \\ &= a\omega [-(\cos\vartheta \sin\theta' \sin\varphi') \mathbf{e}_x + (\cos\vartheta \sin\theta' \cos\varphi' - \sin\vartheta \cos\theta') \mathbf{e}_y + \\ &\quad (\sin\vartheta \sin\theta' \sin\varphi') \mathbf{e}_z] \end{aligned}$$

又因为

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi' = 0$$

所以舍掉 $\mathbf{v}$ 中包含 $\sin\varphi'$ 或 $\cos\varphi'$ 的项, 则

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 a^3 \rho_S \omega \sin\vartheta}{2} \mathbf{e}_y \int_0^\pi \frac{\cos\theta' \sin\theta'}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta'}} d\theta'$$

单独计算上式中的积分项可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos\theta' \sin\theta'}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta'}} d\theta' &= \frac{(a^2 + r^2 + \arccos\theta')}{3a^2 r^2} \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta'} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{3a^2 r^2} [(a^2 + r^2 - ar)(a + r) - (a^2 + r^2 + ar) | a - r |] \end{aligned}$$

对于积分结果, 具体可分为球内部与球外部两种情况进行讨论:

(1) 场点位于球内, 即当 $r < a$ 时, 积分结果为 $2r/3a^2$;

(2) 场点位于球外, 即当 $r > a$ 时, 积分结果为 $2a/3r^2$ 。

最终求得磁矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 a \rho_S}{3} (\omega \times \mathbf{r}), & r \leq a \\ \frac{\mu_0 a^4 \rho_S}{3r^3} (\omega \times \mathbf{r}), & r \geq a \end{cases}$$

式中, $\omega \times \mathbf{r} = -\omega r \sin\vartheta \mathbf{e}_y$ 。

例 3.8 无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面, 如图 3-8 所示。试求两种介质中的磁感应强度和磁化强度, 并计算相应的磁化电流。

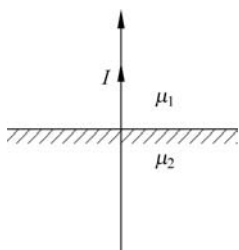


图 3-8 例 3.8 示意图

解 本题涉及两种不同磁介质中磁场的计算问题, 需要充分利用电流分布和边界条件对场的分布特征做出定性的判断, 在此基础上判断能否用安培环路定律进行求解。

建立圆柱坐标系。均匀介质中电流 I 产生的磁场沿 $\mathbf{e}_\varphi$ 方向。根据磁场的边界条件, 在理想磁介质分界面上, 磁场强度的切向分

量连续, 即有 $H_{1\varphi} = H_{2\varphi}$ 。

由安培环路定律 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$, 可得

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

因此, 两种磁介质中的磁感应强度分别为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

两种磁介质中的磁化强度分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1 - \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi\mu_0 r} \mathbf{e}_\varphi - \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi = \frac{(\mu_1 - \mu_0) I}{2\pi\mu_0 r} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{M}_2 &= \frac{(\mu_2 - \mu_0) I}{2\pi\mu_0 r} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

则磁化电流密度为

$$\mathbf{J}_{M1} = \nabla \times \mathbf{M}_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{(\mu_1 - \mu_0) I}{2\pi\mu_0 r} \right] \mathbf{e}_z = 0; \quad \mathbf{J}_{M2} = \nabla \times \mathbf{M}_2 = 0$$

在两种磁介质分界面上, 磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{Sm} = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) = \mathbf{e}_z \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) = -\frac{(\mu_1 - \mu_2) I}{2\pi\mu_0 r} \mathbf{e}_r$$

此外, 在两种磁介质中, 电流线附近 $r \rightarrow 0$ 处磁场具有奇异性, 所以此处存在磁化电流 I_m 。

以 z 轴为中心, 取半径为 r 的圆环为安培环路, 由安培环路定律 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_m)$,

可得

$$I + I_{m1} = \frac{\mu_1 I}{\mu_0}$$

故

$$I_{m1} = \frac{(\mu_1 - \mu_0) I}{\mu_0} = (\mu_{r1} - 1) I$$

同理

$$I_{m2} = (\mu_{r2} - 1) I$$

例 3.9 两个自感分别为 L_1 和 L_2 的单匝长方形线圈共面, 线圈的长边分别为 a_1 和 a_2 ($a_1 \gg a_2$) 相互平行, 宽边分别为 b_1 和 b_2 。若两线圈中分别通有电流为 I_1 和 I_2 , 两线圈的距离 $d \ll a_2$, 如图 3-9 所示。求:

- (1) 两线圈间的互感;
- (2) 系统的磁场能量。

解 本题涉及互感的近似计算和磁场能量与电感之间的关系, 属于常规思路可解决的实际应用问题。

(1) 由于两线圈相距很近, 且 $a_1 \gg a_2$, 故线圈 2 内的磁场可以近似看作是线圈 1 中两长边上相反方向无限长直导线产生的磁场。设线圈 2 中任一点距线圈 1 较远处长边长度为 r , 则

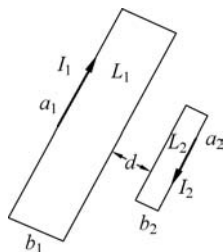


图 3-9 例 3.9 示意图

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{r - b_1} - \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

两线圈的互感为

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Psi_{m2}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_{b_1+d}^{b_1+b_2+d} B a_2 dr = \frac{1}{I_1} \int_{b_1+d}^{b_1+b_2+d} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{r - b_1} - \frac{1}{r} \right) a_2 dr \\ &= \frac{a_2 \mu_0}{2\pi} \ln \frac{(d + b_1)(d + b_2)}{d(b_1 + b_2 + d)} \end{aligned}$$

(2) 系统的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

例 3.10 长直导线附近有一矩形回路,此回路与导线不共面,位置关系如图 3-10 所示。求直导线与矩形回路间的互感。

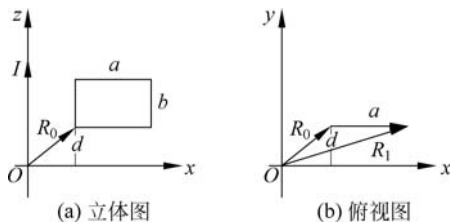


图 3-10 例 3.10 示意图

解 设长直导线中的电流为 I , 则其产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

由图 3-10 可见, 与矩形回路交链的磁通为

$$\Psi_m = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R_0}$$

$$R_1 = [d^2 + (a + \sqrt{R_0^2 - d^2})^2]^{1/2} = [R_0^2 + a^2 + 2a\sqrt{R_0^2 - d^2}]^{1/2}$$

故直导线与矩形回路间的互感为

$$M = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{[R_0^2 + a^2 + 2a\sqrt{R_0^2 - d^2}]^{1/2}}{R_0}$$

例 3.11 同轴线的内导体半径为 r_1 的圆柱体, 外导体为 r_2 的薄圆柱面, 其厚度可忽略不计。内、外导体间填充磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种不同磁介质, 如图 3-11 所示。设同轴线通有沿轴向的电流 I 且均匀分布。试求单位长导体内的磁场能量和单位长度的自感。

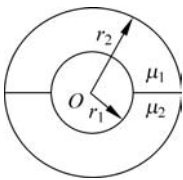


图 3-11 例 3.11 示意图

解 以同轴线的轴线为 z 轴建立圆柱坐标系, 同轴线内及两导体间的磁场沿 φ 方向, 根据安培环路定律容易求得圆筒内任意点的磁场。

在 $r < r_1$ 区域内, 有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{\pi r_1^2} \pi r^2$$

可得

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$$

在 $r_1 < r < r_2$ 区域内, 有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} \right) \cdot \pi r = I$$

可得

$$B = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}$$

单位长导体内的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m = & \int_0^{r_1} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} \right)^2 2\pi r dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r} \right)^2 \pi r dr + \\ & \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2\mu_2} \left(\frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r} \right)^2 \pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2 I^2}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

再由 $W_m = \frac{1}{2} L_i I^2$ 。可得

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

3.6 课后习题详解

习题 3.1 一半径为 a 的均匀带电球, 已知该球所带电量为 Q , 球体以匀角速度 ω 绕极轴旋转, 求:

(1) 球内的电流密度;

(2) 若为电荷分布均匀的导体球壳, 其他条件不变, 求球表面的面电流分布。

解 这是一个计算运流电流密度的问题。

(1) 采用球坐标系。选转轴为 z 轴, 设球内任一点坐标为 $\mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$, 则球内任一点的速度为 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, 体电荷密度为 $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$ 。

由运流电流密度公式 $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, 得

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \frac{3Q}{4\pi a^3} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \frac{3Q}{4\pi a^3} \omega \mathbf{e}_z \times r \mathbf{e}_r = \frac{3Q\omega r \sin\theta}{4\pi a^3} \mathbf{e}_\varphi$$

(2) 若为电荷分布均匀的导体球壳, 则面电荷密度为 $\rho_s = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi a^2}$, 球表面的面电流为

$$\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v} = \frac{Q}{4\pi a^2} \boldsymbol{\omega} \times a \mathbf{e}_r = \frac{Q\omega \sin\theta}{4\pi a} \mathbf{e}_\varphi$$

习题 3.2 同轴线中内、外导体的半径分别为 r_1 和 r_2 , 其电导率为 σ , 内外导体中载有等值而异号的电流 I , 两导体间的电压为 U_0 , 并填满介电常数为 ϵ 的介质。试求内导体表面上的电场强度的切向分量和法向分量之比。

解 采用两种方法求解。

方法 1: 设电量法。

这是一个稳恒电场中涉及稳恒场和静电场的综合问题。

采用圆柱坐标系,取同轴线沿纵向的轴线为 z 轴。显然,电流分布、电压分布关于 z 轴对称,因此两导体间的电场强度只与径向变量 r 有关。设内导体表面单位长度上的电荷密度为 ρ_l ,由高斯定理可得两导体间任一点处的电场强度 $\mathbf{E}$ 。由

$$\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r \epsilon E = \rho_l$$

得
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r$$

由已知两导体间的电压为 U_0 可得

$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

则
$$\mathbf{E} = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{1}{r} \mathbf{e}_r$$

在内导体表面上的电场强度的法向分量为

$$\mathbf{E}_n = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{1}{r} \mathbf{e}_r$$

内导体中的电场可由微分形式的欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_i$ 求得。因电流密度大小为 $J = \frac{I}{\pi r_1^2}$,沿 z 轴方向,故可得内导体表面上的电场强度的切向分量为

$$E_t = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \pi r_1^2}$$

则内导体表面上的电场强度的切向分量和法向分量之比为

$$\frac{E_t}{E_n} = \frac{I}{\pi r_1^2 \sigma} / \left(\frac{U_0}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right) r_1} \right) = \frac{I}{\pi r_1 \sigma U_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

方法 2: 设电势法。

设两导体间的电势为 ϕ ,不妨规定外导体的电势为 0,则 ϕ 所满足的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi|_{r=r_1} = U_0 \\ \phi|_{r=r_2} = 0 \end{cases}$$

因电势函数关于 z 轴对称,故 ϕ 仅为 r 的函数,即

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

其通解为

$$\phi = A + B \ln r$$

代入 $\phi|_{r=r_1} = U_0, \phi|_{r=r_2} = 0$, 可得

$$A = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r_2, \quad B = -\frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

所以

$$\phi = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}$$

再由 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, 得

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r = \frac{U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \mathbf{e}_r$$

其余步骤同上。

习题 3.3 球形电容器中内、外极板的半径分别为 r_1 和 r_2 , 其中的介质是有耗的, 电导率为 σ , 介电常数为 ϵ 。若两极板间的电压为 U_0 , 试求介质中的电势、电场强度与漏电导。

解 使用五种方法求解。

方法 1: 设电量法。

这是一个稳恒电场中涉及稳恒场、电势分布及有关参量的计算问题。

采用球坐标系, 取极轴为 z 轴。显然, 电荷、电势关于球中心对称, 因此两导体间的电场强度、电势只与径向变量 r 有关。设内外导体表面所带的电量分别为 $\pm Q$, 由高斯定理可得两导体间任一点处的电场强度 $\mathbf{E}$ 。由

$$\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 \epsilon E = Q$$

得

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

因已知两导体间的电压为 U_0 , 则

$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

故

$$Q = U_0 4\pi\epsilon \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$$

所以

$$\mathbf{E} = U_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

若规定外导体的电势为 0, 则介质任一点的电势则为

$$\phi = \int_r^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{U_0 r_1 (r_2 - r)}{r (r_2 - r_1)}$$

因为存在漏电导, 故两导体间有漏电流。设漏电流密度为 $\mathbf{J}$, 由微分形式的欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 得

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma U_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

则通过任一半径的球面(横截面)的电流强度为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\sigma U_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

由电导定义可得

$$G = \frac{I}{U_0} = \frac{4\pi\sigma r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

方法 2: 设电势法。

设两导体间的电势为 ϕ , 不妨规定外导体的电势为 0, 则 ϕ 所满足的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi|_{r=r_1} = U_0 \\ \phi|_{r=r_2} = 0 \end{cases}$$

因电势函数关于球对称, 故 ϕ 为 r 的函数, 即

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

其通解为

$$\phi = A + \frac{B}{r}$$

代入 $\phi|_{r=r_1} = U_0, \phi|_{r=r_2} = 0$, 可得 $A = -\frac{U_0}{r_2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1}, B = U_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$

所以

$$\phi = U_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right)$$

再由 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, 得

$$\mathbf{E} = U_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

其余步骤同上。

方法 3: 用静电比拟法。

这里只针对电导而言。利用上一章知识, 已知球形电容器的电容为

$$C = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

同例 3.1, 据静电比拟的原理, 只要将电容器式中的介电常数 ϵ 换成电导率 σ , 即为其电导。

方法 4: 用电阻定义法。

对于一横截面积为 S 、长为 l 、电导率为 σ 的导体, 其电阻为

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

本题中的漏电流沿 r 方向, 所以对于长为 dl 的电阻元而言, 有

$$dR = \frac{dl}{\sigma S} = \frac{dr}{\sigma \pi r^2}$$

那么, 半径分别为 r_1 和 r_2 的球形电容器中内外极板总电阻为

$$R = \int_{r_1}^{r_2} dR = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sigma 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

电导为

$$G = \frac{1}{R} = 4\pi\sigma \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$$

方法 5: 设电流法。

采用球坐标系, 原点为球心。设由内导体表面流向外导体表面的电流为 I , 取半径为 r

的球面考查,则穿过该球面的电流密度大小为 $J = \frac{I}{4\pi r^2}$,方向为半径方向。

因此

$$\mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

得

$$\mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \mathbf{e}_r$$

因已知两导体间的电压为 U_0 ,则

$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \cdot dr = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

由电导定义可得

$$G = \frac{I}{U_0} = \frac{4\pi\sigma(r_2 - r_1)}{r_2 r_1}$$

习题 3.4 在双层介质平行板电容器中,厚度分别为 d_1 与 d_2 的两层介质填满两极板间的空间,且其分界面与极板平行。如果介质都是有耗的,其电导率和介电常数分别为 σ_1 与 σ_2 及 ϵ_1 与 ϵ_2 。当两极板间的电压为 U_0 时,试求每层介质上的电场、漏电流密度及介质分界面上的束缚电荷面密度。

解 这是一个计算稳恒电场中电流、电场及电荷的分布问题。

采用直角坐标系。取下极板所在平面为 xOy 面,垂直于平行板向上方向为 z 轴正向。设介质 1、2 中的电场强度分别为 $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$,且沿正 z 轴方向,如图 3-12 所示;电流密度分别为 $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}$ 。由微分形式的欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$,可得

$$E_1 = \frac{J}{\sigma_1}, \quad E_2 = \frac{J}{\sigma_2}$$

利用电势公式,有

$$U_0 = \int_0^{d_1+d_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{d_1} E_1 dz + \int_{d_1}^{d_1+d_2} E_2 dz = \frac{Jd_1}{\sigma_1} + \frac{Jd_2}{\sigma_2}$$

从而可得

$$J = U_0 \left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2} \right)^{-1} = \frac{U_0 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

于是,两种介质中的电场强度为

$$E_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \cdot \frac{1}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2 U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}; \quad E_2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \cdot \frac{1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1 U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

介质分界面上的束缚电荷面密度可由 $\rho_{sb} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{P}_1$ 求得,其中 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{n}'$ 分别为分界面上由介质 2 指向介质 1 和由介质 1 指向介质 2 的单位矢量。具体为

$$\begin{aligned} \rho_{sb} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = -\mathbf{e}_z \cdot [(\epsilon_2 - \epsilon_0)E_2\mathbf{e}_z - (\epsilon_1 - \epsilon_0)E_1\mathbf{e}_z] \\ &= \frac{U_0[\epsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2) + (\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\sigma_1)]}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \end{aligned}$$

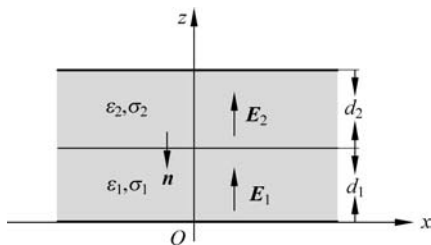


图 3-12 习题 3.4 图

习题 3.5 有两片厚度均为 d 、电导率分别为 σ_1 与 σ_2 的导体片组成弧形导电片,其内、外半径分别为 r_1 和 r_2 ,如图 3-13 所示。若 A, B 两端面间加电压 U ,且以 B 端面为电势的参考点,试求:

- (1) 弧片内的电势分布;
- (2) 弧片中的总电流和总电阻;
- (3) 分界面上的自由电荷面密度。

如果将电极改置于导电片的两弧边,重求之。

解 这是一个二维稳恒电场计算问题。

(1) 忽略掉边缘效应,可以看作是二维平面场问题。采用平面极坐标系,设介质 1、2 中的电势分别为 ϕ_1, ϕ_2 , 电流密度分别为 J_1, J_2 , 则电势所满足的定解问题为

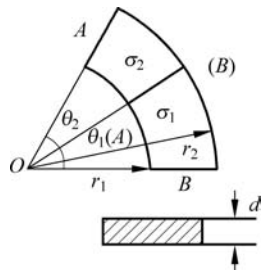


图 3-13 习题 3.5 示意图

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_1 = 0 (0 \leq \varphi < \theta_1), & \nabla^2 \phi_2 = 0 (\theta_1 \leq \varphi \leq \theta_1 + \theta_2) \\ \phi_1|_{\varphi=0} = 0, & \phi_2|_{\varphi=\theta_1+\theta_2} = U_0 \\ \phi_1|_{\varphi=\theta_1} = \phi_2|_{\varphi=\theta_1}, & \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\theta_1} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\theta_1} \end{cases}$$

因电势函数只是关于 φ 的函数,故

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \phi_1}{d\varphi^2} = 0, \quad \nabla^2 \phi_2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \phi_2}{d\varphi^2} = 0$$

其通解为

$$\phi_1 = A_1 + B_1 \varphi, \quad \phi_2 = A_2 + B_2 \varphi$$

代入 $\phi_1|_{\varphi=0}=0, \phi_2|_{\varphi=\theta_1+\theta_2}=U_0, \phi_1|_{\varphi=\theta_1}=\phi_2|_{\varphi=\theta_1}, \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\theta_1} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\theta_1}$, 可得

$$\phi_1 = \frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 \theta_1 + \sigma_1 \theta_2} \varphi, \quad \phi_2 = \frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 \theta_1 + \sigma_1 \theta_2} \varphi + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \theta_1 U}{\sigma_2 \theta_1 + \sigma_1 \theta_2}$$

$$(2) \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \sigma_1 \mathbf{E}_1 = -\sigma_1 \nabla \phi_1 = -\frac{\sigma_1 \sigma_2 U}{(\sigma_2 \theta_1 + \sigma_1 \theta_2) \rho} \mathbf{e}_\varphi$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma_1 \sigma_2 U d}{(\sigma_2 \theta_1 + \sigma_1 \theta_2) \rho} d\rho = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U d}{\sigma_2 \theta_1 + \sigma_1 \theta_2} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\sigma_2 \theta_1 + \sigma_1 \theta_2}{\sigma_1 \sigma_2 d \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$(3) \quad \rho_s = D_{1n} - D_{2n} = \epsilon_1 E_{1\varphi} - \epsilon_2 E_{2\varphi} = \frac{(\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1) U}{(\sigma_2 \theta_1 + \sigma_1 \theta_2) \rho}$$

如果将电极改置于导电片的两弧边,仍以 B 端面为电势的参考点。

(1) 电势所满足的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_1 = 0 (0 \leq \varphi < \theta_1), & \nabla^2 \phi_2 = 0 (\theta_1 \leq \varphi \leq \theta_1 + \theta_2) \\ \phi_{1,2}|_{\rho=r_1} = U_0, & \phi_{1,2}|_{\rho=r_2} = 0 \end{cases}$$

因电势函数只是关于 ρ 的函数,故

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\phi_1}{d\rho} \right) = 0, \quad \nabla^2 \phi_2 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\phi_2}{d\rho} \right) = 0$$

其通解为

$$\phi_1 = A_1 + B_1 \ln \rho, \quad \phi_2 = A_2 + B_2 \ln \rho$$

代入 $\phi_{1,2}|_{\rho=r_1}=U_0, \phi_{1,2}|_{\rho=r_2}=0$, 可得

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{U}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{\rho}{r_2}$$

$$(2) \mathbf{J}_1 = \sigma_1 \mathbf{E}_1 = -\sigma_1 \nabla \phi_1 = \frac{\sigma_1 U}{\ln \frac{r_2}{r_1} \rho} \mathbf{e}_\rho; \mathbf{J}_2 = \sigma_2 \mathbf{E}_2 = -\sigma_2 \nabla \phi_2 = \frac{\sigma_2 U}{\ln \frac{r_2}{r_1} \rho} \mathbf{e}_\rho$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\theta_1} \frac{\sigma_1 U d}{\ln \frac{r_2}{r_1} \rho} \rho d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} \frac{\sigma_2 U d}{\ln \frac{r_2}{r_1} \rho} \rho d\theta = \frac{(\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2) U d}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{d(\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2)}$$

$$(3) \rho_s = D_{1n} - D_{2n} = 0 - 0 = 0$$

习题 3.6 一个半径为 a 的导体球, 作为接地电极深埋于地下, 设大地的电导率为 σ , 如图 3-14 所示。求接地电阻。

解 这是一个计算稳恒电场中漏电阻的问题。

设接地电极球面分布的电量为 Q , 由于深埋于地下, 可以近似认为周围的电场关于球对称, 即球面外任一点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

由欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 可得

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

总电流为

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma Q}{4\pi\epsilon r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma Q}{\epsilon}$$

表面任一点到无限远处的电势为

$$\phi_0 = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon a}$$

所以总电阻为

$$R = \frac{\phi_0}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma a}$$

本题也可以用静电比拟法。由已知的孤立球形电容器的电容 $C = 4\pi\epsilon a$, 将 $\epsilon \rightarrow \sigma$, 则有其电导为 $G = 4\pi\sigma a$ 。

习题 3.7 两无限长平行直线电流线相距为 d , 分别载有等值而异号的电流 I 。试求两

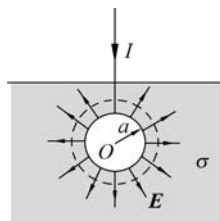


图 3-14 习题 3.6 示意图

载流带间单位长度的相互作用力。

解 这是一个利用安培定律计算受力的问题。

建立如图 3-15 所示的平面直角坐标系, 向上方向为 z 轴正向。设导线 1 中电流 I 在导线 2 上任一点产生的磁感应强度为 $\mathbf{B}$, 则

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{e}_y$$

导线 2 上电流元 $I d\mathbf{l}$ 受到的安培力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

长度为 Δl 的载流线所受的安培力为

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = I \Delta l \times \mathbf{B} = I \Delta l B \mathbf{e}_x$$

作用力表现为斥力。单位长度上受到的安培力为

$$f = \frac{F}{\Delta l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$

同理, 导线 2 对导线 1 的作用力也为斥力, 大小相等, 方向相反。

习题 3.8 有一宽度为 b 、载有电流 I 的无限长薄导体带位于 $x=0$ 的平面上, 其中心线与 z 轴重合, 如图 3-16 所示。试求 x 轴上任一点的磁感应强度。若 $b \rightarrow \infty$, 重新计算前述问题。

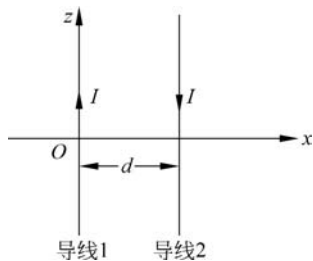


图 3-15 习题 3.7 示意图

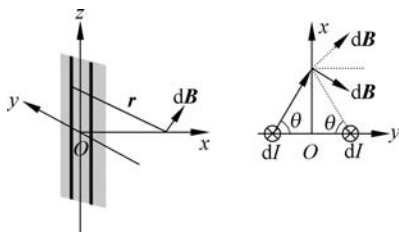


图 3-16 习题 3.8 示意图

解 这是一个利用毕奥-萨伐尔定律来计算磁感应强度的问题。

取中心线上任一点为坐标原点。在 y 轴上宽度为 dy 的载流线上的电流元为 $dI = \frac{I}{b} dy$, 其在 x 轴上任一点所产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I dy}{2\pi b \sqrt{x^2 + y^2}}$$

在 y 轴关于原点对称的位置另取一电流元, 所产生的磁感应强度元 dB 的大小关于 x 轴对称, 如图 3-16 所示。故合成总场只有 y 轴分量, 所以

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dB \sin\theta \mathbf{e}_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\mu_0 x I dy}{2\pi b (x^2 + y^2)} \mathbf{e}_y = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{2x} \mathbf{e}_y$$

若 $b \rightarrow \infty$, 令面电流密度 $J_s = \frac{I}{b}$, 则有

$$\mathbf{B} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{2x} \mathbf{e}_y = \frac{\mu_0 J_s}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \mathbf{e}_y = \frac{\mu_0 J_s}{2} \mathbf{e}_y$$

考虑 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情形, 上式应为

$$\mathbf{B} = \pm \frac{\mu_0 I}{2b} \mathbf{e}_y = \pm \frac{\mu_0 J_s}{2} \mathbf{e}_y$$

习题 3.9 有一半径为 a 、长为 l 的圆柱形长螺线管, 单位长度上密绕 n 匝线圈, 其中通有电流 I 。试求螺线管轴线上的磁感应强度, 并讨论螺线管趋于无限长时的情况。

解 这是一个利用场的叠加原理计算磁感应强度的问题。

参照配套教材《电磁场与电磁波》中例 3.5, 半径为 a 、通有电流 I 的圆环轴线 z 轴上的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z$$

设通电螺线管轴线中心为坐标原点, 轴线为 z 轴。在 z' 处选取宽度为 dz' 的圆环, 该载流环在 z 点所产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a^2 n I dz'}{2[a^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z$$

则通电螺线管总的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu_0 a^2 n I dz'}{2[a^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z = \frac{n\mu_0 I}{2} \left[\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2} - z\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2} + z\right)^2}} \right] \mathbf{e}_z$$

当 l 趋于无限长时, 上式的极限为

$$\mathbf{B} = n\mu_0 I \mathbf{e}_z$$

习题 3.10 在下列情况下, 导线中的电流为 I , 所有圆的半径均为 a , 如图 3-17 所示。试求圆心处的磁感应强度。

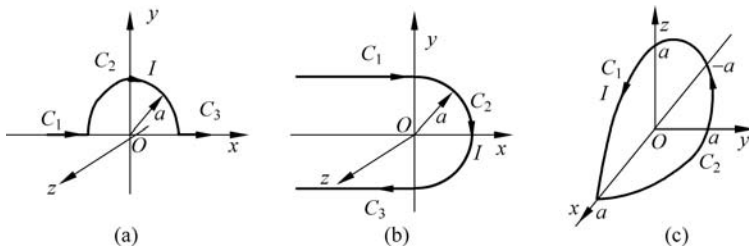


图 3-17 习题 3.10 示意图

- (1) 长直导线突起一半圆, 圆心在导线所在的直线上;
- (2) 两平行长直导线及与之相切的半圆导线;
- (3) 将电流环沿某一直径折成相互垂直的半圆面。

解 这是一个已知电流分布求磁场分布的问题。为讨论方便, 建立如图 3-17 所示的坐标系。

由图 3-17 可知, 载流线可分为 C_1, C_2, C_3 (图 3-17(c) 为 C_1, C_2 两部分), 因此总磁感应强度应等于各部分所产生的磁场矢量之和。

由配套教材《电磁场与电磁波》例 3.4 可知, 直载流线周围的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta'_1 - \cos\theta'_2) \mathbf{e}_\varphi$$

那么在导线延线上任一点, 因 $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$, 故 $\mathbf{B} = 0$; 而在半无限长导线端点附近, 因 $\theta'_1 = 0$,

$$\theta'_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \mathbf{e}_\varphi.$$

圆环载流线中点处的磁感应强度由例 3.5 可知 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \mathbf{e}_z$, 对于圆心角为 α 的圆弧, 圆心处的磁感应强度则为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi a} \mathbf{e}_z$$

所以, 图 3-17(a) 中 O 点的总磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = 0 - \frac{\mu_0 I \pi}{4\pi a} \mathbf{e}_z + 0 = -\frac{\mu_0 I}{4a} \mathbf{e}_z$$

图 3-17(b) 中 O 点的总磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (-\mathbf{e}_z) + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (-\mathbf{e}_z) + \frac{\mu_0 I}{4a} (-\mathbf{e}_z) = -\frac{(2+\pi)\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{e}_z$$

图 3-17(c) 中 O 点的总磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4a} \mathbf{e}_y + \frac{\mu_0 I}{4a} \mathbf{e}_z$$

习题 3.11 下列的矢量函数中, 哪些可能是磁场? 若是, 求其涡旋源。

(1) $\mathbf{B} = az\mathbf{e}_z$;

(2) $\mathbf{B} = ay\mathbf{e}_x - ax\mathbf{e}_y$;

(3) $\mathbf{B} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$;

(4) $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi$ (圆柱坐标系)。其中, $a, b \neq 0$ 。

解 这是一个用稳恒磁场的基本方程进行判断的问题。

根据稳恒磁场的基本性质为无源场, 分别计算各自的散度是否为零即可判断。

(1) 因 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial (az)}{\partial z} = a \neq 0$, 故它不可能是磁场。

(2) 因 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial (ay)}{\partial x} - \frac{\partial (ax)}{\partial y} = 0$, 故它可能是磁场。

其旋度为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay & -ax & 0 \end{vmatrix} = -2a\mathbf{e}_z$$

(3) 因 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0$, 故它可能是磁场。

其旋度为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4) \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \right) \right] = 0, \text{故它可能是磁场。}$$

其旋度为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_r & rB_\varphi & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z$$

习题 3.12 设在赤道上地球的磁场 $\mathbf{B}_0$ 与地平面平行, 方向指向北方。若 $B_0 = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$, 已知铜导线的质量密度为 $\rho_m = 8.9 \text{ g/cm}^3$, 试求铜导线在地球的磁场中飘浮起来所需要的最小电流密度。

解 这是一个涉及安培力与重力的受力平衡问题。

设导线长为 l 、横截面为 S , 其中的电流密度为 $\mathbf{J}$, 则所受的安培力为

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} l S$$

重力为

$$G = mg = \rho g l S$$

当铜导线与地面平行, 在地球的磁场中飘浮起来时应满足

$$F = JBlS \geq \rho g l S$$

$$J \geq \frac{\rho g}{B} = \frac{8.9 \times 10^3 \times 9.8}{5 \times 10^{-5}} = 1.74 \times 10^9 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

习题 3.13 雷达或微波炉中磁控管的工作原理可用阳极与阴极为平行导体板的模型来说明。两极板的间距为 d , 电压为 U , 且在两极板间有稳恒磁场 $\mathbf{B}_0$ 平行于极板, 如图 3-18 所示。试证明, 如果

$$U < \frac{eB_0^2 d^2}{2m}$$

则以零初速自阴极发射的电子不能到达阳极。式中, e, m 分别为电子电荷与质量。

证明: 建立如图 3-18 所示的坐标系。设电子刚好能到达阳极 A 时的速度为 v_m , 方向应沿水平向右。

由动能定理得

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = eU$$

在水平方向上, 根据动量定理, 得

$$\int_0^t F_x dt = m v_m$$

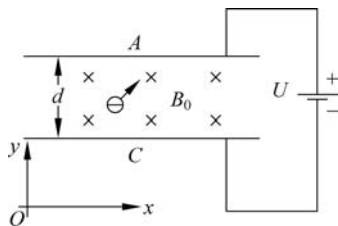


图 3-18 习题 3.13 示意图

其中, $F_x = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x = (-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{e}_x = (-e\mathbf{e}_x \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B}_0 = eB_0 v_y$ 。代入上式, 可得

$$mv_m = \int_0^t F_x dt = \int_0^t eB_0 v_y dt = eB_0 d$$

再将上式代入 $\frac{1}{2}mv_m^2 = eU$, 整理得

$$U_{\min} = \frac{eB_0^2 d^2}{2m}$$

即有

$$U < \frac{eB_0^2 d^2}{2m}$$

习题 3.14 无限长导体圆管的内、外半径分别为 r_1 和 r_2 , 其中通有均匀分布且沿轴向的电流 I 。试求导体圆管内外的磁感应强度。

解 本题可用安培环路定律求解。

建立圆柱坐标系。根据电流的对称性分布可知, 磁感应强度为一族以轴线为中心的同心圆。任意长半径为 r 的圆周可选为安培环路。

将圆柱管由内到外分为三个区, 设相应的磁场分别为 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ 。

当 $r < r_1$ 时, 由安培环路定律 $\oint_l \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I'$, 得

$$\oint_l \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = B_1 \cdot 2\pi r = 0$$

故

$$B_1 = 0$$

当 $r_1 < r < r_2$ 时, 有

$$\oint_l \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \pi(r^2 - r_1^2) = \frac{\mu_0 I(r^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

故

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I(r^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)r} \mathbf{e}_\varphi$$

当 $r > r_2$ 时, 有

$$\oint_l \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} = B_3 \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

故

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

综上, 可得

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < r_1 \\ \frac{\mu_0 I(r^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)r} \mathbf{e}_\varphi, & r_1 \leq r \leq r_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi, & r_2 < r \end{cases}$$

习题 3.15 两个半径分别为 a 和 b ($a < b$) 的平行长直圆柱体, 其轴线间距为 d , 且 $b - a < d < a + b$ 。除重叠区域 S 外, 两圆柱体中有沿轴向等值而反向的电流密度 J_0 。且均匀分布, 如图 3-19 所示。试求重叠区域 S 中的磁感应强度。

解 本题可用安培环路定律和叠加原理求解。

与习题 3.14 类似, 建立圆柱坐标系, 垂直于纸面向外的方向为 z 轴的正向。根据电流的对称性分布可知, 磁感应强度为一族以轴线为中心的同心圆。

在圆 O 内, 柱内阴影部分任一点位置 r 处的磁场满足 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I'$, 取半径为 r 的圆周为安培环路, 有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 J_0 \pi r^2$$

$$\text{故 } \mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_0 \pi r^2}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi = -\frac{\mu_0 J_0 \mathbf{r} \times \mathbf{e}_z}{2}$$

同理, 可求出圆 O' 内任一点的磁感应强度。取半径为 r' 的圆周为安培环路, 有

$$\oint_l \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = B' \cdot 2\pi r' = \mu_0 J_0 \pi r'^2$$

$$\text{故 } \mathbf{B}' = \frac{\mu_0 J_0 \mathbf{r}' \times \mathbf{e}_z}{2}$$

再由叠加原理求得总场为

$$\mathbf{B}_{\text{总}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}' = -\frac{\mu_0 J_0 \mathbf{r} \times \mathbf{e}_z}{2} + \frac{\mu_0 J_0 \mathbf{r}' \times \mathbf{e}_z}{2} = \frac{\mu_0 J_0 (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{e}_z}{2} = \frac{\mu_0 J_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{d}}{2}$$

其中, $\mathbf{d}$ 为由 O 点指向 O' 点的矢量。

习题 3.16 有一 N 匝、载电流 I 、边长为 a 的方环形线圈, 位于均匀磁场 $\mathbf{B}_0$ 中。若环面法线与 $\mathbf{B}_0$ 的夹角为 α , 试求磁场作用于方环形线圈的转矩。

解 本题用均匀磁场中磁偶极子的力矩公式可求得。

由磁偶极矩的定义容易得到: N 匝、载电流 I 、边长为 a 的方环形线圈所具有的磁矩为

$$\mathbf{m} = N I a^2 \mathbf{n}$$

$\mathbf{n}$ 为线圈所在平面的法线方向。

该磁场作用于方环形线圈的转矩为

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0$$

旋转磁矩的大小为

$$T = N I a^2 B_0 \sin \alpha$$

习题 3.17 有一细小磁铁棒, 沿其纵向的磁矩为 $\mathbf{m}$, 位于无限长细直线电流 I 的磁场里, 且线电流 I 沿 $\mathbf{m}$ 的方向为正。若磁棒与线电流的距离为 d , 试求磁场作用于磁棒上的转矩。

解 建立圆柱坐标系, 载电流 I 的方向沿正 z 轴方向。在距离其为 d 处的磁感应强度为

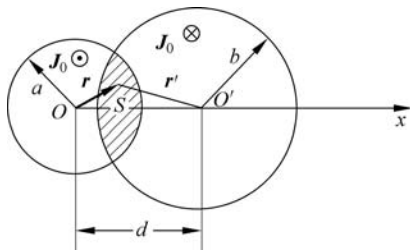


图 3-19 习题 3.15 示意图

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{e}_\varphi$$

该磁场作用于小磁铁棒的转矩为

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \frac{m\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varphi = -\frac{\mu_0 m I}{2\pi d} \mathbf{e}_r$$

习题 3.18 有一用细导线密绕成 N 匝的平面螺旋形线圈, 其半径为 a , 通有电流 I , 如图 3-20 所示。试求其磁矩。

解 用细导线密绕的平面螺旋形线圈可近似看作均匀面电流分布情形。

在载流平面圆盘内取一半径为 r 、厚度为 dr 的同心薄圆环, 其上分布的电流强度为

$$dI = \frac{NI}{a} dr$$

所产生的磁矩为

$$dm = dI \pi r^2 = \frac{NI}{a} \pi r^2 dr$$

其方向沿着轴线, 与电流方向服从右手关系。设该轴线为 z 轴, 则总磁矩为

$$\mathbf{m} = \int_0^a d\mathbf{m} = \mathbf{e}_z \int_0^a \frac{NI}{a} \pi r^2 dr = \frac{NI\pi a^2}{3} \mathbf{e}_z$$

习题 3.19 一半径为 a 的无限长螺线管, 单位长度上密绕 n 匝线圈, 其中通有电流 I 。螺线管中填满磁导率为 μ 的磁芯, 如图 3-21 所示。试求螺线管内的磁场强度、磁感应强度和磁芯表面的磁化面电流密度。

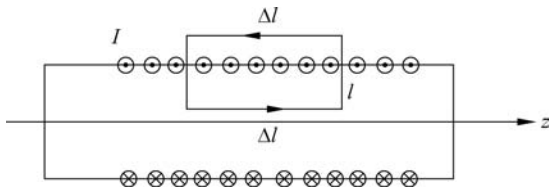


图 3-21 习题 3.19 示意图

解 本题讨论的是磁介质中的磁场问题。因为无限长通电螺线管的电流分布关于轴线对称, 因此可知管内的磁场分布关于轴线对称, 管外磁场为零。基于空心管轴线上任一点的磁感应强度的计算结果为 $B = n\mu_0 I$, 同理可得填充介质时管内外的磁场平行于轴线, 可用安培环路定律求解。选择如图 3-21 所示的安培环路 l ,

由介质中的安培环路定律, 可得

$$\oint_l \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{l} = H_i \cdot \Delta l = I \Delta l$$

螺线管内的磁场强度为

$$H_i = nI$$

磁感应强度为

$$B_i = \mu H_i = n\mu I$$

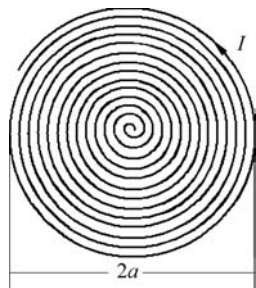


图 3-20 习题 3.18 示意图

写成矢量形式分别为 $\mathbf{H}_i = n\mathbf{Ie}_z$, $\mathbf{B}_i = n\mu\mathbf{Ie}_z$ 。

设磁芯表面的磁化面电流密度为 J_{sm} , 由磁感应强度的安培环路定律得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B\Delta l = \mu_0(I + I_{MS}) = \mu_0(n\Delta l I + J_{sm}\Delta l)$$

从而得

$$J_{sm} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} nI = (\mu_r - 1)nI$$

矢量形式即为

$$\mathbf{J}_{sm} = (\mu_r - 1)n\mathbf{Ie}_\varphi$$

习题 3.20 有一电磁铁由磁导率为 μ 的 U 形铁轭和一个长方体铁块构成, 其厚度均为 b , 宽度均为 d 。为避免铁块与铁轭直接接触, 两者之间有一厚度为 t 的薄铜片。如果铁轭半圆的平均半径为 a , 圆心至铜片的距离为 h , 且铁轭上绕有通电流 I 的 N 匝线圈, 如图 3-22 所示。试求铜片隙中的磁通、磁阻与磁感应强度。

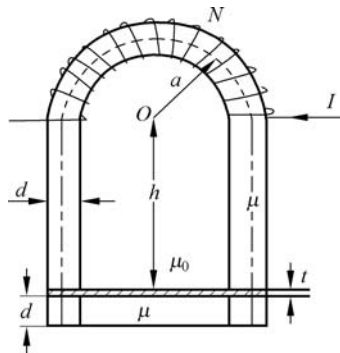


图 3-22 习题 3.20 示意图

解 本题涉及磁路的有关运算。由于 $d, b \ll a$, 故螺线管内的磁场可近似看作是均匀场。设铁轭和铁块中的磁场强度为 $\mathbf{H}$, 薄铜片中的磁场强度为 $\mathbf{H}_0$ 。若忽略漏磁, 由磁通连续性原理可知, 铁轭、薄铜片和铁块中的磁感应强度均为 $\mathbf{B}$, 且 $B = \mu_0 H_0 = \mu H$ 。根据安培环路定律, 得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = HL_1 + H_0 L_2 = NI$$

即

$$\frac{B}{\mu}(\pi a + 2h + 2a + d) + 2t \frac{B}{\mu_0} = NI$$

故磁感应强度为

$$B = \frac{NI}{\frac{\pi a + 2h + 2a + d}{\mu} + \frac{2t}{\mu_0}}$$

磁通量为

$$\psi_m = BS = Bbd = \frac{NI}{\frac{\pi a + 2h + 2a + d}{\mu bd} + \frac{2t}{\mu_0 bd}}$$

根据磁路定律, 令 $R_{m1} = \frac{\pi a + 2h}{\mu bd}$, $R_{m2} = \frac{2t}{\mu_0 bd}$, $R_{m3} = \frac{d + 2a}{\mu bd}$ 分别为铁轭、薄铜片和铁块的磁阻。

习题 3.21 一半径为 a 、载均匀分布的电流 I 的长直圆柱导体, 其磁导率为 μ_0 。它外面套以同轴的磁导率为 μ 的磁介质圆管, 其内、外半径分别为 b 与 c ($a < b < c$)。试求空间各点的磁场强度和磁感应强度及磁介质圆管表面上的磁化面电流密度。如果移去磁介质圆套管, 磁场的分布有何变化?

解 本题是一个涉及磁介质中的磁场问题, 可运用安培环路定律求解。

根据电流关于轴线对称, 可知磁场线为以轴线为中心的一族同心圆。采用圆柱坐标系, 分别计算各区磁场如下:

(1) 当 $r < a$ 时,

由安培环路定律,得

$$\oint_l \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = H_1 \cdot 2\pi r = I' = \frac{Ir^2}{a^2}$$

故有

$$\mathbf{H}_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi$$

磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi$$

(2) 当 $a < r < b$ 时,

由安培环路定律,得

$$\oint_l \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = H_2 \cdot 2\pi r = I$$

故有

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

磁感应强度为

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

(3) 当 $b < r < c$ 时,

由安培环路定律,得

$$\oint_l \mathbf{H}_3 \cdot d\mathbf{l} = H_3 \cdot 2\pi r = I$$

故有

$$\mathbf{H}_3 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

磁感应强度为

$$\mathbf{B}_3 = \mu \mathbf{H}_3 = \frac{\mu I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

(4) 当 $c < r$ 时,

由安培环路定律,得

$$\oint_l \mathbf{H}_4 \cdot d\mathbf{l} = H_4 \cdot 2\pi r = I$$

故有

$$\mathbf{H}_4 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

磁感应强度为

$$\mathbf{B}_4 = \mu_0 \mathbf{H}_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

为了求出磁介质圆管表面上的磁化面电流密度,不妨设由磁介质指向真空的分界面法线方

向为 $\mathbf{e}_n$, 则 $J_{\text{Sm}} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$ 。在 $r=b$ 面上, 有

$$J_{\text{Sm}}|_{r=b} = \mathbf{M}_3 \times \mathbf{e}_n|_{r=b} = \left(\frac{\mathbf{B}_3}{\mu_0} - \mathbf{H}_3 \right) \times \mathbf{e}_n|_{r=b} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi b} \mathbf{e}_\varphi \times (-\mathbf{e}_r) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi b} \mathbf{e}_z$$

同理, 在 $r=c$ 面上, 有

$$J_{\text{Sm}}|_{r=c} = \mathbf{M}_3 \times \mathbf{e}_n|_{r=c} = \left(\frac{\mathbf{B}_3}{\mu_0} - \mathbf{H}_3 \right) \times \mathbf{e}_n|_{r=c} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi c} \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \frac{(1 - \mu_r)I}{2\pi c} \mathbf{e}_z$$

如果移去磁介质圆套管, 磁场强度的分布不变, 磁感应强度(2)(3)(4)情形的结果均为 $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$, 则磁化电流不复存在。

习题 3.22 一半径为 a 、长为 L 、磁导率为 μ 的均匀磁化圆柱形永久磁铁, 其磁化强度 $\mathbf{M}_0$ 沿柱轴方向。试求圆柱体内与柱面上的磁化电流密度及柱轴上的磁感应强度。

解 采用圆柱坐标系, 设磁化强度的方向沿 z 轴方向。

圆柱体内的磁化电流密度公式为 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$, 即可得

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times M_0 \mathbf{e}_z = 0$$

柱面上的磁化电流密度公式为 $J_{\text{Sm}} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$, 则有

$$J_{\text{Sm}} = M_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = M_0 \mathbf{e}_\varphi$$

柱轴上的磁感应强度可以看作是由磁化电流密绕的直螺线管产生。以轴线中心为坐标原点, 任一点 z 处的磁感应强度为(见习题 3.9)

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 a^2 J_{\text{Sm}} dz'}{2 [a^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \mathbf{e}_z$$

习题 3.23 半径为 a 的磁介质球, 其磁导率为 μ , 球外为空气。已知球内、外的磁场强度分别为

$$\mathbf{H}_1 = C(\cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta) \quad \text{和} \quad \mathbf{H}_2 = D \left(\frac{2}{r^3} \cos\theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r^3} \sin\theta \mathbf{e}_\theta \right)$$

试确定系数 C, D 间的关系, 并求出磁介质球表面上的自由面电流密度 $\mathbf{J}_s$ 和总的面电流密度 $\mathbf{J}_{st}$ 。

解 本题是用磁场的边界条件计算有关电流分布的一个问题。

由边界条件: $B_{1n} = B_{2n}$, $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s$, $\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 (\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{\text{Sm}})$, 可分别得

$$B_{1n} = \mu C \cos\theta = B_{2n} = \mu_0 \frac{2D}{a^3} \cos\theta$$

则有

$$C = \frac{2\mu_0}{a^3 \mu} D$$

及

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = -\mathbf{e}_r \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \left(C \sin\theta + \frac{D}{a^3} \right) \sin\theta \mathbf{e}_\varphi = \left(1 + \frac{\mu}{2\mu_0} \right) C \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$$

总的面电流密度为

$$\mathbf{J}_{S1} = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_{Sm} = \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2}{\mu_0} \right) = \frac{\mu_0 H_{2t} - \mu H_{1t}}{\mu_0} \mathbf{e}_\varphi = \frac{3\mu}{2\mu_0} C \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$$

习题 3.24 有一铁磁材料的球壳,其内、外半径分别为 r_1 和 r_2 ,它被均匀磁化到 $\mathbf{M}_0$,其方向沿极轴方向。试求球壳内外极轴上的磁标势及磁感应强度。

解 采用球坐标系,取 $\mathbf{M}_0$ 的方向沿极轴 z 轴方向。因球壳内磁化强度为常矢量,故磁化体电流密度为

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}_0 = 0$$

磁化面电流密度为 $\mathbf{J}_{Sm} = \mathbf{M}_0 \times \mathbf{n}$

对于外半径为 r_2 的球面,有

$$\mathbf{J}_{Sm2} = \mathbf{M}_0 \times \mathbf{e}_r = M_0 \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$$

计算该电流在轴线上任一点的磁感应强度可以用叠加原理。将球面分割为无穷多个与极轴相垂直的薄圆环,利用教材例 3.5 的结果,即对于半径为 a 、载流为 I 的圆环,其轴线上的

磁感应强度为 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$, 可得磁化面电流 $\mathbf{J}_{Sm2} = M_0 \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$ 在轴线上任一点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_2 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 r_2^3 M_0 \sin^3 \theta d\theta}{2(r_2^2 + z^2 - 2r_2 z \cos\theta)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

具体计算该积分采用变量代换方法,即令 $r_2^2 + z^2 - 2r_2 z \cos\theta = u^2$ 。

当 $z > r_2$ 时,有

$$B_2 = \int_{z-r_2}^{z+r_2} \frac{\mu_0 r_2^3 M_0}{2u^2} \left[1 - \left(\frac{r_2^2 + z^2 - u^2}{2r_2 z} \right)^2 \right] du$$

具体计算结果为

$$B_2 = \frac{2\mu_0 r_2^3 M_0}{3z^3}$$

同理,当 $z < r_2$ 时,则有

$$B_2 = \int_{r_2-z}^{z+r_2} \frac{\mu_0 r_2^3 M_0}{2u^2} \left[1 - \left(\frac{r_2^2 + z^2 - u^2}{2r_2 z} \right)^2 \right] du$$

具体计算结果为

$$B_2 = \frac{2\mu_0 M_0}{3}$$

综合两种情形,则有

$$\mathbf{B}_2 = \begin{cases} \frac{2\mu_0 M_0}{3} \mathbf{e}_z & z < r_2 \\ \frac{2\mu_0 r_2^3 M_0}{3z^3} \mathbf{e}_z & z > r_2 \end{cases}$$

对于内半径为 r_1 的球面

$$\mathbf{J}_{Sm1} = \mathbf{M}_0 \times (-\mathbf{e}_r) = -M_0 \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$$

因此,同理可得球面内外轴线上任一点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} -\frac{2\mu_0 M_0}{3} \mathbf{e}_z & z < r_1 \\ -\frac{2\mu_0 r_1^3 M_0}{3z^3} \mathbf{e}_z & z > r_1 \end{cases}$$

总磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < r_1 \\ \left(\frac{2\mu_0 M_0}{3} - \frac{2\mu_0 r_1^3 M_0}{3z^3} \right) \mathbf{e}_z, & r_1 < z < r_2 \\ \frac{2\mu_0 (r_2^3 - r_1^3) M_0}{3z^3} \mathbf{e}_z, & r_2 < z \end{cases}$$

相应的磁场强度由 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ 而得, 则有

$$\mathbf{H} = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < r_1 \\ \left(-\frac{M_0}{3} - \frac{2r_1^3 M_0}{3z^3} \right) \mathbf{e}_z, & r_1 < z < r_2 \\ \frac{2(r_2^3 - r_1^3) M_0}{3z^3} \mathbf{e}_z, & r_2 < z \end{cases}$$

在整个轴线上, 总磁感应强度和磁场强度分别为

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0, & 0 \leq |z| < r_1 \\ \left(\frac{2\mu_0 M_0}{3} - \frac{2\mu_0 r_1^3 M_0}{3|z|^3} \right) \mathbf{e}_z, & r_1 < |z| < r_2 \\ \frac{2\mu_0 (r_2^3 - r_1^3) M_0}{3|z|^3} \mathbf{e}_z, & r_2 < |z| \end{cases}$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} 0, & 0 \leq |z| < r_1 \\ \left(-\frac{M_0}{3} - \frac{2r_1^3 M_0}{3|z|^3} \right) \mathbf{e}_z, & r_1 < |z| < r_2 \\ \frac{2(r_2^3 - r_1^3) M_0}{3|z|^3} \mathbf{e}_z, & r_2 < |z| \end{cases}$$

磁标势的计算由 $\phi_m = \int_z^\infty \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ 而得。

当 $0 \leq z < r_1$ 时, 有

$$\phi_m = \int_z^\infty \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_z^\infty H dz = \int_z^{r_1} 0 dz + \int_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{M_0}{3} - \frac{2r_1^3 M_0}{3z^3} \right) dz + \int_{r_2}^\infty \frac{2(r_2^3 - r_1^3) M_0}{3z^3} dz = 0$$

当 $r_1 \leq z < r_2$ 时, 有

$$\phi_m = \int_z^\infty \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_z^{r_2} \left(-\frac{M_0}{3} - \frac{2r_1^3 M_0}{3z^3} \right) dz + \int_{r_2}^\infty \frac{2(r_2^3 - r_1^3) M_0}{3z^3} dz = \frac{M_0 z}{3} - \frac{M_0 r_1^3}{3z^2}$$

当 $r_2 < z$ 时, 有

$$\phi_m = \int_z^\infty \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_z^\infty \frac{2(r_2^3 - r_1^3) M_0}{3z^3} dz = \frac{M_0 (r_2^3 - r_1^3)}{3z^2}$$

综上,在整个轴线上,磁标势为

$$\begin{cases} \phi_{m1} = 0, & 0 \leq |z| < r_1 \\ \phi_{m2} = \pm \frac{M_0(|z|^3 - r_1^3)}{3z^2}, & r_1 \leq |z| < r_2 \\ \phi_{m3} = \pm \frac{M_0(r_2^3 - r_1^3)}{3z^2}, & r_2 < |z| \end{cases}$$

式中,前面的负号与 z 的负号相对应。

此题目也可以采用分离变量法进行求解。采用球坐标系,取 $\mathbf{M}_0$ 的方向沿极轴 z 轴方向。设球壳内、球壳、球壳外的磁标势分别为 ϕ_{m1} , ϕ_{m2} 和 ϕ_{m3} , 球壳内磁化强度为常矢量,故

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}_0 = 0$$

因而磁标势在这三个区域内满足的方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_{m1} = 0, & r < r_1 \\ \nabla^2 \phi_{m2} = 0, & r_1 < r < r_2 \\ \nabla^2 \phi_{m3} = 0, & r_2 < r \end{cases}$$

由于铁球磁化后产生的场满足轴对称分布,故通解形式均为

$$\phi_{mi}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{ni} r^n + \frac{b_{ni}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad i = 1, 2, 3$$

根据自然边界条件:(1) $\phi_{m1} \big|_{r=0} \rightarrow \text{有限值}$; (2) $\phi_{m3} \big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ 可得

$$\begin{cases} \phi_{m1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} r^n P_n(\cos \theta) \\ \phi_{m3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n3}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \end{cases}$$

在 $r=r_1, r_2$ 处,磁标势满足以下边值关系

$$\phi_{m1} \big|_{r=r_1} = \phi_{m2} \big|_{r=r_1}, \quad \phi_{m2} \big|_{r=r_2} = \phi_{m3} \big|_{r=r_2};$$

$$-\frac{\partial \phi_{m1}}{\partial r} \bigg|_{r=r_1} = \left(-\frac{\partial \phi_{m2}}{\partial r} + M_0 \cos \theta \right) \bigg|_{r=r_1}, \quad \left(-\frac{\partial \phi_{m2}}{\partial r} + M_0 \cos \theta \right) \bigg|_{r=r_2} = -\frac{\partial \phi_{m3}}{\partial r} \bigg|_{r=r_2}$$

代入通解式中,得

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} r_1^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n2} r_1^n + \frac{b_{n2}}{r_1^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n2} r_2^n + \frac{b_{n2}}{r_2^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n3}}{r_2^{n+1}} P_n(\cos \theta) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} n a_{n1} r_1^{n-1} P_n(\cos \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n a_{n2} r_1^{n-1} - \frac{(n+1)b_{n2}}{r_1^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) + M_0 P_1(\cos \theta) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n a_{n2} r_2^{n-1} - \frac{(n+1)b_{n2}}{r_2^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) + M_0 P_1(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)b_{n3}}{r_2^{n+2}} P_n(\cos \theta) \end{cases}$$

对照两边系数,可简化为

$$\begin{cases} a_{11}r_1 = a_{12}r_1 + \frac{b_{12}}{r_1^2} \\ a_{12}r_2 + \frac{b_{12}}{r_2^2} = \frac{b_{13}}{r_2^2} \\ a_{11} = a_{12} - \frac{2b_{12}}{r_1^3} - M_0 \\ a_{12} - \frac{2b_{12}}{r_2^3} = -\frac{2b_{13}}{r_2^3} + M_0 \end{cases}$$

求得待定系数为

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = \frac{M_0}{3}, \quad b_{12} = -\frac{M_0 r_1^3}{3}, \quad b_{13} = \frac{M_0 (r_2^3 - r_1^3)}{3}$$

磁标势的定解为

$$\begin{cases} \phi_{m1} = 0, & 0 \leq r < r_1 \\ \phi_{m2} = \frac{M_0 (r^3 - r_1^3) \cos \theta}{3r^2}, & r_1 \leq r < r_2 \\ \phi_{m3} = \frac{M_0 (r_2^3 - r_1^3) \cos \theta}{3r^2}, & r_2 < r \end{cases}$$

极轴上, $\theta=0$, 对应的磁标势为

$$\begin{cases} \phi_{m1} = 0, & 0 \leq z < r_1 \\ \phi_{m2} = \frac{M_0 (z^3 - r_1^3)}{3z^2}, & r_1 \leq z < r_2 \\ \phi_{m3} = \frac{M_0 (r_2^3 - r_1^3)}{3z^2}, & r_2 < z \end{cases}$$

当 $0 \leq r < r_1$ 时,

$$\mathbf{B}_1 = -\mu_0 \nabla \phi_{m1} = 0$$

当 $r_1 \leq r < r_2$ 时,

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = -\nabla \mu_0 \phi_{m2} + \mu_0 M_0 = \left(\frac{2\mu_0 M_0}{3} - \frac{2\mu_0 r_1^3 M_0}{3z^3} \right) \mathbf{e}_z$$

当 $r_2 \leq r$ 时,

$$\mathbf{B}_3 = \mu_0 \mathbf{H}_3 = -\mu_0 \nabla \phi_{m3} = \frac{2\mu_0 (r_2^3 - r_1^3) M_0}{3r^3} \mathbf{e}_z$$

同理, 考虑极轴上 $\theta=\pi$, 磁标势和磁感应强度分别为

$$\begin{cases} \phi_{m1} = 0, & z < -r_1 \\ \phi_{m2} = -\frac{M_0 (|z|^3 - r_1^3)}{3z^2}, & -r_2 \leq z < -r_1 \\ \phi_{m3} = -\frac{M_0 (r_2^3 - r_1^3)}{3z^2}, & z < -r_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0, & z < -r_1 \\ \left(\frac{2\mu_0 M_0}{3} - \frac{2\mu_0 r_1^3 M_0}{3|z|^3} \right) \mathbf{e}_z, & -r_2 < z < -r_1 \\ \frac{2\mu_0 (r_2^3 - r_1^3) M_0}{3|z|^3} \mathbf{e}_z, & z < -r_2 \end{cases}$$

习题 3.25 在空气与磁导率为 μ 的铁磁物质的分界平面上, 有一载电流 I 的无限长细直导线。试分别求空气和铁磁物质中的磁场强度和磁感应强度。

解 采用圆柱坐标系, 设载流线所在方向为 z 轴方向。用试探法, 根据对称性, 可推知磁感应线为以轴线上任意点为中心的一族同心圆, 磁感应强度在分界面两侧只有法向分量, 因而在介质中和空气中的磁感应强度大小相等。设铁磁物质中的磁场强度为 $\mathbf{H}$, 空气中的磁场强度为 $\mathbf{H}_0$ 。由安培环路定律, 对于任意位置 r 处, 有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot \pi r + H_0 \cdot \pi r = I$$

即

$$\frac{B}{\mu} \cdot \pi r + \frac{B}{\mu_0} \cdot \pi r = I$$

故有

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi(\mu + \mu_0)r}$$

矢量形式则为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi(\mu + \mu_0)r} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mu_0 I}{\pi(\mu + \mu_0)r} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mu I}{\pi(\mu + \mu_0)r} \mathbf{e}_\varphi$$

可以验证, 在分界面上, 满足磁场的边界条件 $B_n = B_{0n}$ 。根据第 4 章的唯一性定理, 只要满足边界条件和基本规律的解一定是唯一的正确解。

习题 3.26 试求一平均半径为 a 、圆截面半径为 b ($b \ll a$), 其上密绕 N 匝线圈的非磁性导体圆环的自感。

解 本题需要用自感定义进行计算。设线圈上密绕的电流强度为 I , 根据安培环路定律容易求得圆环轴线上任意点的磁感应强度 B 。即由

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi a = \mu_0 N I$$

可得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi a} \mathbf{e}_\varphi$$

因 $b \ll a$, 则可以近似认为半径为 b 的圆截面上磁场分布均匀, 因而通过环内横截面的磁链为

$$\Psi = N\psi_m = N\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{N^2 \mu_0 I}{2\pi a} \cdot \pi b^2 = \frac{N^2 \mu_0 I b^2}{2a}$$

由自感的定义得

$$L = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\mu_0 N^2 b^2}{2a}$$

习题 3.27 有两对相互平行的双根传输线 1-2 和 3-4, 它们的相对位置如图 3-23 所示。试求两对传输线之间单位长度的互感。

解 因为 1-2 对 3-4 的互感与 3-4 对 1-2 互感相同, 所以只计算前者。设 1-2 上通有电流为 I , 则载流线 1 在 r 处的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

该磁场通过 3-4 双根传输线单位长度的区间所对应的磁通量为

$$\psi_{m1} = \int_{S_{3-4}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_{r_{13}}^{r_{14}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_n) dl = \int_{r_{13}}^{r_{14}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_{14}}{r_{13}}$$

同理, 载流线 2 所产生的磁场通过 3-4 双根传输线单位长度的区间所对应的磁通量为

$$\psi_{m2} = \int_{S_{3-4}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} = - \int_{r_{23}}^{r_{24}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_n) dl = - \int_{r_{23}}^{r_{24}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_{24}}{r_{23}}$$

由互感的定义得

$$M = \frac{\psi_m}{I} = \frac{\psi_{m1} + \psi_{m2}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_{14}}{r_{13}} - \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_{24}}{r_{23}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_{14} r_{23}}{r_{13} r_{24}}$$

习题 3.28 在空气中一载电流为 I 的长直导线的磁场中, 有一与之共面的边长分别为 a, b 的平行四边形导线回路, 如图 3-24 所示。试求该直导线与导线回路的互感。

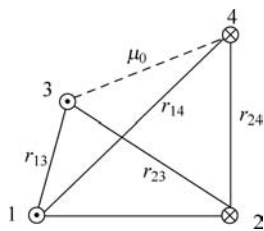


图 3-23 习题 3.27 示意图

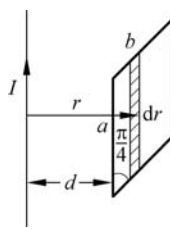


图 3-24 习题 3.28 示意图

解 为方便计算, 只计算直导线对线框的互感。设直载流线上通有电流为 I , 则在 r 处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

在平行四边形线圈中选取长为 a 、宽度为 dr 的面元, 则穿过该面元的磁通量为

$$d\psi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr$$

直载流线产生的磁场在整个平行四边形线框中的总磁通为

$$\psi_m = \int d\psi_m = \int_d^{d+b\cos\frac{\pi}{4}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \frac{d + \frac{\sqrt{2}b}{2}}{d}$$

由互感的定义得

$$M = \frac{\psi_m}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{d + \frac{\sqrt{2}b}{2}}{d}$$

习题 3.29 内、外半径分别为 r_1 与 r_2 、磁导率为 μ 的无限长直导体圆筒, 其中通有沿轴向的电流 I 且均匀分布。试求单位长导体内的磁场能量和内自感。

解 根据安培环路定律容易求得圆筒内 $r_1 < r < r_2$ 任意点的磁场强度 $\mathbf{H}$ 。即由

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \pi(r^2 - r_1^2)$$

可得

$$H = \frac{I(r^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)r}$$

相应的磁感应强度为

$$B = \mu H = \frac{\mu I(r^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)r}$$

单位长导体内的磁场能量可由

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} B H 2\pi r dr$$

而得。具体为

$$W_m = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu}{2} \left[\frac{I(r^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)r} \right]^2 2\pi r dr = \frac{\mu I^2}{4\pi(r_2^2 - r_1^2)^2} \left[\frac{r_2^4}{4} + \frac{3r_1^4}{4} - r_1^2 r_2^2 + r_1^4 \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

再由 $W_m = \frac{1}{2} L_i I^2$ 可得

$$L_i = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)^2} \left[\frac{r_2^4}{4} + \frac{3r_1^4}{4} - r_1^2 r_2^2 + r_1^4 \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

内自感的计算还可以根据其定义直接得到。

在 $r_1 < r < r_2$ 内取一单位长、 dr 宽的面元,通过其的磁通元为

$$d\psi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu I(r^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} dr$$

对应的内磁链元为

$$d\psi = N' d\psi_m = \frac{(r^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{\mu I(r^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} dr = \frac{\mu I(r^2 - r_1^2)^2}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)^2 r} dr$$

则总磁链为

$$\Psi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu I(r^2 - r_1^2)^2}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)^2 r} dr = \frac{\mu I}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)^2} \left[\frac{r_2^4}{4} + \frac{3r_1^4}{4} - r_1^2 r_2^2 + r_1^4 \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$L_i = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)^2} \left[\frac{r_2^4}{4} + \frac{3r_1^4}{4} - r_1^2 r_2^2 + r_1^4 \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

习题 3.30 一平均半径为 a , 圆截面半径为 b ($b \ll a$) 的环形铁芯螺线管, 铁芯的磁导率为 μ , 环上密绕 N 匝线圈并通有电流 I 。试求此环形铁芯螺线管的磁场能量和自感。

解 根据安培环路定律容易求得圆环轴线上任意点的磁场强度 H 。即由

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi a = NI$$

可得

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi a} \mathbf{e}_\varphi$$

因 $b \ll a$, 则可以近似认为半径为 b 的圆截面上磁场分布均匀, 因而螺线管内的磁场能量为

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} B H \cdot 2\pi a \cdot \pi b^2 = \frac{\mu N^2 I^2 b^2}{4a}$$

再由 $W_m = \frac{1}{2} L_i I^2$ 可得

$$L_i = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu N^2 b^2}{2a}$$

习题 3.31 试证明磁路中储存的磁场能量等于 $W_m = \frac{1}{2} \psi_m^2 R_m$, 其中, R_m 是磁阻。

证明: 设闭合磁路是由横截面为 S 、长为 l 的铁磁材料围成。磁路内的磁场强度和磁感应强度分别为 $\mathbf{H}, \mathbf{B}$ 。磁路中的磁场能量公式为

$$W_m = \frac{1}{2} BHV$$

磁通量为

$$\psi_m = BS$$

根据磁阻定义, 有

$$R_m = \frac{l}{\mu S}$$

由以上几式可推得

$$W_m = \frac{1}{2} BHV = \frac{1}{2\mu} B^2 Sl = \frac{l}{2\mu S} (BS)^2 = \frac{1}{2} \psi_m^2 R_m$$

得证。

习题 3.32 一环形铁芯螺线管, 平均半径为 15cm, 其圆形截面的半径为 2cm, 铁芯的相对磁导率为 $\mu_r = 1400$, 环上密绕 1000 匝线圈, 通过电流为 0.7A。试计算:

- (1) 螺线管的电感;
- (2) 在铁芯上垂直于其圆形轴线方向截取一截面为圆形、厚度为 0.1cm 的气隙, 再计算电感(假设开口后铁芯的磁导率不变);
- (3) 空气隙和铁芯中磁场能量的比值。

解 (1) 利用习题 3.30 的结论, 设 $a = 15\text{cm}$, $b = 2\text{cm}$, 代入公式 $L = \frac{\mu N^2 b^2}{2a}$, 得

$$L = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 b^2}{2a} = \frac{1400 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times 0.02^2}{2 \times 0.15} = 2.345\text{H}$$

(2) 设铁芯和空气隙中的磁感应强度为 $\mathbf{B}$, 气隙宽为 $\Delta l = 0.1\text{cm}$ 。由安培环路定律可得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{B}{\mu} \cdot (2\pi a - \Delta l) + \frac{B}{\mu_0} \Delta l = NI$$

$$B = \frac{\mu \mu_0 NI}{\mu_0 (2\pi a - \Delta l) + \mu \Delta l}$$

通过的磁通量为

$$\Psi_m = NBS = \frac{\mu \mu_0 N^2 I \pi b^2}{\mu_0 (2\pi a - \Delta l) + \mu \Delta l}$$

自感则为

$$L = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\mu \mu_0 N^2 \pi b^2}{\mu_0 (2\pi a - \Delta l) + \mu \Delta l} = \frac{1400 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times \pi \times 0.02^2}{(2\pi \times 0.15 - 0.001) + 1400 \times 0.001} = 0.944\text{H}$$

(3) 由 $W_m = \frac{1}{2} \psi_m^2 R_m$ 可求得空气隙和铁芯中磁场能量的比值。其中,铁芯和空气隙中磁阻分别为 $R_m = \frac{2\pi a - \Delta l}{\mu \pi b^2}$, $R_{m0} = \frac{\Delta l}{\mu_0 \pi b^2}$ 。而磁通可视为不变,则

$$\frac{W_{m0}}{W_m} = \frac{\frac{1}{2} \psi_m^2 R_{m0}}{\frac{1}{2} \psi_m^2 R_m} = \frac{R_{m0}}{R_m} = \frac{\mu \Delta l}{\mu_0 (2\pi a - \Delta l)} = \frac{1.4}{0.941} = 1.488$$

3.7 核心 MATLAB 代码

两个相互平行且共轴的圆线圈,其半径分别为 R_1, R_2 , 中心间距为 h , 如图 3-25 所示。假设线圈的半径远小于中心距离, 即 $R_1 \ll h$ (或 $R_2 \ll h$), 则可以运用诺伊曼公式计算二者之间的互感, 并用 MATLAB 进行数值计算。

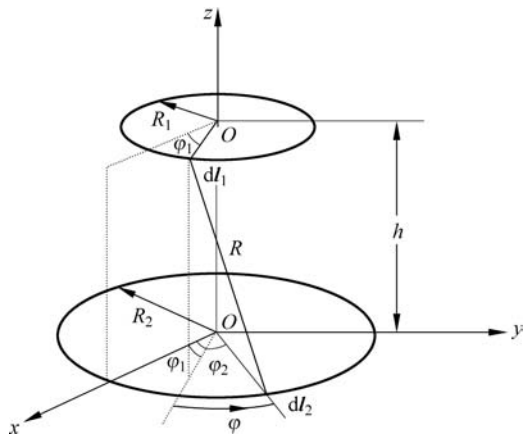


图 3-25 两平行且共轴圆线圈

由诺伊曼公式可得

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2 \cos \varphi}{R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) d\varphi_1 d\varphi_2}{[R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3-44)$$

一般情况下,上述积分只能用椭圆积分来表示。但是若 $h \gg R_1$, 则可得到如下的近似

$$\begin{aligned} &[R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx (R_2^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2R_1 R_2 \cos \varphi}{R_2^2 + h^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx (R_2^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{R_1 R_2 \cos \varphi}{R_2^2 + h^2} \right) \end{aligned}$$

于是有

$$M \approx \frac{\mu_0 R_1 R_2}{4\pi \sqrt{R_2^2 + h^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{R_2^2 + h^2}\right) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) d\varphi_1 d\varphi_2$$
$$= \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3-45)

下面的 MATLAB 代码分别利用上面给出的两种方法计算两个圆形、共轴线圈之间的互感,并将它们作对比。为方便起见,将这两种方法分别称为方法 1 和方法 2。具体如下:

```
R1 = 0.99; % 圆环 1 的半径,米
R2 = 1; % 圆环 2 的半径,米
h = 0.5; % 环心距离,米
mu = 4 * pi * 1e-7;
M = @(phi1,phi2) mu/(4 * pi) * R1 * R2 * cos(phi2 - phi1)./(sqrt(R1^2 + R2^2 + h^2 - 2 * R1 * R2 * cos(phi2 - phi1))); % 定义诺依曼公式推演得到的互感函数
Mind = integral2(M,0,2 * pi,0,2 * pi); % 做数值积分得到互感值
Mind * 1e6 % 转化为微亨显示结果
Mapp = mu * pi * R1^2 * R2^2/2./ (h^2 + R2^2)^(3/2); % 近似方法
Mapp * 1e6 % 转化为微亨显示结果
```

表 3-3 给出了 R_1 取不同值时,两种方法计算得到的互感值。

表 3-3 三种方式计算得到的互感/自感对照表

R_1, R_2, h	0.1m,1m,1m	0.5m,1m,1m	1m,1m,1m	0.99m,1m,0m
互感/自感(微亨)	互感	互感	互感	自感(外自感)
方法 1: 诺依曼公式	0.007μF	0.1618μF	0.4941μF	5.8512μF
方法 2: 近似方法	0.007μF	0.1745μF	0.6979μF	1.9346μF
方法 3: 纯粹数值方法	0.007μF	0.1618μF	0.4941μF	5.8512μF

从表 3-3 中可以看出,当近似条件满足时,即 $R_1 \ll h$,方法一和方法二得到了相同的结果;随着 R_1 的增大,二者的差别越来越明显,从而验证了方法的正确性。

如果两个圆环的环心距离为零,即二者共面,且 $R_1 \approx R_2$ 。此时,利用诺依曼公式计算得到的互感,可以近似看作由线径为 $|R_1 - R_2|$ 的导线环绕而成的、圆环半径为 R_1 (或者 R_2) 的圆形线圈所对应的自感(外自感)。读者可以参考图 3-24 加以深入理解。表 3-3 也给出了利用诺依曼公式计算得到的圆形线圈的自感。

如果在编程计算时,将两个圆环离散成长度很小的 N 个小段,然后将诺依曼公式中的积分用求和进行近似,也可以得到互感或自感的计算代码,如下所示。

```
R1 = 0.99; % 圆环 1 的半径,米
R2 = 1; % 圆环 2 的半径,米
h = 0.5; % 环心距离,米
N = 2000; % 将圆环分成 N 段
mu = 4 * pi * 1e-7; % 真空中的磁导率
theta = linspace(0,2 * pi,N + 1); % 将圆心角分成 N + 1 份
x1 = R1 * cos(theta); % 计算圆环 1 上各节点的 x 坐标值
y1 = R1 * sin(theta); % 计算圆环 1 上各节点的 y 坐标值
```

```

dx1 = x1(:,2:N+1) - x1(:,1:N);
dy1 = y1(:,2:N+1) - y1(:,1:N);
x2 = R2 * cos(theta);
y2 = R2 * sin(theta);
dx2 = x2(:,2:N+1) - x2(:,1:N);
dy2 = y2(:,2:N+1) - y2(:,1:N);
theta = (theta(:,1:N) + theta(:,2:N+1))/2;
x1 = R1 * cos(theta);
y1 = R1 * sin(theta);
x2 = R2 * cos(theta);
y2 = R2 * sin(theta);
L = 0;
for i = 1:N
    for j = 1:N
        dl1dl2 = dx1(i) * dx2(j) + dy1(i) * dy2(j); % dl1 和 dl2 内积计算
        R = sqrt((x1(i) - x2(j))^2 + (y1(i) - y2(j))^2 + h^2); % dl1 和 dl2 的距离
        L = L + dl1dl2/R; % 求和
    end
end
L = L/4/pi * mu * 1e6 % 乘系数,得到电感的数值,微亨

```

可以将这种纯粹数值计算的方法称为方法 3。表 3-3 中也给出了该方法的计算结果。与前面的方法相比,方法三适用的范围更加广泛;经过修改,还可以应用到其他形状的线圈形式,如方形、三角形等;甚至可以工作在线圈不共面的情形。大家可以在理解程序之后,举一反三,加以尝试。

3.8 科技前沿中的典型稳恒电场问题

3.8.1 稳恒电场中的隐形衣

近年来,利用复杂电阻网络模拟非均匀和各向异性电导率的变换光学器件越来越受到人们的关注。也有一些学者提出了一种直接求解电导体内拉普拉斯方程来实现对直流电流场的控制的方法,从而实现稳恒电场领域的电磁隐形。

图 3-26 给出的是一个圆柱体稳恒电场隐形衣的装置示意图。图中半径为 b 的圆柱部分原本放置在稳恒电场 E_0 中。各区域内均满足 $J = \sigma E$,通过外场与导电媒质的相互作用,使得圆柱环外的电场被扰动。因此,只要通过探索外围电场是否会被干扰,就可以判断环境

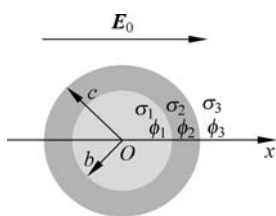


图 3-26 直流电型隐形衣示意图

里面是否有金属导体柱存在,或者说,该金属柱有没有被隐形。为此,在金属柱外面套一个内、外半径分别为 b 、 c 的同心圆环,同样会影响外场分布。但如果合理设计套层的尺寸、电导率的大小,使其在外加匀强电场的作用下,对外部电场没有任何扰动,那就能达到对内部金属柱隐形的目的。

下面利用圆柱坐标系下的电势的拉普拉斯方程求解来对上述问题进行分析。忽略柱体高度引起的误差,可以认为是一个平面场问题。在稳恒电场中,各区域电势均满足

$$\nabla^2 \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

各分界面上的边值关系为

$$\begin{cases} \phi_1|_{r=b} = \phi_2|_{r=b}, & \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=b} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=b} \\ \phi_2|_{r=c} = \phi_3|_{r=c}, & \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=c} = \sigma_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \Big|_{r=c} \end{cases}$$

考虑实际情况, $r > c$ 的区域为背景材料, 电导率可表示为 σ_b , 即有 $\sigma_3 = \sigma_b$ 。本题的求解较简单的方法是运用分离变量法, 具体方法可参阅主教材第 4 章(这里直接将结果写出)。由平面极坐标系中拉普拉斯方程的一般解

$$\phi_i = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^{(i)} r^m + B_m^{(i)} r^{-m}) (C_m^{(i)} \cos m\varphi + D_m^{(i)} \sin m\varphi) \quad (i = 1, 2, 3)$$

可得各个区域中的电势分布如下

$$\begin{cases} \phi_1 = A_1^{(1)} r \cos\varphi \\ \phi_2 = \left(A_1^{(2)} r + \frac{B_1^{(2)}}{r} \right) \cos\varphi \\ \phi_b = \left(-E_0 r + \frac{B_1^{(3)}}{r} \right) \cos\varphi \end{cases} \quad (3-46)$$

将各个区域的电势表达式代入, 则有

$$\begin{cases} A_1^{(1)} b = A_1^{(2)} b + \frac{B_1^{(2)}}{b} \\ A_1^{(2)} c + \frac{B_1^{(2)}}{c} = -E_0 c + \frac{B_1^{(3)}}{c} \\ \sigma_1 A_1^{(1)} = \sigma_2 \left(A_1^{(2)} - \frac{B_1^{(2)}}{b^2} \right) \\ \sigma_2 \left(A_1^{(2)} - \frac{B_1^{(2)}}{c^2} \right) = \sigma_3 \left(-E_0 - \frac{B_1^{(3)}}{c^2} \right) \end{cases}$$

求解可得 $B_1^{(3)}$ 的表达式为

$$B_1^{(3)} = E_0 c^2 \frac{\sigma_2 (Q_1 - Q_2) - \sigma_b (Q_1 + Q_2)}{\sigma_2 (Q_1 - Q_2) + \sigma_b (Q_1 + Q_2)} \quad (3-47)$$

其中,

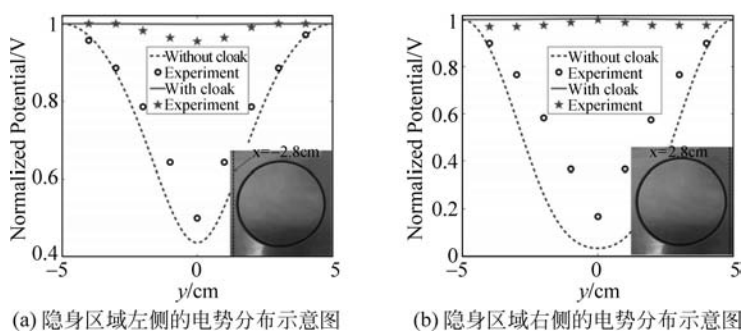
$$Q_1 = c^2 \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right), \quad Q_2 = b^2 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$$

令 $B_1^{(3)} = 0$, 可换算得隐形环半径关系为

$$c = b \sqrt{\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_b)}{(\sigma_2 + \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_b)}} \quad (3-48)$$

由式(3-48)进行设计包围金属柱的圆柱环, 可满足 $B_1^{(3)}$ 恒等于零, 这就意味着扰动场始终为零。从而在背景材料中, 无论是金属柱附近还是远处, 场分布都是均匀的。换句话说, 对于该金属柱来讲, 对外加电场无干扰, 就像整个空间全部都是背景材料, 即金属柱被隐形了。

参考文献[34]利用上述原理进行研究, 并通过实验加工验证了该方法的可行性。图 3-27 为文献中仿真计算结果与实验结果的对照, 从中可见二者吻合得非常好, 从而验证了其正确性。

图 3-27 文献仿真计算结果与实验结果对照^[34]

3.8.2 静磁隐形衣

Pendry 等于 2008 年提出了静磁超材料,可以用来实现基于变换光学原理的静磁隐形衣。他们的做法是把超导体和铁氧体的层状结构看成是一种等效的超磁性材料,这种材料的磁导率具有各向异性的特点。2012 年,科学家们已经通过实验证实了静磁隐形衣的可行性。如图 3-28 即为一种二维静磁隐形衣原理图,它是通过两种不同的各向同性磁介质叠层实现静磁隐形效果的,理论基础是磁化相消的原理。

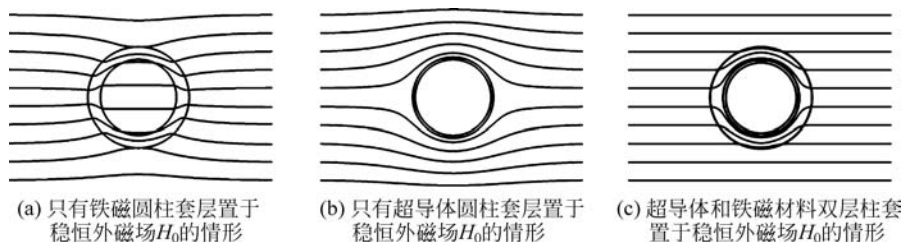


图 3-28 静磁隐形衣原理图

图 3-28 为该静磁隐形衣的大致工作原理。图 3-28(a)为只有铁磁圆柱套层置于稳恒外磁场 H_0 的情形,铁磁体的磁导率为 $\mu_r = 3.54$,周围环境为空气介质。可以看到,柱套内的磁场为均匀场,外侧柱面附近受到的影响最大,磁力线向铁磁柱套方向发生弯曲。图 3-28(b)为只有超导体圆柱套层置于稳恒外磁场 H_0 的情形,超导体的磁导率为 $\mu_r = 0$ 。可以看到,柱套内不存在磁场,这与超导材料具有完全抗磁特性相符合,因而磁场全部分布于柱外,附近的磁场线绕行而过。图 3-28(c)为超导体和铁磁材料双层柱套置于稳恒外磁场 H_0 的情形。其中,铁磁体的磁导率仍为 $\mu_r = 3.54$ 。可以看到,不仅柱内不存在磁场,柱外磁场也不受圆柱套层的影响,即对于柱内的目标实现了完美的隐形效果。理论分析(详见第 4 章的有关例子)可得实现隐形时对铁磁材料磁导率要求满足: $\mu_{r2} = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ 。其中, R_0, R_1 和 R_2 分别表示由里到外超导体和铁磁体圆环的内外半径,实验中取 $R_0 = 0.96R_1, R_2 = 1.34R_1$,测量结果与理论基本吻合。有兴趣的同学可以参阅参考文献[19]或者参考本书第 4 章的内容自行推导上述公式。

3.9 著名大学考研真题分析

【考研题 1】 (重庆邮电大学 2018 年) 计算无限长直导线与矩形线圈之间的互感系数。设线圈与导线平行, 周围媒介为真空, 如图 3-29 所示。

解 以无限长直导线所在的轴为 z 轴建立圆柱坐标系。设直导线中通有电流 I , 方向同 z 轴方向。根据安培环路定理, I 产生的磁感应强度为 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_r$ 。 I 和矩形线圈相交链的互感磁链为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

则直导线与矩形线圈之间的互感系数为

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

【考研题 2】 (电子科技大学 2015 年) 如图 3-30 所示, $z < 0$ 的半空间中填充磁导率为 μ 的均匀磁介质, 无限长直导线中载有电流 I_1 , 附近有一个长和宽分别为 a 和 b 的矩形框。线框与直导线共面, 并与直导线相距为 d , 其中位于磁介质中的一段的长度为 t ($0 < t < b$)。

- (1) 求直导线与线框间的互感;
- (2) 若矩形线框载有电流 I_2 , 求矩形线框受到的磁场力。

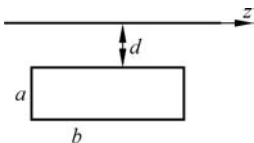


图 3-29 考研题 1 示意图

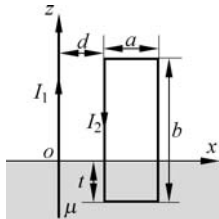


图 3-30 考研题 2 示意图

解 (1) 直导线的电流 I_1 在上下空间中产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_{z>0} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{e}_r \quad \text{和} \quad \mathbf{B}_{z<0} = \frac{\mu I}{2\pi x} \mathbf{e}_r$$

则直导线 I_1 和矩形线框相交链的互感磁链为

$$\Psi_{21} = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I_1 [\mu t + \mu_0 (b-t)]}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{1}{x} dx = \frac{I_1 [\mu t + \mu_0 (b-t)]}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

则直导线与线框间的互感系数为

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu t + \mu_0 (b-t)}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

(2) 设矩形线框上通有如图 3-30 所示的电流 I_2 。分析可知, 线框上下两边 (L_2) 分别受到负 z 和正 z 方向的磁力, 左右两边 (L_1) 分别受到正 x 方向和负 x 方向的磁力, 线框在正 x 方向和正 z 方向所受合力分别为

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_x &= \int_{L_1} I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} (b-t) \mathbf{e}_x + \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} t \mathbf{e}_x - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} (b-t) \mathbf{e}_x - \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi(d+a)} t \mathbf{e}_x \\
&= \frac{I_1 I_2}{2\pi} \left(\frac{b-t}{d} \mu_0 + \frac{t}{d} \mu - \frac{b-t}{d+a} \mu_0 - \frac{t}{d+a} \mu \right) \mathbf{e}_x \\
&= \frac{I_1 I_2}{2\pi} \frac{a}{d(d+a)} [(b-t) \mu_0 + t \mu] \mathbf{e}_x \\
\mathbf{F}_z &= \int_{L_2} I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \\
&= \int_d^{d+a} I_2 (-\mathbf{e}_x) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \mathbf{e}_y dx + \int_d^{d+a} I_2 \mathbf{e}_x \times \frac{\mu I_1}{2\pi x} \mathbf{e}_y dx \\
&= \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \mathbf{e}_z - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \mathbf{e}_z \\
&= \frac{(\mu - \mu_0) I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

线框所受合力为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_z$ 。

【考研题 3】 (北京邮电大学 2015 年) 某空气填充的同轴传输线沿 z 轴放置, 其内导体半径为 a , 薄的外导体半径 (不计外导体厚度) 为 b , 导体材料的相对磁导率为 1。假设电流 I 在内导体沿 z 轴方向均匀流过, 并通过外导体沿负 z 方向流回。

- (1) 计算同轴线内外各区域的磁场强度矢量分布;
- (2) 证明两个分界面处 ($r=a, r=b$) 的磁场强度满足相关边界条件;
- (3) 分析该同轴线单位长度的电感。

解 (1) 根据安培环路定理, 磁场强度的矢量分布为

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi, & r < a \\ \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi, & a < r < b \\ 0, & r > b \end{cases}$$

(2) 在 $r=a$ 处, $\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a} \mathbf{e}_\varphi$, 即 $H_{a1\varphi} = H_{a2\varphi}$ 。由于 $r=a$ 处厚度为 0 的分界界面上没有面电流分布, 因此分界面两侧的切向磁场相等。

在 $r=b$ 处, 由于不计外导体的厚度, 所以电流以面电流的形式分布, 其面电流密度为 $\mathbf{J}_s = -\frac{I}{2\pi b} \mathbf{e}_z$ 。在 $r=b$ 的分界面两侧的磁场强度分别为

$$\mathbf{H}_{b1\varphi} = \frac{I}{2\pi b} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{H}_{b2\varphi} = 0, \quad \text{即 } H_{b1\varphi} - H_{b2\varphi} = J_s = \frac{I}{2\pi b}$$

即证明了: 在分界面上有表面电流分布时, 分界面两侧的切向磁场不连续, 其改变量为表面电流密度的大小。

(3) 穿过单位长度的同轴线的磁通为

$$d\Psi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} dr, & r < a \\ \frac{\mu I}{2\pi r} dr, & a < r < b \end{cases}$$

在 $r \leq a$ 的区域, 交链的电流为 $I' = \frac{Ir^2}{a^2}$, 在 r 处穿过单位长度的磁链微元为

$$d\Psi = \frac{\mu_0 I r^3}{2\pi a^4} dr$$

则穿过单位长度内导体的磁链为

$$\Psi_0 = \int_0^a \frac{\mu_0 I r^3}{2\pi a^4} dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

在 $r > a$ 的区域, 交链的电流为 I , 故单位长度的磁链为

$$\Psi_1 = \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r} dr = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

根据 $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = LI$, 求得同轴线单位长度的电感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

【考研题 4】 (电子科技大学 2016 年) 如图 3-31 所示, 无限长直导线圆柱由电导率不同的两层导体构成, 内层导体的半径为 $a_1 = a$, 电导率 $\sigma_1 = 2\sigma_0$; 外层导体的外半径 $a_2 = 2a$, 电导率 $\sigma_2 = \sigma_0$ 。圆柱导体中流过的电流为 I , 试求圆柱导体中的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 。

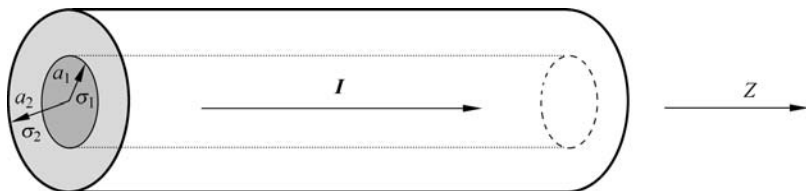


图 3-31 考研题 4 示意图

解 设内、外导体中的体电流密度分别为 $\mathbf{J}_1$ 和 $\mathbf{J}_2$, 则内、外导体中的电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}_2}{\sigma_2}$$

根据边界条件, 在内外导体分界面处的电场切向量连续, 而各个导体中的电场处处相等, 即有 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ 。则

$$I = \pi a_1^2 J_1 + \pi(a_2^2 - a_1^2) J_2 = \pi a_1^2 \sigma_1 E_1 + \pi(a_2^2 - a_1^2) \sigma_2 E_2 = E\pi[a_1^2 \sigma_1 + (a_2^2 - a_1^2) \sigma_2]$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} = \frac{I}{\pi[a_1^2 \sigma_1 + (a_2^2 - a_1^2) \sigma_2]} \mathbf{e}_z = \frac{I}{5\pi a^2 \sigma_0} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{J}_1 = \sigma_1 \mathbf{E}_1 = 2\sigma_0 \mathbf{E} = 2\sigma_0 \frac{I}{5\pi a^2 \sigma_0} \mathbf{e}_z = \frac{2I}{5\pi a^2} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{J}_2 = \sigma_2 \mathbf{E}_2 = \sigma_0 \mathbf{E} = \sigma_0 \frac{I}{5\pi a^2 \sigma_0} \mathbf{e}_z = \frac{I}{5\pi a^2} \mathbf{e}_z$$

根据安培环路定理, 当 $r < a_1$ 时, 有

$$2\pi r H_1 = \pi r^2 J_1; \quad \mathbf{H}_1 = \frac{r J_1}{2} \mathbf{e}_\varphi = \frac{I}{5\pi a^2} r \mathbf{e}_\varphi$$

当 $a_1 < r < a_2$ 时, 有

$$2\pi r H_2 = \pi a^2 J_1 + \pi(r^2 - a^2) J_2 = \frac{I}{5} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\frac{I}{5} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi = \frac{I}{10\pi r} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) \mathbf{e}_\varphi$$

当 $r > a_2$ 时, 有

$$2\pi r H_3 = I, \quad \mathbf{H}_3 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

【考研题 5】 (北京邮电大学 2013 年) 如图 3-32 所示, 在 r_0 处有一沿 z 轴方向流动的无限长均匀电流丝, 求该电流丝产生的磁矢位和电磁场。

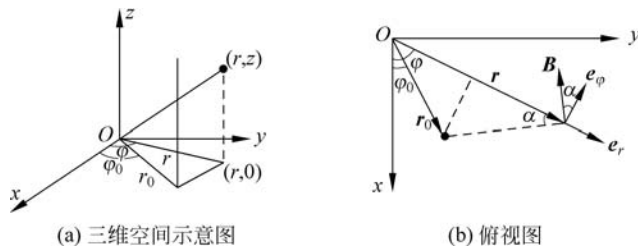


图 3-32 考研题 5 示意图

解 建立圆柱坐标系, 设电流丝的电流大小为 I , 沿正 z 方向流动。由图 3-32 可知, 观察点到电流丝的垂直距离为 $r' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ 。取源点为 (r_0, z') , 则电流丝在场点 (r, z) 处产生的磁矢位为

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r'}$$

式中, a 为磁矢势零点参考距离。

即

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{e}_z$$

无限长均匀电流线产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \nabla \times \ln \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_r}{r} & \mathbf{e}_\varphi & \frac{\mathbf{e}_z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \ln \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\ln \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \mathbf{e}_r - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \{\ln[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]\} \mathbf{e}_r + \\
&\quad \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \{\ln[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]\} \mathbf{e}_\varphi \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r_0 \sin(\varphi - \varphi_0)}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \mathbf{e}_r + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \mathbf{e}_\varphi \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]} [-r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \mathbf{e}_r + (r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) \mathbf{e}_\varphi]
\end{aligned}$$

利用安培环路定律,可知无限长载流直导线在周围产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{e}_{\varphi'}$$

其中, $\mathbf{e}_{\varphi'}$ 是以电流丝为轴的角向单位矢量。利用矢量分解,将该单位矢量分解到观察点(场点)处的基矢上,即 $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$,也可以得到磁感应强度的表达式,参见图 3-32(b)。容易得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\varphi'} &= -\sin\alpha \mathbf{e}_r + \cos\alpha \mathbf{e}_\varphi \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \{-r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \mathbf{e}_r + [r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \mathbf{e}_\varphi\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}} \{-r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \mathbf{e}_r + [r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \mathbf{e}_\varphi\}
\end{aligned}$$

代入上式,即可发现两种方法结果一致。

【考研题 6】 (北京邮电大学 2012 年)一根无限长直导线与半径为 a 的圆环共面,圆环圆心到直导线的距离为 d ($d \gg a$),如图 3-33 所示。求直导线与圆环之间的互感。

解 方法 1: 考虑小环载有电流 I ,因为 $d \gg a$,所以半径为 a 的载流圆环可以等效为一个磁偶极子。如图 3-33 建立坐标系。设小环载有电流 I ,则磁偶极子的磁矢势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_R = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I \pi a^2 \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_R = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \mathbf{e}_\phi$$

其中 $R^2 = d^2 + z^2$,则

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a^2}{4(d^2 + z^2)} \mathbf{e}_\phi$$

载流圆环产生的磁矢势在长直导线回路产生的磁通为

$$\begin{aligned}
\psi &= \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_z dz = \int_{-\infty}^{+\infty} A_\phi \cos\phi dz \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\mu_0 I a^2}{4(d^2 + z^2)} \frac{d}{\sqrt{d^2 + z^2}} dz \\
&= \frac{\mu_0 d I a^2}{2} \frac{z}{d^2 \sqrt{d^2 + z^2}} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{2d}
\end{aligned}$$

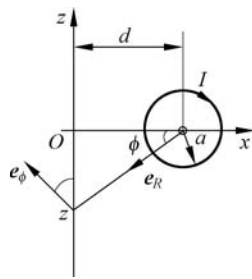


图 3-33 考研题 6 示意图

直导线与圆环之间的互感为

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 a^2}{2d}$$

方法 2: 以直导线为 z 轴建立柱坐标系, 考虑该直导线载有电流 I , 其在小环圆心处产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{e}_\varphi$$

因为 $d \gg a$, 所以可以认为小环处于均匀磁场中, 于是, 穿过小环的磁通量为

$$\Psi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \pi a^2 = \frac{\mu_0 I}{2d} a^2$$

所以, 对应的互感为

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 a^2}{2d}$$