

第 5 章

组合计数

5.1 内容提要

定理 5.1(加法原理) 假定 $S_1, S_2, \dots, S_t$ 均为集合, 第 i 个集合 S_i 有 n_i 个元素。若 $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ 为两两不交的集合(若 $i \neq j, S_i \cap S_j = \emptyset$), 则可以从 $S_1, S_2, \dots, S_t$ 选择出的元素总数为 $n_1 + n_2 + \dots + n_t$ (即集合 $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_t$ 含有 $n_1 + n_2 + \dots + n_t$ 个元素)。

定理 5.2(乘法原理) 如果一项工作需要 t 步完成, 第 1 步有 n_1 种不同的选择, 第 2 步有 n_2 种不同的选择, $\dots$, 第 t 步有 n_t 种不同的选择, 那么完成这项工作所有可能的不同的选择总数为 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_t$ 。

排序 n 个不同元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一种排列为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一个排序。

定理 5.3 n 个元素的排列共有 $n!$ 种。

排列 n 个(不同)元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 r 排列是 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的 r 元素子集上的排列。 n 个不同元素上的 r 排列的个数记作 $P(n, r)$ 。

定理 5.4 n 个不同元素上的 r 排列数目为 $P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$, $r \leq n$ 。

组合 给定集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 包含 n 个元素, 从 X 中无序、不重复选取的 r 个元素称为 X 的一个 r 组合, X 的所有 r 组合的个数记作 $C(n, r)$ 。

定理 5.5 n 个不同元素上的 r 组合数为

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}, \quad r \leq n$$

定理 5.6 令 $a_1 a_2 \dots a_r$ 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个 r 组合。在字典排序中, 第一个 r 组合是 $12 \dots r$ 。最后一个 r 组合是 $(n-r+1)(n-r+2) \dots n$ 。设 $a_1 a_2 \dots a_r \neq (n-r+1)(n-r+2) \dots n$ 。令 k 是满足 $a_k < n$ 且使得 $a_k + 1$ 不同于 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 中的任何一个数的最大整数。那么在字典排序中, $a_1 a_2 \dots a_r$ 的直接后继 r -组合是 $a_1 \dots a_{k-1} (a_k + 1) (a_k + 2) \dots (a_k + r - k + 1)$ 。

定理 5.7 设序列 S 包含 n 个对象, 其中第 1 类对象有 n_1 个, 第 2 类对象有 n_2 个, $\dots$, 第 t 类对象有 n_t 个, 则 S 的不同排序个数为

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$$

定理 5.8 X 为包含 t 个元素的集合, 在 X 中允许重复、不计顺序地选取 k 个元素, 共有

$$C(k+t-1, t-1) = C(k+t-1, k)$$

种选法。

定理 5.9(二项式定理) 设 a 和 b 为实数, n 为正整数, 则

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k$$

其中 $C(n, r)$ 为 $a+b$ 的幂的展开式中的系数, 故称为二项式系数。

定理 5.10 对任意 $1 \leq k \leq n$, $C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$ 。

定理 5.11 鸽笼原理(第一种形式) n 只鸽子飞入 k 个鸽笼, $k < n$, 则必存在某个鸽笼包含至少两只鸽子。

定理 5.12 鸽笼原理(第二种形式) 设 f 为有限集合 X 到有限集合 Y 的函数, 且 $|X| > |Y|$, 则必存在 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, X 相当于第一种形式中的鸽子, Y 相当于第一种形式中的鸽笼。鸽子 x 飞入鸽笼 $f(x_1)$ 。由鸽笼原理的第一种形式, 至少有两只鸽子 $x_1, x_2 \in X$ 飞入同一个鸽笼, 即对某两个 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 满足 $f(x_1) = f(x_2)$ 。

定理 5.13 鸽笼原理(第三种形式) 设 f 为有限集合 X 到有限集合 Y 上的函数, $|X| = n, |Y| = m$ 。令 $k = \lceil n/m \rceil$, 则至少存在 k 个元素 $a_1, a_2, \dots, a_k \in X$, 满足 $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k)$ 。

递推定义函数 为了定义以非负整数集合作为其定义域的函数, 就要规定这个函数在 0 处的值, 并给出从较小的整数处的值来求出当前值的规则。这样的定义称为递推定义。

递推定义集合 递推定义可用来定义集合, 先给出初始元素, 然后给出从已知元素构造其他元素的规则。以这种方式描述的集合是严格定义的。

常数 k 阶齐次线性递推关系 形为 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, c_k \neq 0$ 的递推关系称为常数 k 阶齐次线性递推关系。

特征方程与特征根 方程 $p^k - c_1 p^{k-1} - c_2 p^{k-2} - \dots - c_{k-1} p - c_k = 0$ 称为 k 阶线性齐次递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \dots - c_k a_{n-k}$ 的特征方程, 其中 p 是一个常数。方程的解 p 称为该递推关系的特征根。

定理 5.14 令

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad (1)$$

为常数二阶齐次线性关系。

(1) 若 S 和 T 为式①的解, 则 $U = bS + dT$ 也为式①的解。

(2) 若 r 为方程

$$t^2 - c_1 t - c_2 = 0 \quad (2)$$

的一个根, 则序列 $r^n (n=0, 1, \dots)$ 为式①的一个解。

(3) 若 a_n 为式①定义的序列,

$$a_0 = C_0, \quad a_1 = C_1 \quad (3)$$

且 r_1 和 r_2 为方程②的两个不相同的根, 则存在常数 b 和 d , 使得

$$a_n = br_1^n + dr_2^n, \quad n=0, 1, \dots$$

成立。

定理 5.15(Master 定理) 设 $a \geq 1, b > 1$ 为常数, $f(n)$ 为函数, $T(n)$ 为非负整数, 且 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, 则有以下结果:

(1) $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, $\epsilon > 0$, 那么 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ 。

(2) $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, 那么 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ ①。

(3) $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, $\epsilon > 0$, 且对于某个常数 $c < 1$ 和所有的充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$, 那么 $T(n) = \Theta(f(n))$ 。

定理 5.16 对输入规模为 n 的二分法查找, 在最坏情形下的时间复杂度为 $O(\log n)$ 。

生成函数 对于序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$, 多项式 $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 称为序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 的生成函数。

下面用 $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ 表示序列 $b_0, b_1, b_2, \dots$ 的生成函数; $C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ 表示序列 $c_0, c_1, c_2, \dots$ 的生成函数。

性质 5.1 如果 $b_n = \alpha a_n$, α 为常数, 则 $B(x) = \alpha A(x)$ 。

性质 5.2 如果 $c_n = a_n + b_n$, 则 $C(x) = A(x) + B(x)$ 。

性质 5.3 如果 $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$, 则 $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ 。

性质 5.4 如果 $b_n = \begin{cases} 0, & n < l \\ a_{n-l}, & n \geq l \end{cases}$, 则 $B(x) = x^l \cdot A(x)$ 。

性质 5.5 如果 $b_n = a_{n+l}$, 则 $B(x) = \frac{A(x) - \sum_{n=0}^{l-1} a_n x^n}{x^l}$ 。

性质 5.6 如果 $b_n = \sum_{i=0}^n a_i$, 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$ 。

性质 5.7 如果 $b_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$, 且 $A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$ 。

性质 5.8 如果 $b_n = \alpha^n a_n$, α 为常数, 则 $B(x) = A(\alpha x)$ 。

性质 5.9 如果 $b_n = na_n$, 则 $B(x) = xA'(x)$ 。

性质 5.10 如果 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$, 则 $B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(x) dx$ 。

指数型生成函数 对于序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$, 多项式

$$G_e(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

称为序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 的指数型生成函数。

性质 5.11 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的指数型生成函数分别为 $A_e(x)$ 和 $B_e(x)$, 则 $A_e(x) \cdot$

$$B_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \text{ 其中 } C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}。$$

5.2 例题精选

例 5.1 设 A 为 n 元集, 问:

(1) A 上的自反关系有多少个?

① 本书以 2 为底的对数直接表示为 $\log$, 如 $\log_2 b$ 表示为 $\log b$ 。

(2) A 上的反自反关系有多少个?

(3) A 上的对称关系有多少个?

(4) A 上的反对称关系有多少个?

解: (1) 在 A 上的自反关系对应的关系矩阵中, 主对角线元素都是 1, 其他位置的元素可以是 1, 也可以是 0, 每个位置有两种选择。这种位置有 $n^2 - n$ 个, 根据乘法原理, 自反关系的个数是 $2^{n^2 - n}$ 个。

(2) 与(1)类似, 反自反关系的个数也是 $2^{n^2 - n}$ 个。

(3) 考虑 A 上对称关系的矩阵。考虑分步处理的方法, 先考虑主对角线上的元素。对于主对角线上的每个位置, 元素可以选择 0 或 1, 有 2 种选法, 总共有 2^n 种方法。再考虑不在主对角线上的元素, 它们的值的选择并不是完全独立的。因为矩阵是对称的, i 行 j 列的元素 r_{ij} 必须与 j 行 i 列的元素 r_{ji} 相等。因此, 当矩阵的上三角元素(或下三角元素)的值确定以后, 另一半对称位置的元素就完全确定了。这种能够独立选择 0 或 1 的位置有 $\frac{n^2 - n}{2}$

个。因此, 根据乘法原理, 构成矩阵的方法数是 $2^n 2^{\frac{n^2 - n}{2}} = 2^{\frac{n^2 + n}{2}}$ 。

(4) 与(3)的分析类似, 也采用分步处理的方法, 区别在于对非主对角线位置元素取值的约束条件不一样。将这些位置分成 $\frac{n^2 - n}{2}$ 组, 每组包含处在对称位置的两个元素 r_{ij} 和 r_{ji} 。根据反对称的性质, r_{ij} 和 r_{ji} 的取值有三种可能: ① $r_{ij} = 1, r_{ji} = 0$; ② $r_{ij} = 0, r_{ji} = 1$; ③ $r_{ij} = r_{ji} = 0$ 。因此, 所有这些位置元素的选择方法数为 $3^{\frac{n^2 - n}{2}}$ 。由乘法原理, 考虑到主对角线上的元素的选取, 总方法数是 $2^n 3^{\frac{n^2 - n}{2}}$ 。

例 5.2 说明排列生成算法如何生成 163542 的后继。

解: 首先考虑能否在 163542 后找到一个形如 1635__ 的排列。唯一与 163542 不同的形如 1635__ 的排列是 163524, 但 $163524 < 163542$, 故 163542 的后继不是形如 1635__ 的排列。

再考虑能否在 163542 后找到一个形如 163___ 的排列。后三个数字必为 $\{2, 4, 5\}$ 的一个排列。由于 542 是 $\{2, 4, 5\}$ 上最大的排列, 形如 163___ 的排列都小于给定的排列。故 163542 的后继不是形如 163___ 的排列。

给定排列的后继不能以 1635 或 163 开头, 原因在于给定的排列中余下的数字逆序排列(分别为 42 和 542)。故从右向左扫描, 找到第一个数字 d , 使它的右邻 r 满足 $d < r$ 。本例中, 第三个数字 3 满足这个性质, 所以给定的排列的后继以 16 开头。16 后的第一个数字必须大于 3。为找到比给定排列大的最小的排列, 该位应为 4。于是, 给定排列的后继以 164 开头。为使排列最小, 余下的三个数字 235 应按升序排列。于是, 给定排列的后继为 164235。

例 5.3 证明: 把 5 个顶点放到边长为 2 的正方形中, 至少存在两个顶点, 它们之间的距离小于或等于 $\sqrt{2}$ 。

证明: 鸽笼原理可用于判断是否存在给定性质的对象。若鸽笼原理的条件成立, 则存在满足条件的对象, 但鸽笼原理并不能指出这样的对象怎样去寻找, 或是在哪里。运用鸽笼原理时必须确定哪些对象相当于鸽子, 哪些对象相当于鸽笼。本例中 5 个顶点相当于鸽子, 关键在于鸽笼的确定。若采用如图 5-1(a)所示的方式, 则不能说明对象具有对象之间的距

离小于或等于 $\sqrt{2}$ 这样的性质。而采用如图 5-1(b)所示的方式,则可以证明把 5 个顶点放到边长为 2 的正方形中,至少存在两个顶点,它们之间的距离小于或等于 $\sqrt{2}$ 。

如图 5-1(b)所示将边长为 2 的正方形分为 4 个边长为 1 的小正方形,根据鸽笼原理,5 个顶点中必有 2 个顶点会放到其中一个小正方形里,这两个顶点的距离显然小于或等于 $\sqrt{2}$ 。

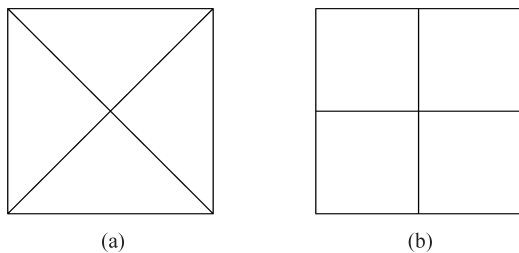


图 5-1 例 5.3 示意图

例 5.4 在计算机中经常需要对数据进行排序,其中有一种排序算法称为插入排序。该算法思想是:假设前 $i-1$ 个数已经排好,从第 $i-1$ 个数开始,从后向前,顺序将已经排好的数与第 i 个数进行比较,直到找到第 i 个数应该放置的适当位置,然后插入第 i 个数。算法开始时 $i=2$,每当上述过程完成后 i 加 1,直到 $i=n$ 的过程完成为止。

试确定插入排序算法在最坏情况下的比较次数。为了简单起见,不妨设输入是 n 个不同的数构成的数组,其中 $n=2^k$, k 为正整数。

解: 设 $W(n)$ 表示插入排序算法在最坏情况下的比较次数。如果 $n-1$ 个数已经排好,为插入第 n 个数,最坏情况下需要将它与前 $n-1$ 个数中的每一个都进行一次比较,因此得到递推方程

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

设该方程的特解为 $W^*(n) = P_1 n + P_2$, 将它代入递推方程得

$$P_1 n + P_2 - (P_1(n-1) + P_2) = n - 1$$

化简得 $P_1 = n - 1$, 左边是 n 的 0 次多项式, 右边是 n 的 1 次多项式。没有常数 P_1 能够使它成立。原因在于: 如果特征根是 1, 当把特解代入方程后, 在等式左边所设特解的最高次项和常数项都被抵消了。为了保证等式两边的多项式的次数相等, 必须将特解的次数提高。不妨设特解为 $W^*(n) = P_1 n^2 + P_2 n$, 将它代入递推方程得

$$(P_1 n^2 + P_2 n) - (P_1(n-1)^2 + P_2(n-1)) = n - 1$$

化简得

$$2P_1 n - P_1 + P_2 = n - 1$$

解得 $P_1 = 1/2, P_2 = -1/2$ 。通解为

$$W(n) = 1^n c + n(n-1)/2 = c + n(n-1)/2$$

代入初值 $W(1) = 0$, 得 $c = 0$, 最终得到 $W(n) = n(n-1)/2$ 。这说明 $W(n) = O(n^2)$ 。

5.3 应用案例

122

5.3.1 大使馆通信的码字数

问题描述: 某国大使馆与它的国家通信,所用的码字由长度为 n 的十进制数字串组成。为了捕捉到传输中的错误,约定每个码字中字符 3 和字符 7 的总个数必须是奇数。可能的码字有多少个?

解答: 设 s_n 表示长度为 n 的容许码字的个数。下面推导 s_n 的递推关系。考虑长度为 $n+1$ 的字 W ,它由 s_{n+1} 计数,它的末尾要么是 3 或 7,要么都不是。如果它以 3 或 7 结尾,那么从 W 中删除最后一个数字得到长度为 n 的字 W^* ,它一定有偶数个 3 和 7。因为共有 10^n 个长度为 n 的十进制数字串,所以这种字 W^* 共有 $10^n - s_n$ 个。因为 W 的最后一个数字可以是 3 或 7,因此可能的这种形式的字 W 共有 $2 \times (10^n - s_n)$ 个。

现在假设容许字 W 不以 3 或 7 结尾,那么删除它的最后一个数字后得到一个被 s_n 计数的字。因为 W 的最后一个数字有 8 种可能性,所以这种形式的容许字的个数是 $8s_n$ 。

综合上面两段的结果得到

$$s_{n+1} = 2 \times (10^n - s_n) + 8s_n = 2 \times 10^n + 6s_n$$

其中, $n \geq 1$ 。显然, $s_0 = 0$, 因为空串不可能有奇数个 3 和 7。可以利用这个递推关系计算出如表 5-1 所示的结果。

例如, s_2 计算恰好有一个 3 或 7 的 2 位的串的个数。因为可以用 3 也可以用 7, 又因为这可以是第一个数字也可以是第二个数字, 并且因为剩下的那个数字有 8 种选择, 因此这样的串有 $2 \times 2 \times 8 = 32$ 个。

利用生成函数得到 s_n 的显式公式。设 S 是序列 $\{s_n\}$ 的生成函数, 于是

$$S = s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \cdots$$

有

$$\begin{aligned} S &= s_0 + (2 \times 10^0 + 6s_0)x + (2 \times 10^1 + 6s_1)x^2 + (2 \times 10^2 + 6s_2)x^3 + \cdots \\ &= s_0 + 2x(10^0 + 10^1x + 10^2x^2 + \cdots) + 6x(s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \cdots) \\ &= 0 + 2x(1 + 10x + (10x)^2 + \cdots) + 6xS \\ &= 2x(1 - 10x)^{-1} + 6xS \end{aligned}$$

求解 S , 得到

$$S(1 - 6x) = 2x(1 - 10x)^{-1}$$

或者

$$S = \frac{2x}{(1 - 6x)(1 - 10x)}$$

求常数 a 和 b , 使得

$$\frac{2x}{(1 - 6x)(1 - 10x)} = \frac{a}{1 - 6x} + \frac{b}{1 - 10x} = \frac{a(1 - 10x) + b(1 - 6x)}{(1 - 6x)(1 - 10x)}$$

表 5-1 用递推关系计算结果

n	s_n
0	0
1	$2 \times 10^0 + 6 \times 0 = 2$
2	$2 \times 10^1 + 6 \times 2 = 32$
3	$2 \times 10^2 + 6 \times 32 = 392$

由分子相等给出方程 $a+b=0$ 和 $-10a-6b=2$ 。很容易解得： $a=-1/2, b=1/2$ 。因此有

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}(1-6x)^{-1} + \frac{1}{2}(1-10x)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}[(1-10x)^{-1} - (1-6x)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2}[(1-10x+100x^2+\cdots) - (1+6x+36x^2+\cdots)] \end{aligned}$$

从中看到, S 中 x^r 的系数是:

$$s_r = \frac{10^r - 6^r}{2}$$

例如, $s_2 = (100-36)/2=32, s_3 = (1000-216)/2=392$ 。这些值与先前的计算相吻合。

5.3.2 条条道路通罗马

问题描述: 魔术表演者甲请他的临时助手乙想一个数字, 然后甲用“心灵感应”来感应乙的数字, 如图 5-2 所示, 甲可以感应出乙最终停的位置, 请说明其中的数学原理。

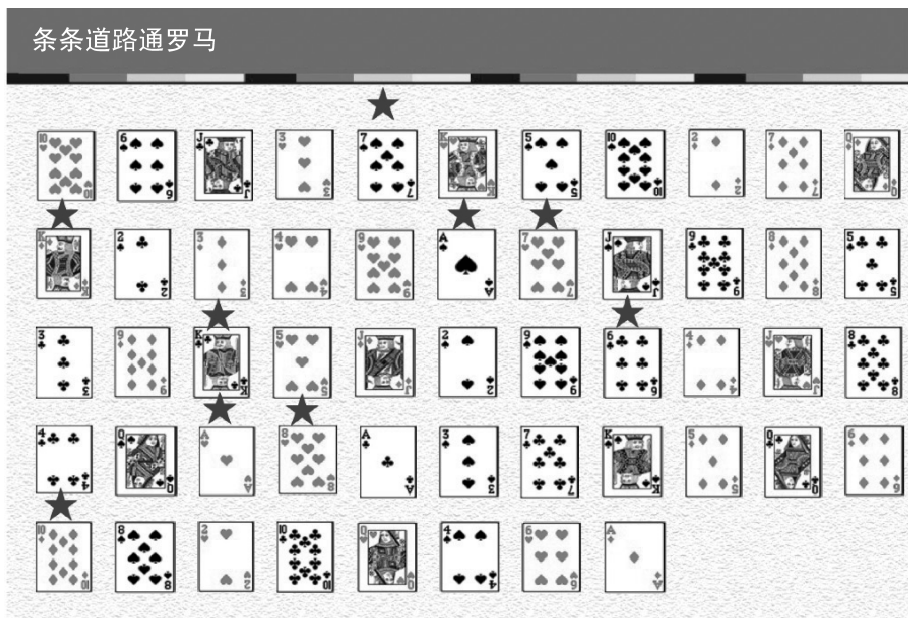


图 5-2 条条道路通罗马

甲拿一副扑克牌, 随便洗牌, 发出来排好。先数牌, 规则是从 1~10 由乙随便选一个数字, 例如 5 (乙自己记住, 不告诉甲), 按顺序依次数 5 张牌, 若第 5 张牌的点数大于 10 (J、Q、K), 则当成数字 5 继续数下去; 若第 5 张牌的点数小于或等于 10 (A, 2, 3, ..., 10), 则按照第 5 张牌的点数依次数下去; 重复这一过程直到剩余牌的数目小于要数的数字时, 数牌停止。假设选的数字是 5, 图 5-2 给出了具体数牌的过程, 上方标五星的是每次数的牌, 从 ♠7 开始, 最终停在 ♦10。【资料来源: 刘炯朗. 魔术中的数学[J]. 中国计算机学会通讯, 2015

(12)】

解答：假设在魔术中乙(助手)想到的数字是6,而甲不知道乙的数字是什么。甲也选一个数字,例如5(不一定与乙相同),乙和甲都按照上述的规则数牌,数到最后,无法再走下去了,可以发现乙的结果与甲的结果相同!如图5-3所示,其中上方标记圆点为开始选数字5的路径,上方标记菱形为开始选数字6的路径。这套魔术的秘密(数学原理)是甲可以把乙停下的位置感应出来。

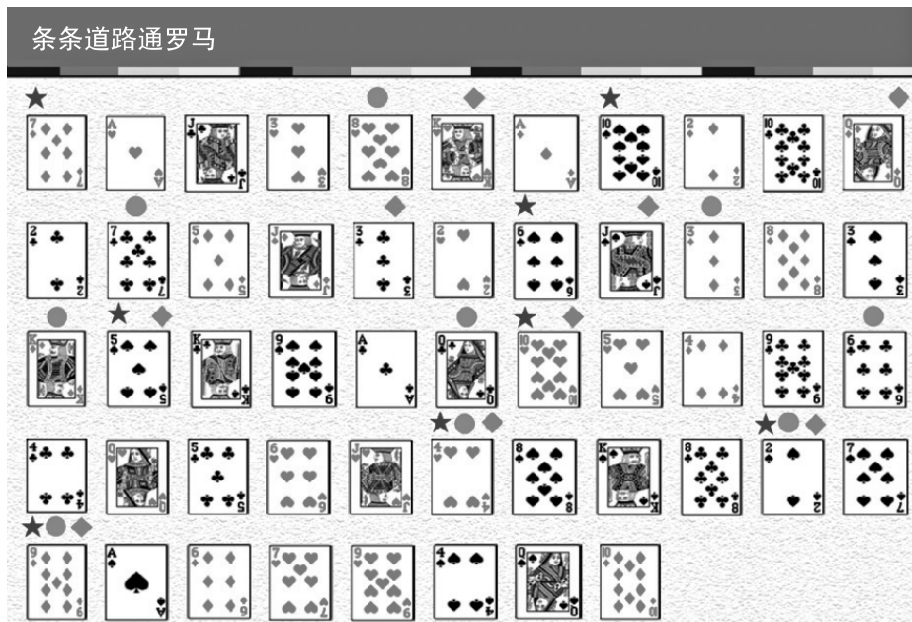


图 5-3 两条路径示例

还可以换别的数来尝试,例如开始选1,图5-3中上方标记五星的是数牌的路径,最后也是停在♦9上。事实上,将一副牌排好,在数字1~10中随便选一个,按照前面的规则数到最后,停在同一个地方的概率大约为80%。运气好的话,乙选的数字跟甲选的数字是会碰头的。假如不碰头,甲可以说:“今天心灵感应有点问题,让我再感应一次”,最后总是能碰头的。

这背后的数学原理是,只要助手乙和甲走的两条路中间有一点是两条路径碰头处,那么之后的路径就是完全相同的,最后一定到达同一个地方停下来。已知52张牌,一共是 $4 \times (1+2+\cdots+10)+12 \times 5=280$ 点,平均每张牌是 $280 \div 52 \approx 5.38$ 点,也就是说平均每5张就会有一张在所选的路径上,那么在每5张牌中碰到的概率约为 $1/5$,因此在这52张牌中完全碰不上的概率约为 $(1-1/5)^{10} \approx 0.107$,最终碰上的概率约为0.893。上面这个模型是数学家做出来的,但是通过模拟,可以发现结果也差不多,约为0.8524,见图5-4。因此,乙想一个数字,甲想一个数字,两条路径走到同一个终点的概率大概是85%~89%。正如福尔摩斯所说:当沿着两条不同的思路思考时,就会找到一个相交点,那应该就是相当接近真相了。

模拟：10 条路径通达魔术师的罗马

路径 10	0.58	路径 5	0.05
路径 9	0.08	路径 4	0.04
路径 8	0.08	路径 3	0.025
路径 7	0.07	路径 2	0.014
路径 6	0.06	路径 1	0.001

$$0.58 \times 1 + 0.08 \times 0.9 + 0.08 \times 0.8 + 0.07 \times 0.7 + 0.06 \times 0.6 + 0.05 \times 0.5 + 0.04 \times 0.4 + 0.025 \times 0.3 + 0.014 \times 0.2 + 0.001 \times 0.1 = 0.8524$$

图 5-4 “条条道路通罗马”的数学原理

5.4 习题解答

5.1 当执行完以下的代码后, k 的值是多少?

```
k=0
for i1:=1 to n1
  for i2:=1 to n2
    ⋮
    for im:=1 to nm
      k:=k+1
```

解：由于这个程序是从 $k=0$ 开始, 不断地给 k 加 1, 而加 1 的个数就是执行循环的次数, 即 $n_1 n_2 \cdots n_m$ 次, 所以当执行完代码后, k 的值是 $n_1 n_2 \cdots n_m$ 。

5.2 在一幅数字图像中, 若将每个像素用 8 位进行编码, 那么每个点有多少种不同的取值?

解：用 8 位进行编码又分为 8 个步骤：选择第一个位, 选择第二个位, $\cdots$, 选择第八个位。每一位有两种选择, 故根据乘法原理, 8 位编码共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ 种取值。

5.3 X 为 n 个元素的集合, 有多少满足 $A \subseteq B \subseteq X$ 的有序对 (A, B) ?

解：给定一个满足 $A \subseteq B \subseteq X$ 的有序对 (A, B) , 可知 X 的每个元素必属于且仅属于 A 、 $B-A$ 、 $X-B$ 中的一个集合。反之, 若指定 X 的每一个元素到 A (该元素在 B 和 X 中)、 $B-A$ (该元素在 X 中)、 $X-B$ 三个集合中的一个, 也就唯一确定了满足 $A \subseteq B \subseteq X$ 的有序对 (A, B) 。可见, 满足 $A \subseteq B \subseteq X$ 的有序对 (A, B) 的个数等于将集合 X 中的元素指定到 A 、 $B-A$ 、 $X-B$ 三个集合的不同指派数。将这样的指派分为 n 个步骤：指定 X 中的第一个元素到 A 、 $B-A$ 、 $X-B$ 三个集合中的一个; 指定 X 中的第二个元素到 A 、 $B-A$ 、 $X-B$ 三个集合中的一个; $\cdots$; 指定 X 中的第 n 个元素到 A 、 $B-A$ 、 $X-B$ 三个集合中的一个。每一步有三种指定方法, 故满足 $A \subseteq B \subseteq X$ 的有序对 (A, B) 的个数为 $\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{n \text{ 个 } 3} = 3^n$ 。

5.4 按字典序列出 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上的所有排列以及 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的所有 4 组合。

解： $\{1, 2, 3, 4\}$ 上的所有排列为

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143,
2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241,
3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的所有4组合为

$$1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346, \\ 1356, 1456, 2345, 2346, 2356, 2456, 3456$$

与 r 组合生成算法类似,排列生成算法可按字典序列出 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的所有排列。

5.5 若按字典序列出 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 上所有的4组合,则2367的下一个字串是什么?

解: 以23开头的最大的字串为2367,故字串2367的下一个字串以24开头。因为字串2456是以24开头的最小的字串,故字串2367的下一个字串是2456。

5.6 说明排列生成算法如何生成163542的后继,应使左边尽可能多的数字保持不变。

解: 见主教材例5.14。

5.7 求 $(a+b)^9$ 展开式中 a^5b^4 项的系数。

解: 在二项式定理中令 $n=9, k=4$,得展开式含 a^5b^4 的一项为

$$C(n, k)a^{n-k}b^k = C(9, 4)a^5b^4 = 126a^5b^4$$

故 a^5b^4 项的系数为126。

5.8 求和: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ 。

解: 先求 $\{n^2\}$ 的生成函数 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ 。由 $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$,得 $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 。对上式两边求微分得 $\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$,所以有 $\frac{(1+x) \cdot x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = A(x)$ 。令 $b_n = \sum_{i=1}^n a_i$,根据性质5.6可知, $\{b_n\}$ 的生成函数是 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^4}$ 。所以 $B(x)$ 的展开式中 x^n 的系数是 $b_n = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。从而得到级数和 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

5.9 证明:对于 n 是正整数,有

$$1 \times \binom{n}{1} + 2 \times \binom{n}{2} + \dots + n \times \binom{n}{n} = n \times 2^{n-1}$$

证明: 由二项式定理 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kx^{k-1}$,两边求导数得 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} kx^{k-1}$ 。令 $x=1$,即为要证明的等式。

5.10 列表中有80件物品的清单,每个物品的属性为“可用”或“不可用”,共有45个“可用”物品,证明:至少有两件可用物品编号之差恰为9。例如,列表中可用物品13号和22号,或69号和78号都满足条件。

证明: 令 a_i 表示第 i 个可用物品的编号,则只需证明存在 i 和 j ,使 $a_i - a_j = 9$ 。考虑两组数字: $a_1, a_2, \dots, a_{45}$ 和 $a_1 + 9, a_2 + 9, \dots, a_{45} + 9$ 。两组中90个数字的取值范围为 $1 \sim 89$,根据鸽笼原理的第二种形式,必有两个数字相等。由于前一组中的数字两两不同,后一