

第3章

信道与信道容量



本章学习重点：

- 信道的分类及参数表示。
- 信道容量的定义。
- 离散单个符号信道的定义及其容量计算方法。
- 离散序列信道的定义及其容量计算。
- 连续信道的定义及其容量计算。

3.1 知识点

3.1.1 信道和信道的数学模型

1. 信道

信道是传输信息的通道,其任务是以信号方式传输信息、存储信息,研究信道就是研究信道中理论上能够传输或存储的最大信息量,即信道的容量问题。

2. 信道的数学模型

设信道的输入矢量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_i, \dots)$, $X_i \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; 输出矢量 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots)$, $Y_j \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, 通常用条件概率 $p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ (又称信道的转移概率) 描述信道输入、输出信号之间统计的依赖关系。

1) 无干扰信道

信道的输出与输入之间有确定的关系 $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, 转移概率

$$p(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \\ 0, & \mathbf{Y} \neq f(\mathbf{X}) \end{cases}$$

2) 有干扰无记忆信道

信道的输出与输入之间没有确定的关系, 转移概率满足

$$p(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) = p(y_1 | x_1) p(y_2 | x_2) \cdots p(y_L | x_L)$$

按输入、输出符号数目,又可将这类信道分为

- (1) 二进制离散信道;
- (2) 离散无记忆信道;
- (3) 离散输入、连续输出信道;
- (4) 波形信道。

3) 有干扰有记忆信道

实际的数字信道中,信道特性不理想,存在码间干扰,当前输出不仅与当前的输入有关,还与以前的输入有关,处理较困难。

3. 信道容量的定义

信道能传送的最大信息量,即信道容量(channel capacity),定义为

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y)$$

信息传输率: $R = I(X;Y)$

信息传输速率: $R_t = \frac{1}{t} I(X;Y)$

3.1.2 离散单符号信道及其容量

离散单符号信道中,信道输入 $X \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 输出 $Y \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 。

1. 对称离散无记忆信道容量的计算

信道的转移概率矩阵行对称,列也对称,即离散无记忆信道(discrete memoryless channel, DMC)输入对称,输出也对称。输入分布等概率时,对称 DMC 信道的容量为

$$C = \log m - H(Y | a_i) = \log m + \sum_{j=1}^m p_{ij} \log p_{ij}$$

式中, m 为输出符号集中符号的个数; $p(b_j | a_i)$ 简写为 p_{ij} 。

2. 准对称 DMC 信道

准对称 DMC 信道输入对称、输出不对称,此时信道容量 $C \leq \log m + \sum_{j=1}^m p_{ij} \log p_{ij}$ 。可将准对称的转移概率矩阵划分成若干互不相交的对称的子集,当输入分布等概率时,得到信道容量

$$C = \log n - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s) - \sum_{k=1}^r N_k \log M_k$$

式中, n 是输入符号个数; $p'_1, p'_2, \dots, p'_s$ 是转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 中一行的元素,即 $H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s) = H(Y | a_i)$; N_k 是第 k 个子矩阵中行元素之和, $N_k = \sum_j p(b_j | a_i)$; M_k 是第 k 个子矩阵中列元素之和, $M_k = \sum_i p(b_j | a_i)$; r 是互不相交的子集个数。

3.1.3 离散序列信道及其容量

离散序列信道中,序列长度为 L , 输入 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_L)$, 输出 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_L)$ 。

如果信道无记忆,则 $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l)$ 。

如果输入矢量 $\mathbf{X}$ 中的各个分量相互独立, 则 $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \geq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l)$ 。

如果输入矢量 $\mathbf{X}$ 独立且信道无记忆, 则等号成立。当输入矢量达到最佳分布时,

$$C = \max_{P_X} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \max_{P_X} \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l) = \sum_{l=1}^L \max_{P_X} I(X_l; Y_l) = \sum_{l=1}^L C(l)$$

当信道平稳时, $C_L = LC_1$ 。

3.1.4 连续信道及其容量

1. 连续单符号加性信道

输入 x 、输出 y 都是取值连续的一维随机变量, 加入信道的噪声是均值为零、方差为 σ^2 的加性高斯噪声, 概率密度函数为 $p_n(n) = N(0, \sigma^2)$ 。由于 $y = x + n$, $p_Y(y) = N(0, P)$, 所以 $p_X(x) = N(0, S)$, 即当信道输入是均值为零、方差为 S 的高斯分布随机变量时, 信息传输率达到最大值

$$C = \frac{1}{2} \log 2\pi e P - \frac{1}{2} \log 2\pi e \sigma^2 = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{S}{\sigma^2} \right)$$

2. 多维无记忆加性连续信道

输入输出都是随机序列, 由于信道无记忆, 因此 L 维加性无记忆高斯加性信道可等价成 L 个独立的并联高斯加性信道。当且仅当输入矢量 $\mathbf{X}$ 中的各分量统计独立, 且各分量均为均值为零、方差为 P_l 的高斯变量时, 信道容量

$$C = \max_{p(x)} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2} \right) \text{ bit/L 维自由度}$$

式中, σ_l^2 是第 l 个单元时刻高斯噪声的方差。

3. 限时限频限功率加性高斯白噪声信道

输入信号的平均功率限制为 P_s 、噪声双边功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 、带宽为 W 的带限加性高斯白噪声信道 T 秒内的信道容量

$$C = WT \log \left(1 + \frac{P_s}{N_0 W} \right) \text{ bit/L 维}$$

则每秒信道容量

$$C_t = W \log \left(1 + \frac{P_s}{N_0 W} \right) \text{ bit/s}$$

这就是著名的香农公式。

当 $W \rightarrow \infty$ 时,

$$C_\infty = \frac{P_s}{N_0} \log_2 e \text{ bit/s}$$

上式说明, 即使带宽无限, 信道容量仍是有限的。当 $C_\infty = 1 \text{ bit/s}$ 时, $\frac{P_s}{N_0} = -1.6 \text{ dB}$, 即带宽不受限制时, 传送 1bit 信息, 信噪比最低只需 -1.6 dB , 这就是香农限, 是加性高斯噪声信道信息传输率的极限值, 也是一切编码方式所能达到的理论极限。实际应用中, 若要保证可靠通信, 信噪比往往比这个值大得多。

3.2 习题详解

3.2.1 选择题

1. 在数字与数据通信中,通信的可靠性指标一般用()来表示;在连续波形信道中,通信的可靠性指标一般用()来表示。

- A. 平均误码率 B. 误比特率 C. 信噪比 D. 平均信噪比

解答: A、C

2. 在有扰离散信道上传输符号 1 和 0,传输过程中每 100 个符号发生一个错传的符号。已知 $p(0)=0.5$, $p(1)=0.5$,信道每秒内允许传输 1000 个符号,则该信道的信道容量为()。

- A. 230bit/s B. 460bit/s C. 840bit/s D. 920bit/s

解答: D。此时信道的转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$,信道容量 $C = 1 - H(0.99,$

$0.01) = 0.92\text{bit/符号}$ 。

3. 某一待传输的图片约含 2.25×10^6 个像素,为了很好地描述图片,每个像素有 12 个亮度电平值。假设所有这些亮度电平等概率出现,设信道中信噪比为 30dB,则用 3 分钟传送一张图片时所需的信道带宽约为()。

- A. 8.96kHz B. 4.48kHz C. 2.48kHz D. 2.4kHz

解答: B。这幅图片包含的信息量为 $2.25 \times 10^6 \times \log_2 12\text{bit}$,3 分钟传送,则信息传输速率为 $\frac{2.25 \times 10^6 \times \log_2 12}{180}\text{bit/s} = 4.447 \times 10^4\text{bit/s}$ 。由香农公式,可求得所需带宽 $W = \frac{4.47 \times 10^4}{\log_2(1+1000)} = 4.48 \times 10^3\text{Hz}$ 。

4. 当 $\frac{E_b}{N_0} = -1.6\text{dB}$ 时,归一化信道容量 $\frac{C}{W} = ()$ 。我们把 -1.6dB 称作香农限,是一切编码方式所能达到的理论极限。

- A. -1 B. +1 C. 0 D. 不确定

解答: C。达到香农限时,归一化信道容量等于 0。

5. 已知一个 DMC 信道的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$,则该信道的信道容量为()。

- A. 0.036bit/符号 B. 0.072bit/符号
C. 0.01bit/符号 D. 0.032bit/符号

解答: A。利用准对称 DMC 信道的容量计算方法计算。

6. 二元删除信道的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$,则该信道的信道容量为()。

- A. 0bit/符号 B. 0.5bit/符号 C. 0.05bit/符号 D. 1bit/符号

解答: B。

7. 信道的输入集 X 的概率分布 $\mathbf{P}_X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, 信道的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, 则输出集 Y 的概率分布为()。

A. $\mathbf{P}_Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B. $\mathbf{P}_Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

C. $\mathbf{P}_Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

D. $\mathbf{P}_Y = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

解答: A。由 p_X 和 $p(y|x)$ 计算联合概率 $p(xy)$, 再计算出 p_Y 。

8. 离散无损信道指的是熵()为 0 的信道。

A. $H(Y|X)$

B. $H(XY)$

C. $H(X|Y)$

D. $H(Y)$

解答: C。 $H(X|Y)$ 是损失熵, 可看作由于信道上存在干扰和噪声而损失的平均信息量。

9. 离散无噪信道指的是熵()为 0 的信道。

A. $H(Y|X)$

B. $H(XY)$

C. $H(X|Y)$

D. $H(Y)$

解答: A。 $H(Y|X)$ 可看作唯一地确定信道噪声所需要的平均信息量, 又称噪声熵。

10. 某 DMC 信道的转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 该信道的信道容量为()。

A. 2bit/符号

B. 1.585bit/符号

C. 1bit/符号

D. 0bit/符号

解答: A。直接使用对称信道的信道容量计算公式。

11. 信道是传递消息的通道, 又是传送物理信号的设施。研究信道主要是研究()问题。

A. 物理信号的形式

B. 信道容量的大小

C. 输入信号的概率分布

D. 信道的转移函数矩阵

解答: B。

12. 描述信道的三要素是()。

A. 信道输入、信道输出、信道的转移概率矩阵

B. 信道输入的统计概率空间、信道输出的统计概率空间、信道本身的统计特性

C. 信道输入的符号空间、信道输出的符号空间、信道的转移概率矩阵

D. 信道的输入符号集、信道的输出符号集、信道本身的统计特性

解答: B。

13. 无干扰信道指的是信道的概率特性满足()。

A. $p(x|y)=0$

B. $p(xy)=0$

C. $p(y|x)=0$

D. 以上都不对

解答: C。

14. 根据香农公式,信道容量一定时,用信噪比换带宽,是()的基本原理。

- A. 现代扩频通信 B. 多进制多电平多维星座调制通信方式
C. 弱信号累积接收 D. 脉冲编码调制

解答: B。由香农公式知,信道容量一定时,信噪比和带宽可以互换。信噪比大,所需带宽小,提高频带利用率。

15. 根据香农公式,信道容量一定时,用带宽换信噪比,是()的基本原理。

- A. 现代扩频通信 B. 多进制多电平多维星座调制通信方式
C. 弱信号累积接收 D. 脉冲编码调制

解答: A。由香农公式知,信道容量一定时,信噪比和带宽可以互换。若有较大的带宽,则在保持信号功率不变的情况下,可允许较大的噪声,这是无线扩频系统的基本原理。

16. 下面关于均匀信道的说法,不正确的是()。

- A. 均匀信道是对称信道的一个特例 B. 输入符号数和输出符号数相等
C. 信道矩阵的各行元素之和为 1 D. 信道矩阵的各列元素之和不一定为 1

解答: D。均匀信道是强对称信道,其信道矩阵的行列都对称,行列的元素和都为 1。

17. 独立并联信道的信道容量 C 与各个独立信道的信道容量 C_i 之间的关系为()。

- A. $C \leq \sum_{i=1}^N C_i$ B. $C < \sum_{i=1}^N C_i$
C. $C > \sum_{i=1}^N C_i$ D. $C \geq \sum_{i=1}^N C_i$

解答: A。根据多维无记忆加性连续信道及其容量的计算可以得到。

3.2.2 判断题

1. 无记忆离散消息序列信道,其容量 $C \geq$ 各个单个消息信道容量之和。

解答: 错。信道无记忆,则 $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l)$, 此时 $C \leq$ 各个单个消息信道容量之和。

2. 信道容量 C 是 $I(X; Y)$ 关于 $p(x_i)$ 的条件极大值。

解答: 对。

3. 信道无失真传递信息的条件是信息率小于信道容量。

解答: 对。

4. 高斯加性信道的信道容量只与信道的信噪比有关。

解答: 错。高斯加性信道的信道容量与信道的带宽和信噪比有关。

5. 离散无噪信道的信道容量等于 $\log_2 n$, 其中 n 是信源 X 的消息个数。

解答: 错。离散无噪信道信道 $H(Y|X) = 0$, 信道容量 $C = \max H(Y) = \log_2 m$ 。

6. 对于固定的信源分布,平均互信息量是信道转移概率的下凸函数。

解答: 对。

7. 信道的输出仅与信道当前的输入有关,而与过去输入无关的信道称为无记忆信道。

解答: 对。

8. 香农公式应用在波形信道中。

解答：对。

9. 对于准对称 DMC 信道, 当 $p(y_j) = \frac{1}{m}$ 时, 可达到信道容量 C 。

解答：对。

10. 只要信息传输率 R 大于信道容量 C , 就不可能存在任何一种信道编码能使差错概率任意小。

解答：对。

11. 信道容量随信源概率分布的变化而变化。

解答：错。信道容量只与信道自身的特性有关, 不会随信源概率分布的变化而变化。

12. 由香农公式 $C = W \log(1 + \text{SNR})$ 可看出, 随着带宽无限增加, 信道容量也可无限增大。

解答：错。带宽无限增加后, 噪声功率也无限增大, 信道容量不会无限增大。

13. 为了使系统的信息传输率 R 尽量接近信道容量 C , 应使信道输入符号尽量等概率分布, 信道尽量对称均衡。

解答：对。

14. 达到信道容量的最佳输入概率分布是唯一的。

解答：错。互信息仅仅与信道转移概率和输出概率分布有关, 达到信道容量的输入概率分布不是唯一的, 但输出概率分布是唯一的。

15. 独立并联信道的信道容量在输入相互独立时等于各个独立信道的信道容量之和。

解答：对。

3.2.3 填空题

1. 按照信道的物理性质对信道进行分类, 可分为恒参信道和_____。

解答：变参信道。

2. 带限 AWGN 波形信道在平均功率受限条件下信道容量的基本公式, 也就是有名的香农公式是_____。

解答： $C = W \log(1 + \text{SNR}) \text{ bit/s}$ 。

3. 条件熵 $H(Y|X)$ 称为噪声熵, 它反映了信道中_____。

解答：噪声源的不确定性。

4. 连续单符号加性信道中, 平均功率受限的条件下, _____信道危害最大。

解答：高斯白噪声。

5. 设有两个二元信道, 它们的信道转移概率矩阵分别为 $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{P}_2 =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

, 则信道 1 的信道容量 $C_1 =$ _____, 信道 2 的信道容量 $C_2 =$ _____。两

信道串联后,得到的信道转移概率矩阵为_____,此时的信道容量 $C =$ _____。

解答: 1bit/符号; 0.126bit/符号; $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; 0.09bit/符号。

6. 已知一个高斯信道,信噪比为 3,频带为 3kHz,此信道最大信息传输速率为_____,若信噪比提高到 15,则理论上传送同样的信息率所需的频带为_____。

解答: 6000bit/s; 1.5kHz。

3.2.4 名词解释

1. 信道容量

解答: 对于某特定信道,若转移概率 $p(b_j | a_i)$ 已经确定,则互信息就是关于输入符号概率分布 $p(a_i)$ 的上凸函数,也就是能找到某种概率分布 $p(a_i)$,使 $I(X;Y)$ 达到最大,该最大值就是信道所能传送的最大信息量,即信道容量。

2. 离散输入对称信道

解答: 若一个离散无记忆信道的信道矩阵中,每一行都是其他行的同一组元素的不同排列,则称此类信道为离散输入对称信道。

3. 离散输出对称信道

解答: 若一个离散无记忆信道的信道矩阵中,每一列都是其他列的同一组元素的不同排列,则称该类信道为离散输出对称信道。

4. 限时限频限功率信道

解答: 限时限频限功率信道指的是输入信号时间限时 t_B 、限频 f_m 和平均功率 P_s 受限下的波形信道。

5. 高斯白噪声加性信道

解答: 高斯白噪声加性波形信道是指加入信道的噪声是限带的加性高斯白噪声,其均值为 0,功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 。

6. 香农限

解答: 带限 AWGN 波形信道在平均功率受限条件下信道容量的基本公式,也就是有名的香农公式 $C = W \log(1 + \text{SNR}) \text{ bit/s}$; 当归一化信道容量 $\frac{C}{W}$ 趋近于零时,也即信道完全丧失了通信能力,此时 $\frac{E_b}{N_0}$ 为一 1.6dB,称作香农限,是一切编码方式所能达到的理论极限。

7. 频带利用率

解答: $\frac{C_t}{W} = \log(1 + \text{SNR}) \text{ bit/(s} \cdot \text{Hz)}$ 称为单位频带的信息传输率,即频带利用率。该值越大,信道就利用得越充分。

3.2.5 问答题

1. 什么是损失熵、噪声熵? 什么是无损信道和确定信道? 如信道的转移概率矩阵大小

为 $r \times s$, 则无损信道和确定信道的信道容量分别为多少?

解答: 条件熵 $H(X|Y)$ 称为信道的损失熵或疑义度, 损失熵为 0 的信道就是无损信道, 信道容量为 $\log r$ 。条件熵 $H(Y|X)$ 称为信道的噪声熵, 噪声熵为 0 的信道就是确定信道, 信道容量为 $\log s$ 。

2. 解释信息传输速率、信道容量、最佳输入分布的概念, 说明平均互信息与信源的概率分布、信道的转移概率之间分别有什么关系。

解答: 信息传输速率指的是每秒传输信息的量; 信道容量是平均互信息在某个输入概率分布下的最大值; 平均互信息取得最大值时的输入概率分布为最佳分布。平均互信息是关于信源概率分布的上凸函数, 存在最大值; 是信道转移概率的下凸函数, 存在最小值。

3. 写出二进制均匀信道的转移概率矩阵, 并分析输入和输出符号数 $n=2$ 时的信道容量 C 。

解答: 二进制均匀信道的转移概率矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \frac{\epsilon}{n-1} & \cdots & \frac{\epsilon}{n-1} \\ \frac{\epsilon}{n-1} & 1-\epsilon & \cdots & \frac{\epsilon}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\epsilon}{n-1} & \frac{\epsilon}{n-1} & \cdots & 1-\epsilon \end{bmatrix}$, 信道的输入和

输出符号个数相同, 都为 n 。可以看出, 矩阵的对角线元素即为信道的正确传输概率, 错误概率 ϵ 被对称地均分给 $n-1$ 个输出符号。因此, 此信道为强对称信道, 信道容量为

$$C = \log n - H\left(1-\epsilon, \frac{\epsilon}{n-1}, \cdots, \frac{\epsilon}{n-1}\right)$$

当 $n=2$ 时, 即为二进制均匀信道(BSC), 信道容量 $C = \log 2 - H(1-\epsilon, \epsilon) = 1 - H(\epsilon)$ 。

3.2.6 计算题

1. 设二进制对称信道的概率转移矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, (1) 若 $p(x_0) = \frac{3}{4}$, $p(x_1) = \frac{1}{4}$, 求

$H(X)$ 、 $H(X|Y)$ 、 $H(Y|X)$ 和 $I(X;Y)$ 。(2) 求该信道的信道容量及达到信道容量时的输入概率分布。

解答: (1) 输入 X 的熵 $H(X) = H\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = 0.815 \text{ bit/符号}$ 。

联合概率矩阵 $[p(x_i y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, 由 $p(y_j) = \sum_i p(x_i y_j)$ 可得

$$p(y_0) = \frac{7}{12}, \quad p(y_1) = \frac{5}{12}$$

条件熵

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{XY} -p(x_i y_j) \log_2 p(y_j | x_i) = \sum_{XY} -p(x_i) p(y_j | x_i) \log_2 p(y_j | x_i) \\ &= 0.918 \text{ bit/符号} \end{aligned}$$

由 $p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i y_j)}{p(y_j)}$ 可得 $[p(x_i|y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, 则

$$H(X|Y) = \sum -p(x_i y_j) \log_2 p(x_i|y_j) = 0.749 \text{ bit/符号}$$

$$I(X;Y) = \sum p(x_i y_j) \log_2 \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = 0.066 \text{ bit/符号}$$

(2) 信道容量 $C = \log_2 2 - H\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 1 - 0.918 = 0.082 \text{ bit/符号}$ 。

若要达到信道容量,那么输入应为等概率分布,即 $p(x_0) = p(x_1) = 0.5$ 。

注: 本题考查的知识点是 2.2.3 节互信息和 3.2.2 节对称离散无记忆信道。题解为:

(1) 求互信息; (2) 互信息的条件极值即为信道容量。

2. 某信源发送端发出 2 个符号 $\{x_1, x_2\}$, $p(x_1) = a$, 每秒发出一个符号。接收端有

3 种符号 $\{y_1, y_2, y_3\}$, 信道的转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 。(1) 计算接收端的平均不确定度;

(2) 计算由于噪声产生的不确定度 $H(Y|X)$; (3) 计算该信道的信道容量。

解答: (1) 由 $p(x_i y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i)$ 求出 $p(x_i y_j)$, 再由 $p(y_j) = \sum_i p(x_i y_j)$ 求出 $p(y_j)$ 。

接收端的平均不确定度

$$H(Y) = \sum -p(y_j) \log_2 p(y_j) = \left[\frac{3}{2} - \frac{1+a}{4} \log(1+a) - \frac{1-a}{4} \log(1-a) \right] \text{ bit/符号}$$

(2) 由于噪声产生的不确定度

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum -p(x_i y_j) \log_2 p(y_j|x_i) = \sum -p(x_i) p(y_j|x_i) \log_2 p(y_j|x_i) \\ &= \frac{3-a}{2} \text{ bit/符号} \end{aligned}$$

(3) 由信道容量的定义可得

$$\begin{aligned} C &= I(X;Y)_{\max} = \max[H(Y) - H(Y|X)] \\ &= \max \left[\frac{1}{2}a - \frac{1+a}{4} \log_2(1+a) - \frac{1-a}{4} \log_2(1-a) \right] \end{aligned}$$

由 $\frac{\partial I(X;Y)}{\partial a} = 0$, 可得 $a = 0.6$, 则信道容量 $C = 0.16 \text{ bit/符号}$ 。

注: 本题考查的知识点是 2.2.3 节互信息和 3.2.2 节对称离散无记忆信道。题解为: (1) 求互信息; (2) 互信息的条件极值即为信道容量。

3. 已知信道的转移概率如图 3.1 所示, 输入 X 等概率分布, 求平均互信息。

解答: 先求各个概率。

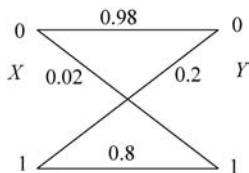


图 3.1 题 3 的图

由题意,信道的转移概率矩阵 $[p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$, X 等概率分布,则联合概率矩阵 $[p(x_i y_j)] = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.01 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$ 。

由 $p(y_j) = \sum_i p(x_i y_j)$, 可得 $p(y_0) = 0.49 + 0.1 = 0.59$, $p(y_1) = 0.01 + 0.4 = 0.41$ 。

再求熵:

$$H(X) = H(0.5, 0.5) = 1 \text{ bit/符号}$$

$$H(Y) = H(0.59, 0.41) = 0.977 \text{ bit/符号}$$

$$H(XY) = - \sum_{XY} p(x_i y_j) \log p(x_i y_j) = 1.43 \text{ bit/符号}$$

则 $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY) = 1 + 0.977 - 1.43 = 0.547 \text{ bit/符号}$ 。

注: 本题考查的知识点是 2.2.3 节互信息和 3.2 节离散单个符号信道及其容量。题解为(1)求联合概率和输出符号概率分布;(2)根据熵和互信息的关系求互信息。

4. 求下列两个信道的信道容量,并加以比较。

$$(1) \begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & p-\epsilon & 2\epsilon \\ p-\epsilon & 1-p-\epsilon & 2\epsilon \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & p-\epsilon & 2\epsilon & 0 \\ p-\epsilon & 1-p-\epsilon & 0 & 2\epsilon \end{bmatrix}$$

解答: (1) 将 $\begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & p-\epsilon & 2\epsilon \\ p-\epsilon & 1-p-\epsilon & 2\epsilon \end{bmatrix}$ 分解, 可得 $\begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & p-\epsilon \\ p-\epsilon & 1-p-\epsilon \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2\epsilon \\ 2\epsilon \end{bmatrix}$ 。利

用公式 $C = \log n - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s) - \sum_k N_k \log M_k$, 可以求出该信道的信道容量

$$C_1 = 1 - H(1-p-\epsilon, p-\epsilon, 2\epsilon) - [2\epsilon \log 4\epsilon + (1-2\epsilon) \log (1-2\epsilon)]$$

(2) 将 $\begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & p-\epsilon & 2\epsilon & 0 \\ p-\epsilon & 1-p-\epsilon & 0 & 2\epsilon \end{bmatrix}$ 分解, 可得 $\begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & p-\epsilon \\ p-\epsilon & 1-p-\epsilon \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2\epsilon & 0 \\ 0 & 2\epsilon \end{bmatrix}$, 利

用公式 $C = \log n - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s) - \sum_k N_k \log M_k$ 可以求出该信道的信道容量

$$C_2 = 1 - H(1-p-\epsilon, p-\epsilon, 2\epsilon) - [2\epsilon \log 2\epsilon + (1-2\epsilon) \log (1-2\epsilon)]$$

由于 $0 < \epsilon < 0.5$, 所以 $C_1 < C_2$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.2.3 节准对称离散无记忆信道。题解为: (1) 将准对称信道的转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 进行分解; (2) 根据准对称 DMC 信道容量的计算公式求 C 。

5. 设有扰离散信道的传输情况如图 3.2 所示。求出该信道的信道容量。

解答: 由图中的转移概率可得该信道的概率转移矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

可知, 该信道为对称 DMC 信道, 则该信道的信道容量

$$C = \log_2 4 - H(0.5, 0.5, 0, 0) = 2 - 1 = 1 \text{ bit/符号}$$

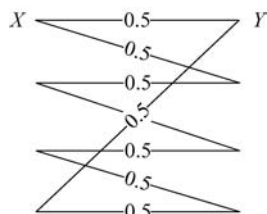


图 3.2 题 5 的图

注：本题考查的知识点是3.2.2节对称离散无记忆信道。题解为：(1)先求出信道的转移概率矩阵；(2)根据对称DMC信道的信道容量计算公式求解 C 。

6. 发送端发出3种等概率符号 (x_1, x_2, x_3) ，接收端收到3种符号 (y_1, y_2, y_3) ，信道转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$ 。求：(1)接收端收到一个符号后得到的信息量 $H(Y)$ ；(2)计算噪声熵 $H(Y|X)$ ；(3)计算当接收端收到一个符号 y_2 的错误概率；(4)计算从接收端看的平均错误概率；(5)计算从发送端看的平均错误概率；(6)从转移矩阵中能看出该信道的好坏吗？(7)计算发送端的 $H(X)$ 和 $H(X|Y)$ 。

解答：(1) 联合概率矩阵 $[p(x_i y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{30} & \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}$ ，输出的概率分布为 $p(y_1) = \frac{1}{3}$ ，

$p(y_2) = \frac{1}{2}$ ， $p(y_3) = \frac{1}{6}$ ，则 $H(Y) = H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) = 1.46 \text{ bit/符号}$ 。

(2) 噪声熵 $H(Y|X)$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum -p(x_i y_j) \log_2 p(y_j | x_i) \\ &= \sum -p(x_i) p(y_j | x_i) \log_2 p(y_j | x_i) = 1.18 \text{ bit/符号} \end{aligned}$$

(3) 接收端收到一个符号 y_2 的正确概率为 $p(x_2 | y_2) = \frac{p(x_2) p(y_2 | x_2)}{p(y_2)} = 0.2$ ，相应的错误概率为 $p_{e2} = 1 - 0.2 = 0.8$ 。

(4) 同理，可计算出接收端收到符号 y_1 和 y_3 的正确概率分别为 $p_1 = 0.5$ ， $p_3 = 0$ ，则相应的错误概率分别为 $p_{e1} = 0.5$ ， $p_{e3} = 1$ 。

则从接收端看的平均错误概率 $p_{\text{avg}} = E[p_{ej}] = \sum_j p(y_j) [1 - p(x_i | y_j)] = 0.73$ 。

(5) 类似地，从发送端看的平均错误概率为 $\sum p(x_i) [1 - p(y_j | x_i)] = 0.73$ 。

(6) 从转移概率 $p(x_3 | y_3) = 0$ 可以看出，该信道传输的错误概率较大，所以较差。

(7) 发送端， $H(X) = \sum -p(x_i) \log_2 p(x_i) = 1.58 \text{ bit/符号}$

由 $p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i y_j)}{p(y_j)}$ 可得 $[p(x_i | y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$ ，则

$$H(X|Y) = \sum -p(x_i y_j) \log_2 p(x_i | y_j) = 1.3 \text{ bit/符号}$$

注：本题考查的知识点是2.2.2节离散信源熵、2.2.3节互信息和3.1.3节信道容量的定义。提示：(1)本题中隐含的译码规则是，收到 y_1 则译码为 x_1 ，收到 y_2 则译码为 x_2 ，收

到 y_3 则译码为 x_3 ; (2) 平均错误概率即为错误概率的数学期望。

7. 已知一个 DMC 信道的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$, 传输一个符号所需的时间为 1ms, 求该信道能通过符号的最大速率。

解答: 从信道的转移概率矩阵知该信道为对称信道, 则该信道的信道容量

$$C = \log_2 3 - H(Y | x_i) = 1.585 - (0.5 + 0.464 + 0.521) = 0.1 \text{ bit/符号}$$

传输一个符号所需的时间为 1ms, 则该信道能通过符号的最大速率为 $0.1 \times 1000 = 100 \text{ bit/s}$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.2.2 节对称离散无记忆信道。题解: 根据信道的转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 计算对称 DMC 信道的信道容量 C 。

8. 电视图像由 30 万个像素组成, 对于适当的对比度, 一个像素可取 10 个可辨别的亮度电平, 假设各个像素的 10 个亮度电平都以等概率出现, 实时传送电视图像每秒发送 30 帧图像。为了获得满意的图像质量, 要求信号与噪声的平均功率比值为 30dB, 试计算在这些条件下传送电视的视频信号所需的带宽。

解答: 由题意知每帧电视图像中各像素的变化有 $M = 10^{300\,000}$ 种, 则每帧图像所包含的信息量

$$H(X) = \log M = 9.966 \times 10^5 \text{ bit/帧}$$

每秒发送 30 帧图像, 则信道容量为 $C = H(X) \times 30 = 2.9898 \times 10^7 \text{ bit/s}$ 。

为获得满意的图像质量, 信噪比要求为 30dB, 则利用香农公式 $C = W \log_2(1 + \text{SNR})$ 求出所需的带宽

$$W = \frac{C}{\log_2(1 + \text{SNR})} = \frac{2.9898 \times 10^7}{\log_2(1 + 1000)} = 2.996 \times 10^6 \text{ Hz}$$

注: 本题考查的知识点是 3.4.3 节限时限频限功率加性高斯白噪声信道。题解: (1) 写出香农公式; (2) 将已知条件代入后计算各参数; (3) 从计算结果可以看出, 视频传输所需带宽较大。

9. 设某信源输出 A、B、C、D、E 五种符号, 每个符号独立出现, 出现的概率分别为 $1/8, 1/8, 1/8, 1/2, 1/8$ 。如果符号的码元宽度为 $0.5 \mu\text{s}$ 。计算: (1) 信息传输速率 R_t ; (2) 将这些数据通过一个带宽为 $B = 2000 \text{ kHz}$ 的加性高斯白噪声信道传输, 噪声的单边功率谱密度为 $n_0 = 10^{-6} \text{ W/Hz}$ 。试计算正确传输这些数据最少需要的发送功率 P 。

解答: (1) 信源为离散无记忆信源, 则信息传输速率 $R_t = \frac{1}{t} [H(X)]$, 其中 $H(X) = H$

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right) = 2 \text{ bit/符号}, \text{ 则}$$

$$R_t = \frac{2 \text{ bit}}{0.5 \mu\text{s}} = 4 \times 10^6 \text{ bit/s}$$

(2) 由香农公式 $C = W \log_2(1 + \text{SNR})$, 得 $4 \times 10^6 = 2 \times 10^6 \log_2(1 + \text{SNR})$, 所以 $1 + \frac{P}{2} = 4$, 即正确传输这些数据至少需要的发送功率 $P = 6W$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.4.3 节限时限频限功率加性高斯白噪声信道。题解为:

(1)写出香农公式；(2)将已知条件代入后计算各参数。

10. 一个平均功率受限制的连续信道,其通频带为 1MHz,信道上存在加性高斯白噪声。(1)已知信道上的信号与噪声的平均功率比值为 10,求该信道的信道容量；(2)信道上的信号与噪声的平均功率比值降至 5,要达到相同的信道容量,信道通频带应为多大？(3)若信道通频带减小为 0.5MHz 时,要保持相同的信道容量,信道上的信号与噪声的平均功率比值应为多大？

解答：(1) 由题意知,信道上的信号与噪声的平均功率比值为 10,即信噪比 $\text{SNR}=10$,带宽为 1MHz,代入香农公式 $C=W\log_2(1+\text{SNR})$,可得

$$C=1 \times 10^6 \times \log_2(1+10)=3.46 \text{ Mbit/s}$$

(2) 信道上的信噪比降为 5 后,由 $W=\frac{C}{\log_2(1+\text{SNR})}$ 可得

$$W=\frac{C}{\log_2(1+5)}=\frac{3.46 \times 10^6}{\log_2 6}=1.34 \text{ MHz}$$

(3) 若信道通频带减小为 0.5MHz,此时要保持相同的信道容量,即 $C=W\log_2(1+\text{SNR})=3.46 \times 10^6$,可得此时所需的信噪比 $\text{SNR}=120$ 。

注：本题考查的知识点是 3.4.3 节限时限频限功率加性高斯白噪声信道。题解：(1)写出香农公式；(2)将已知条件代入后计算各参数。

11. 若信道的输入为二进符号 X ,其概率空间为 $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$,经过转移概率矩阵

为 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 的二元对称信道,输出为 Y 。求 $H(X)$, $H(X|Y)$, $I(X;Y)$ 和信道容量 C 。

解答：由 X 的概率空间,可得 $H(X)=H\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)=0.811 \text{ bit/符号}$ 。由信道的转移概率矩阵得 $H(X|Y)=0.749 \text{ bit/符号}$ 。

互信息量 $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=0.0616 \text{ bit/符号}$

由题意知,该信道为对称 DMC 信道,则该信道的信道容量 $C=0.082 \text{ bit/符号}$ 。此时,输入概率分布为等概率分布。

注：本题考查的知识点是 3.2.2 节对称离散无记忆信道。题解为：根据强对称信道的信道容量计算公式,计算其信道容量。

12. 有一种有扰离散信道的传输情况如图 3.3 所示。(1)试写出信道的转移概率矩阵；(2)求出信道的信道容量。

解答：(1) 根据图中信道的输入 X 和输出 Y ,以及它们之间的转移概率,可写出信道的转移概率矩阵 $P=$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}。$$

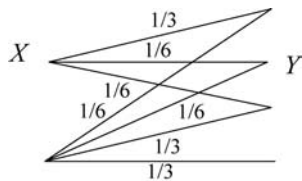


图 3.3 题 12 的图

(2) 从转移概率矩阵可以看出,该信道是强对称信道,利用强对称信道的信道容量计算公式,可得 $C = \log 4 + 2 \times \frac{1}{3} \log \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} \log \frac{1}{6} = 0.0816 \text{ bit/符号}$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.2.2 节对称离散无记忆信道。题解: (1) 根据输入输出状态转移图, 写出转移概率矩阵 $\mathbf{P}$; (2) 根据强对称信道的信道容量计算公式, 计算其信道容量。

13. 设二元对称信道的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, (1) 若 $p(0) = \frac{3}{4}$, $p(1) = \frac{1}{4}$, 求

$H(X)$ 、 $H(X|Y)$ 、 $H(Y|X)$ 和 $I(X;Y)$; (2) 该信道的信道容量及达到信道容量时的输入概率分布。

解答: (1) 信息熵 $H(X) = H\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = 0.811 \text{ bit/符号}$

条件概率 $p(x=0|y=0) = \frac{6}{7}$, $p(x=1|y=0) = \frac{1}{7}$, $p(x=0|y=1) = \frac{3}{5}$, $p(x=1|y=1) = \frac{2}{5}$, 则条件熵 $H(X|Y) = 0.749 \text{ bit/符号}$ 。

$$H(Y|X) = 0.918 \text{ bit/符号}$$

求得 Y 的概率分布为 $p(y=0) = \frac{7}{12}$, $p(y=1) = \frac{5}{12}$, 则

$$H(Y) = H\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right) = 0.97 \text{ bit/符号}$$

$$I(X;Y) = 0.062 \text{ bit/符号}$$

(2) 此信道为二元对称信道, 信道容量 $C = 1 - H(p) = 1 - H\left(\frac{2}{3}\right) = 0.082 \text{ bit/符号}$ 。

此时, 输入概率为等概率分布, 即 $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.2.2 节对称离散无记忆信道。题解: (1) 根据输入输出状态转移图, 写出转移概率矩阵 $\mathbf{P}$; (2) 根据强对称信道的信道容量计算公式, 计算其信道容量。

14. 一离散信道的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$, 试求: (1) 达到容量 C 时的输入

概率分布 $p(x)$; (2) 信道容量 C 。

解答: (1) 设输入的概率分布为 $\{p_0, p_1, 1-p_0-p_1\}$ 。由信道转移概率矩阵, 得信道输出端的概率分布为

$$q_0 = p_0(1-\epsilon)$$

$$q_1 = p_0\epsilon + p_1 + (1-p_0-p_1)\epsilon = p_1 + (1-p_1)\epsilon$$

$$q_2 = (1-\epsilon)(1-p_0-p_1)$$

由信道容量定义得

$$\begin{aligned}
 C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} [H(Y) - H(Y|X)] \\
 &= \max_{p(x)} [H(q_0, q_1, q_2) + \sum_i \sum_j p_i P_{ji} \log P_{ji}] \\
 &= \max_{p(x)} [H(q_0, q_1, q_2) - p_0 H(\epsilon, 1-\epsilon) - (1-p_0-p_1) H(\epsilon, 1-\epsilon)] \\
 &= \max_{p(x)} [H(q_0, q_1, q_2) - (1-p_1) H(\epsilon, 1-\epsilon)]
 \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p_0} = 0$, 可得到 $-(1-\epsilon) [\log p_0 (1-\epsilon) - \log (1-p_0-p_1)(1-\epsilon)] = 0$, 则

$$2p_0 = 1 - p_1.$$

令 $\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p_1} = 0$, 则有

$$-(1-\epsilon) \{ \log [p_1 + (1-p_1)\epsilon] - \log (1-p_0-p_1)(1-\epsilon) \} + H(\epsilon) = 0$$

可得 $\log \frac{p_1 + (1-p_1)\epsilon}{(1-p_0-p_1)(1-\epsilon)} = \frac{H(\epsilon)}{1-\epsilon}$ 。

$$\text{联立求解可得} \begin{cases} p_0 = \frac{1}{(1-\epsilon) [2 + 2^{\frac{H(\epsilon)}{1-\epsilon}}]} \\ p_1 = \frac{(1-\epsilon) 2^{\frac{H(\epsilon)}{1-\epsilon}} - 2\epsilon}{(1-\epsilon) [2 + 2^{\frac{H(\epsilon)}{1-\epsilon}}]} \end{cases}, \text{则 } p_2 = 1 - p_0 - p_1 = \frac{1}{(1-\epsilon) [2 + 2^{\frac{H(\epsilon)}{1-\epsilon}}]}.$$

$$\text{令 } 2 + 2^{\frac{H(\epsilon)}{1-\epsilon}} = A, \text{ 则} \begin{cases} q_0 = \frac{1}{(1-\epsilon)A} \\ q_1 = \frac{(1-\epsilon)(A-2) - 2\epsilon}{(1-\epsilon)A} \\ q_2 = \frac{1}{(1-\epsilon)A} \end{cases}.$$

(2) 该信道的信道容量

$$\begin{aligned}
 C &= H(q_0, q_1, q_2) - (1-p_1) H(\epsilon, 1-\epsilon) \\
 &= -\frac{2}{A} \log \frac{1}{A} - \frac{A-2}{A} \log \frac{A-2}{A} - \frac{2}{(1-\epsilon)A} H(\epsilon, 1-\epsilon)
 \end{aligned}$$

注: 本题考查的知识点是 3.2.4 节一般 DMC 信道及其容量。题解: 根据定义求解信道容量 C 。

15. 设一时间离散、幅度连续的无记忆信道的输入是一个零均值、方差为 σ^2 的高斯随机变量, 信道噪声为加性高斯噪声, 方差为 $\sigma^2 = 1\mu\text{W}$, 信道的符号传输速率为 $r = 8000$ 符号/s。如令一路电话通过该信道, 电话机产生的信息速率为 64kb/s , 求输入信号功率 E 的最小值。

解答: 由香农公式, 该信道的信道容量 $C_i = \frac{r}{2} \log \left(1 + \frac{E}{\sigma^2} \right) = \frac{8000}{2} \log(1+E)$ 。

为使电话机产生的 64kb/s 数据正确通过信道, 要求该信道的信道容量 $C_i \geq 64\text{kb/s}$ 。因此, $E \geq 1 \times (2^{16} - 1) = 65\,535\mu\text{W} = 65.535\text{mW}$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.4.3 节限时限频限功率加性高斯白噪声信道。题解: (1) 写

出香农公式；(2)将已知条件代入，得出所需输入信号的功率 E 。

16. 设某一信号的信息输出率为 5.6 kbit/s ，噪声功率谱 $N=5\times 10^{-6}\text{ mW/Hz}$ ，在带宽 $B=4\text{ kHz}$ 的高斯信道中传输。试求无差错传输需要的最小输入功率 P 是多少？

解答：由信道容量和带宽、信号噪声比的关系式可得

$$C_t = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{NB} \right) = 4 \times 10^3 \log_2 \left(1 + \frac{P}{5 \times 10^{-9} \times 4 \times 10^3} \right)$$

即要求 $C_t \geq 5.6 \times 10^3 \text{ bit/s}$ 才能使信号无差错传输，此时 $P \geq 3.28 \times 10^{-5} \text{ mW}$ 。

注：本题考查的知识点是 3.4.3 节限时限频限功率加性高斯白噪声信道。题解：(1)写出香农公式；(2)将已知条件代入，得出所需输入信号的功率 P 。

17. 图片传输中，每帧约为 2.25×10^6 个像素，为能很好地重现图像，需分 16 个亮度电平，并假设亮度电平等概率分布。试计算每秒传送 40 帧图片所需要的信道带宽（信噪功率比为 40dB）。

解答：亮度电平等概率分布，则每个像素携带的信息量为 $\log 16 \text{ bit}$ ，则每秒需传送的信息速率

$$R = 40 \times 2.25 \times 10^6 \times \log 16 = 3.6 \times 10^8 \text{ bit/s}$$

由题意知信噪功率比 $\text{SNR} = 40\text{ dB} = 10^4$ ，信道容量为 $C = W \log(1 + 10^4) = 3.6 \times 10^8$ ，则每秒传送 40 帧图片所需的信道带宽 $W = 2.7 \times 10^7 \text{ Hz}$ 。

注：本题考查的知识点是 3.4.3 节限时限频限功率加性高斯白噪声信道。题解：(1)写出香农公式；(2)将已知条件代入，得出所需带宽 W 。

18. 若已知两信道 C_1 和 C_2 的信道转移概率矩阵分别为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 和

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ，试求：(1) $C_3 = C_1 \cdot C_2$ 时，信道转移概率矩阵 $\mathbf{P} = ?$ 并问其容量是否发生变化？(2) $C_4 = C_2 \cdot C_1$ 时，它能否构成信道？为什么？

解答：(1) 两信道 C_1 和 C_2 级联为 C_3 后，信道 C_3 的转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

由此看出，转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 不变，所以信道容量不变。

(2) $C_2 C_1$ 不能级联构成信道，因为 C_2 的输出符号数不等于 C_1 的输入符号数。

注：本题考查的知识点是 3.3 节离散序列信道及其容量。题解：(1)求级联信道的转移概率矩阵；(2)求级联后的信道容量。

19. 有一加性噪声信道，输入符号 X 是离散的，取值为 $+1$ 或 -1 ，噪声 N 的概率密度

为 $p(n) = \begin{cases} 1/4, & |n| \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$, 输出 $Y = X + N$ 是一个半连续变量。试求: (1) 该半连续信道的容量 C ; (2) 若在输出端接一检测器也作为信道的一部分, 其输出为 Z , 当 $Y > 1$, 则 $Z = 1$; $-1 \leq Y \leq 1$, 则 $Z = 0$; $Y < -1$, 则 $Z = -1$ 。这样就成为一离散信道, 求它的容量, 并问加入检测器以后, 是否带来信息损失?

解答: (1) 条件熵 $H(Y|X) = - \sum_x p(x) \int p(y|x) \log p(y|x) dy$

$$\text{噪声熵} - \int_{-\infty}^{+\infty} p(n) \log p(n) dn = - \int_{-2}^2 \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} dn = 2 \text{ bit}$$

由 $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$ 可知要使信道达到信道容量, 须使 $H(Y)$ 取最大值。

设 X 的分布为(离散信道) $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$

则 Y 的分布为(半连续信道) $\begin{cases} \frac{1}{4}(1-p), & Y \in [-3, -1] \\ \frac{1}{4}, & Y \in [-1, 1] \\ \frac{p}{4}, & Y \in [1, 3] \end{cases}$

所以

$$\begin{aligned} H(Y) &= - \int_{-3}^{-1} \frac{1}{4}(1-p) \log \frac{1}{4}(1-p) dy - \int_{-1}^1 \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} dy - \int_1^3 \frac{1}{4} p \log \frac{1}{4} p dy \\ &= - \frac{1}{2}(1-p) \log \frac{1}{4}(1-p) - \frac{1}{2} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{2} p \log \frac{1}{4} p \\ &= 2 + \frac{1}{2} H(p, 1-p) \end{aligned}$$

由熵的上凸性质可知, 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $H(Y)$ 取极大值 $H(Y)_{\max} = 2.5 \text{ bit/符号}$, 则信道容量 $C = 2.5 - 2 = 0.5 \text{ bit/符号}$ 。

(2) 由 Z 的判决规则可知 Z 的概率分布为

$$p(z=1) = p(y \geq 1) = \int_1^3 \frac{1}{4} p dy = \frac{1}{2} p$$

$$p(z=0) = p(-1 \leq y < 1) = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{2}$$

$$p(z=-1) = p(-3 \leq y < -1) = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{4}(1-p) dy = \frac{1}{2}(1-p)$$

即 Z 的概率空间 $\begin{bmatrix} Z & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z=-1 & z=0 & z=1 \\ \frac{1}{2}(1-p) & \frac{1}{2} & \frac{p}{2} \end{bmatrix}$

由 Z 与 X 之间的关系, 得检测器(看成信道)的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 是准对

称信道,可得其信道容量 $C = \log_2 2 - H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \frac{1}{2} \log_2 1 - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 0.5 \text{ bit/符号}$, 此时 $p = \frac{1}{2}$ 。

可见,加入检测器后,信道容量不变,没有带来信息损失。

注: 本题考查的知识点是 3.2 节离散单个符号信道及其容量和 3.4 节连续信道及其容量。题解:(1)本题是一道综合题,考查半连续信道和信道的级联;(2)紧扣定义,分析和求解信道容量。

20. 设有一离散无记忆加性噪声信道,其输入随机变量 X 与噪声 Y 统计独立。 $X \in \{0, 1\}$, $Y \in \{0, a\}$, 其中, $a \geq 1$ 。又 $p(y=0) = p(y=a) = \frac{1}{2}$ 。信道输出 $Z = X + Y$ (一般加法)。试求此信道的信道容量,以及达到信道容量的最佳输入分布(提示:信道容量取决于 a 的取值,可分成 $a=1$ 和 $a>1$ 两种情况来讨论)。

解答: 因为 X 和 Y 统计独立,则 $p(z|x) = \begin{cases} p(y), & z = x + y \\ 0, & z \neq x + y \end{cases}$ 。此时, $I(X; Z) =$

$H(Z) - H(Y)$ 。

当 $a=1$ 时, Z 的样本空间为 $A = \{0, 1, 2\}$ 。

由于 X 和 Y 统计独立且 Y 等概率分布,则 $a=1$ 时,信道的转移概率矩阵 $\mathbf{P}_1 =$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 。此信道为准对称信道,输入等概率分布时,达到信道容量,即

$$C_1 = H(Z) - H(Y) = \frac{3}{2} - 1 = 0.5 \text{ bit/符号}$$

此时, $p(z=0) = \frac{1}{4}$, $p(z=1) = \frac{1}{2}$, $p(z=2) = \frac{1}{4}$ 。

同理,当 $a>1$ 时, Z 的样本空间为 $A = \{0, 1, a, 1+a\}$, 此时信道的转移概率矩阵

$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 。由 $\mathbf{P}_2$ 可以看出,此时信道是无损信道,输入等概率分布时,达到

信道容量,其信道容量 $C_2 = \max H(X) = 1 \text{ bit/符号}$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.2 节离散单个符号信道及其容量。题解:紧扣定义,分析输入输出的关系,得到转移概率矩阵,计算离散无记忆加性噪声信道的容量。

21. 设某语音信号 $\{x(t)\}$, 其最高频率为 4kHz, 经取样、量化后编成等长码, 设每个样本的分层数为 128。(1)求此语音信号的信息传输速率是多少(bit/s); (2)把这一语音信号送入一噪声功率谱为 $5 \times 10^{-6} \text{ mW/Hz}$, 带宽为 4kHz 的高斯信道中传输, 试求无差错传输时需要的最小输入功率。

解答: (1) 考虑每一层是等概率分布, 则平均每个采样点含有的信息量为 $I = \log 128 = 7 \text{ bit/样点}$ 。

因为最高频率为 4kHz, 取样速率为 8kHz, 所以此语音信号的信息传输速率 $R = 8 \times 10^3 \times 7 = 5.6 \times 10^4 \text{ bit/s}$ 。

(2) 无差错传输时需要满足 $R \leq C = W \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right)$, 则

$$5.6 \times 10^4 = 4 \times 10^3 \times \log \left(1 + \frac{P}{5 \times 10^{-9} \times 4 \times 10^3} \right)$$

所以, 无差错传输时需要的最小输入功率 $P = (2^{14} - 1) \times 2 \times 10^{-5} = 0.33 \text{ W}$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.4.3 节限时限频限功率加性高斯白噪声信道。题解: 香农公式。

22. 设有一离散级联信道如图 3.4 所示, 求: (1) 输入 X 与输出 Y 间的信道容量 C_1 ; (2) Y 与 Z 间的信道容量 C_2 ; (3) X 与 Z 间的信道容量 C_3 及输入概率分布。

解答: (1) X 和 Y 间的信道为对称信道, 则 $C_1 = 1 - H(0.8) = 0.28 \text{ bit/符号}$ 。

(2) Y 和 Z 间的信道为准对称信道, 则

$$C_2 = H\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) - H\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1.56 - 0.81 = 0.75 \text{ bit/符号}$$

(3) X 和 Z 间的信道也为准对称信道, 则

$$C_3 = H\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) - H\left(\frac{3}{4} \times 0.8, \frac{3}{4} \times 0.2, \frac{1}{4}\right) = 1.56 - 1.35 = 0.21 \text{ bit/符号}$$

此时, 信源输入概率为 $p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$ 。

注: 本题考查的知识点是级联信道的容量计算方法。

23. 考虑如图 3.5 所示的退化广播信道, 试: (1) 求从 X 到 Y_1 的信道容量; (2) 求从 X 到 Y_2 的信道容量。

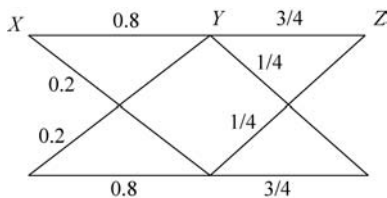


图 3.4 题 22 的图

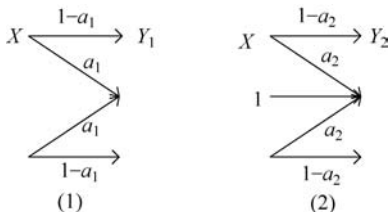


图 3.5 题 23 的图

解答: (1) 由图 3.5 可得信道(1)的转移概率矩阵 $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1-a_1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1-a_1 \end{bmatrix}$, 为准对称

信道, 则信道(1)的信道容量 $C_1 = (1-a_1) \text{ bit/符号}$, 此时 $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$ 。

(2) 信道(2)的转移概率矩阵 $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1-a_2 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & 1-a_2 \end{bmatrix}$, 则信道(2)的信道容量: $C_2 =$

$(1-a_1-a_2+a_1a_2) \text{ bit/符号}$, 此时 $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$ 。

注: 本题考查的知识点是 3.2.3 节准对称离散无记忆信道。题解: 准对称 DMC 的信

道容量计算公式。

24. 如图 3.6 所示的高斯白噪加性信道, 输入信号 X_1, X_2 , 噪声信号 Z_1, Z_2 , 输出信号 $Y = X_1 + Z_1 + X_2 + Z_2$ 。输入和噪声均为相互独立的零均值的高斯随机变量, 功率分别为 P_1, P_2 和 N_1, N_2 。

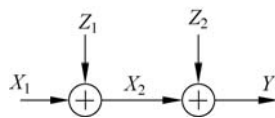


图 3.6 题 24 的图

(1) 求 $I(X_1; Y)$ 和 $I(X_2; Y)$;

(2) 求 $I(X_1 X_2; Y)$;

(3) 当输入信号的总功率受限 $P_1 + P_2 \leq P$ 时, 求 $I(X_1; Y) + I(X_2; Y)$ 的最大值。

解答: (1) $Y - X_1 = X_2 + Z_1 + Z_2$ 是 3 个独立高斯随机变量的和, 因此

$$H(Y | X_1) = H(Y - X_1) = \frac{1}{2} \log_2 [2\pi e(P_2 + N_1 + N_2)]$$

$$H(Y) = \frac{1}{2} \log_2 [2\pi e(P_1 + P_2 + N_1 + N_2)]$$

$$H(Y) - H(Y | X_1) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{P_1 + P_2 + N_1 + N_2}{P_2 + N_1 + N_2} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_1}{P_2 + N_1 + N_2} \right)$$

$$I(X_2; Y) = H(Y) - H(Y | X_2) = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_2}{P_1 + N_1 + N_2} \right)$$

(2) 当给定 X_1, X_2 的值 x_1 和 x_2 以后, Y 的条件概率密度是均值为 $(x_1 + x_2)$ 、方差为 $(N_1 + N_2)$ 的正态分布。

$$H(Y | X_1 X_2) = H(Y - X_1 - X_2) = \frac{1}{2} \log_2 [2\pi e(N_1 + N_2)]$$

$$\begin{aligned} I(X_1 X_2; Y) &= H(Y) - H(Y | X_1 X_2) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{P_1 + P_2 + N_1 + N_2}{N_1 + N_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_1 + P_2}{N_1 + N_2} \right) \end{aligned}$$

(3) $I(X_1; Y)$ 和 $I(X_2; Y)$ 可以写成:

$$I(X_1; Y) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{P}{P_2 + N_1 + N_2} \right)$$

$$I(X_2; Y) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{P}{P_1 + N_1 + N_2} \right)$$

式中, $P = P_1 + P_2 + N_1 + N_2 = \text{var}(Y)$ 是输出总功率, 因此

$$\begin{aligned} I(X_1; Y) + I(X_2; Y) &= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{P}{P_2 + N_1 + N_2} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{P}{P_1 + N_1 + N_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{P^2}{(P_2 + N_1 + N_2)(P_1 + N_1 + N_2)} \right] \end{aligned}$$

要使 $I(X_1; Y) + I(X_2; Y)$ 得到最大值, $(P_2 + N_1 + N_2)(P_1 + N_1 + N_2)$ 的值须最小。因为这两个因子的和是个常数, 所以当这两个因子相等时, $(P_2 + N_1 + N_2)(P_1 + N_1 + N_2)$ 最大, 而这两个因子相差越大时, $(P_2 + N_1 + N_2)(P_1 + N_1 + N_2)$ 越小。即当 $P_1 = P$ 或 $P_2 = P$ 时, $I(X_1; Y) + I(X_2; Y)$ 得到最大值。

注: 本题考查的知识点是 2.2.2 节离散信源熵、2.2.3 节互信息、2.2.4 节数据处理中

信息的变化、3.4.3 节限时限频限功率加性高斯白噪信道。题解：(1)级联信道的输入输出分析；(2)高斯白噪加性信道的输入输出分析；(3)互信息的计算；(4)信道容量的定义。

25. 积信道。有两个离散无记忆信道 $\{X_1, P(Y_1|X_1), Y_1\}$ 和 $\{X_2, P(Y_2|X_2), Y_2\}$, 信道容量分别为 C_1 和 C_2 。两个信道同时分别输入 X_1 和 X_2 , 输出 Y_1 和 Y_2 , 这两个信道组成一个新的信道, 求这个新信道的容量。

解答：由于这两个离散无记忆信道相互独立, 因此 $p(Y_1Y_2|X_1X_2) = p(Y_1|X_1)p(Y_2|X_2)$, 则

$$\begin{aligned} I(X_1X_2; Y_1Y_2) &= H(Y_1Y_2) - H(Y_1Y_2 | X_1X_2) \\ &= H(Y_1Y_2) - H(Y_1 | X_1X_2) - H(Y_2 | X_1X_2Y_1) \\ &= H(Y_1Y_2) - H(Y_1 | X_1) - H(Y_2 | X_2) \\ &\leq H(Y_1) + H(Y_2) - H(Y_1 | X_1) - H(Y_2 | X_2) \\ &= I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2) \end{aligned}$$

当 X_1 和 X_2 相互独立时, Y_1 和 Y_2 相互独立, 因此

$$C = \max_{p(x_1x_2)} I(X_1X_2; Y_1Y_2) \leq \max_{p(x_1)} I(X_1; Y_1) + \max_{p(x_2)} I(X_2; Y_2) = C_1 + C_2$$

当 $p(X_1X_2) = p^*(X_1)p^*(X_2)$ 时等号成立, $p^*(X_1)$ 和 $p^*(X_2)$ 是使这两个信道分别达到信道容量 C_1 和 C_2 的最佳输入分布。

注：本题考查的知识点是 3.3 节离散序列信道及其容量。题解：(1)积信道的信道容量计算；(2)根据信道容量的定义计算。

26. 有记忆信道的信道容量高于无记忆信道的信道容量。考虑一个二元对称信道 $Y_i = X_i \oplus Z_i$, $\oplus$ 表示模 2 加, $X_i, Y_i \in \{0, 1\}$ 。假定 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 有相同的边缘概率分布 $p(Z_i=1)=p, p(Z_i=0)=1-p$, 但是并不相互独立, 但是 Z_n 与输入 X_n 相互独立。如果记 $C=1-H(p, 1-p)$, 证明: $\max_{p(x_1x_2\dots x_n)} I(X_1X_2\dots X_n; Y_1Y_2\dots Y_n) \geq nC$ 。

证明：由题意, $Z_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$ 。由于 $Y_i = X_i \oplus Z_i$, 且 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 并不相互独立, 所以

$$\begin{aligned} I(X_1\dots X_n; Y_1\dots Y_n) &= H(X_1\dots X_n) - H(X_1\dots X_n | Y_1\dots Y_n) \\ &= H(X_1\dots X_n) - H(Z_1\dots Z_n | Y_1\dots Y_n) \\ &\geq H(X_1\dots X_n) - H(Z_1\dots Z_n) \\ &\geq H(X_1\dots X_n) - \sum_{i=1}^n H(Z_i) \end{aligned}$$

将这个离散有记忆信道的信道容量记为 $C^{(n)}$, 当 $\{X_i\}$ 为独立同分布且为 $p = \frac{1}{2}$ 的贝努利分布时, 有

$$C^{(n)} \geq H(X_1\dots X_n) - \sum_{i=1}^n H(Z_i) = n - nH(p) = n[1 - H(p)] = nC$$

从直觉上来说, 由于噪声样值之间的相关性减小了有效噪声, 使得有记忆信道的信道容量高于无记忆信道的信道容量。

注：本题考查的知识点是 3.1.3 节信道容量的定义。题解：(1) $H(Z_1\dots Z_n)$ 小于或等于 Z_i 独立时的熵 $\sum_{i=1}^n H(Z_i)$; (2) 利用信道容量的定义分析有记忆信道的信道容量。