

前两章介绍了用欧姆定律和基尔霍夫定律分析简单电路的方法,以及用电阻等效变换和电源等效变换简化、变换电路的思想。但是当电路较为复杂时,采用上述方法虽然可以分析电路,但计算过程往往较为烦琐,因此这些方法可能并不适用。本章将在前两章的基础上进一步介绍复杂电路的一般分析方法。

为便于讨论分析,在没有特殊说明的情况下,本书所讨论的电路均为线性电路。线性电路的一般分析方法,首先具有普遍性,即该方法对任何线性电路都适用;其次具有系统性,通过观察、比较、分析电路方程可以发现其计算方法是有规律可循的。复杂线性电路的一般分析法就是根据电路的连接关系——KCL、KVL 定律以及元件的电压、电流关系特性列出方程,并求方程的解以得到电路中的各物理量。根据所列方程中未知量的不同可分为支路电流法、回路电流法和结点电压法。它们是分析电路的基本方法,可为后续分析动态电路及正弦交流电路等奠定基础。

3.1 电路的基本概念

在第1章中已经定义了支路、结点、路径、回路、网孔等基本概念,在此基础上,将进一步讨论电路中能够列出的 KCL 和 KVL 独立方程的数量,以便于各种电路分析方法的应用。

3.1.1 KCL 的独立方程数

以如图 3-1-1 所示电路为例来分析 KCL 的独立方程数,各支路电流的参考方向如图中所示。分别对电路中的 4 个结点列 KCL 方程:

$$\text{结点①: } i_1 - i_4 - i_6 = 0;$$

$$\text{结点②: } -i_1 - i_2 + i_3 = 0;$$

$$\text{结点③: } i_2 + i_5 + i_6 = 0;$$

$$\text{结点④: } -i_3 + i_4 - i_5 = 0。$$

将以上 4 个方程求和得: ①+②+③+④=0。

由此可以得出结论: 对于含有 n 个结点的电路,由于第 n 个方程总可以根据前 $n-1$ 个方程推导得到,因此独立的 KCL 方程为 $n-1$ 个。

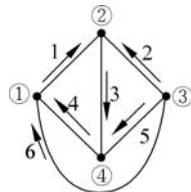


图 3-1-1 KCL 方程电路

3.1.2 KVL 的独立方程数

同样,对于图 3-1-1 所示电路,分析其 KVL 的独立方程数,各网孔电流的参考方向如图中所示。分别对电路中的 3 个网孔列 KVL 方程:

$$\text{网孔①: } u_1 + u_3 + u_4 = 0;$$

$$\text{网孔②: } u_2 + u_3 - u_5 = 0;$$

$$\text{网孔③: } u_4 + u_5 - u_6 = 0。$$

①-②得 $u_1 - u_2 + u_4 + u_5 = 0$,这是回路①-②-③-④-①的 KVL 方程。说明,通过对以上 3 个网孔方程进行加、减运算可以得到其他回路的 KVL 方程。进一步说明,独立方程的数目等于网孔数,即 $b - (n - 1)$,其中, n 为电路中的结点数, b 为支路数。

3.2 支路电流法

支路电流法是求解复杂电路最根本的方法,是以各支路电流为未知量列写电路方程分析电路的方法。

对于有 n 个结点、 b 条支路的电路,要求解支路电流,共有 b 个未知量。因此,只要列出 b 个独立的电路方程,便可以求解这 b 个支路电流,这就是支路电流法的基本思路。

3.2.1 支路电流方程

列写支路电流方程组的依据就是 KCL 和 KVL 定律。现以如图 3-2-1 所示电路为例,介绍支路电流法解题的一般步骤。

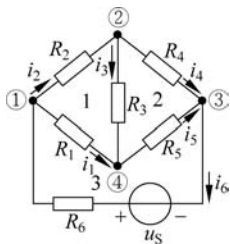


图 3-2-1 支路电流法
解题步骤举例

(1) 确定支路数,并标出各支路电流的参考方向。

图 3-2-1 所示电路中有 6 条支路、即有 6 个待求的支路电流,也就是说,需要列写 6 个独立的电流方程。在图中分别标出各支路电流 $i_1 \sim i_6$ 的参考方向。

(2) 确定结点数 n ,从电路的 n 个结点中任意选择 $n - 1$ 个结点列写 KCL 方程。

如图 3-2-1 所示电路中有 4 个结点,可以列出 3 个独立的 KCL 方程:

$$\text{结点①: } i_1 + i_2 - i_6 = 0;$$

$$\text{结点②: } -i_2 + i_3 + i_4 = 0;$$

$$\text{结点③: } -i_4 - i_5 + i_6 = 0。$$

(3) 根据 KVL 列出余下所需的方程式数为 $b - (n - 1)$ 个独立的回路电压方程式。

如图 3-2-1 所示电路中共有 6 条支路、4 个结点,则余下的 3 个方程式可用 KVL 列出。图中共有 7 个回路,可以从任选出 3 个来列写回路电压方程,但应注意,为使所列出的回路方程一定是独立的,应使每次所选的回路至少包含一条前面未曾用过的新支路。通常选用网孔所列的回路方程式必定是独立的。

在图 3-2-1 所示电路中,取 3 个网孔为独立回路,沿顺时针方向绕行列写 KVL 方程。

$$\text{网孔 1: } R_2 i_2 + R_3 i_3 - R_1 i_1 = 0;$$

网孔 2: $R_4 i_4 - R_5 i_5 - R_3 i_3 = 0$;

网孔 3: $R_1 i_1 + R_5 i_5 + R_6 i_6 - u_s = 0$ 。

由此,可以总结出支路电流法的一般步骤为:

- (1) 标定各支路电流(电压)的参考方向;
- (2) 选定 $(n-1)$ 个结点,列写其 KCL 方程;
- (3) 选定 $b-(n-1)$ 个独立回路,列写其 KVL 方程;
- (4) 求解上述方程,得到 b 个支路电流;
- (5) 进一步计算支路电压和进行其他分析。

根据支路电流法的步骤不难发现,支路电路方程组由两部分组成,即 KCL 方程联立 KVL 方程,所以列写的方程组方便、直观,但所列的方程数较多,人工求解较为烦琐,适用于在支路数不多的情况下使用。

3.2.2 支路电流法的应用

【例题 3-2-1】 求图 3-2-2 所示电路中各支路电流及各电压源发出的功率。

【解】

此电路中共有 2 个结点,需要列 $n-1=1$ 个 KCL 方程:

对于结点 a:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

共有 3 条支路和 3 个未知数,需要列 $b-(n-1)=2$ 个 KVL 方程。选取左右 2 个网孔:

$$-70 + 7I_1 - 11I_2 + 6 = 0$$

$$-6 + 11I_2 + 7I_3 = 0$$

联立 3 个方程,解得:

$$I_1 = 6\text{A}, \quad I_2 = -2\text{A}, \quad I_3 = 4\text{A}$$

两个电压源的吸收功率分别为:

$$P_{70\text{V}} = -6 \times 70 = -420(\text{W}), \quad P_{6\text{V}} = -(-2) \times 6 = 12(\text{W})$$

所以,70V 电压源发出的功率为 420W; 6V 电压源发出的功率为 -12W。

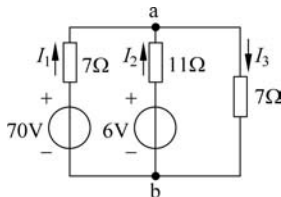


图 3-2-2 例题 3-2-1 图

3.2.3 支路电流法的特殊情况

在第 2 章中介绍过实际电压源的等效电路是理想电压源串联内阻,实际电流源电路是理想电流源并联内阻。在实际电路中出现电压源串联电阻或电流源并联电阻的情况均可视为其各自的内阻。但如果电路中含有理想电压源并联电阻或理想电流源串联电阻的情况,计算方法是否会有所不同呢? 下面通过例题 3-2-2 进行分析。

【例题 3-2-2】 用支路电流求如图 3-2-3 所示电路中的各支路电流。

【解 1】

- (1) 列 $n-1=1$ 个 KCL 方程:

对于结点 a:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

(2) 列 $b-(n-1)=2$ 个 KVL 方程,如图 3-2-4 所示,选择 2 个网孔为回路:

$$-70 + 7I_1 - 11I_2 + U = 0$$

$$-U + 11I_2 + 7I_3 = 0$$

在上述 KVL 方程中,由于电流源的电压未知,因此假设了未知数 U 。电路中 3 条支路,3 个未知数,再加上假设的未知数,共有 4 个待求的量。而此时只有 3 个方程,因此需要再增加一个含有未知电流的方程,称之为增补方程。增补方程的选择应充分地利用电流源电流已知的条件,并与待求的未知量建立起联系,于是有:

增补方程: $I_2 = 6\text{A}$;

通过以上方程的联立,可以求得支路电流: $I_1 = 2\text{A}, I_2 = 6\text{A}, I_3 = 8\text{A}$ 。

【解 2】

由于 I_2 已知,等于电流源的电流,故可以只列两个方程。

对于结点 a,由 KCL: $-I_1 + I_3 = 6$ 。

在图 3-2-4 中,避开电流源支路取最大的回路。由 KVL 得: $-70 + 7I_1 + 7I_3 = 0$ 。

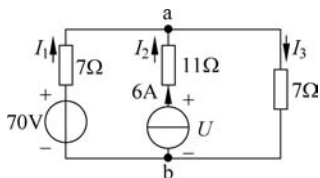


图 3-2-3 例题 3-2-2 图

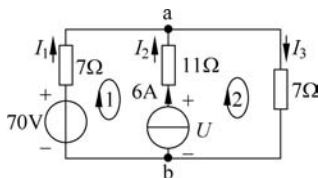


图 3-2-4 回路的合理选择

同样可得各支路电流: $I_1 = 2\text{A}, I_2 = 6\text{A}, I_3 = 8\text{A}$ 。

【例题 3-2-3】 应用支路电流法计算如图 3-2-5 所示电路中的电压 U 。

【解】

观察图 3-2-5 可以发现,其中一条支路中含有 20A 的电流源,根据上题解 2 的思路,此支路的电流便是 20A ,可以少计算一个支路电流。其他 5 个支路电流如图 3-2-5 中所标示。

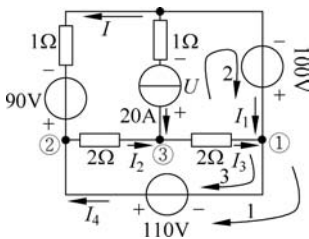


图 3-2-5 例题 3-2-3 图

该电路共有 4 个结点,先列 3 个 KCL 方程:

结点①: $I_1 + I_3 = I_4$;

结点②: $I_2 + I_4 = I_2$;

结点③: $I_2 + 20 = I_3$ 。

另外 2 个方程由 KVL 方程列出(所选的回路及绕行方向如图 3-2-5 所示):

结点④: $2I_2 + 2I_3 - 110 = 0$;

结点⑤: $90 - I - 100 - 110 = 0$ 。

联立 5 个方程,解得:

$$I = -120\text{A}, \quad I_1 = 100\text{A}, \quad I_2 = 17.5\text{A}, \quad I_3 = 37.5\text{A}, \quad I_4 = 137.5\text{A}$$

则电流源两端的电压 U 为: $U = 2I_3 + 100 + 1 \times 20 = 195\text{V}$ 。



微课 10 支路
电流法

3.3 网孔电流法

由 3.2 节的支路电路法分析电路不难发现,如果电路中的支路数比较多,那么将需要求解的方程数就比较多,势必增加求解的复杂性。这时,我们还注意到电路中的网孔数与支路数相比要少得多,因此,可以考虑以网孔为研究对象建立方程。以沿网孔连续流动的假想电流为未知量列写电路方程分析电路的方法称网孔电流法。它仅适用于平面电路。

该方法的基本思想是为减少未知量(方程)的个数,假想每个回路中有一个回路电流。各支路电流可用回路电流的线性组合表示,来求得电路的解。网孔电流在网孔中是闭合的,对每个相关结点均流进一次,流出一次,所以 KCL 自动满足。因此网孔电流法是对网孔回路列写 KVL 方程,方程数为网孔数。

以如图 3-3-1 所示电路为例来列写网孔电流方程。

图 3-3-1 中的网孔数为 2,选图示的两个网孔,假设分别存在两个虚拟的电流 i_{l1} 和 i_{l2} 沿着回路流动,这时,支路电流与回路电流的关系为

$$i_1 = i_{l1}$$

$$i_3 = i_{l2}$$

$$i_2 = i_{l2} - i_{l1}$$

由此,3 个支路电流可以由 2 个网孔电流计算得到,在一定程度上可以简化计算过程。

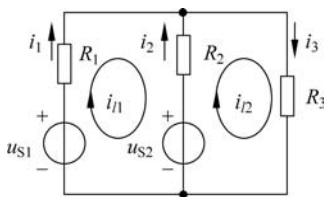


图 3-3-1 网孔电流示意图

3.3.1 网孔电流方程

同样以如图 3-3-1 所示电路为例来列写方程,网孔电流法列写的是 KVL 方程:

$$\text{网孔 1: } R_1 i_{l1} + R_2 (i_{l1} - i_{l2}) - u_{S1} + u_{S2} = 0;$$

$$\text{网孔 2: } R_2 (i_{l2} - i_{l1}) + R_3 i_{l2} - u_{S2} = 0。$$

整理得:

$$(R_1 + R_2) i_{l1} - R_2 i_{l2} - u_{S1} + u_{S2} = 0$$

$$-R_2 i_{l1} + (R_2 + R_3) i_{l2} - u_{S2} = 0$$

观察上述网孔电路方程,可以得出网孔电流法的如下规律:

(1) 自电阻。

$R_{11} = R_1 + R_2$, 是网孔 1 中所有电阻之和,称为网孔 1 的自电阻。

$R_{22} = R_2 + R_3$, 是网孔 2 中所有电阻之和,称为网孔 2 的自电阻。

(2) 互电阻。

$R_{12} = R_{21} = -R_2$, 称为网孔 1、网孔 2 之间的互电阻。

这样,可以总结归纳出方程的标准形式:

$$R_{11}i_{l1} + R_{12}i_{l2} = u_{S1}$$

$$R_{21}i_{l1} + R_{22}i_{l2} = u_{S2}$$

再延伸一下,对于具有 l 个网孔的电路,有:

$$R_{11}i_{l1} + R_{12}i_{l2} + \cdots + R_{1l}i_{ll} = u_{S1}$$

$$R_{21}i_{l1} + R_{22}i_{l2} + \cdots + R_{2l}i_{ll} = u_{S2}$$

...

$$R_{l1}i_{l1} + R_{l2}i_{l2} + \cdots + R_{ll}i_{ll} = u_{Sl}$$

(3-3-1)

式(3-3-1)中的 $u_{S1} = u_{S1} - u_{S2}$ 指网孔 1 中所有电压源电压的代数和; $u_{S2} = u_{S2}$ 指网孔 2 中所有电压源电压的代数和。

需要注意的是:

(1) 自电阻 R_{kk} 总为正值。

(2) 互电阻 R_{jk} 的符号由两个网孔电流同时经过该电阻时的方向是否一致决定: 当两个网孔电流流过同一支路电阻的方向相同时,互电阻取正号; 当两个网孔电流流过同一支路电阻的方向相反时,互电阻取负号; 当两个网孔没有公共的电阻时,互电阻系数为 0。

(3) 当电压源电压方向与该网孔电流方向一致时,取负号; 反之,则取正号。

3.3.2 网孔电路法的应用

【例题 3-3-1】 用网孔电流法计算如图 3-3-2 所示电路中的电流 i 。

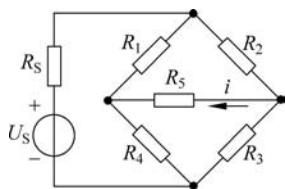


图 3-3-2 例题 3-3-1 图

【解】

利用网孔电流来计算支路电流。该电路中有 3 个网孔,因此需要列出 3 个网孔电流方程。选网孔为独立回路,网孔电流方向均为顺时针:

$$(R_S + R_1 + R_4)i_1 - R_1i_2 - R_4i_3 = U_S$$

$$-R_1i_1 + (R_1 + R_2 + R_5)i_2 - R_5i_3 = 0$$

$$-R_4i_1 + R_5i_2 - (R_3 + R_4 + R_5)i_3 = 0$$

在计算出各网孔电流后,可以写出: $i = i_2 - i_3$ 。

同时,上述方程组还表明:

(1) 在无受控源的线性网络中,互电阻 $R_{jk} = R_{kj}$,系数矩阵为对称阵。

(2) 当网孔电流均取顺(或逆)时针方向时, R_{jk} 均为负。

由此可以总结出网孔电流法的一般步骤:

- (1) 选网孔为独立回路,并确定其绕行方向;
- (2) 以网孔电流为未知量,列写其 KVL 方程;
- (3) 求解上述方程,得到 l 个网孔电流;
- (4) 求各支路电流;
- (5) 进一步求其他元件的电压等参数。



微课 11 网孔
电流法

3.4 回路电流法

回路电流法是以基本回路中沿回路连续流动的假想电流为未知量列写电路方程分析电

路的方法。它适用于平面和非平面电路。3.3节中的网孔也属于回路,因此回路电流法的列写方法与网孔电流法类似,只不过回路的范围要比网孔大得多。回路不一定是网孔。

回路电流法是对独立回路列写 KVL 方程,方程数为 $b - (n - 1)$ 。与支路电流法相比,方程数减少 $n - 1$ 个。

3.4.1 回路电流方程

很显然,对于具有 $l = b - (n - 1)$ 个回路的电路,方程的标准形式与网孔电流法一致,即

$$R_{11}i_{l1} + R_{12}i_{l2} + \cdots + R_{1l}i_{ll} = u_{Sl1}$$

$$R_{21}i_{l1} + R_{22}i_{l2} + \cdots + R_{2l}i_{ll} = u_{Sl2}$$

...

$$R_{l1}i_{l1} + R_{l2}i_{l2} + \cdots + R_{ll}i_{ll} = u_{Sl l}$$

这里再总结一下回路电流法的一般步骤:

- (1) 选定 $l = b - (n - 1)$ 个独立回路,并确定其绕行方向;
- (2) 对 l 个独立回路,以回路电流为未知量,列写其 KVL 方程;
- (3) 求解上述方程,得到 l 个回路电流;
- (4) 求各支路电流;
- (5) 进一步求其他元件的电压等参数。

3.4.2 回路电流法的应用

【例题 3-4-1】 用回路电流法求解图 3-4-1 所示电路中的电流 i 。

【解】

所选择的回路及方向如图中所示,为了简化计算,在选择回路时,只让一个回路电流 i_2 经过 R_5 支路,于是便有 $i = i_2$ 。对于 3 个回路列写 3 个回路电流方程为

$$(R_S + R_1 + R_4)i_1 + R_1i_2 - (R_1 + R_4)i_3 = U_S$$

$$-R_1i_1 + (R_1 + R_2 + R_5)i_2 + (R_1 + R_2)i_3 = 0$$

$$-(R_1 + R_4)i_1 + (R_1 + R_2)i_2 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)i_3 = 0$$

利用回路电流法分析电路可以通过灵活地选取回路减少计算量,但在计算过程中对于回路与回路之间的互电阻,其识别难度加大,易遗漏互有电阻,在计算时应格外注意。

3.4.3 回路电流法的特殊情况

1. 理想电流源支路的处理

根据回路电流法的标准方程格式,左侧是电阻乘以电流的代数形式,右侧是电压源的电压,而如果电路中含有理想电流源,则难以套用标准方程。这里以如图 3-4-2 所示电路为例,提供两种分析思路。

【解 1】

引入电流源电压 U 作为未知量,先按照标准格式列写回路电流方程,如图 3-4-3(a)所示:

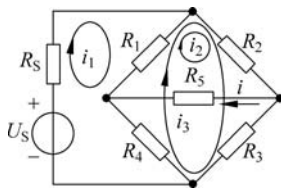


图 3-4-1 例题 3-4-1 图

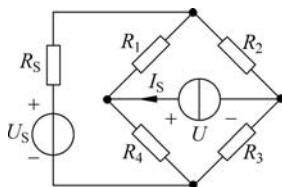


图 3-4-2 含理想电流源支路的回路电路法

$$\begin{aligned}(R_S + R_1 + R_4)i_1 - R_1i_2 - R_4i_3 &= U_S \\ -R_4i_1 + (R_3 + R_4)i_3 &= -U \\ -R_1i_1 + (R_1 + R_2)i_2 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)i_3 &= 0\end{aligned}$$

增加了未知量 U , 便需要再列一个增补方程, 该方程应该是回路电流与电流源电流的关系方程。因此, 增补方程: $I_S = i_2 - i_3$ 。

【解 2】

选取独立回路, 使理想电流源支路仅仅属于一个回路, 如图 3-4-3(b) 所示, 该回路电流即 I_S 。

$$\begin{aligned}(R_S + R_1 + R_4)i_1 - R_1i_2 - (R_1 + R_4)i_3 &= U_S \\ i_2 &= I_S \\ -(R_1 + R_4)i_1 + (R_1 + R_2)i_2 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)i_3 &= 0\end{aligned}$$

以上由于电流源的电流 I_S 已知, 实际减少了一个方程, 使得计算大为简化。

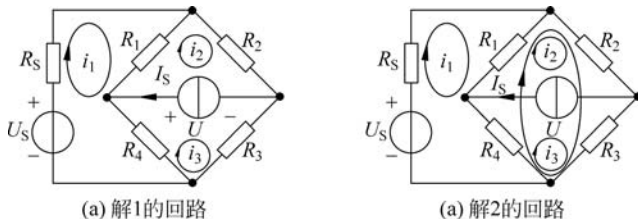


图 3-4-3 回路的选择

【例题 3-4-2】 利用回路电流法求如图 3-4-4 所示电路中电压 U , 电流 I 和电压源产生的功率。

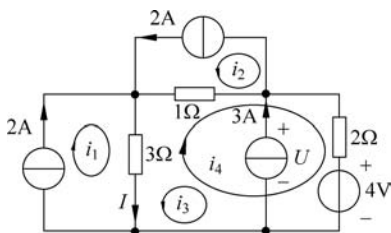


图 3-4-4 例题 3-4-3 图

【解】

该电路含有 4 个独立回路, 需要列写 4 个方程。

观察电路发现, 图中有 3 个电流源支路。根据上一题的第 2 种解法, 分别使这 3 个理想电流源支路仅仅属于 i_1, i_2, i_3 三个回路, 这样:

$$i_1 = 2A, \quad i_2 = 2A, \quad i_3 = 3A$$

需注意的是, 所选取的回路电流的方向分别与 3 个电流源的方向相同。最后所选取的回路 4 均不通过这 3 个电流源, 如图 3-4-4 所示, 列写 KVL 方程:

$$6i_4 - 3i_1 + i_2 - 4i_3 = -4$$

由此, $i_4 = (6 - 2 + 12 - 4)/6 = 2(\text{A})$ 。

所要求计算的:

$$I = 2 + 3 - 2 = 3(\text{A})$$

$$U = 2i_4 + 4 = 8(\text{V})$$

$$P = 4 \times i_4 = 8(\text{W}) (\text{吸收})$$

【例题 3-4-3】 应用回路电流法计算图 3-4-5 所示电路中的电压 U 和电流 I 。

【解】

选取仅回路 1 通过 20A 的电流源, 于是, $i_1 = 20\text{A}$ 。

列写其他 2 个回路电路方程:

$$i_2 + i_1 = 120$$

$$-2i_1 + 4i_3 = 110$$

解得:

$$i_3 = 150/4 = 37.5(\text{A})$$

可得:

$$I = -(i_2 + i_1) = -120(\text{A})$$

$$U = 2i_3 + 100 + 1 \times 20 = 195(\text{V})$$

【* 2017-5】 用回路电流法求解如图 3-4-6 所示电路的电流 I , 最少需要列() KVL 方程。

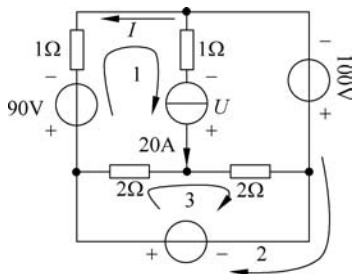


图 3-4-5 例题 3-4-4 图

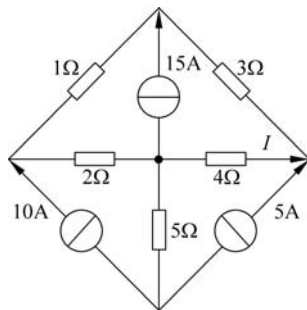


图 3-4-6 * 2017-5 题图

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【解】 A

观察电路发现, 电路中有 4 个网孔, 即 4 个独立回路。按标准的回路电流方程, 需列 4 个回路电流方程。但进一步观察, 电路中有 3 条支路中含有电流源, 这时可充分地利用电流源的电流已知的条件, 通过选取 3 个回路分别只经过这 3 个电流源, 得到 3 个回路电流。

因此只需要选择第 4 个回路均不经过电流源即可, 只需列 1 个 KVL 方程。

2. 受控电源支路的处理

对含有受控电源支路的电路, 可先把受控源看作独立电源按上述方法列方程, 再将控制量用回路电流表示。

【例题 3-4-4】 列写图 3-4-7 所示的回路电流方程。

【解】

电路中含有 3 个网孔,因此需要列写 3 个独立方程。其中,回路 2 和回路 3 中含有受控电压源,将受控源看作独立源列方程。

$$\text{回路 1: } (R_S + R_1 + R_4)i_1 - R_1i_2 - R_4i_3 = U_S;$$

$$\text{回路 2: } R_1i_1 + (R_1 + R_2)i_2 = 5U;$$

$$\text{回路 3: } R_4i_1 + (R_3 + R_4)i_3 = -5U。$$

对于引入的未知量 U ,需要建立其与回路电流的增补方程:

$$U = R_3i_3$$

通过以上 4 个方程可计算回路电流,进而计算各支路电流、电压等。

【例题 3-4-5】 列出如图 3-4-8 所示电路的回路电流方程。

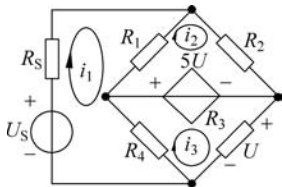


图 3-4-7 例题 3-4-5 图

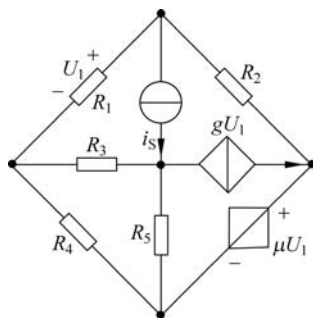


图 3-4-8 例题 3-4-6 图

【解 1】

按常规的方法,选网孔为独立回路,如图 3-4-9(a)所示,列方程:

$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3i_3 = -U_2$$

$$R_2i_2 = U_2 + U_3$$

$$-R_3i_1 + (R_3 + R_4 + R_5)i_3 - R_5i_4 = 0$$

$$-R_5i_3 + R_5i_4 = U_3 - \mu U_1$$

由于方程中含有未知的受控量,因此引入增补方程:

$$i_1 - i_2 = i_S$$

$$i_4 - i_2 = gU_1$$

$$U_1 = -R_1i_1$$

【解 2】

结合理想电流源支路的处理方法,使只有回路 1 经过 i_S 电流源,只有回路 4 经过 gU_1 受控电流源,将回路 2 选为最外层的大回路,如图 3-4-9(b)所示,有:

$$i_1 = i_S$$

$$R_1i_1 + (R_1 + R_2 + R_4)i_2 + R_4i_3 = -\mu U_1$$

$$-R_3i_1 + R_4i_2 + (R_3 + R_4 + R_5)i_3 - R_5i_4 = 0$$

$$i_4 = gU_1$$

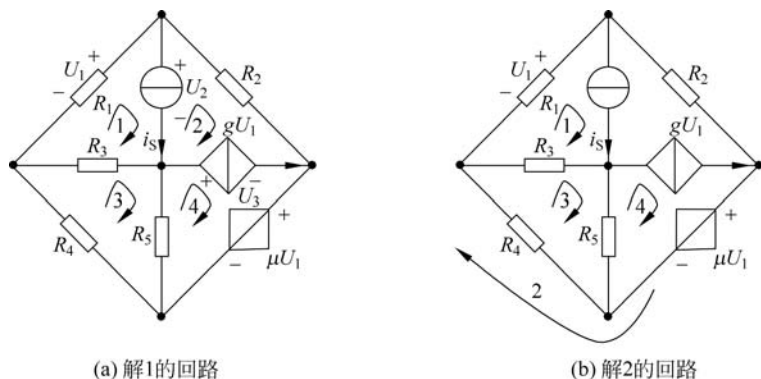


图 3-4-9 回路的选取

以上 4 个方程再联立表达回路电流与受控电压 U_1 关系的增补方程 $U_1 = -R_1(i_1 + i_2)$, 可以得到电路的相关物理量。可见, 通过合理地利用电流源或受控电流源的电流作为回路电流可有效地简化计算。

【* 2013-4】如图 3-4-10 所示电路中 $i_S = 1.2\text{A}$ 和 $g = 0.1\text{S}$, 则电路中的电压 U 应为()。

- A. 3A B. 6A C. 9A D. 12A

【解】 C

如图 3-4-11 所示, 选择回路 1 唯一经过受控电流源 gU , 回路 2 唯一经过电流源 i_S 。

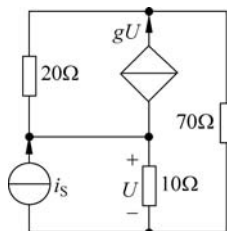


图 3-4-10 * 2013-4 题图

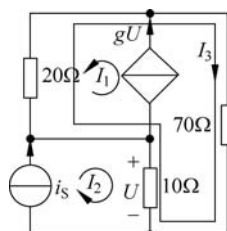


图 3-4-11 回路的选择

回路 1: $I_1 = gU = 0.1U$;

回路 2: $I_2 = i_S = 1.2\text{A}$;

回路 3: $-20I_1 - 10I_2 + (20 + 10 + 70)I_3 = 0$;

增补方程: $U = 10(I_2 - I_3)$ 。

联立求解以上方程, 得到

$$I_1 = 0.9\text{A}, \quad I_2 = 1.2\text{A}, \quad I_3 = 0.3\text{A}$$

因此, $U = 10(I_2 - I_3) = 9\text{V}$ 。

3.5 结点电压法

以结点电压为未知量列写电路方程分析电路的方法称为结点电压法。该方法适用于结点较少的电路。



微课 12 回路
电流法

结点电压的基本思想是选结点电压为未知量,则 KVL 自动满足,无须列写 KVL 方程。各支路电流、电压可视为结点电压的线性组合,求出结点电压后,便可方便地得到各支路电压、电流。

结点电压法列写的是结点上的 KCL 方程,根据第 1 章学习的结点的概念,对于结点来说首先要有一个参考结点,认为其电位为 0V,其他点相对于这个点的电压为该点的电位。因此,对于具有 n 个结点的电路,其独立方程数为 $n-1$ 。

3.5.1 结点电压方程

下面以如图 3-5-1 所示的电路为例,说明结点电压方程的推导过程。

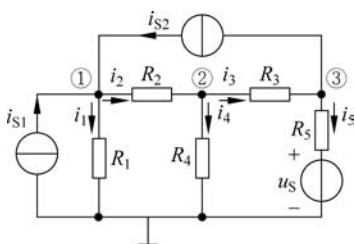


图 3-5-1 结点电压方程的推导

(1) 在该电路的 4 个结点中选定参考结点,如图 3-5-1 所示,其余 3 个独立结点的电压即为待求量;

(2) 针对 3 个结点分别列 KCL 方程:

$$\sum i_{\text{R出}} = \sum i_{\text{S入}}$$

即

$$i_1 + i_2 = i_{S1} + i_{S2}$$

$$-i_2 + i_4 + i_3 = 0$$

$$-i_3 + i_5 = -i_{S2}$$

(3) 将上述方程中的支路电流用未知量结点电压表示:

$$\begin{cases} \frac{u_{n1}}{R_1} + \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_2} = i_{S1} + i_{S2} \\ -\frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_2} + \frac{u_{n2} - u_{n3}}{R_3} + \frac{u_{n2}}{R_4} = 0 \\ -\frac{u_{n2} - u_{n3}}{R_3} + \frac{u_{n3} - u_S}{R_5} = -i_{S2} \end{cases}$$

整理得:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u_{n1} - \left(\frac{1}{R_2}\right) u_{n2} = i_{S1} + i_{S2} \\ -\frac{1}{R_2} u_{n1} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) u_{n2} - \frac{1}{R_3} u_{n3} = 0 \\ -\frac{1}{R_3} u_{n2} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) u_{n3} = -i_{S2} + \frac{u_S}{R_5} \end{cases}$$

令电导 $G_k = 1/R_k, k=1,2,3,4,5$, 上式简记为

$$G_{11} u_{n1} + G_{12} u_{n2} + G_{13} u_{n3} = i_{S1}$$

$$G_{21} u_{n1} + G_{22} u_{n2} + G_{23} u_{n3} = i_{S2}$$

$$G_{31} u_{n1} + G_{32} u_{n2} + G_{33} u_{n3} = i_{S3}$$

其中, $G_{11} = G_1 + G_2$ 为结点 1 的自电导; $G_{22} = G_2 + G_3 + G_4$ 为结点 2 的自电导; $G_{33} = G_3 + G_5$ 为结点 3 的自电导。结点的自电导等于接在该结点上所有支路的电导之和。

$G_{12} = G_{21} = -G_2$ 为结点 1 与结点 2 之间的互电导; $G_{23} = G_{32} = -G_3$ 为结点 2 与结点 3

之间的互电导。互电导为接在结点与结点之间所有支路的电导之和,总为负值。

$i_{Sn1} = i_{S1} + i_{S2}$ 为流入结点 1 的电流源电流的代数和。

$i_{Sn3} = -i_{S2} + \frac{u_S}{R_5}$ 为流入结点 3 的电流源电流的代数和。

基于以上推导过程,可以总结出,在含电压源的电路中结点电压法标准形式的方程为:

$$G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} + \cdots + G_{1(n-1)}u_{n(n-1)} = i_{Sn1}$$

$$G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} + \cdots + G_{2(n-1)}u_{n(n-1)} = i_{Sn2}$$

...

$$G_{(n-1)1}u_{n1} + G_{(n-1)2}u_{n2} + \cdots + G_{(n-1)n}u_{n(n-1)} = i_{Sni}$$

其中, G_{ii} 为自电导,总为正; $G_{ij} = G_{ji}$ 为互电导,是结点 i 与结点 j 之间所有支路电导之和,总为负; i_{Sni} 为流入结点 i 的所有电流源电流的代数和。流入结点取正号,流出取负号。

特别需要注意的是,电路不含受控源时,系数矩阵为对称阵。当由结点电压方程求得各结点电压后,可进一步用结点电压表示各支路电流:

$$i_1 = \frac{u_{n1}}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_2}, \quad i_3 = \frac{u_{n2} - u_{n3}}{R_3}, \quad i_4 = \frac{u_{n2}}{R_4}, \quad i_5 = \frac{u_{n3} - u_S}{R_5}$$

因此,可以将结点电压法的一般步骤总结为:

- (1) 选定参考结点,标定 $n-1$ 个独立结点;
- (2) 对 $n-1$ 个独立结点,以结点电压为未知量,列写其 KCL 方程;
- (3) 求解上述方程,得到 $n-1$ 个结点电压;
- (4) 通过结点电压求各支路电流;
- (5) 进一步求电路中的其他物理量。

3.5.2 结点电压法的应用

根据 3.5.1 节总结的结点电压法的标准形式,首先写出如图 3-5-2 所示的只含有两个结点的电路的结点电压方程。图 3-5-2 中共有 A、B 两个结点,取 B 点为参考电位点(即 $\varphi_B = 0V$)。各支路电流的假设正方向如图 3-5-2 所示。

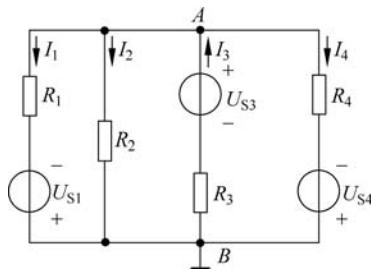


图 3-5-2 结点电压法应用

根据方程的标准形式,只需列 A 点的电位方程:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_A = -\frac{U_{S1}}{R_1} + \frac{U_{S3}}{R_3} - \frac{U_{S4}}{R_4} \quad (3-5-1)$$

整理得 A 点上结点的电位方程为

$$U_A = \frac{-\frac{U_{S1}}{R_1} + \frac{U_{S3}}{R_3} - \frac{U_{S4}}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad (3-5-2)$$

观察式(3-5-1)和式(3-5-2),可总结出其一般规律:方程的分母是各支路电阻的倒数和,分母各项均为正值;分子是各支路电动势与支路电阻的比值,分子各项有正有负,当电源的电压方向与结点电位方向相同时,取正号;反之,取负号。

上式适用于当电路中只有两个结点时的特殊情况,该式又称为弥尔曼定理(Millman),利用该定理解题十分方便。

【引申思考】

请读者思考:上式中利用弥尔曼定理计算得到结点 A 的电位后,如何计算各支路电流 $I_1 \sim I_4$ 呢?

【例题 3-5-1】 试列写如图 3-5-3 所示电路的结点电压方程。

【解】

根据结点电压法的标准形式,列出方程:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2 + G_S)U_1 - G_1U_2 - G_SU_3 &= G_SU_S \\ -G_1U_1 + (G_1 + G_3 + G_4)U_2 - G_4U_3 &= 0 \\ -G_SU_1 - G_4U_2 + (G_4 + G_5 + G_S)U_3 &= -G_SU_S \end{aligned}$$

【* 2013-3】 若如图 3-5-4 所示电路中的电压值为该点的结点电压,则电路中的电流 I 应为()。

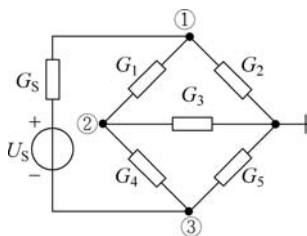


图 3-5-3 例题 3-5-1 图

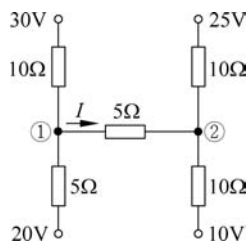


图 3-5-4 * 2013-2 题图

A. -2A

B. 2A

C. 0.8750A

D. 0.4375A

【解】 D

由结点电位法可知

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)u_{n1} - \frac{1}{5}u_{n2} - \frac{1}{10} \times 30 - \frac{1}{5} \times 20 = 0 \\ -\frac{1}{5}u_{n1} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)u_{n2} - \frac{1}{10} \times 25 - \frac{1}{10} \times 10 = 0 \end{cases}$$

得:

$$\begin{cases} u_{n1} = 21.875\text{V} \\ u_{n2} = 19.6875\text{V} \end{cases}$$

所以

$$I = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{5} = 0.4375 \text{ A}$$

3.5.3 结点电压法的特殊情况

1. 电路中含恒流源的情况

【例题 3-5-2】 计算图 3-5-5 所示电路中的支路电流 I_1 、 I_2 。

【解】

本题中电路包含 2 个结点,可以直接利用弥尔曼定理分析。

设: $V_B = 0 \text{ V}$ 。电路中最左侧支路含有理想电流源,并串联电阻 R_S 。此时,应格外注意,在列写 KCL 方程时,与恒流源串联的电阻并不参与计算,因此在 A 点的电位方程中不应包含 R_S 。

则:

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + I_S}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

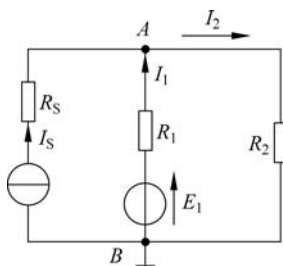


图 3-5-5 例题 3-5-2 图

2. 无伴电压源支路的处理

【例题 3-5-3】 列写如图 3-5-6 所示电路的结点电压方程。

【解 1】

按照标准方程的格式,引入电压源的电流 I 为变量,列写方程:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)U_1 - G_1U_2 &= I \\ -G_1U_1 + (G_1 + G_3 + G_4)U_2 - G_4U_3 &= 0 \\ -G_4U_2 + (G_4 + G_5)U_3 &= -I \end{aligned}$$

引入未知量 I ,需要增补结点电压与电压源间的关系。增补方程:

$$U_1 - U_3 = U_S$$

利用以上 3 个结点的电位方程以及增补方程可得出各结点的电位,进而可计算支路电流及元件电压等物理量。

【解 2】

可考虑选择合适的参考点。由于图中有一条支路仅含有电压源,因此以电压源的负极作为参考点,如图 3-5-7 所示,则电压源的正极对应的①点电位便是确定的。

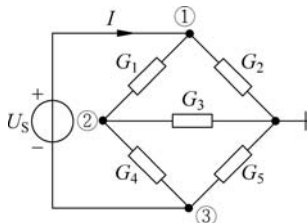


图 3-5-6 例题 3-5-3 图

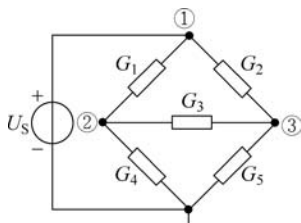


图 3-5-7 以电压源负极为参考点

对于结点①: $U_1 = U_S$;

对于结点②: $-G_1 U_1 + (G_1 + G_3 + G_4) U_2 - G_3 U_3 = 0$;

对于结点③: $-G_2 U_1 - G_3 U_2 + (G_2 + G_3 + G_5) U_3 = 0$ 。

上面这组方程相较解 1 的方程要简化得多。在分析电路时可以首先观察电路是否可以通过参考点的选择,将计算过程简化。

3. 受控电源支路的处理

对含有受控电源支路的电路,先把受控电源看作独立电源列方程,再将控制量用结点电压表示。

【例题 3-5-4】 列写如图 3-5-8 所示电路的结点电压方程。

【解】

(1) 先把受控电源当作独立电源列方程:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u_{n1} - \left(\frac{1}{R_1}\right) u_{n2} = i_{S1} \\ -\frac{1}{R_1} u_{n1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) u_{n2} = -g_m u_{R_2} - i_{S1} \end{cases}$$

(2) 用结点电压表示控制量,列出增补方程:

$$u_{n1} = u_{R_2}$$

【例题 3-5-5】 列写电路的结点电压方程,求图 3-5-9 所示电路中的电流 i 。

【解】

(1) 设参考点,如图 3-5-9 所示,这里选择受控电压源的负极为参考点,以简化计算。

(2) 把受控电源视为独立电源列方程。

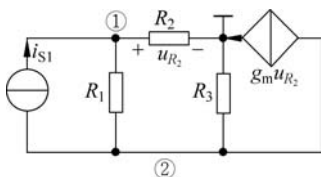


图 3-5-8 例题 3-5-4 题图

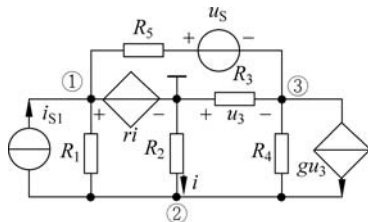


图 3-5-9 例题 3-5-5 题图

$$\begin{cases} u_{n1} = r i \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) u_{n2} - \left(\frac{1}{R_1}\right) u_{n1} - \left(\frac{1}{R_4}\right) u_{n3} = -i_{S1} + g u_3 \\ -\left(\frac{1}{R_5}\right) u_{n1} - \left(\frac{1}{R_4}\right) u_{n2} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) u_{n3} = -g u_3 - \frac{u_S}{R_5} \end{cases}$$

(3) 用结点电压表示控制量:

$$u_3 = -u_{n3}$$

通过联立方程组得到各结点电位。这样,所求的电流:

$$i = -u_{n2}/R_2$$

【例题 3-5-6】 列写图 3-5-10 所示电路的结点电压方程。

【解】

所选参考结点如图 3-5-10 所示。针对结点①、②、③列结点电压方程：

$$\begin{aligned} \left(1 + 0.5 + \frac{1}{3+2}\right) u_{n1} - 0.5 u_{n2} - u_{n3} &= -1 + \frac{4U}{5} \\ -0.5 u_{n1} + (0.5 + 0.2) u_{n2} &= 3 \\ u_{n3} &= 4 \end{aligned}$$

增补方程：

$$U = U_{n2}$$

注意：在列结点电压方程时，电路中与电流源串接的电阻不参与列方程。

【例题 3-5-7】 用结点电压法求如图 3-5-11 所示电路中的电压 U 和电流 I 。

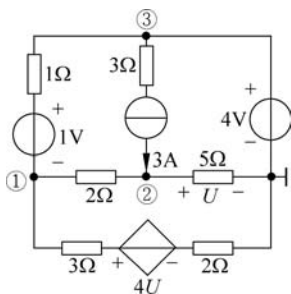


图 3-5-10 例题 3-5-6 题图

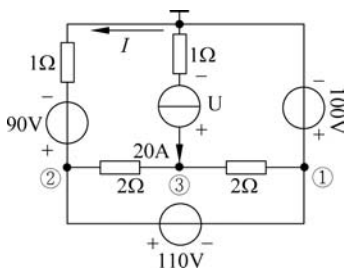


图 3-5-11 例题 3-5-7 题图

【解】

直接利用前面所介绍的方法，选择图中 100V 电压源的负极为参考点，针对结点①、②、③列结点电压方程：

$$\begin{aligned} U_{n1} &= 100\text{V} \\ u_{n2} &= 100 + 110 = 210(\text{V}) \\ -0.5 u_{n1} - 0.5 u_{n2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) u_{n3} &= 20 \end{aligned}$$

解得：

$$\begin{aligned} U_{n3} &= 20 + 50 + 105 = 175(\text{V}) \\ U &= u_{n3} + 1 \times 20 = 195(\text{V}) \\ I &= -\frac{u_{n2} - 90}{1} = -120(\text{A}) \end{aligned}$$

3.6 本章小结

本章介绍了 4 种电路的分析方法：支路电流法、网孔电流法、回路电流法和结点电压法。在此将各种方法的解题步骤和注意事项进行总结：



微课 13 结点
电位法

(1) 支路电流法。

序号	解 题 步 骤	结 论 与 引 申
1	对每一支路假设一未知电流	1. 假设未知数时,正方向可任意选择。 2. 原则上,有 b 个支路就设 b 个未知数(恒流源支路除外)
2	列电流方程: 对每个结点有 $\sum I = 0$	若电路有 n 个结点,则可以列出 $(n-1)$ 个独立方程。
3	列电压方程: 对每个回路有 $\sum E = \sum U$	1. 未知数 $= b$, 已有 $(n-1)$ 个结点方程,需补足 $b-(n-1)$ 个方程。 2. 独立回路的选择: 一般按网孔选择
4	解联立方程	根据未知数的正负决定电流的实际方向

(2) 网孔电流法。

- ① 选网孔为独立回路,并确定其绕行方向;
- ② 以网孔电流为未知量,列写其 KVL 方程;
- ③ 求解上述方程,得到 l 个网孔电流;
- ④ 求各支路电流;
- ⑤ 其他分析。

(3) 回路电流法。

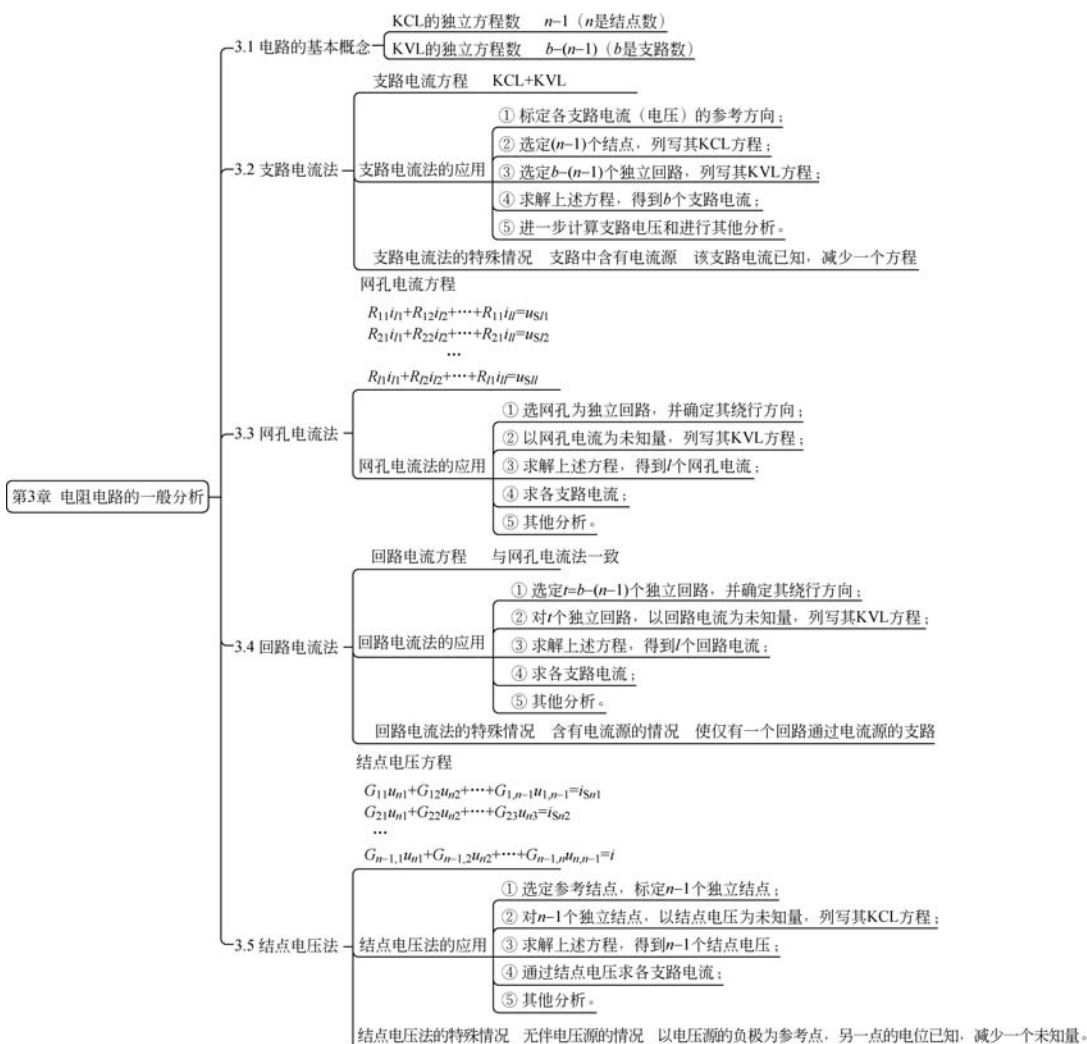
- ① 选定 $l = b - (n - 1)$ 个独立回路,并确定其绕行方向;
- ② 对 l 个独立回路,以回路电流为未知量,列写其 KVL 方程;
- ③ 求解上述方程,得到 l 个回路电流;
- ④ 求各支路电流;
- ⑤ 其他分析。

(4) 结点电压法的一般步骤:

- ① 选定参考结点,标定 $n-1$ 个独立结点;
- ② 对 $n-1$ 个独立结点,以结点电压为未知量,列写其 KCL 方程;
- ③ 求解上述方程,得到 $n-1$ 个结点电压;
- ④ 通过结点电压求各支路电流;
- ⑤ 其他分析。

在利用上述方法分析问题的过程中,要注意各种方法的特点,合理地选择解题方法,用最便捷的方法解决问题。

第3章 思维导图



习 题

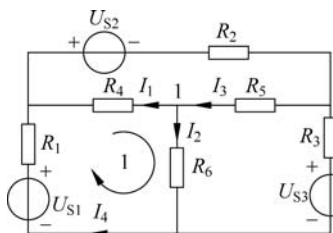
3-1 电路如题 3-1 图所示。

(1) 说明电路的独立结点数和独立回路数；

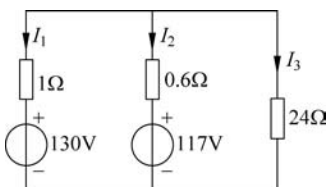
(2) 选出一组独立结点和独立回路, 列出 $\sum I = 0$ 和 $\sum U = 0$ 的方程。

3-2 电路如题 3-2 图所示, 试用支路电流法求各支路电流。

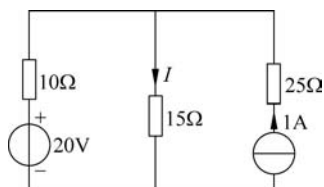
3-3 如题 3-3 图所示的电路, 试用支路电流法求电流 I 。



题 3-1 图



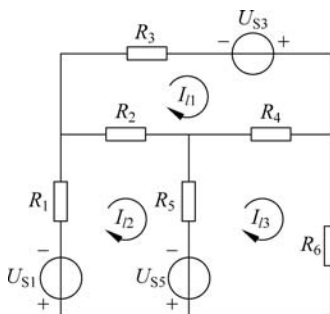
题 3-2 图



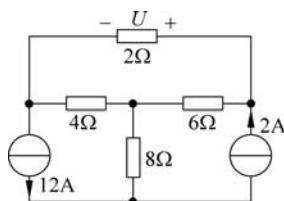
题 3-3 图

3-4 列出题 3-4 图所示平面电路的网孔电流方程(网孔电流流向规定为顺时针流向)。

3-5 用网孔电流法求题 3-5 图所示电路中的电压 U 。



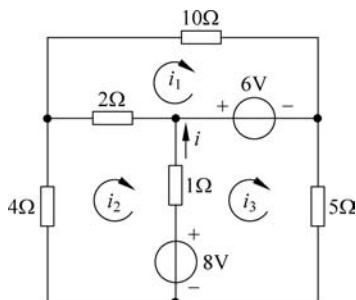
题 3-4 图



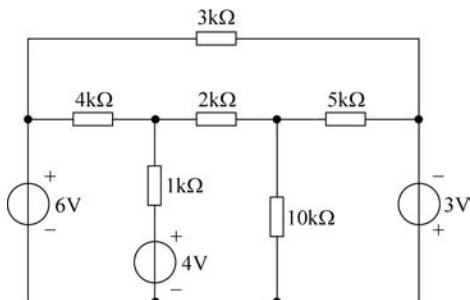
题 3-5 图

3-6 利用网孔分析法计算如题 3-6 图所示电路中的电流 i 。

3-7 利用网孔分析法确定流过题 3-7 图所示电路中 $10\text{k}\Omega$ 电阻的电流。



题 3-6 图

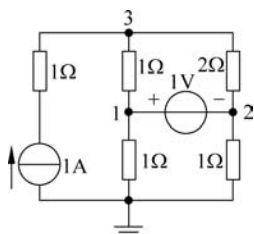


题 3-7 图

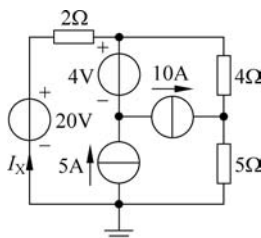
3-8 用回路电流法求如题 3-8 图所示电路中结点 1、2 和 3 的电位。

3-9 用回路电流法(且列最少的方程)求如题 3-9 图所示电路中的 I_X 。

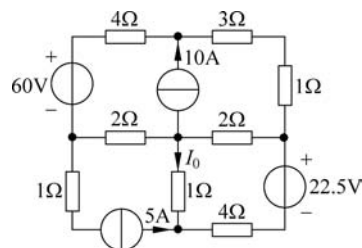
3-10 用回路电流法确定如题 3-10 图所示电路中的 I_0 。



题 3-8 图



题 3-9 图

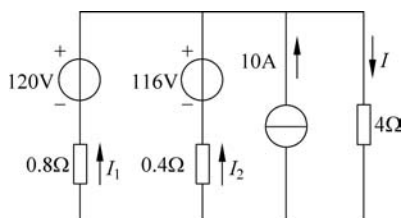


题 3-10 图

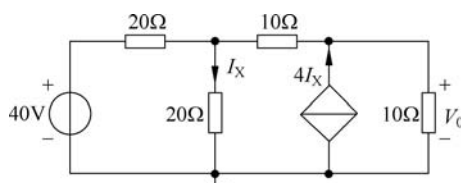
3-11 用结点电位法计算题 3-10 图中的电流 I_0 。

3-12 用结点电位法求解题 3-12 图中各支路的电流 I 、 I_1 、 I_2 。

3-13 利用结点电位法确定如题 3-13 图所示电路中的 V_0 。

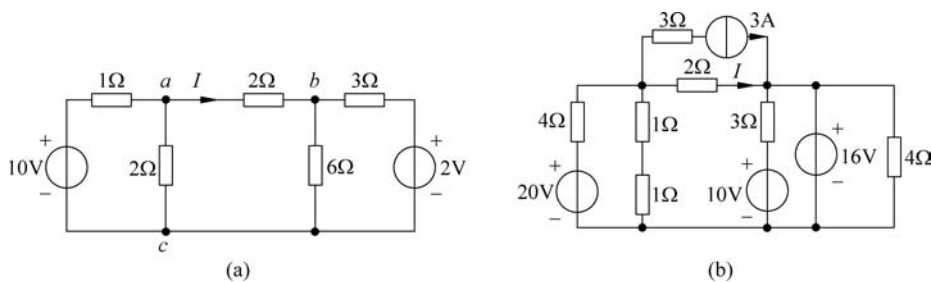


题 3-12 图



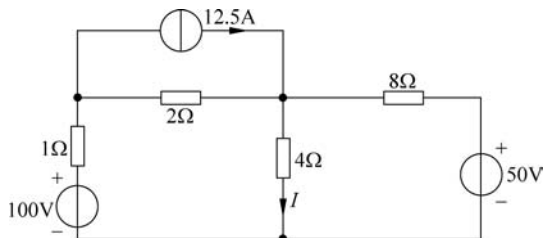
题 3-13 图

3-14 试用结点电位法求题 3-14 图所示电路中的电流 I 。



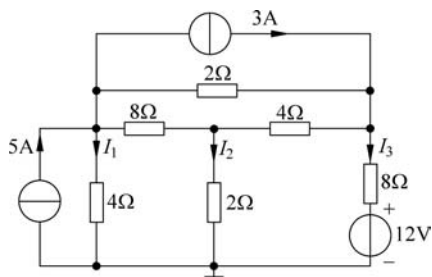
题 3-14 图

3-15 利用结点电位法计算如题 3-15 图所示电路中的电流 I 。



题 3-15 图

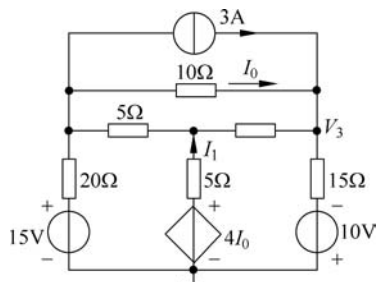
3-16 利用结点电位法计算如题 3-16 图所示电路中的 I_1 、 I_2 和 I_3 。



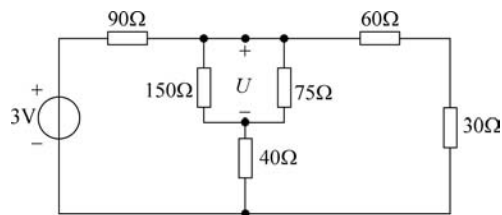
题 3-16 图

3-17 利用结点电位法计算如题 3-17 图所示电路中的 I_1 。

3-18 求如题 3-18 图所示电路中的电压 U 。



题 3-17 图



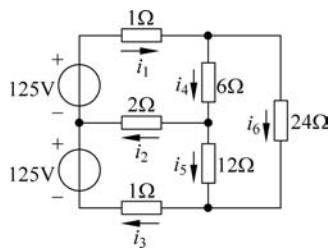
题 3-18 图

3-19 如题 3-19 图所示电路是一个住宅功率分布电路的直流模型。

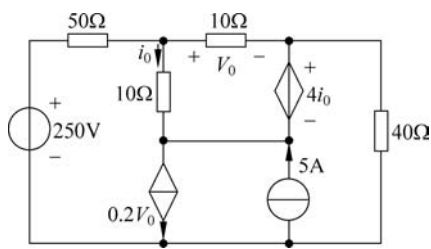
(1) 利用结点电位法求支路电流 $i_1 \sim i_6$ 。

(2) 验证消耗的总功率等于产生的总功率,以此来检验所求的支路电流。

3-20 求如题 3-20 图所示电路中的 V_0 与 i_0 。



题 3-19 图



题 3-20 图