第3章 信号分析

CHAPTER 3

本章要点：掌握傅里叶变换的运算性质，掌握常见信号及其傅里叶变换表示式，掌握平稳随机过程的定义，掌握各态历经性，掌握高斯过程及其性质，理解窄带信号的定义，掌握随机信号通过线性系统的输出形式。

3.1 确知信号

学习目标：掌握傅里叶变换的运算性质，掌握常见信号及其傅里叶变换表示式。

内容点睛：

1. 傅里叶变换的运算性质

（1）线性叠加。

（2）对偶性。

（3）时移特性。

（4）尺度变换。

（5）频移特性。

（6）微分特性。

（7）积分特性。

（8）卷积特性。

2. 常见信号的频谱函数

（1）冲激响应的定义式。

（2）冲激响应的性质。

（3）常用信号的时域、频域表示式。

本节的大部分内容在大学低年级课程中已学过。这里只是结合本课程的特点作简要复习。

“在预先就可确定在定义域内的任一时刻取何值”的信号，被称为确定性信号或简称确定信号。显然，该信号可用一个确定函数、图形或曲线来描述。例如，振幅、频率和相位都预先确定的正弦波，就是一个确定信号。

“在事先不能确定在定义域内的任一时刻取何值”的信号，被称为随机信号或不确定信号。例如，通信系统中的热噪声就属于随机信号。

3.1.1 周期信号和非周期信号

按照信号是否具有周期性把信号分为周期信号和非周期信号。

所谓周期信号就是周而复始，无始无终的信号，可表示为

$$f(t)=f(t+nT) \tag{3-1}$$

式中，T 为信号的最小重复时间间隔。

例如：信号 $s(t)=2\cos(2t+1)$，其中周期 $T_0=\pi$。

对于不满足式(3-1)周期性质的信号，则被称为非周期信号。例如：正负号函数 $\mathrm{sgn}(t)$、单位冲击信号 $\delta(t)$ 和单位阶跃函数 $u(t)$ 都属于非周期信号。

3.1.2 傅里叶变换的运算性质

信号通过信号系统传输的过程中，经常会遇到诸如线性放大、时延、微分、积分、相乘等运算，其频域也有相应的运算特性，下面介绍傅里叶变换主要的运算特性。

1. 线性叠加

两个或多个信号线性组合的傅里叶变换就是各个傅里叶变换的线性叠加，即

$$F[Ax_1(t)+Bx_2(t)]=AF[x_1(t)]+BF[x_2(t)] \tag{3-2}$$

2. 对偶性

若 $X(f)=F[x(t)]$，则

$$F[X(t)]=x(-f) \tag{3-3}$$

3. 时移特性

若 $X(f)=F[x(t)]$，则

$$F[x(t-t_0)]=X(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \tag{3-4}$$

4. 尺度变换

若 $X(f)=F[x(t)]$,则

$$F[x(at)]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right),\quad a\neq 0 \tag{3-5}$$

5. 频移特性

若 $X(f)=F[x(t)]$,则

$$F[x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}]=X(f-f_0) \tag{3-6}$$

6. 微分特性

若 $X(f)=F[x(t)]$,则

$$F\left[\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=(\mathrm{j}2\pi f)^n X(f) \tag{3-7}$$

7. 积分特性

若 $X(f)=F[x(t)]$,则

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f}X(f)+\frac{X(0)}{2}\delta(f) \tag{3-8}$$

8. 卷积特性

若 $X(f)=F[x(t)]$,$Y(f)=F[y(t)]$,则

$$F[x(t)*y(t)]=X(f)Y(f),\quad F[x(t)y(t)]=X(f)*Y(f) \tag{3-9}$$

傅里叶变换的主要运算特性如表 3-1 所示。

表 3-1　傅里叶变换的主要运算特性

名　　称	时 域 关 系	频 域 关 系
线性	$Ax_1(t)+Bx_2(t)$	$AX_1(f)+BX_2(f)$
尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\left\lvert X\left(\frac{f}{a}\right)\right\rvert$
时延	$x(t-t_0)$	$X(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}$
频移	$x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t_0}$	$X(f-f_0)$
积分	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f}X(f)+\frac{X(0)}{2}\delta(f)$
微分	$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}2\pi f)^n X(f)$
时域卷积	$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$
频域卷积	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$

【例 3-1】 已知 $s(t) \Leftrightarrow S(f)$，求 $s(t)\cos w_0 t$ 和 $s(t)\sin w_0 t$ 的傅里叶变换。

解：利用复指数函数公式可得

$$s(t)\cos w_0 t = \frac{1}{2}s(t)[\exp(\mathrm{j}w_0 t) + \exp(-\mathrm{j}w_0 t)]$$

$$s(t)\sin w_0 t = \frac{1}{2}s(t)[\exp(-\mathrm{j}w_0 t) - \exp(\mathrm{j}w_0 t)] \tag{3-10}$$

利用表 3-1 中的频移定理，可以得到

$$F[s(t)\cos w_0 t] = \frac{1}{2}[S(w + w_0) + S(w - w_0)]$$

$$F[s(t)\sin w_0 t] = \frac{1}{2}\mathrm{j}[S(w + w_0) - S(w - w_0)] \tag{3-11}$$

式(3-11)被称为调制定理，该定理在调制和解调分析中经常使用。

3.1.3 常见信号的频谱函数

下面以单位冲激函数 $\delta(t)$ 为例，介绍信号的频谱函数。

单位冲激函数 $\delta(t)$ 可定义为以下表示形式

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \tag{3-12}$$

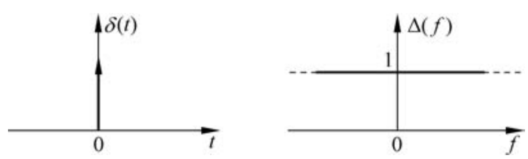

图 3-1 单位冲激函数 $\delta(t)$ 及其频谱密度

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的频谱密度如下：

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{3-13}$$

冲激响应具有以下重要性质：

性质 1：单位冲激函数 $\delta(t)$ 的傅里叶变换为 1，即 $\delta(t) \Leftrightarrow 1$。

性质 2：单位冲激函数 $\delta(t)$ 为偶函数，即 $\delta(t) = \delta(-t)$。

性质 3：单位冲激函数 $\delta(t)$ 是阶跃函数 $u(t)$ 的导数，即 $u'(t) = \delta(t)$。

性质 4：单位冲激函数 $\delta(t)$ 有抽样特性，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$。

一些常用信号的傅里叶变换如表 3-2 所示。

表 3-2 常见信号的傅里叶变换

序 号	常见信号	时 域	频 域
1	单位冲激响应	$\delta(t)$	1
2	常数	1	$2\pi\delta(w)$
3	复指数	$\exp(\mathrm{j}w_0 t)$	$2\pi\delta(w-w_0)$
4	单位阶跃	$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{2\pi\mathrm{j}f}$
5	矩形脉冲	$\mathrm{rect}(t/\tau)$	$\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{w\tau}{2}\right)$
6	三角脉冲	$\mathrm{tri}(t)$	$\mathrm{Sa}^2\left(\frac{w}{2}\right)$
7	双边指数	$\exp(-a\|t\|)$	$\frac{2a}{a^2+w^2}$
8	单边指数	$u(t)\exp(-a\|t\|)$	$\frac{1}{a+\mathrm{j}w}$
9	余弦	$\cos(w_0 t)$	$\pi[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]$
10	正弦	$\sin(w_0 t)$	$(\pi/\mathrm{j})[\delta(w-w_0)-\delta(w+w_0)]$

3.2 随机信号概述

学习目标：理解随机过程定义、分布函数或概率密度函数，掌握随机过程的数字特征。

内容点睛：

1. 随机过程的定义

2. 随机过程的分布函数或概率密度函数

3. 随机过程的数字特征

(1) 随机过程的数学期望。

(2) 随机过程的方差。

(3) 随机过程的自相关函数。

(4) 随机过程的协方差函数。

3.2.1 随机过程的定义及其分布函数

分析与研究通信系统，总离不开通信过程，即信号和噪声进行分析。通信系统中遇到的信号，通常总带有某种随机性，即它们的某个参数不能预知或不能完全预知，我们把

这种具有随机性的信号称为随机信号。通信系统中还必然遇到噪声，例如自然界中的各种电磁波噪声和设备本身产生的热噪声、散粒噪声等，它们更不能预测。凡是不能预测的噪声就统称为随机噪声，或简称为噪声。这些随机信号和随机噪声都属于随机过程。

通常情况下，可以用下面的描述来定义随机过程：若对于某一时刻 t 有随机变量 $\xi(t)$，随着 t 的改变而得到不同的随机变量 $\xi(t)$，由此称 $\xi(t)$ 为随机过程。

设 $\xi(t)$ 是一个随机过程，则在任意时刻 t_1 上 $\xi(t_1)$ 是一个随机变量，这个随机变量可以用分布函数或概率密度函数描述，即

$$F_1(x_1,t_1)=P\{\xi(t_1)\leqslant x_1\} \tag{3-14}$$

为随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布函数。如果存在

$$\frac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1}=f_1(x_1,t_1) \tag{3-15}$$

则称 $f_1(x_1,t_1)$ 为随机过程 $\xi(t)$ 的一维概率密度函数。

很明显，仅利用一维分布函数或一维概率密度函数描述随机过程的完整统计特性是不充分的，通常还需要考虑随机过程的多维分布函数。随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数可表示为

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=P\{\xi(t_1)\leqslant x_1,\xi(t_2)\leqslant x_2,\cdots,\xi(t_n)\leqslant x_n\}\end{aligned} \tag{3-16}$$

如果存在

$$\frac{\partial F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n) \tag{3-17}$$

则称式(3-17)为随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数。显然，维数越高，描述随机过程 $\xi(t)$ 的统计特性就越充分。

3.2.2 随机过程的数字特征

随机过程 $\xi(t)$ 的统计特性除了通过概率密度函数或分布函数进行表示之外，还可以通过 $\xi(t)$ 的数字特征加以表示，例如：利用随机过程 $\xi(t)$ 的均值、方差、自相关函数等数字特征来表示随机过程 $\xi(t)$ 的统计特性。

随机过程 $\xi(t)$ 的均值如下：

$$E[\xi(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x,t)\mathrm{d}x \tag{3-18}$$

式中，$f_1(x,t)$ 表示随机过程 $\xi(t)$ 的一维概率密度，x 表示 $\xi(t)$ 的可能取值，t 表示任一时刻，$E[\xi(t)]$ 表示随机过程 $\xi(t)$ 的均值，也可用 $a(t)$ 表示。可见随机过程的均值是时

间 t 的确定性函数。

随机过程 $\xi(t)$的方差如下：

$$D[\xi(t)]=E\{\xi(t)-E[\xi(t)]\}^2 \tag{3-19}$$

可见，随机过程 $\xi(t)$的方差是关于时间 t 的确定性函数。

随机过程 $\xi(t)$的自相关函数如下：

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2,t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{3-20}$$

如果 $t_2=t_1+\tau$，即 τ 为 t_2 与 t_1 的时间间隔，则相关函数 $R(t_1,t_2)$可以表示为 $R(t_1,t_1+\tau)$，即

$$R(t_1,t_1+\tau)=E[\xi(t_1)\xi(t_1+\tau)] \tag{3-21}$$

衡量随机过程任意两个时刻上获取的随机变量的统计特性时，除了利用自相关函数外，还可通过协方差函数加以表示。随机过程 $\xi(t)$的协方差函数可定义为

$$B(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-E[\xi(t_1)]E[\xi(t_2)] \tag{3-22}$$

若 $E[\xi(t_1)]$或 $E[\xi(t_2)]$为 0，则协方差函数和自相关函数完全相等。

3.3 平稳随机过程

学习目标：掌握平稳随机过程定义，能够从原理角度阐述各态历经性的定义，熟悉平稳随机过程自相关函数的性质，掌握自相关函数与功率谱密度关系。

内容点睛：

1. 平稳随机过程的定义

平稳随机过程，即指它的任意 n 维分布函数或概率密度函数与时间的起点无关。

如果对于任意的 n 与 τ，随机过程 $\xi(t)$的 n 维概率密度函数满足

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

则称 $\xi(t)$是平稳随机过程。

1）狭义平稳

随机过程的统计特性与时间起点无关。

一维分布与时间 t 无关：$f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1)$。

二维分布只与间隔 τ 有关：$f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\ \tau)$。

2）广义平稳

均值与时间 t 无关：$a(t)=a$。

相关函数只与间隔 τ 有关：$R(t_1, t_1+\tau)=R(\tau)$。

2. 各态历经性

设 $x(t)$ 是从平稳随机过程中任意取得的一个实现，令

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\mathrm{d}t=\overline{a}$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x(t)-\overline{a}]^2\mathrm{d}t=\overline{\sigma}^2$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t=\overline{R(\tau)}$$

那么，有下面关系存在：

$$a=\overline{a}$$

$$\sigma^2=\overline{\sigma^2}$$

$$R(\tau)=\overline{R(\tau)}$$

这说明：从随机过程中得到的任一实现，好像它经历了随机过程的所有可能状态。

3. 平稳随机过程 $\xi(t)$ 自相关函数的重要性质

(1) $R(0)=E[\xi^2(t)]=s$（$\xi(t)$的平均功率）。

(2) $R(\tau)=R(-\tau)$（$R(\tau)$为偶函数）。

(3) $|R(\tau)|\leqslant R(0)$（$R(\tau)$的上界）。

(4) $R(\infty)=E^2[\xi(t)]$（$\xi(t)$的直流功率）。

(5) $R(0)-R(\infty)=\sigma^2$（方差，$\xi(t)$的交流功率）。

4. 平稳随机过程 $\xi(t)$ 功率谱密度

功率谱密度 $P_\xi(w)$ 与自相关函数 $R(\tau)$ 之间满足傅里叶变换关系，即

$$P_\xi(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau$$

3.3.1 平稳随机过程的定义

这里为什么要介绍平稳随机过程呢？因为在通信系统中所遇到的大多数信号和噪声都可视为平稳随机过程，只要我们掌握了平稳随机过程的特性，就能更好地接收信号，减少噪声的干扰。因此，研究平稳随机过程具有重大的实际意义。

那什么是平稳随机过程呢？所谓平稳随机过程，即指它的任意 n 维分布函数或概率

密度函数,与时间的起点无关。也就是说,如果对于任意的 n 与 τ,随机过程 $\xi(t)$的 n 维概率密度函数满足

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau) \quad (3\text{-}23)$$

则称 $\xi(t)$是平稳随机过程。

由此可见,平稳随机过程的统计特性将不随时间的推移而发生变化,它的一维分布与时间 t 无关,二维分布仅与时间间隔 τ 有关。

平稳随机过程有狭义平稳(严平稳)随机过程和广义平稳(宽平稳)随机过程之分。

若一个随机过程的数学期望与时间起点无关,而其相关函数仅与时间间隔 τ 有关,则我们就称这个随机过程是广义平稳随机过程;相应地,满足式(3-23)的定义即为狭义平稳随机过程。

关于狭义平稳和广义平稳可归纳如下。

狭义平稳:随机过程的统计特性与时间起点无关。一维分布与时间 t 无关:$f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1)$。二维分布只与间隔 τ 有关:$f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\ \tau)$。

广义平稳:随机过程的数学期望和方差与时间起点无关,而其相关函数仅与时间间隔有关。均值与时间 t 无关:$a(t)=a$。相关函数只与间隔 τ 有关:$R(t_1,t_1+\tau)=R(\tau)$。

3.3.2　各态历经性

平稳随机过程具有一个特有且非常有用的特性——各态历经性(又称“遍历性”)。下面将从原理角度阐述各态历经性的概念。

设 $x(t)$是从平稳随机过程中任意取得的一个实现,令

$$\begin{cases} \lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\mathrm{d}t=\bar{a} \\ \lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x(t)-\bar{a}]^2\mathrm{d}t=\bar{\sigma}^2 \\ \lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t=\overline{R(\tau)} \end{cases} \quad (3\text{-}24)$$

那么,有下面关系存在:

$$\begin{cases} a=\bar{a} \\ \sigma^2=\overline{\sigma^2} \\ R(\tau)=\overline{R(\tau)} \end{cases} \quad (3\text{-}25)$$

满足式(3-25)的随机过程,称为具有“各态历经性”的平稳随机过程。因此,可以对“各态历经性”加以概括,即:从随机过程中得到的任一实现,好像它经历了随机过程的所有可

能状态。也就是所说的用“局部统计特性”来反映“整体统计特性”。

3.3.3 平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度

自相关函数不仅是平稳随机过程的一项基本数字特征，而且还体现出随机过程的频谱特性，因此，我们需要研究平稳随机过程 $\xi(t)$ 自相关函数的重要性质。具体如下：

(1) $R(0)=E[\xi^2(t)]=s$（$\xi(t)$的平均功率）。

(2) $R(\tau)=R(-\tau)$（$R(\tau)$为偶函数）。

(3) $|R(\tau)|\leqslant R(0)$（$R(\tau)$的上界）。

(4) $R(\infty)=E^2[\xi(t)]$（$\xi(t)$的直流功率）。

(5) $R(0)-R(\infty)=\sigma^2$（方差，$\xi(t)$的交流功率）。

平稳随机过程的频谱特性由功率谱密度来描述，且功率谱密度 $P_\xi(w)$ 与自相关函数 $R(\tau)$ 之间满足傅里叶变换关系，即

$$P_\xi(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau \tag{3-26}$$

【例 3-2】 求随机正弦波 $\xi(t)=\sin(w_0t+\theta)$ 的数学期望和自相关函数，并求其总功率和功率谱密度。式中 w_0 为常数，θ 是在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。

解：数学期望 $a(t)$ 如下：

$$\begin{aligned}a(t)&=E[\sin(w_0t+\theta)]=E[\sin w_0t\cos\theta+\cos w_0t\sin\theta]\\&=E[\sin w_0t\cos\theta]+E[\cos w_0t\sin\theta]\\&=\sin w_0t\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta+\cos w_0t\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0\end{aligned}$$

自相关函数 $R(\tau)$ 如下：

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]=E[\sin(w_0t_1+\theta)\sin(w_0t_2+\theta)]$$

令 $t_1=t$，$t_2=t+\tau$，则上式变为

$$\begin{aligned}R(\tau)&=E[\sin(w_0t+\theta)\sin(w_0t+w_0\tau+\theta)]\\&=E\{\sin(w_0t+\theta)[\sin(w_0t+\theta)\cos w_0\tau+\cos(w_0t+\theta)\sin w_0\tau]\}\\&=\cos w_0\tau E[\sin^2(w_0t+\theta)]+\sin w_0\tau E[\sin(w_0t+\theta)\cos(w_0t+\theta)]\\&=\frac{1}{2}\cos w_0\tau E[1-\cos 2(w_0t+\theta)]+\frac{1}{2}\sin w_0\tau E[\sin 2(w_0t+\theta)]\\&=\frac{1}{2}\cos w_0\tau-\frac{1}{2}\cos w_0\tau\int_0^{2\pi}\cos 2(w_0t+\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\right)\mathrm{d}\theta+\\&\quad\frac{1}{2}\sin w_0\tau\int_0^{2\pi}\sin 2(w_0t+\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\cos w_0\tau\end{aligned}$$

功率谱密度 $P_{\xi}(w)$如下：

$$P_{\xi}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-jw\tau}d\tau=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos w_0\tau e^{-jw\tau}d\tau=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{jw_0\tau}+e^{-jw_0\tau})e^{-jw\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(w-w_0)\tau}d\tau+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(w+w_0)\tau}d\tau=\frac{1}{2}\pi\delta(w-w_0)+\frac{1}{2}\pi\delta(w+w_0)$$

总功率 $S(w)$如下：

$$S(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_{\xi}(w)dw=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}[2\pi\delta(w-w_0)+2\pi\delta(w+w_0)]dw=\frac{1}{2}$$

由以上结果可知，随机正弦信号 $\xi(t)$的数学期望为 0，自相关函数 $R(\tau)=\frac{1}{2}\cos w_0\tau$，这说明随机正弦信号 $\xi(t)$的数学期望与时间 t 无关，自相关函数只与间隔 τ 有关，故随机正弦信号 $\xi(t)$是广义平稳的。

3.4　高斯过程

学习目标：掌握高斯过程的性质，理解高斯过程的一维分布表示式及其特性。

内容点睛：

1. 高斯过程的性质

(1) 如果高斯过程是宽平稳的，则该过程必然是严平稳的。

(2) 如果高斯过程的 n 个随机变量是不相关的，则该 n 个随机变量是统计独立的。

(3) 若干个高斯过程的和仍为高斯过程。

(4) 高斯过程经过线性系统之后，仍然是高斯过程。

2. 高斯过程的一维分布

随机过程 $\xi(t)$的一维概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

随机过程 $\xi(t)$的一维概率密度函数 $f(x)$有如下性质。

(1) $f(x)$关于直线 $x=a$ 对称，即 $f(a+x)=f(a-x)$。

(2) $f(x)$在$(-\infty,a)$内单调上升，在$(a,+\infty)$内单调下降，在 $x=a$ 处有极大值$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$。

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 且存在$\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$。

(4) 对于不同的 a(固定 σ)，$f(x)$曲线随 a 的变化而左右平移；对于不同的 σ(固定 a)，$f(x)$曲线随 σ 的减少而变高或变窄。

3.4.1 高斯过程的性质

高斯过程又称作正态随机过程，它是一种普遍存在且十分重要的随机过程。高斯过程具有以下重要的性质。

（1）如果高斯过程是宽平稳的，则该过程必然是严平稳的。

（2）如果高斯过程的 n 个随机变量是不相关的，则该 n 个随机变量是统计独立的。

（3）若干个高斯过程的和仍为高斯过程。

（4）高斯过程经过线性系统之后，仍然是高斯过程。

3.4.2 高斯过程的一维分布

高斯过程的一维分布对今后分析信号有重要的意义，下面对该部分内容做必要的介绍。

若随机过程 $\xi(t)$的一维概率密度函数可以表示为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3-27}$$

则称随机过程 $\xi(t)$为服从正态分布的随机变量。

由式(3-27)和图 3-2 可以得到，$\xi(t)$的一维概率密度函数 $f(x)$有如下性质。

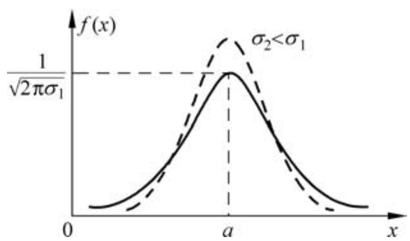

图 3-2　正态分布的一维概率密度

（1）$f(x)$关于直线 $x=a$ 对称，即 $f(a+x)=f(a-x)$。

（2）$f(x)$在$(-\infty,a)$内单调上升，在$(a,+\infty)$内单调下降，在 $x=a$ 处有极大值$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

（3）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 且存在$\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$。

（4）对于不同的 a（固定 σ），$f(x)$曲线随 a 的变化而左右平移；对于不同的 σ（固定 a），$f(x)$曲线随 σ 的减少而变高或变窄。

当 $a=0$ 和 $\sigma=1$ 时，随机过程 $\xi(t)$ 的一维概率密度函数可表示为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{3-28}$$

3.5 窄带随机过程

学习目标：掌握窄带随机过程的定义、表示式，理解关于窄带平稳高斯过程的两个重要结论。

内容点睛：

1. 窄带随机过程的定义

满足 $\Delta f \ll f_c(f_c \gg 0)$ 条件的随机过程称为窄带随机过程。

2. 窄带随机过程的表示式

窄带随机过程的表示式如下：

$$\xi(t)=a_\xi(t)\cos[w_c t+\varphi_\xi(t)],\quad a_\xi(t)\geqslant 0$$

式中，$a_\xi(t)$ 和 $\varphi_\xi(t)$ 分别是窄带随机过程 $\xi(t)$ 的包络和相位，w_c 为中心频率。

3. 两个结论

结论 1：一个均值为 0 的窄带平稳高斯过程，其同向分量 $\xi_c(t)$ 和正交分量 $\xi_s(t)$ 都是均值为 0、方差相同的相互独立的高斯随机变量。

结论 2：一个均值为 0、方差为 σ_ξ^2 的窄带平稳高斯过程，其包络 a_ξ 和相位 φ_ξ 的一维分布分别服从瑞利分布和均匀分布，即

$$f(a_\xi)=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi}{2\sigma_\xi^2}\right),\quad a_\xi\geqslant 0$$

$$f(\varphi_\xi)=\frac{1}{2\pi},\quad 0\leqslant\varphi_\xi\leqslant 2\pi$$

通信系统中，许多信号和噪声都是“窄带”的，那什么是“窄带”呢？顾名思义，就是其频谱均被限制在“载波”或某一中心频率附近的一个窄的频带上。例如：无线广播系统中的中频信号及噪声就是窄带信号。如果此时信号和噪声是一个随机过程，则称它们为窄带随机过程。窄带波形的定义可以借助图 3-3 加以说明。

图 3-3 中，波形的频带为 Δf，中心频率为 f_c，若满足 $\Delta f\ll f_c(f_c\gg 0)$ 条件，则称该波形为窄带的。

窄带随机过程可以用下式表示：

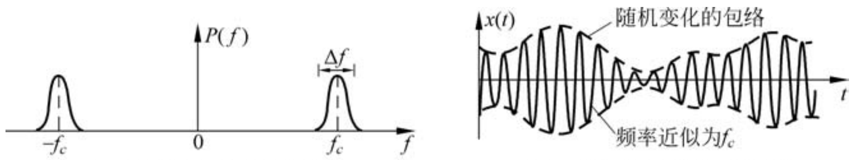

图 3-3　窄带随机过程

$$\xi(t)=a_\xi(t)\cos[w_c t+\varphi_\xi(t)],\quad a_\xi(t)\geqslant 0 \tag{3-29}$$

式中，$a_\xi(t)$和 $\varphi_\xi(t)$分别是窄带随机过程 $\xi(t)$的包络和相位函数，w_c 为中心频率。

窄带随机过程又可以表示为

$$\xi(t)=\xi_c(t)\cos w_c t-\xi_s(t)\sin w_c t \tag{3-30}$$

式中，$\xi_c(t)$和 $\xi_s(t)$分别称为窄带随机过程 $\xi(t)$的同向分量和正交分量，即

$$\begin{cases}\xi_c(t)=a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t)\\ \xi_s(t)=a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)\end{cases} \tag{3-31}$$

以此为基础，我们可以得到两个关于窄带平稳高斯过程的重要结论。

结论 1：一个均值为 0 的窄带平稳高斯过程，其同向分量 $\xi_c(t)$和正交分量 $\xi_s(t)$都是均值为 0、方差相同的相互独立的高斯随机变量。

结论 2：一个均值为 0、方差为 σ_ξ^2 的窄带平稳高斯过程，其包络 a_ξ 和相位 φ_ξ 的一维分布分别服从瑞利分布和均匀分布，即

$$f(a_\xi)=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi}{2\sigma_\xi^2}\right),\quad a_\xi\geqslant 0 \tag{3-32}$$

$$f(\varphi_\xi)=\frac{1}{2\pi},\quad 0\leqslant\varphi_\xi\leqslant 2\pi \tag{3-33}$$

上述结论的证明过程这里就不进行介绍了，有兴趣的读者可参看相关教程。

3.6　随机过程通过恒参线性系统

学习目标：掌握输出过程 $\xi_0(t)$的统计特性，重点掌握输出过程 $\xi_0(t)$的功率谱密度，以及定理 3.1。

内容点睛：

输出过程 $\xi_0(t)$的统计特性如下：

(1) 数学期望

$$E[\xi_0(t)]=E[\xi_i(t)]\cdot H(0)$$

(2) 自相关函数，对于输出过程 $\xi_0(t)$，其自相关函数仅依赖时间间隔 τ 而与时间的起点无关。

(3) 功率谱密度

$$P_{\xi_0}(w) = |H(w)|^2 P_{\xi_i}(w)$$

(4) 概率分布。

在“信号与系统”课程中，我们已经学习了线性系统的输出信号 $v_0(t)$ 等于输入信号 $v_i(t)$ 和系统函数 $h(t)$ 的卷积，即

$$v_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_i(\tau) h(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{3-34}$$

对于随机信号来说，式(3-34)同样适用，即

$$\xi_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \xi_i(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{3-35}$$

下面来分析输出过程 $\xi_0(t)$ 的统计特性。

数学期望：输出过程 $\xi_0(t)$ 的数学期望表示式为

$$E[\xi_0(t)] = E[\xi_i(t)] \cdot H(0) \tag{3-36}$$

由此可见，输出过程的数学期望 $E[\xi_0(t)]$ 等于输入过程数学期望 $E[\xi_i(t)]$ 与 $H(0)$ 的乘积，并且 $E[\xi_0(t)]$ 与 t 时间无关。

自相关函数：对于输出过程 $\xi_0(t)$，其自相关函数仅依赖时间间隔 τ 而与时间的起点无关。

功率谱密度：对于输出过程 $\xi_0(t)$ 的功率谱密度可表示为

$$P_{\xi_0}(w) = |H(w)|^2 P_{\xi_i}(w) \tag{3-37}$$

上式表明，系统输出功率谱密度等于系统函数取模的平方乘以输入功率谱密度，这个结论在今后学习过程中非常有用。

概率分布：对于给定输入过程的概率分布，确定输出过程概率的情况下，具有以下定理。

定理 3.1 高斯过程经过线性系统之后，输出的随机过程仍然是高斯的。

【例 3-3】 求功率谱密度为 $\frac{n_0}{2}$ 的白噪声通过理想低通滤波器

$$H(w) = \begin{cases} K_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt_d}, & |w| \leqslant w_H \\ 0, & \text{其他 } w \end{cases}$$

后的功率谱密度、自相关函数及噪声功率。

解：(1) 由输出过程 $\xi_0(t)$ 的功率谱密度表示式可知

$$P_{\xi_0}(w)=|H(w)|^2 P_{\xi_i}(w)=K_0^2\frac{n_0}{2},\quad |w|\leqslant w_H$$

(2) 自相关函数 $R(\tau)$ 为

$$R_0(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P_{\xi_0}(w)\mathrm{e}^{\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}w=\frac{K_0^2 n_0}{4\pi}\int_{-w_H}^{w_H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}w=K_0^2 n_0 f_H\ \frac{\sin w_H\tau}{w_H\tau}$$

其中

$$f_H=\frac{w_H}{2\pi}$$

(3) 输出噪声功率 N 为

$$N=R_0(0)=K_0^2 n_0 f_H$$