第 3 章 图形的几何变换

CHAPTER 3

在图形设计与构造中,图形的二维和三维几何变换有着广泛的应用。应用于图形的几何描述并改变它的位置、方向或大小的操作称为图形的几何变换。几何变换主要包括平移、旋转、缩放、对称及错切等操作。一般有两个方法可以对图形进行几何变换:一种是变换矩阵作用到图形的每个点从而产生图形变换;另一种是变换矩阵作用到图形一系列顶点或关键点,通过几何变换得到新的顶点或关键点序列,从而得到变换后的图形。因此,我们都以点的形式研究图形的几何变换。

本章要点:

本章重点掌握二维基本几何变换、三维平移变换、关于坐标轴的三维旋转变换和三维缩放变换。了解关于任意轴的三维旋转过程。

3.1 几何变换的数学基础

1. 矢量运算

矢量为有向线段,有方向和大小。设有两个矢量 $\boldsymbol{V}_1(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{V}_2(x_2,y_2,z_2)$。

(1) 矢量的长度为

$$|\boldsymbol{V}_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

(2) 数乘矢量为

$$a\boldsymbol{V}_1=(ax_1,ay_1,az_1)$$

(3) 两矢量之和为

$$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_1=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

(4) 两矢量的点积为

$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2=|\boldsymbol{V}_1||\boldsymbol{V}_2|\cos\theta=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$$

θ 为两向量之间的夹角。

另外,点积满足交换律和分配律:

$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{V}_1$$

$$\boldsymbol{V}_1\cdot(\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3)=\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_3$$

（5）两矢量的叉积为

$$\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1\cdot z_2-y_2\cdot z_1,z_1\cdot x_2-z_2\cdot x_1,x_1\cdot y_2-x_2\cdot y_1)$$

叉积满足反交换律和分配律：

$$\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2=-\boldsymbol{V}_2\times\boldsymbol{V}_1$$

$$\boldsymbol{V}_1\times(\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3)=\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_3$$

2．矩阵运算

假设一个 m 行、n 列矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A}_{mn}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

1）矩阵加法运算

假设两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 m 行、n 列，把其对应位置元素相加而得到的矩阵叫作矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

只有在两个矩阵行和列的数目都相同时才能做加法运算。

2）数乘矩阵

用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 每一个元素而得的矩阵叫作 k 与 $\boldsymbol{A}$ 之积，记为 $k\boldsymbol{A}$。

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}$$

3）矩阵乘法运算

只有前矩阵的列数等于后矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘。

$\boldsymbol{C}_{mn}=\boldsymbol{A}_{mp}\cdot\boldsymbol{B}_{pn}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的每个元素 c_{ij} 为

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

如 $\boldsymbol{A}$ 为 2×3 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 3×2 的矩阵，两者的乘积为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

4）单位矩阵

对于 $n\times n$ 的矩阵，如果其对角线上的各个元素均为1，其余的元素都为0，则该矩阵称为单位矩阵，记为 $\boldsymbol{I}_n$。对于任意 $m\times n$ 矩阵恒有

$$\boldsymbol{A}_{mn}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{mn}$$

$$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{mn}=\boldsymbol{A}_{mn}$$

5）矩阵的转置

交换一个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 所有行列的元素，所得到的 $n\times m$ 矩阵称为原有矩阵的转置，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

可得 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$，$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

矩阵积的转置为 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

6）矩阵的逆

对于 $m\times n$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在 $m\times n$ 的方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}$ 被称为非奇异矩阵。矩阵的逆是相互的，$\boldsymbol{A}$ 也可记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{B}$ 也是一个非奇异矩阵。任何非奇异矩阵有且只有一个逆矩阵。

7）矩阵运算的基本性质

矩阵的加法满足交换律与结合律：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$$

数乘的矩阵满足分配律与结合律：

$$a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B}$$

$$a(\boldsymbol{AB})=(a\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{B})$$

矩阵的乘法满足结合律：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$$

矩阵的乘法对加法满足分配律：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$$

但矩阵的乘法不满足交换律：

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

3.2 二维基本几何变换

3.2.1 平移、缩放、旋转变换

1. 平移变换

将一个点的坐标增加位移量得到新的坐标，称为平移变换。假设 x、y 两个方向的平移

量分别为 t_x，t_y，将原来点的坐标 $p(x,y)$ 增加该平移量变为新坐标 $p'(x',y')$，则平移变换的等式形式为

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

或写成

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{T}$$

其中：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

将一个三角形进行平移变换得到的图形如图 3-1 所示。

2. 旋转变换

二维旋转是将一个对象绕与 xy 平面垂直的旋转轴进行旋转，旋转轴与 xy 平面的交点称为基准点。

如图 3-2 所示，坐标点 $p(x,y)$ 以坐标原点为基准点，逆时针旋转 θ 角，变换为新的坐标点 $p'(x',y')$。

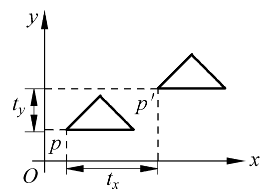


图 3-1　平移变换示例

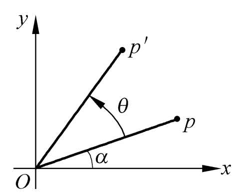


图 3-2　相对原点将点 p 旋转得到 p'

注意： 旋转角度是分正负的，正角度 θ 定义为绕基准点逆时针旋转；而负角度定义为绕基准点顺时针旋转。

推导过程如下。

变换前点 $p(x,y)$ 的两个坐标可分别表示为

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

变换后点 $p'(x',y')$ 的两个坐标可分别表示为

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \end{cases}$$

从而得到旋转变换的等式形式为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

由等式形式得到变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

或写成

$$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{RP}$$

其中：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}'=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

如果顺时针旋转角度为 θ，此时 θ 代入负值即可。

将△ABC 以坐标原点为基准点进行旋转得到的结果如图 3-3 所示。

3. 缩放变换

假设缩放系数为 s_x 和 s_y，两缩放系数分别与原来点 $p(x,y)$ 两方向坐标相乘得到新的坐标 $p'(x',y')$，从而缩放变换等式形式为

$$\begin{cases}x'=s_x\cdot x\\ y'=s_y\cdot y\end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_x & 0\\ 0 & s_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

或写成

$$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{SP}$$

其中：

$$\boldsymbol{P}'=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}s_x & 0\\ 0 & s_y\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

在缩放体系中，有一个缩放变换后不改变位置的点称为固定点。在此缩放中，固定点为坐标原点。不过，固定点可以被选择在任何位置，在 3.2.2 节中再加以描述。

缩放系数 s_x 和 s_y 可以取任何正数值。值大于 1 将放大对象的尺寸，值小于 1 将缩小对象的尺寸。当 s_x 和 s_y 取值相同时，x 和 y 两方向保持相对比例不变，称为一致缩放；否则，称为差值缩放。

将△ABC 以固定点为坐标原点进行缩放变换，如图 3-4 所示。

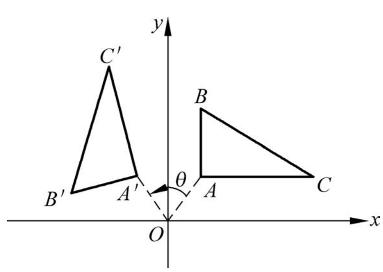


图 3-3 将△ABC 以坐标原点为基准点旋转 θ 所得结果

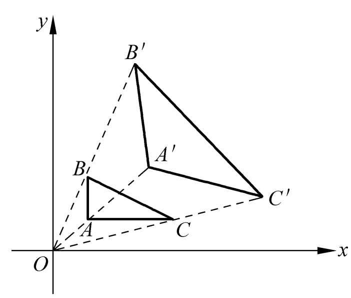


图 3-4 以固定点为坐标原点的缩放变换示意图

4. 齐次坐标表示

从平移、缩放、旋转矩阵变换可以看到：平移是加法运算，而缩放、旋转是乘法运算，变换矩阵的形式不统一，无法形成几何变换的模板式运算，也更难进行复合变换。为了使变换

矩阵的形式统一，引入齐次坐标。

如果将二维矩阵表示形式扩展为三维矩阵表示形式，将变换矩阵的第三列用于平移项，则所有的变换公式可表达为矩阵乘法。将二维坐标表示(x,y)扩充到三维坐标表示(x_h, y_h, h)。(x_h, y_h, h)称为齐次坐标，这里的齐次系数h是一个非零值，因此

$$x=\frac{x_h}{h},\quad y=\frac{y_h}{h}$$

这样，二维齐次坐标表示为$(h\times x, h\times y, h)$。对于二维几何变换，可以把齐次系数$h$取为非零值。对于每个坐标点$(x,y)$，可以有无数个等价的齐次表达式。最方便的选择是简单地将齐次系数h设置成1。因此每个二维坐标位置都可用齐次坐标$(x,y,1)$来表示。

利用齐次坐标表示坐标点位置，我们就可以用矩阵相乘的形式来统一所有的几何变换。二维坐标点用三维列向量表示，二维变换矩阵用一个3×3的矩阵表示。

5. 齐次坐标下几何变换的矩阵表示

1）二维平移变换的矩阵表示

齐次坐标下二维平移变换矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&t_x\\0&1&t_y\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+t_x\\y+t_y\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}(t_x,t_y)\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

其中，平移矩阵$\boldsymbol{T}(t_x,t_y)$为

$$\boldsymbol{T}(t_x,t_y)=\begin{bmatrix}1&0&t_x\\0&1&t_y\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2）二维旋转变换的矩阵表示

齐次坐标下以坐标原点为中心且旋转角度为θ的二维旋转变换矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}(\theta)\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

其中，旋转矩阵$\boldsymbol{R}(\theta)$为

$$\boldsymbol{R}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

3）二维缩放变换的矩阵表示

齐次坐标下固定点为坐标原点且缩放系数为s_x和s_y的二维缩放变换矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_x&0&0\\0&s_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_x\cdot x\\s_y\cdot y\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{S}(s_x,s_y)\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

其中，缩放矩阵$\boldsymbol{S}(s_x,s_y)$为

$$\boldsymbol{S}(s_x,s_y)=\begin{bmatrix}s_x&0&0\\0&s_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

6. 逆变换

1）逆平移变换

通过对平移距离取负值可得到平移变换的逆矩阵。假设两平移距离为 t_x，t_y，则其逆平移矩阵为

$$\boldsymbol{T}^{-1}(t_x,t_y)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -t_x\\0 & 1 & -t_y\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

逆平移是与原平移变换方向相反的平移，因此，平移矩阵和其逆平移矩阵的乘积是一个单位矩阵。

2）逆旋转变换

通过对旋转角度取负值可得到旋转变换的逆矩阵。坐标原点为基准点、旋转角度为 θ 的旋转变换，其逆旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R}^{-1}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0\\\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

相同角度 θ 绕着逆时针和顺时针分别形成两个互逆矩阵，因此，旋转矩阵和其逆旋转矩阵的乘积是一个单位矩阵。

3）逆缩放变换

将缩放系数取其倒数形成缩放变换的逆矩阵。因此，固定点为坐标原点且缩放系数 s_x 和 s_y 的二维缩放变换的逆矩阵可表示为

$$\boldsymbol{S}^{-1}(s_x,s_y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s_x} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{s_y} & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

缩放矩阵和其逆矩阵的乘积也是一个单位矩阵。

3.2.2 复合变换

我们对点位置 P 进行两次变换，因为矩阵乘积具有结合率，可知变换后的坐标点为

$$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{P}$$

令

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$$

则有

$$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{M}$ 即为复合变换矩阵。两次变换如此，三次或以上次变换也类似。

常见的复合几何变换如下。

1. 复合二维平移

如果将两个连续的平移向量（t_{1x}，t_{1y}）和（t_{2x}，t_{2y}）施加于坐标点 $\boldsymbol{P}$，变换后坐标点 $\boldsymbol{P}'$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}' &= \boldsymbol{T}(t_{2x}, t_{2y})\{\boldsymbol{T}(t_{1x}, t_{1y})\boldsymbol{P}\} \\ &= \{\boldsymbol{T}(t_{2x}, t_{2y})\boldsymbol{T}(t_{1x}, t_{1y})\}\boldsymbol{P}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 均为齐次坐标列向量。两个平移变换的矩阵相乘为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & t_{2x} \\ 0 & 0 & t_{2y} \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & t_{1x} \\ 0 & 0 & t_{1y} \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & t_{2x}+t_{1x} \\ 0 & 0 & t_{2y}+t_{1y} \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{T}(t_{2x}, t_{2y})\boldsymbol{T}(t_{1x}, t_{1y}) = \boldsymbol{T}(t_{2x}+t_{1x}, t_{2y}+t_{1y})$$

从而得出：对同一点做两次平移变换相当于两次平移分量之和作为平移分量的一次平移变换。

2. 复合二维旋转

如果将两个连续的旋转角度 θ_1 和 θ_2 施加于坐标点 $\boldsymbol{P}$，那么变换后的坐标 $\boldsymbol{P}'$ 为

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{R}(\theta_2)\{\boldsymbol{R}(\theta_1)\boldsymbol{P}\} = \{\boldsymbol{R}(\theta_2)\boldsymbol{R}(\theta_1)\}\boldsymbol{P}$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 均为齐次坐标列向量。两个旋转变换的矩阵相乘为

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_2+\theta_1) & -\sin(\theta_2+\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_2+\theta_1) & \cos(\theta_2+\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{R}(\theta_2)\boldsymbol{R}(\theta_1) = \boldsymbol{R}(\theta_2+\theta_1)$$

从而得出：对同一点做两次旋转变换相当于两次的旋转角度之和作为旋转角度的一次旋转变换。

3. 复合二维缩放

如果将两个连续缩放变换作用于坐标点 $\boldsymbol{P}$，变换后坐标点 $\boldsymbol{P}'$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}' &= \boldsymbol{S}(s_{2x}, s_{2y})\{\boldsymbol{S}(s_{1x}, s_{1y})\boldsymbol{P}\} \\ &= \{\boldsymbol{S}(s_{2x}, s_{2y})\boldsymbol{S}(s_{1x}, s_{1y})\}\boldsymbol{P}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 均为齐次坐标列向量。两个缩放变换的矩阵相乘为

$$\begin{bmatrix}s_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{2x}\cdot s_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2y}\cdot s_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{S}(s_{2x}, s_{2y})\boldsymbol{S}(s_{1x}, s_{1y}) = \boldsymbol{S}(s_{2x}\cdot s_{1x}, s_{2y}\cdot s_{1y})$$

从而得出：对同一点做两次缩放变换相当于两次的缩放系数之积作为缩放系数的一次缩放变换。

4. 二维基准点为 $\boldsymbol{M(x_r, y_r)}$ 的旋转变换

前面所学习的旋转变换是基准点为坐标原点的旋转变换。如果基准点为任意一点 $M(x_r, y_r)$，可以通过下面 3 个步骤的复合变换得到。

步骤 1　平移变换使基准点 $M(x_r, y_r)$ 回到坐标原点，两方向的平移分量分别为 $-x_r$ 和 $-y_r$。变换点 $p(x_0, y_0)$ 通过同样的平移分量变换到 (x_1, y_1)，平移矩阵变换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}(t_x, t_y) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{T}(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_r \\ 0 & 0 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤 2 以基准点为坐标原点进行旋转变换，变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}(\theta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤 3 将基准点平移回原来的位置(x_r, y_r)。x 方向的平移分量 x_r、y 方向的平移分量 y_r，即步骤 1 中平移变换的逆变换：

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}(t_x, t_y) \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{T}^{-1}(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_r \\ 0 & 0 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

应用复合变换表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_r \\ 0 & 0 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_r \\ 0 & 0 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta)+y_r\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta)-x_r\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如图 3-5 所示，其中图 3-5(a)中的三角形和基准点(x_r, y_r)都在原始位置；图 3-5(b)中平移变换使基准点(x_r, y_r)回到坐标原点位置，三角形各点也随之平移相同的平移分量；图 3-5(c)绕坐标原点旋转三角形；图 3-5(d)逆平移变换使基准点回到(x_r, y_r)所在的原始位置，就得到变换后的三角形。

5. 二维固定点为 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x_f}, \boldsymbol{y_f})$的缩放变换

前面所学的缩放变换是固定点为坐标原点的缩放变换。如果固定点为任意点 $M(x_f$，

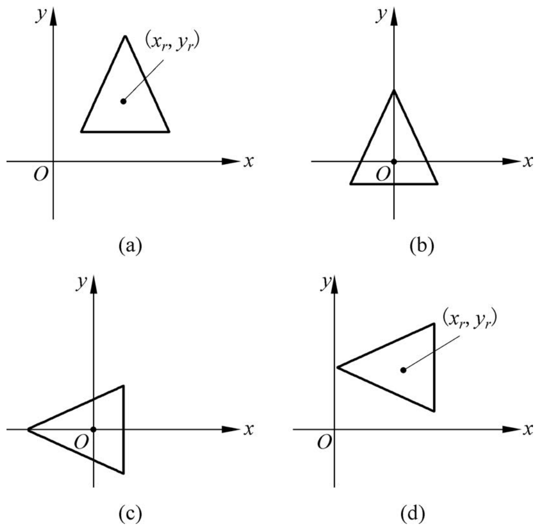


图 3-5　基准点为(x_r,y_r)的旋转变换

y_f)，可以通过下面 3 个步骤的复合变换得到。

步骤 1　平移变换使固定点 $M(x_f,y_f)$回到坐标原点处，两方向的平移分量分别为$-x_f$ 和$-y_f$。变换点 $p(x_0,y_0)$通过同样的平移分量变换到(x_1,y_1)，平移矩阵变换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}(t_x,t_y)\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{T}(t_x,t_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_f \\ 0 & 0 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤 2　以固定点为坐标原点进行缩放变换，缩放矩阵变换为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}(s_x,s_y)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{S}(s_x,s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤 3　最后将固定点平移回原来的位置(x_f,y_f)，x 方向的平移分量为 x_f，y 方向的平移分量为 y_f，即步骤 1 中平移变换的逆变换：

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}(t_x,t_y)\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{T}^{-1}(t_x,t_y)=\begin{bmatrix}0 & 0 & x_f\\ 0 & 0 & y_f\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

应用复合变换表示为

$$\begin{bmatrix}x_3\\ y_3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & x_f\\ 0 & 0 & y_f\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -x_f\\ 0 & 0 & -y_f\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}s_x & 0 & x_f(1-s_x)\\ 0 & s_y & y_f(1-s_y)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ 1\end{bmatrix}$$

如图 3-6 所示，其中图 3-6(a)中的三角形和固定点(x_f，y_f)都在原始位置；图 3-6(b)平移变换使固定点(x_f，y_f)回到坐标原点位置，三角形各点也随之平移相同的平移分量；图 3-6(c)绕坐标原点进行缩放；图 3-6(d)逆平移使固定点回到(x_f，y_f)所在的原始位置，就得到变换后的三角形。

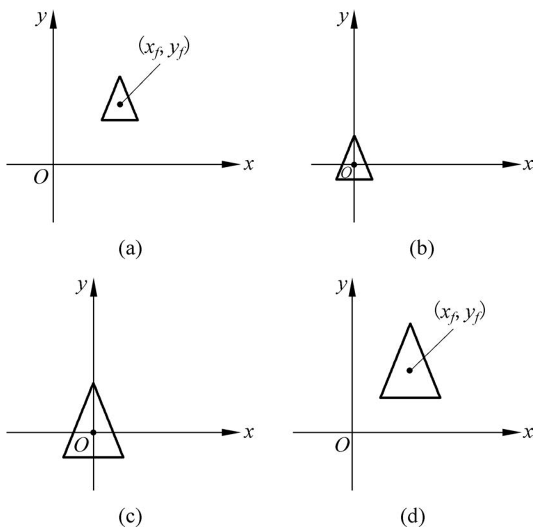


图 3-6 固定点为(x_f，y_f)的缩放变换

3.2.3 对称变换

对称变换又称为镜像变换。对于二维对称操作可将图形绕对称轴旋转 180°而成，下面列举几个常见对称轴的对称变换。

(1) 坐标点(x，y)关于 $y=0$ 即 x 轴作对称变换得到新的坐标(x'，y')，等式形式为

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

这种对称变换保持 x 坐标不变，y 坐标取相反值。将△ABC 关于 x 轴作对称变换，如图 3-7 所示。

（2）坐标点（x，y）关于 $x=0$ 即 y 轴作对称变换得到新的坐标（x'，y'），等式形式为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

这种对称变换保持 y 坐标不变，x 坐标取相反值。将△ABC 关于 y 轴作对称变换，如图 3-8 所示。

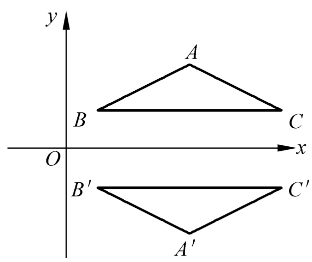


图 3-7　△ABC 关于 x 轴的对称变换

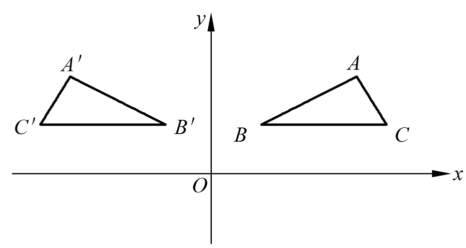


图 3-8　△ABC 关于 y 轴的对称变换

（3）坐标点（x，y）关于坐标原点作对称变换得到新的坐标（x'，y'），等式形式为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

这种对称变换 x 坐标值和 y 坐标值同时取相反值。将△ABC 关于坐标原点作对称变换，如图 3-9 所示。

（4）坐标点（x，y）关于直线 $y=x$ 作对称变换得到新的坐标（x'，y'），等式形式为

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

将△ABC 关于 $y=x$ 轴作对称变换，如图 3-10 所示。

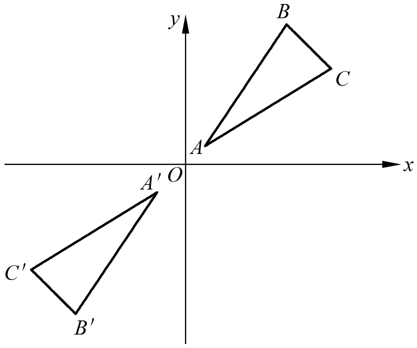


图 3-9 △ABC 关于坐标原点的对称变换

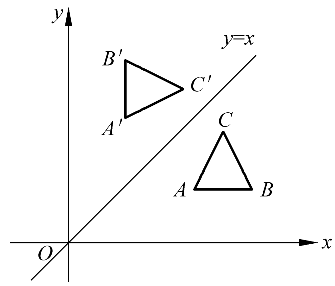


图 3-10 △ABC 关于 $y=x$ 轴的对称变换

（5）坐标点(x,y)关于直线 $y=-x$ 作对称变换得到新的坐标(x',y')，等式形式为

$$\begin{cases}x'=-y\\ y'=-x\end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\ -1&0&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

将△ABC 关于 $y=-x$ 轴作对称变换，如图 3-11 所示。

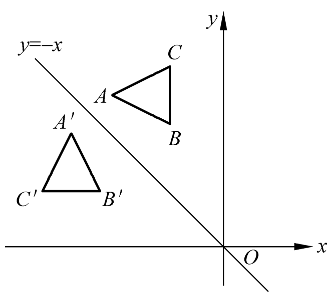


图 3-11 △ABC 关于 $y=-x$ 轴的对称变换

（6）坐标点(x,y)关于任意直线 $y=mx+b$ 的对称变换。

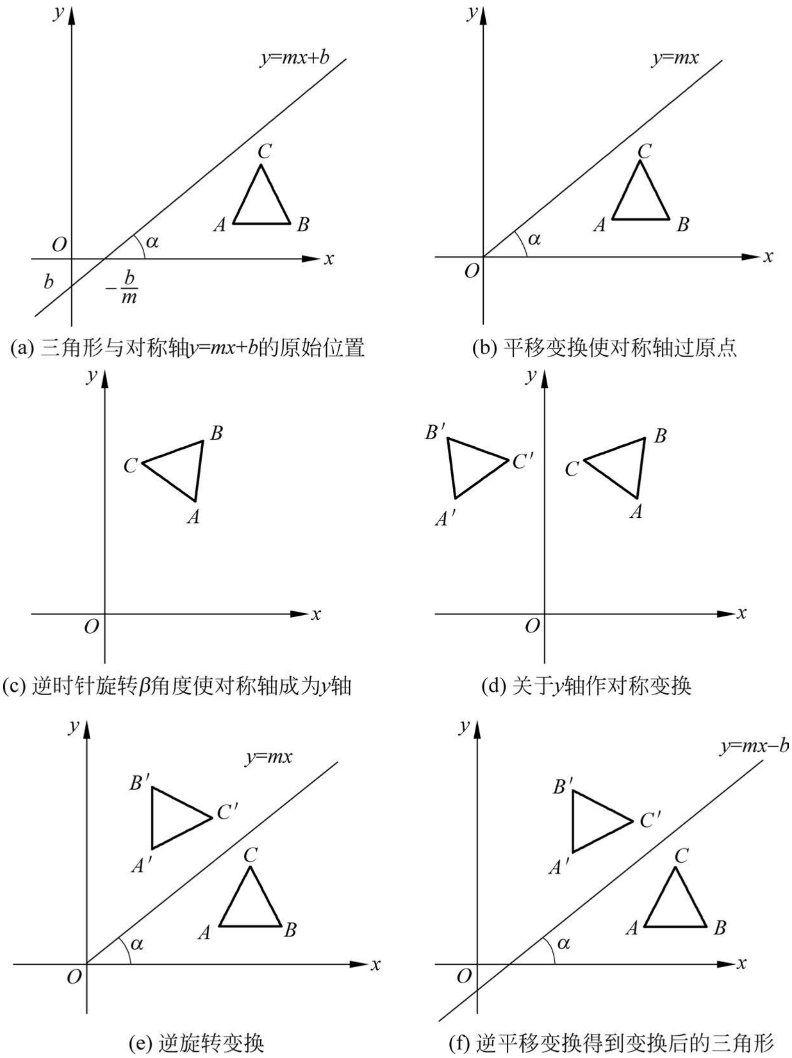
可以通过复合变换完成这种对称变换。具体操作：先平移对称轴 $y=mx+b$ 使其过原点，然后旋转对称轴使其成为某个坐标轴，再关于该坐标轴作对称变换，最后逆旋转和逆平移使对称轴回到原来的位置，这样就可以得到坐标点(x,y)关于任意直线 $y=mx+b$ 的对称点(x',y')。由于平移时可以沿 x 方向或 y 方向平移，而旋转也可以沿逆时针或顺时针旋转成为某个坐标轴，因此变换矩阵并不唯一。

从对称轴 $y=mx+b$ 的直线方程可知：直线在 y 轴上的截距为 b，在 x 轴上的截距为 $-\dfrac{b}{m}$。假设直线的正切角为 α，则 $\alpha=\mathrm{arctg}(m)$，α 余角设为 $\beta=90°-\alpha$。那么正常描述坐标点(x,y)关于任意直线 $y=mx+b$ 的对称变换可分以下 4 种情况。

第一种情况：沿 y 方向作平移变换使对称轴过原点，逆时针旋转 β 角度使其成为 y 轴，再关于 y 轴作对称，最后作相应逆旋转变换和逆平移变换使对称轴回到原来的位置。从而得到最后的变换点坐标。对应的复合变换矩阵为

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&b\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta&\sin\beta&0\\ -\sin\beta&\cos\beta&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta&-\sin\beta&0\\ \sin\beta&\cos\beta&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&-b\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

如图 3-12 所示。



(a) 三角形与对称轴$y=mx+b$的原始位置　(b) 平移变换使对称轴过原点

(c) 逆时针旋转β角度使对称轴成为y轴　(d) 关于y轴作对称变换

(e) 逆旋转变换　(f) 逆平移变换得到变换后的三角形

图 3-12　关于任意直线 $y=mx+b$ 的对称变换过程

第二种情况：沿 x 方向作平移变换使对称轴过原点，顺时针旋转 α 角度使其成为 x 轴，再关于 x 轴作对称变换，最后作逆旋转变换和逆平移变换使对称轴回到原来的位置。对应的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{b}{m} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{b}{m} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

后两种情况通过两方向的平移变换与两方向的旋转变换交叉组合就可得出，但注意旋转使对称轴成为某个轴时，对称矩阵就必须只关于该轴对称。

3.2.4 错切变换

错切变换是一种使图形形状发生变化的变换，经过错切变换的图形就好像内部夹层发生滑动而组成的新图形。下面介绍两种简单的沿着 x 方向的错切变换和沿着 y 方向的错切变换。

1. 简单的沿 x 方向的错切变换

这种错切变换保持 y 值不变，而 x 值产生与 y 值成正比的平移量。

变换等式为

$$\begin{cases} x' = x + \mathrm{sh}_x \cdot y \\ y' = y \end{cases}$$

其中，sh_x 可为任意实数，称为错切参数。sh_x 为正值时坐标点向右移动，sh_x 为负值时坐标点向左移动。变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{sh}_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

如图 3-13 所示。

在图 3-13 中，可以看出：错切参数 $\mathrm{sh}_x = \dfrac{\Delta x}{y}$ 。

2. 简单的沿 y 方向的错切变换

这种错切变换保持 x 值不变，而 y 值产生同 x 值成正比的平移量。

变换等式为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \mathrm{sh}_y \cdot x \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

如图 3-14 所示。

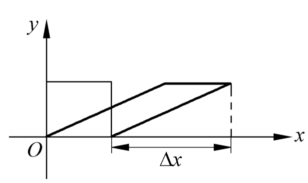


图 3-13 简单的沿 x 方向的错切变换

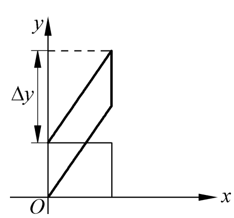


图 3-14 简单的沿 y 方向的错切变换

在图 3-14 中，可以看出：错切参数 $\mathrm{sh}_y = \dfrac{\Delta y}{x}$。

3.3　三维基本几何变换

三维几何变换是在二维几何变换的基础上考虑 z 坐标而得到的。三维平移变换与三维缩放变换只是在二维相应几何变换基础上多了 z 分量。而三维旋转变换比较复杂：在 xy 平面上的二维旋转只考虑沿着垂直于 xy 平面的坐标轴进行旋转，也就是绕一个基准点旋转；而三维空间中可以绕任意方向的旋转轴进行旋转，往往可以通过绕某个坐标轴进行复合变换得到，因此关于坐标轴的旋转最为关键。

一个三维位置在齐次坐标中表示为四元列向量，每一个几何变换操作是依次左乘坐标向量为 4×4 的变换矩阵。

3.3.1　三维平移变换

将平移距离 t_x,t_y,t_z 加到原来的坐标(x,y,z)上变换为新的坐标(x',y',z')，平移变换等式形式为

$$\begin{cases} x'=x+t_x \\ y'=y+t_y \\ z'=z+t_z \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{TP}$$

其中，平移矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如图 3-15 所示。

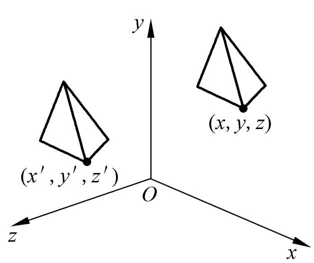


图 3-15　平移变换

3.3.2 三维旋转变换

一般任意旋转轴的旋转往往可以通过围绕坐标轴的旋转并结合适当的平移变换的复合而得到。因此我们首先讨论绕三个坐标轴的旋转。

1. 绕 z 轴的三维旋转变换

任意点绕 z 轴三维旋转形成一个与 z 轴垂直的旋转平面，z 坐标在该变换中保持不变，而 x、y 坐标在旋转平面中的旋转变换相当于基准点为坐标原点的二维旋转。变换等式为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

或写成

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{R}_z \boldsymbol{P}$$

其中，绕 z 轴三维旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_z$ 为

$$\boldsymbol{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如图 3-16 所示。

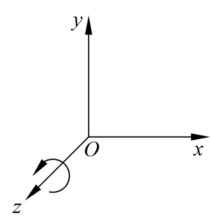


图 3-16 绕 z 轴的三维旋转

2. 绕 y 轴的三维旋转变换

由于三个坐标轴是对等关系，对 1 中的等式作坐标参数 x、y、z 的循环替换：$z \to y$，$y \to x$，$x \to z$，根据该方式的轮换，可得等式形式为

$$\begin{cases} x' = z\cos\theta - x\sin\theta \\ y' = z\sin\theta + x\cos\theta \\ y' = y \end{cases}$$

齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

或写成

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{P}$$

其中,绕 y 轴的三维旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_y$ 为

$$\boldsymbol{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标轴轮换如图 3-17 所示。

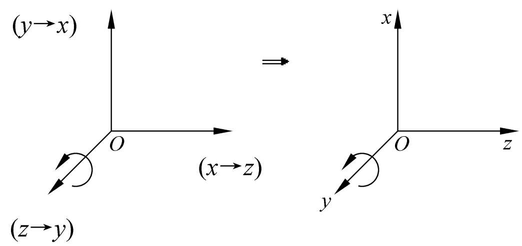


图 3-17　由绕 z 轴旋转经过循环坐标替换生成绕 y 轴旋转

3. 绕 x 轴的三维旋转变换

对 1 中等式作坐标参数 x、y、z 的循环替换：

$z\to x$,$x\to y$,$y\to z$,根据该方式的轮换,可得等式形式为

$$\begin{cases} y' = y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta \\ x' = x \end{cases}$$

齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

或写成

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{P}$$

其中,绕 x 轴的三维旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_x$ 为

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标轴轮换如图 3-18 所示。

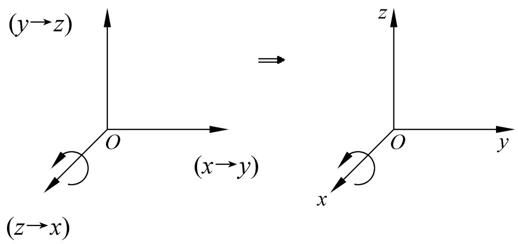


图 3-18　由绕 z 轴旋转经过循环坐标替换生成绕 x 轴旋转

4. 绕任意轴的一般三维旋转

如果旋转轴不是坐标轴，而是一条任意轴，可以应用关于坐标轴旋转和平移所形成的复合变换得到图形。假设任意轴由两个坐标点 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 确定。如果沿着从 $\boldsymbol{P}_2$ 到 $\boldsymbol{P}_1$ 的轴进行观察，并且旋转的方向为逆时针方向，旋转角度为 θ，则轴向量的齐次坐标可以定义为

$$\mathbf{V}=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\\1\end{bmatrix}$$

同时，沿旋转轴的单位向量的齐次坐标 $\boldsymbol{u}$ 定义为

$$\boldsymbol{u}=\frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\1\end{bmatrix}$$

其中，分量 a，b，c 是旋转轴的方向余弦：

$$a=\frac{x_2-x_1}{|\mathbf{V}|},\quad b=\frac{y_2-y_1}{|\mathbf{V}|},\quad c=\frac{z_2-z_1}{|\mathbf{V}|}$$

可以将旋转轴变换到任意一个坐标轴，下面以 z 轴为例来讨论其变换序列。

操作步骤如下：

① 平移对象，使旋转轴的一个点 $\boldsymbol{P}_1$ 与坐标原点重合；

② 旋转对象使旋转轴与某一个坐标轴重合，如 z 轴；

③ 绕坐标轴完成指定的旋转；

④ 利用逆旋转变换使旋转轴回到其原始方向；

⑤ 利用逆平移变换使旋转轴回到原始位置。

如图 3-19 所示。

具体实现过程如下。

(1) 选择将 $\boldsymbol{P}_1$ 点平移回到坐标原点，$\boldsymbol{P}_1$ 点的三维坐标为 (x_1,y_1,z_1)，该平移变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}(-x_1,-y_1,-z_1)=\begin{bmatrix}1&0&0&-x_1\\0&1&0&-y_1\\0&0&1&-z_1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

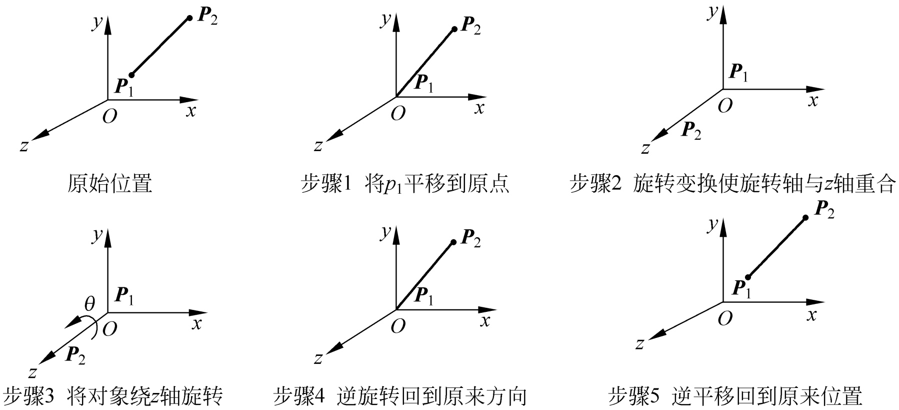


图 3-19　绕任意轴旋转时,将旋转轴变换成 z 轴的 5 个步骤

(2) 使旋转轴与 z 轴重合的变换可以通过两次坐标轴旋转完成。

实现方法并不唯一,可以通过先绕 x 轴旋转,将向量 $\boldsymbol{u}$ 变换到 xOz 平面上,设旋转矩阵为 $\boldsymbol{R}_x(\alpha)$;再绕 y 轴旋转,将向量 $\boldsymbol{u}$ 变换到 z 轴,设旋转矩阵为 $\boldsymbol{R}_y(\beta)$。图 3-20 和图 3-21 给出了向量 $\boldsymbol{u}$ 的两次旋转。由于旋转计算包括正弦函数和余弦函数,可以通过标准的向量运算来得到这两个旋转矩阵的元素。向量的点积运算可以确定余弦项,向量的叉积运算可以确定正弦项。

① 求 $\boldsymbol{R}_x(\alpha)$的参数,如图 3-20 所示。

旋转角 α 是旋转轴 $\boldsymbol{u}$ 在 yOz 平面的投影 $\boldsymbol{u}'=(0,b,c)$与 z 轴的夹角。旋转角度 α 的余弦可以由 $\boldsymbol{u}'$和 z 轴上单位向量 $\boldsymbol{u}_z$ 的点积得到

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u}_z}{|\boldsymbol{u}'||\boldsymbol{u}_z|}=\frac{c}{d}$$

其中,d 是 $\boldsymbol{u}'$的模:

$$d=\sqrt{b^2+c^2}$$

同样,可以利用 $\boldsymbol{u}'$和 $\boldsymbol{u}_z$ 的叉积得到 α 的正弦。$\boldsymbol{u}'$和 $\boldsymbol{u}_z$ 叉积形式为

$$\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{u}_z=\boldsymbol{u}_x|\boldsymbol{u}'||\boldsymbol{u}_z|\sin\alpha$$

并且 $\boldsymbol{u}'$和 $\boldsymbol{u}_z$ 叉积的笛卡儿形式为

$$\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{u}_z=\boldsymbol{u}_x\cdot b$$

联立两种叉积形式的等式右边可得

$$\boldsymbol{u}_x|\boldsymbol{u}'||\boldsymbol{u}_z|\sin\alpha=\boldsymbol{u}_x\cdot b$$

另外有

$$|\boldsymbol{u}'|=d,\quad |\boldsymbol{u}_z|=1$$

得出

$$\sin\alpha=\frac{b}{d}$$

最后将计算出来的 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 代入绕 x 轴旋转的矩阵,即可得到将旋转轴 p_1p_2 旋转到 xOz 平面的旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_x(\alpha)$。

$$\boldsymbol{R}_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{c}{d} & -\dfrac{b}{d} & 0\\ 0 & \dfrac{b}{d} & \dfrac{c}{d} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

② 求 $\boldsymbol{R}_y(\beta)$的参数，如图 3-21 所示。

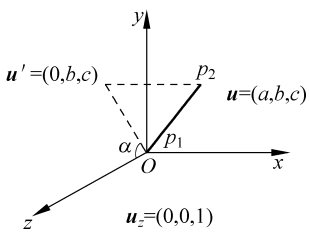


图 3-20　求旋转变换 $\boldsymbol{R}_x(\alpha)$的参数

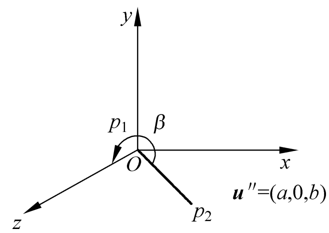


图 3-21　求旋转变换 $\boldsymbol{R}_y(\beta)$的参数

经过 $\boldsymbol{R}_x(\alpha)$变换，p_2 已落入 xOz 平面，但 p_2 点与 x 轴的距离保持不变。因此，p_1p_2 现在的单位矢量 $\boldsymbol{u}''$的 z 方向的分量的值即为$\boldsymbol{u}'$的长度，该值等于 d。也就是 $\boldsymbol{u}''=(a,0,d)$。设 β 是 $\boldsymbol{u}''$与 $\boldsymbol{u}_z$ 的夹角。

$\boldsymbol{u}''$的模$|\boldsymbol{u}''|$为

$$|\boldsymbol{u}''|=\sqrt{a^2+d^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$$

单位向量 $\boldsymbol{u}_z$ 的模$|\boldsymbol{u}_z|=1$。

所以：

$$\cos\beta=\frac{\boldsymbol{u}''\cdot\boldsymbol{u}_z}{|\boldsymbol{u}''||\boldsymbol{u}_z|}=d$$

比较叉积与坐标无关的形式：

$$\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{u}_z=\boldsymbol{u}_y|\boldsymbol{u}''||\boldsymbol{u}_z|\sin\beta$$

$\boldsymbol{u}''$和 $\boldsymbol{u}_z$ 叉积的笛卡儿形式为

$$\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{u}_z=\boldsymbol{u}_y\cdot(-a)$$

所以：

$$\sin\beta=-a$$

最后将计算出来的 $\cos\beta$ 和 $\sin\beta$ 代入绕 y 轴旋转的矩阵，即可得到将旋转轴 p_1p_2 旋转到 z 轴的旋转矩阵$\boldsymbol{R}_y(\beta)$：

$$\boldsymbol{R}_y(\beta)=\begin{bmatrix}d & 0 & -a & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ a & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3) 将旋转轴与 z 轴重合后，作对象关于 z 轴旋转 θ 角的旋转变换，最后分别进行 $\boldsymbol{R}_y(\beta)$的逆变换、$\boldsymbol{R}_x(\alpha)$ 的逆变换和 $\boldsymbol{T}(-x_1,-y_1,-z_1)$的逆变换得到最终结果。

关于 z 轴旋转 θ 角的旋转变换矩阵为

$$\boldsymbol{R}_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R}_y(\beta)$的逆变换矩阵为

$$\boldsymbol{R}_y^{-1}(\beta)=\begin{bmatrix}d & 0 & a & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -a & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R}_x(\alpha)$ 的逆变换矩阵为

$$\boldsymbol{R}_x^{-1}(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{c}{d} & \dfrac{b}{d} & 0\\ 0 & -\dfrac{b}{d} & \dfrac{c}{d} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{T}(-x_1,-y_1,-z_1)$ 的逆变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}^{-1}(-x_1,-y_1,-z_1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & 0 & y_1\\ 0 & 0 & 1 & z_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

最终,可得绕任意轴 p_1p_2 旋转 θ 角的旋转变换的复合变换为

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & 0 & y_1\\ 0 & 0 & 1 & z_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{c}{d} & \dfrac{b}{d} & 0\\ 0 & -\dfrac{b}{d} & \dfrac{c}{d} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & 0 & a & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -a & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}d & 0 & -a & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ a & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{c}{d} & -\dfrac{b}{d} & 0\\ 0 & \dfrac{b}{d} & \dfrac{c}{d} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -x_1\\ 0 & 1 & 0 & -y_1\\ 0 & 0 & 1 & -z_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}$$

复合变换 $\boldsymbol{R}(\theta)$可简写为

$$\boldsymbol{R}(\theta)=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{R}_x^{-1}(\alpha)\boldsymbol{R}_y^{-1}(\beta)\boldsymbol{R}_z(\theta)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\alpha)\boldsymbol{T}$$

3.3.3　三维缩放变换

1. 以固定点为坐标原点的三维缩放

点 $p(x、y、z)$关于坐标原点的三维缩放只是在二维缩放基础上增加 z 坐标的缩放参数

即可，因此缩放系数为 s_x, s_y, s_z 的三维缩放的等式形式为

$$\begin{cases} x' = s_x \cdot x \\ y' = s_y \cdot y \\ z' = s_z \cdot z \end{cases}$$

对应的变换矩阵为 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

如图 3-22 所示。

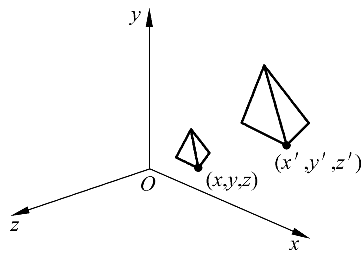


图 3-22 相对于坐标原点的缩放变换

2. 以固定点为任意点的三维缩放

如果固定点为任意点 (x_f, y_f, z_f)，可以通过下面 3 个步骤的复合变换得到，如图 3-23 所示。

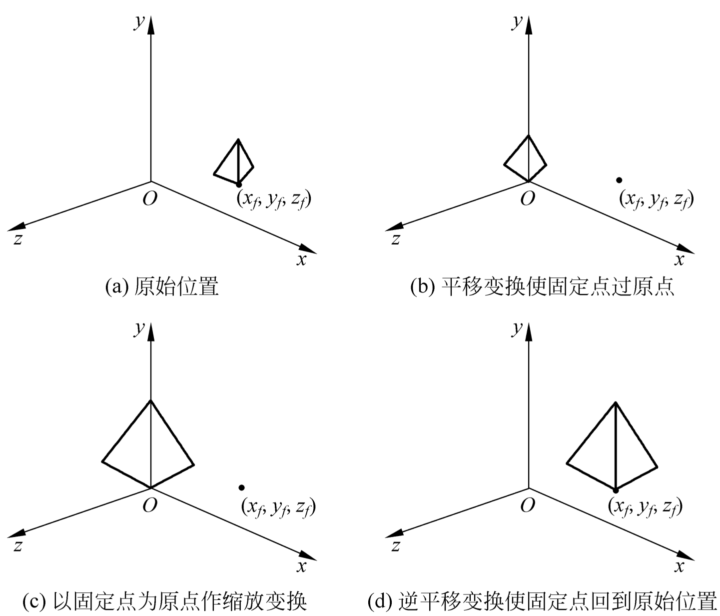


图 3-23 以任意固定点进行缩放变换

步骤 1 先做平移变换使固定点 (x_f, y_f, z_f) 回到坐标原点处，那么图形上的任意一点

(x_0, y_0, z_0)可以通过 x 方向的平移分量为$-x_f$、y 方向的平移分量为$-y_f$、z 方向的平移分量为$-z_f$ 的平移变换变换到(x_1, y_1, z_1)，平移变换的矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}(t_x, t_y, t_z) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -x_f \\ 0 & 0 & 0 & -y_f \\ 0 & 0 & 0 & -z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤 2　以固定点为坐标原点进行缩放变换，缩放变换的矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}(s_x, s_y, s_z) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤 3　将固定点移回原来的位置(x_f, y_f, z_f)，则 x 方向的平移分量为 x_f、y 方向的平移分量为 y_f，z 方向的平移分量为 z_f。变换点也随之增加相同的分量，即可得到最终结果。

步骤 1 中平移变换的逆变换为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}(t_x, t_y, t_z) \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{T}^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_f \\ 0 & 0 & 0 & y_f \\ 0 & 0 & 0 & z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

复合变换表示为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_f \\ 0 & 0 & 0 & y_f \\ 0 & 0 & 0 & z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -x_f \\ 0 & 0 & 0 & -y_f \\ 0 & 0 & 0 & -z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

复合变换的矩阵表示为

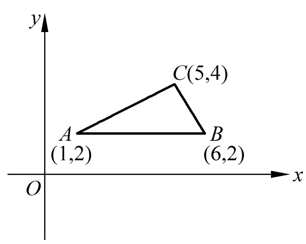
$$\boldsymbol{T}(x_f, y_f, z_f)\boldsymbol{S}(s_x, s_y, s_z)\boldsymbol{T}(-x_f, -y_f, -z_f) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 本章小结

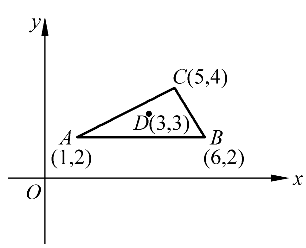
本章主要介绍了二、三维几何变换。在几何变换的讨论中，分别介绍了二维平移、旋转、缩放、对称、错切变换与三维平移、旋转、缩放变换的等式与矩阵。通过几何变换可以将场景中的物体在适当的位置并以适当的尺寸予以显示。

3.5 习题

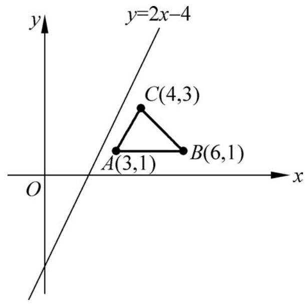
1. 如下图，求$\triangle ABC$绕A点逆时针旋转45°所形成的新的三角形。



2. 如下图，求$\triangle ABC$以固定点D，且缩放系数$s_x=3$和$s_y=4$作缩放变换后所形成的新的三角形。



3. 如下图，求$\triangle ABC$关于直线$y=2x-4$作对称变换得到的$\triangle A'B'C'$。



4. 描述基准点为任意点的二维旋转变换的操作步骤。
5. 分别写出平移逆矩阵、旋转逆矩阵和缩放逆矩阵。
6. 描述固定点为任意点的二维缩放变换的操作步骤。
7. 求关于y轴顺时针旋转$p(4,5,6)$，旋转角度为$30°$的点p'。
8. 描述固定点为任意点的三维缩放的操作步骤。
9. 写出绕任意轴p_1p_2旋转θ角的旋转变换的复合变换矩阵。
10. 写出两种错切变换的矩阵表示。