第 5 章 IIR 数字滤波器的设计

CHAPTER 5

5.1 引言

滤波就是滤除信号中不需要的频率分量，同时保留有用的频率分量。许多信息处理过程都要用到滤波器。数字滤波器是数字信号处理中使用最广泛的一种线性系统。根据处理信号的不同，滤波器可分为模拟滤波器和数字滤波器两种。模拟滤波器和数字滤波器的概念相同，只是信号的形式和实现滤波的方法不同。模拟滤波器要用硬件电路实现，即用由模拟元件（比如电阻、电容、电感）组成的电路完成滤波的功能，如常用的有源滤波器、开关电容滤波器等都属于模拟滤波器。而数字滤波器是将一组输入的数字序列通过一定的运算后转变为另一组输出的数字序列。因此，数字滤波器就是一个离散时间系统。在本书中，关于数字滤波器和离散时间系统这两个概念是等效的。

5.2 数字滤波器的基本概念

5.2.1 数字滤波原理

我们知道，一个线性时不变系统的时域输入输出关系为 $y(n)=x(n)*h(n)$。若 $x(n)$、$y(n)$的傅里叶变换存在，则输入输出的频域关系为

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{5-1}$$

式中，$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$、$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$分别为系统输入序列 $x(n)$和输出序列 $y(n)$的频谱，$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$为系统单位脉冲响应 $h(n)$的频谱，又称为系统的频率响应，可见，输入序列的频谱经过线性时不变系统处理后变为 $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。

假设 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$、$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$如图 5-1(a)和图 5-1(b)所示，那么由式(5-1)得到的 $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$如图 5-1(c)所示。

这样，$x(n)$通过系统 $h(n)$的结果是使输出 $y(n)$中不再含有$|\omega|>\omega_c$ 的频率成分，而使$|\omega|<\omega_c$ 的频率成分不失真通过。在某种意义下，$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$相当于对输入信号的不同频率分量的加权函数或者谱成形函数。这个线性时不变系统就是所说的选频滤波器。一个理想滤波器具有能让某些频率成分无失真通过而完全阻碍其他频率成分通过的特性。因此，只要按照输入信号频谱的特点和处理信号的目的，设计出合适的 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，就可以得到不同的滤波结果，从而使滤波后的输出 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$符合人们的要求，这就是数字滤波器的滤波

原理。

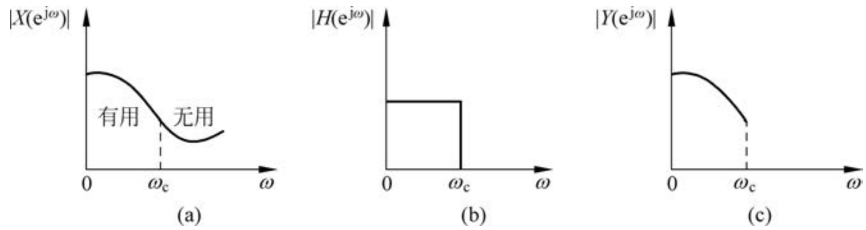


图 5-1　滤波原理

对于随机信号来说，由于其不存在傅里叶变换，因此，需要从相关函数和功率谱的角度研究其通过线性系统的情况。这属于后续课程“现代信号处理”中研究的内容。

5.2.2　数字滤波器的分类

5.2.2
微课视频

1. 按功能分为经典滤波器和现代滤波器

经典滤波器即一般的滤波器，用于分离加性组合的信号，要求输入信号中有用的频谱和希望滤去的频谱各占不同频段，通过一个合适的选频滤波器达到滤波的目的。例如一个心电信号经时域离散后进行数字处理（如去除工频干扰），就可以利用一个经典低通滤波器完成。

当信号和干扰的频带相互重叠时，如胎音监测应用中，经典滤波器不能完成对干扰的有效去除，这时可以采用现代滤波器。现代滤波器理论研究的主要内容是从含有噪声的数据记录中估计出信号的某些特性或信号本身。现代滤波器把信号和噪声都视为随机信号，利用它们的统计特性导出一套最佳的估值算法，从含有噪声的数据记录（又称时间序列）中估计出信号的某些特征或信号本身。一旦信号被估计出来，估计出的信号就会比原信号具有更高的信噪比。维纳滤波器是这一类滤波器的代表，其他的滤波器还有自适应滤波器、卡尔曼滤波器、粒子滤波器等。本书中，只讨论经典滤波器的设计方法。

2. 按单位脉冲响应分为 IIR 和 FIR 滤波器

IIR 滤波器（也称 IIR 数字滤波器）的单位脉冲响应是无限长的，其系统函数是关于 z^{-1} 的有理分式；而 FIR 滤波器（也称 FIR 数字滤波器）的单位脉冲响应延续的长度是有限的，其系统函数是关于 z^{-1} 的多项式。相应内容在本书第 2 章已有详尽阐述。这两类滤波器无论是在性能上还是在设计方法上都有很大的区别。

3. 按幅频特性分为低通、高通、带通、带阻、全通滤波器

常用的数字滤波器是选频滤波器，选频滤波器按其幅频特性来分，可分成低通（Low Pass，LP）、高通（High Pass，HP）、带通（Band Pass，BP）、带阻（Band Stop，BS）和全通（All Pass，AP）几种类型。图 5-2 列出了这些滤波器理想的幅频特性。

低通滤波器只允许低频信号通过而抑制高频信号。例如，可利用低通滤波器消除旧音乐录音带中的背景噪声，因为音乐主要集中在低频、中频频率分量中，因而可用低通滤波器减少高频的噪声分量。

高通滤波器只允许高频信号通过而抑制低频信号。例如，对于声呐系统，可用高通滤波器消除信号中船和海浪的低频噪声，保留目标特征。

带通滤波器只允许某一频带的信号通过。例如，在无线通信系统中，由于空间无线电信

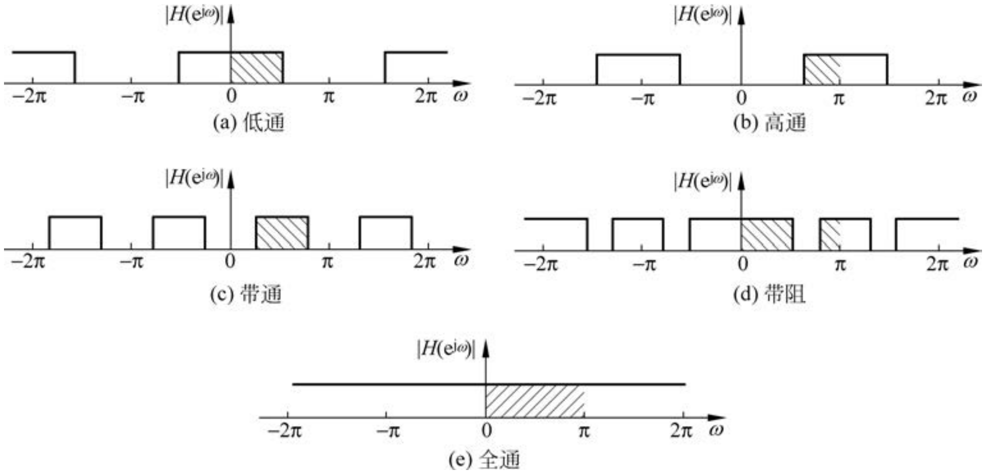


图 5-2 理想低通、高通、带通、带阻和全通数字滤波器的幅频特性

号有很多，要获得需要的信号，接收端可以通过一个带通滤波器选取需要的信号，并把不需要的信号滤除。

带阻滤波器是不允许某一频带的信号通过。例如，从复合电视信号中滤除频分复用的色度信号，以便得到亮度信号。

全通滤波器不衰减任何频率信号，仅对相位谱产生影响，形成纯相位滤波，常用于相位均衡。

特别要注意的是，数字滤波器的频率响应都是以 2π 为周期的，因此低通滤波器的通频带处于 2π 的整数倍处，而高通滤波器的通频带处于 π 的奇数倍附近，这一点和模拟滤波器的频率响应是有区别的。按照奈奎斯特采样定理，信号最高频率 f_c 只能限于 $f_c<f_s/2$（f_s 为采样频率），对应数字频率只能限于 $|\omega|<\pi$，π 为折叠频率。有时为了简化，在绘制数字滤波器幅频特性时，只绘出 ω 为 $[0,\pi]$ 区间的部分特性，这是完全可以的，因为这一部分已经代表了它的全部特性。

这些理想滤波器在通带内的增益为常数，在阻带内的增益为 0，称为分段常数。但这种理想的幅频响应在实际中是不可能实现的，因为它们所对应的单位脉冲响应有过冲和振铃现象，而且是非因果的。在实际使用时，我们设计出的滤波器都是在某些准则下对理想滤波器的近似，但这保证了滤波器是物理可实现的，且是稳定的。

5.2.3 数字滤波器的技术指标

滤波器的技术指标通常在频域给出。数字滤波器的频响 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 一般为复函数，表示为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{5-2}$$

其中，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ 称为幅频响应，$\varphi(\omega)$ 称为相频响应。幅频响应表示信号通过该滤波器以后频率成分衰减的情况，而相频响应反映各频率分量通过滤波器后在时间上的延时情况。IIR 数字滤波器通常用幅频响应作为技术指标。

理想滤波器是非因果的，而因果性是物理系统实现的必要条件，因此只能用一个因果系统去逼近它。另外也要考虑（逼近后）系统的易实现和成本问题。

1. 低通滤波器的性能指标

低通滤波器在通带内逼近于1，阻带内逼近于0。实际的滤波器并非是锐截止的通带和阻带两个范围，两者之间总有一个过渡带，如图5-3(a)所示。在设计滤波器时，应事先给定幅频响应的允许误差，通带内幅频响应以误差δ_1逼近于1，阻带内幅频响应以误差δ_2逼近于0。图中，δ_1称为通带的允许误差，δ_2称为阻带的允许误差，ω_p为通带截止频率，ω_s为阻带截止频率，在ω_p与ω_s之间为过渡带，过渡带宽度为$\omega_s-\omega_p$，在过渡带内，幅频响应是单调下降的。

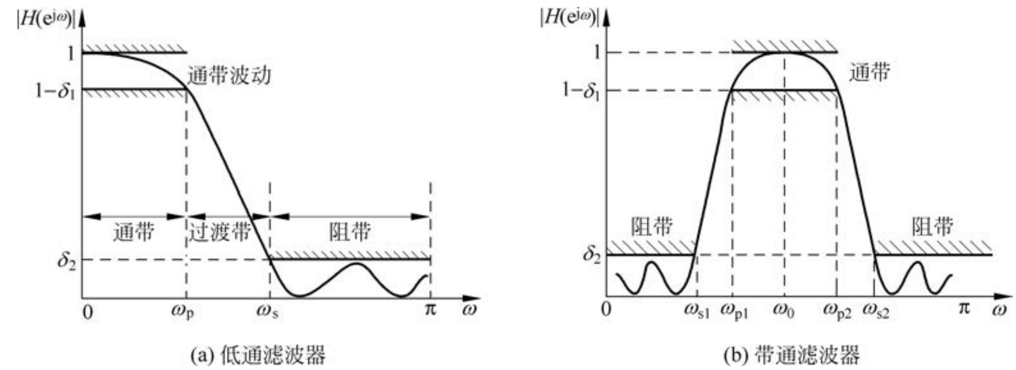


图5-3　典型IIR数字滤波器的幅频响应

虽然给出了通带的允许误差δ_1及阻带的允许误差δ_2，但是，在具体技术指标中往往习惯使用分贝(dB)数表示，即通带(允许的)最大衰减α_p及阻带(应达到的)最小衰减α_s。α_p和α_s的定义分别为

$$\alpha_p=20\lg\left|H(e^{j\omega})\right|_{\max}-20\lg\left|H(e^{j\omega_p})\right|=-20\lg\left|H(e^{j\omega_p})\right|=-20\lg(1-\delta_1)\text{dB} \tag{5-3}$$

$$\alpha_s=20\lg\left|H(e^{j\omega})\right|_{\max}-20\lg\left|H(e^{j\omega_s})\right|=-20\lg\left|H(e^{j\omega_s})\right|=-20\lg\delta_2\text{dB} \tag{5-4}$$

式中，假定$\left|H(e^{j\omega})\right|_{\max}=1$已被归一化了。例如，在$\omega=\omega_p$处，$|H(e^{j\omega_p})|=0.707$，则

$$\alpha_p=3\text{dB}$$

在$\omega=\omega_s$处，$|H(e^{j\omega_s})|=\frac{1}{100}$，则

$$\alpha_s=40\text{dB}$$

当滤波器频率响应的幅频响应下降到最大值的$1/\sqrt{2}$时，滤波器的衰减为3dB，此时所对应的频率记为ω_c，称为滤波器的3dB通带截止频率。一般来说，理想滤波器的锐截止频率即为ω_c，实际滤波器可根据不同的α_p来定义ω_p。ω_p、ω_c和ω_s统称为边界频率，一般来说$\omega_p\leqslant\omega_c<\omega_s$，它们在滤波器的设计中是很重要的。

2. 带通滤波器的性能指标

如果设计带通数字滤波器，则应该知道的性能指标为：①通带下限截止频率ω_{p1}；②通带上限截止频率ω_{p2}；③$|H(e^{j\omega})|$在ω_{p1}和ω_{p2}处的衰减α_p；④阻带截止频率(ω_{s1}、ω_{s2})；⑤在阻带频率处的衰减α_s。如图5-3(b)所示，$\omega_0=\sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}}$称为中心频率。

3. 其他滤波器的性能指标

高通和带阻数字滤波器的性能指标与上述类似。

由于在数字滤波器中，ω 是用弧度表示的，而从实际任务中明确技术要求时是用实际频率（单位为 Hz）表示的，所以必须给定采样频率 f_s（单位为 Hz），这一点将在以后的例题中说明。

5.2.4 数字滤波器的设计方法与常用模拟滤波器

5.2.4
微课视频

1. 数字滤波器的设计方法

就广义而言，数字滤波器是一个用有限精度算法实现的线性时不变离散时间系统。设计一个数字滤波器一般包括 3 个基本步骤：

(1) 按照实际需要确定滤波器的性能要求。如确定所设计的滤波器是低通、高通、带通还是带阻，截止频率是多少，阻带的衰减有多大，通带的波动是多少等。

(2) 用一个因果稳定的系统函数 $H(z)$ 逼近这个性能要求。

(3) 用一个有限精度的算法实现这个系统函数。

在以上 3 个步骤中，第(2)步是关键。通过本章 IIR 数字滤波器逼近性能要求问题或系统函数的设计问题的讨论，可知 IIR 数字滤波器的系统函数是 z（或 z^{-1}）的有理分式，即

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=K\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})} \tag{5-5}$$

一般满足 $M \leqslant N$，这类系统称为 N 阶系统（滤波器的阶数通常定义为传输函数的极点数），当 $M>N$ 时，$H(z)$ 可看成一个 N 阶 IIR 子系统与一个 $M-N$ 阶的 FIR 子系统的级联。以下讨论都假定 $M \leqslant N$。

IIR 滤波器的逼近问题就是求出滤波器的各系数 a_k、b_r 或者零极点 c_r、d_k，以使滤波器满足给定的性能要求，这就是数学上的逼近问题。如果在 s 平面上去逼近，就得到模拟滤波器，如果在 z 平面上去逼近，则得到数字滤波器。

设计 IIR 数字滤波器一般有以下 3 种方法。

(1) 零极点位置累试法。

根据系统函数在单位圆内的极点处出现峰值，在零点处出现谷值的特点设置零极点以达到性能要求，这种方法只适用于简单滤波器的设计。

(2) 利用模拟滤波器的理论设计数字滤波器。

模拟网络综合理论已发展得相当成熟，产生了很多高效率的设计方法。常用的模拟滤波器不仅有简单而严格的设计公式，而且设计参数已经表格化，设计起来方便准确。而数字滤波器在很多情况下要完成的任务与模拟滤波器是相同的，因此，完全可以借助于模拟滤波器的理论和设计方法设计数字滤波器。

利用模拟滤波器设计数字滤波器，要先根据所给的滤波器性能指标设计出相应的模拟滤波器传输函数 $H_a(s)$，然后由 $H_a(s)$ 经变换得到所需的数字滤波器系统函数 $H(z)$。因此，它归根到底是一个由 s 平面到 z 平面的变换，具体设计流程如图 5-4 所示。

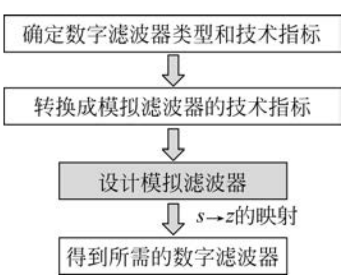


图 5-4 利用模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器的设计流程

（3）最优化设计方法。

最优化设计方法一般分两步来进行：第一步，选择一种最优准则，例如设计出的实际滤波器频率响应的幅频特性$|H(e^{j\omega})|$与所要求的理想频率响应$|H_d(e^{j\omega})|$的均方误差最小准则或最大绝对误差最小准则等；第二步，求在此最佳准则下滤波器系统函数的系数a_k、b_r。一般是通过不断改变滤波器系数a_k、b_r，分别计算误差e，最后，找到使误差e为最小时的一组系数a_k、b_r，从而完成设计。这种设计需要进行大量的迭代运算，要用计算机进行运算，所以最优化方法又称为计算机辅助设计法。

在以上几种方法中，将着重讲解第二种方法，这是因为数字滤波器在很多场合可以看作"模仿"模拟滤波器，在IIR滤波器中采用这种方法是较普遍的。但是，随着计算机的普遍应用，最优化设计方法日益发展。

2. 常用模拟滤波器

模拟滤波器是设计数字滤波器的基础。常用的模拟滤波器有巴特沃思（Butterworth）滤波器、切比雪夫（Chebyshev）滤波器、椭圆（Ellipse）滤波器和贝塞尔（Bessel）滤波器等。

巴特沃思滤波器具有单调下降的幅频特性，通带具有最大平坦度，但从通带到阻带衰减较慢，幅频响应如图5-5所示。

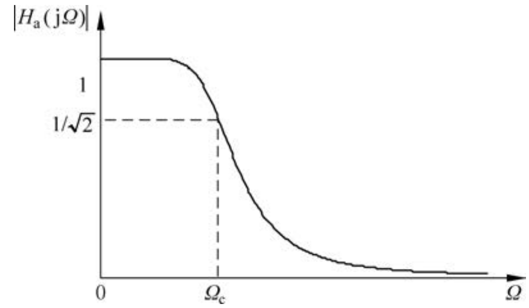


图5-5　巴特沃思滤波器的幅频响应

巴特沃思低通滤波器幅度平方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} \tag{5-6}$$

式中，N为正整数，代表滤波器的阶数。Ω_c为3dB截止频率。

切比雪夫滤波器的幅频特性在通带或阻带内具有等波纹特性。如果幅频特性在通带中是等波纹的，在阻带中是单调的，则称为切比雪夫Ⅰ型。相反，如果幅频特性在通带内是单调下降的，在阻带内是等波纹的，则称为切比雪夫Ⅱ型。切比雪夫滤波器的幅频特性如图5-6所示。

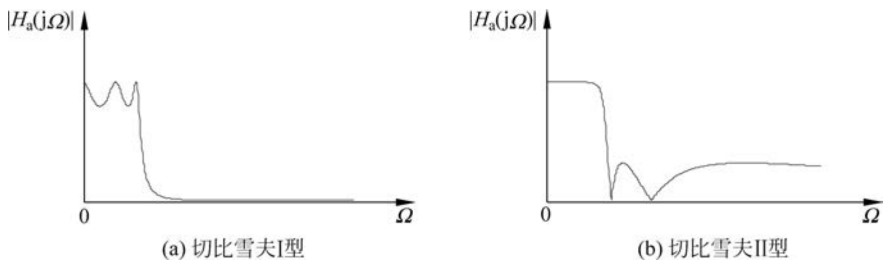


图5-6　切比雪夫滤波器的幅频特性

切比雪夫Ⅰ型滤波器的幅度平方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)} \tag{5-7}$$

式中，ε为小于1的正数，它是表示通带波纹大小的一个参数，$C_N(\Omega/\Omega_p)$是N阶切比雪夫多项式，定义为

$$C_N(x)=\begin{cases}\cos(N\arccos x), & |x|\leqslant 1\\ \cosh(N\text{arcosh}x), & |x|>1\end{cases} \tag{5-8}$$

椭圆滤波器在通带和阻带内均为等波纹幅频特性，而贝塞尔滤波器着重相频响应，通带内有较好的线性相位特性。

模拟滤波器也可以由传输函数进行描述，即

$$H_a(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r s^r}{\sum_{k=0}^{N}a_k s^k} \tag{5-9}$$

其中，b_r 和 a_k 分别为传输函数分子、分母系数。

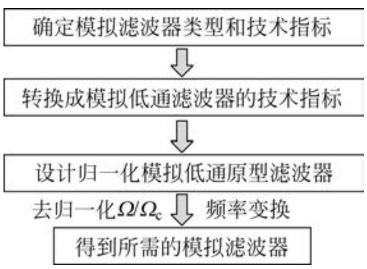


图 5-7　模拟滤波器的设计流程

模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$既可以由幅度平方函数$|H_a(j\Omega)|^2$ 通过计算求得，也可以借助滤波器设计手册中已经设计好的表格和图形通过查表法获得(具体计算过程见 5.3 节)。图 5-7 所示为设计模拟滤波器的一般流程，需要注意以下三个问题。

(1) 原型滤波器。全称为归一化低通原型滤波器。为了简化设计，滤波器设计手册中给出的均是归一化低通滤波器的传输函数，这样可使 $H_a(s)$不因频率的绝对高低而异。所谓归一化即是选择一个参考频率(例如低通滤波器的截止频率 Ω_c)，将频率归一化为 1，即令 $p=s/\Omega_c$，实现了模拟频率 s 的归一化。对于巴特沃思滤波器一般是对 3dB 截止频率 Ω_c 进行归一化，而对于切比雪夫滤波器则是对 Ω_p 进行归一化。为了区别，归一化后得到的传输函数可用 $H_a(p)$表示，但有时也不加区别地用 $H_a(s)$表示。因此，在具体计算时，要注意区分是哪一种。

(2) 去归一化。在得到归一化传输函数 $H_a(p)$后，为了使得所设计的滤波器传输函数满足给定的指标要求，还需要去归一化，即用 $p=s/\Omega_c$ 替换 $H_a(p)$中的 p，得到实际的滤波器传输函数 $H_a(s)$。

(3) 频率变换。由于非低通滤波器的传输函数都可以经频率变换从低通滤波器传输函数求得，因此不管是公式法或查表法给出的都是低通滤波器的设计方法。其他滤波器的设计，都是先把所需设计的滤波器技术要求转换为相应低通滤波器的技术要求，设计低通滤波器的传输函数，再经过频率变换(或称为原型变换)获得。因此，低通滤波器是其他类型滤波器设计的桥梁，为此把低通滤波器称为低通原型滤波器，相应归一化处理的低通滤波器称为归一化低通原型滤波器。

例 5-1　设计截止频率 $f_c=1\text{kHz}$ 的模拟低通滤波器，已知模拟低通原型滤波器传输函数为 $H_a(s)=\dfrac{2}{s^2+3s+2}$。

分析　根据题目条件，这里给出的模拟低通原型滤波器传输函数应该是归一化低通原型滤波器，$H_a(s)$的表达式中没有体现出 f_c，因此它应该是归一化后的传输函数。所以，后面要进行去归一化。这里的 $H_a(s)$应为 $H_a(p)$。因此通过去归一化，即得到了满足设计要求的模拟滤波器传输函数。

解　去归一化，即

$$H_a(s)=\frac{2}{\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2+3\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)+2}=\frac{2\Omega_c^2}{s^2+3\Omega_c s+2\Omega_c^2}=\frac{8\pi^2\times 10^6}{s^2+6\pi\times 10^3 s+8\pi^2\times 10^6}$$

在变换中，一般要求所得到的数字滤波器频率响应保留原模拟滤波器频率响应的主要特性。为此，对变换关系提出如下要求：

(1) 因果稳定的模拟滤波器必须变成因果稳定的数字滤波器；

(2) 数字滤波器的频率响应模仿模拟滤波器的频率响应，即要求 s 平面上的虚轴映射到 z 平面的单位圆上。

将传输函数 $H_a(s)$ 从 s 平面变换到 z 平面的方法很多，但工程上常用的是脉冲响应不变法和双线性变换法。

5.3　模拟滤波器的设计

模拟滤波器的设计不属于本书的范畴，但是为了方便起见，这里介绍几种常用模拟滤波器的设计方法。由于高通、带通和带阻滤波器的传输函数都能经过频率变换从低通滤波器传输函数求得，因此先研究低通滤波器的设计方法，然后再研究如何从给定的其他种类滤波器的技术要求转换为原型低通滤波器的技术要求，以及模拟滤波器的频率变换问题。

一个低通滤波器的技术要求包括通带截止频率 Ω_p、通带内所允许的最大衰减 α_p、阻带截止频率 Ω_s 和阻带内所允许的最小衰减 α_s。这里并没有规定在通带内($\Omega=0\sim\Omega_p$)衰减 α 是单调变化的或者是波纹状变化的。定义衰减 α 为

$$\alpha(\Omega)=10\lg\left|\frac{X(\mathrm{j}\Omega)}{Y(\mathrm{j}\Omega)}\right|^2=10\lg\frac{1}{|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2} \tag{5-10}$$

式中，$X(\mathrm{j}\Omega)$和 $Y(\mathrm{j}\Omega)$为滤波器输入和输出的频率响应。

上面所说的技术要求只提到幅频响应而没有提及相位问题，这是因为数字滤波器的设计中用到的是模拟滤波器的幅频响应而不考虑其相频响应或群时延。下面的讨论都限于幅频响应的逼近。

5.3.1　幅度平方函数

由于 $\alpha(\Omega)=10\lg\frac{1}{|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2}$不容易直接用多项式或有理式逼近，所以需要找一个能够用多项式或有理式逼近的函数。这个函数称为特征函数，以 $K(\mathrm{j}\Omega)$表示为

$$\left|\frac{X(\mathrm{j}\Omega)}{Y(\mathrm{j}\Omega)}\right|^2=1+|K(\mathrm{j}\Omega)|^2 \tag{5-11}$$

结合式(5-10)，可以得到

$$\alpha(\Omega)=10\lg\frac{1}{|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2}=10\lg[1+|K(\mathrm{j}\Omega)|^2] \tag{5-12}$$

式中，$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 称为模拟滤波器的幅度平方函数，$|K(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 等于一个以 Ω^2 为自变量的多项式或有理式。例如：

(1) $|K(\mathrm{j}\Omega)|^2=a_0(\Omega^2)^N+a_1(\Omega^2)^{N-1}+\cdots+a_{N-1}(\Omega^2)+a_N$，式中，$a_0,a_1,\cdots,$

a_{N-1}, a_N 都是常数。

(2) $|K(\mathrm{j}\Omega)|^2=\varepsilon^2\cos^2[n\arccos\Omega]$，式中，$\varepsilon^2$ 为一待定的常数，n 为正整数。

当然，$|K(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 还有其他的形式。一些学者已经做了很多研究工作，我们只讨论上述两种形式，即巴特沃思逼近和切比雪夫逼近。

$$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=H_a(\mathrm{j}\Omega)H_a^*(\mathrm{j}\Omega) \tag{5-13}$$

由于滤波器冲激响应 $h_a(t)$ 是实函数，因而 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$ 具有共轭对称性，即

$$H_a^*(\mathrm{j}\Omega)=H_a(-\mathrm{j}\Omega) \tag{5-14}$$

所以

$$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=H_a(\mathrm{j}\Omega)H_a(-\mathrm{j}\Omega)=H_a(s)H_a(-s)\Big|_{s=\mathrm{j}\Omega} \tag{5-15}$$

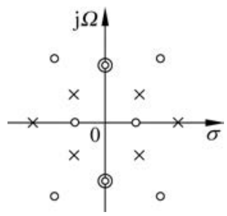


图 5-8 可实现的 $H_a(s)H_a(-s)$ 零极点分布

如何由已知的幅度平方函数 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 求得 $H_a(s)$？设 $H_a(s)$ 有一个极点（或零点）位于 $s=s_0$ 处，由于冲激响应 $h_a(t)$ 为实函数，则极点（或零点）必以共轭对形式出现，因而 $s=s_0^*$ 处也一定有一极点（或零点）。与之对应，$H_a(-s)$ 在 $s=-s_0$ 和 $-s_0^*$ 处必有极点（或零点）。这表明，$H_a(s)H_a(-s)$ 的零极点分布成象限对称，如图 5-8 所示。$H_a(s)H_a(-s)$ 在虚轴上的极点或零点一定是二阶的，但对于稳定系统，$H_a(s)H_a(-s)$ 在虚轴上没有极点。

任何实际可实现的滤波器都是稳定的，因此，其传输函数 $H_a(s)$ 的极点一定落在 s 的左半平面，所以左半平面的极点一定属于 $H_a(s)$，而右半平面的极点必属于 $H_a(-s)$。

零点的分布无此限制，它只和滤波器的相位特征有关。如果要求最小的相位延时特性，则 $H_a(s)$ 应取左半平面零点。如无特殊要求，可将对称零点的任一半（应为共轭对）取为 $H_a(s)$ 的零点，则满足 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 解的 $H_a(s)$ 就是多个。

最后，按照 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$ 与 $H_a(s)$ 的低频特性的对比，即 $H_a(s)\Big|_{s=0}=H_a(\mathrm{j}\Omega)\Big|_{\Omega=0}$，或高频特性的对比，确定出增益常数。由求出的 $H_a(s)$ 零极点及增益常数，则可完全确定传输函数 $H_a(s)$。

例 5-2 给定滤波器的幅度平方函数

$$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{4(1-\Omega^2)^2}{(4+\Omega^2)(9+\Omega^2)}$$

求具有最小相位特性的传输函数 $H_a(s)$。

解 由于 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 是非负有理函数，它在 $\mathrm{j}\Omega$ 轴上的零点是偶次的，所以满足幅度平方函数的条件，将 $\Omega=s/\mathrm{j}$ 代入 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 的表达式中，可得

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{4(s^2+1)^2}{(4-s^2)(9-s^2)}=\frac{4(s^2+1)^2}{(s+2)(-s+2)(s+3)(-s+3)}$$

其极点为 $s=\pm2, s=\pm3$；零点为 $s=\pm\mathrm{j}$（皆为二阶，位于虚轴上）。

为了系统的稳定，选择左半平面极点 $s=-2, s=-3$ 及一对虚轴共轭零点 $s=\pm\mathrm{j}$ 作为 $H_a(s)$ 的零极点，并设增益常数为 K_0，则 $H_a(s)$ 为

$$H_a(s)=K_0\frac{s^2+1}{(s+2)(s+3)}$$

按照 $H_a(s)$ 和 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$ 的低频特性或高频特性的对比可以确定增益常数。在这里我们

采用低频特性，即由 $H_a(s)\big|_{s=0}=H_a(j\Omega)\big|_{\Omega=0}$ 的条件可得增益常数 $K_0=2$，因此

$$H_a(s)=\frac{2s^2+2}{(s+2)(s+3)}$$

5.3.2 巴特沃思低通滤波器

巴特沃思低通滤波器的幅度平方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+|K(j\Omega)|^2}=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}} \tag{5-16}$$

1. 幅度响应的特点

巴特沃思低通滤波器的特点如下：

(1) 当 $\Omega=0$ 时，$|H_a(j0)|^2=1$，即在 $\Omega=0$ 处无衰减。

(2) 当 $\Omega=\Omega_c$ 时，$|H_a(j\Omega)|=1/\sqrt{2}$，$20\lg|H_a(j\Omega_c)|=-3\text{dB}$。并且，当 $\Omega=\Omega_c$ 时，不管 N 为多少，所有的特性曲线都通过 -3dB 点，或者说衰减为 3dB，这就是 3dB 不变性。

(3) 在 $\Omega<\Omega_c$ 的通带内，巴特沃思低通滤波器有最大平坦的幅度特性，即 N 阶巴特沃思低通滤波器在 $\Omega=0$ 处幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 的前 $2N-1$ 阶导数为零，因而巴特沃思滤波器又称为最平幅度特性滤波器。随着 Ω 由 0 增大，$|H_a(j\Omega)|^2$ 单调减小，N 越大，通带内特性曲线越平坦。

(4) 当 $\Omega>\Omega_c$，$|H_a(j\Omega)|^2$ 随 Ω 增加而单调减小，N 越大，衰减速度越大。

2. 传输函数 $\boldsymbol{H_a(s)}$ 的推导

首先，根据给定的通带指标 α_p 和 Ω_p，可得

$$\alpha_p=10\lg(1+\varepsilon^2) \tag{5-17}$$

由此解得参数 ε 为

$$\varepsilon=\sqrt{10^{0.1\alpha_p}-1} \tag{5-18}$$

然后，确定滤波器的阶数 N。根据给定的阻带指标 α_s 和 Ω_s，有

$$\alpha_s=10\lg[1+\varepsilon^2(\Omega_s/\Omega_p)^{2N}] \tag{5-19}$$

滤波器的阶数 N 为满足下式的最小整数，即

$$N\geqslant\frac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1\alpha_s}-1}{\varepsilon^2}\right)}{2\lg\Omega_s/\Omega_p} \tag{5-20}$$

得到了滤波器的参数 ε 和阶数 N 后，就可以确定零极点形式的传输函数 $H_a(s)$。根据关系式

$$|H_a(j\Omega)|^2=H_a(s)H_a(-s)\big|_{s=j\Omega} \tag{5-21}$$

可得

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+\varepsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}}\bigg|_{\Omega=s/j}=\frac{1}{1+\varepsilon^2(-1)^N(s/\Omega_p)^{2N}} \tag{5-22}$$

由此式可求出 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点，其中位于 s 左半平面的极点为 $H_a(s)$ 的极点（系统稳定），而其余极点为 $H_a(-s)$ 的极点。

3. 归一化的巴特沃思滤波器的传输函数

为了简化计算，这里选择 Ω_p 作为归一化的参考频率。令 $p=s/\Omega_p$，则式(5-22)变为

$$H_a(p)H_a(-p)=\frac{1}{1+\varepsilon^2(-1)^N p^{2N}} \tag{5-23}$$

令式(5-23)分母多项式等于零，即

$$1+\varepsilon^2(-1)^N p^{2N}=0 \tag{5-24}$$

得极点

$$p_k=\frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon}}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2N}},\quad k=0,1,\cdots,2N-1 \tag{5-25}$$

这 $2N$ 个极点均匀分布在以 p 平面的原点为中心，半径为 $1/\sqrt[N]{\varepsilon}$ 的圆上，相距为 π/N 弧度。其中，一半位于 p 平面的左半平面，另一半位于 p 平面的右半平面。为了使系统稳定，取 p_k 在 p 平面左半平面的 N 个根作为 $H_a(p)$的极点，即

$$p_k=\frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon}}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2N}},\quad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{5-26}$$

这样

$$H_a(p)=\frac{1}{(p-p_0)(p-p_1)\cdots(p-p_{N-1})} \tag{5-27}$$

最后，将 $H_a(p)$去归一化，即把 $p=s/\Omega_p$ 代入 $H_a(p)$，得到实际的滤波器传输函数 $H_a(s)$。

例 5-3 设计一个巴特沃思低通滤波器，其技术要求为：通带截止频率 $f_p=5\text{kHz}$，阻带截止频率 $f_s=10\text{kHz}$，通带最大衰减 $\alpha_p=3\text{dB}$，阻带最小衰减 $\alpha_s=20\text{dB}$。

解 由给定的参数可以得到所求滤波器的幅度平方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2(\Omega/10000\pi)^{2N}}$$

(1) 求 ε。

根据式(5-18)，得 $\varepsilon=\sqrt{10^{0.1\alpha_p}-1}=\sqrt{10^{0.1\times3}-1}=1$。

(2) 求滤波器的阶数 N。

根据式(5-20)，得 $N\geqslant\dfrac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1\alpha_s}-1}{\varepsilon^2}\right)}{2\lg\Omega_s/\Omega_p}=\dfrac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1\times20}-1}{\varepsilon^2}\right)}{2\lg2}=3.31$，取整后，得 $N=4$。

(3) 求归一化极点 p_k。

根据式(5-25)，得 $p_k=\dfrac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon}}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2N}}=e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{(2k+1)\pi}{8}}$，$k=0,1,2,3$。

(4) 写出归一化传输函数 $H_a(p)$的表达式。

$$\begin{aligned}H_a(p)&=\frac{1}{(p-e^{j5\pi/8})(p-e^{j7\pi/8})(p-e^{j9\pi/8})(p-e^{j11\pi/8})}\\&=\frac{1}{(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)}\end{aligned}$$

(5) 将 $H_a(p)$去归一化，得到滤波器传输函数 $H_a(s)$。

$$H_a(s)=H_a(p)\Big|_{p=s/\Omega_p}=\frac{10^{16}\pi^4}{(s^2+7654\pi s+10^8\pi^2)(s^2+18478\pi s+10^8\pi^2)}$$

4. 巴特沃思滤波器的图表法设计

由于模拟滤波器的理论已相当成熟,很多常用滤波器的设计参数已经表格化和图形化,如表 5-1 和图 5-9 所示。借助这些表格和图形可以很方便地设计一些简单的滤波器。由于一般给出的巴特沃思曲线或表格均是以 3dB 截止频率 Ω_c 为参考频率进行归一化的,因此,在利用图表法设计巴特沃思滤波器时,需要利用给定的指标计算出 Ω_c 来。可以先通过式(5-20)求得滤波器的阶数 N,然后根据式(5-16),由通带截止频率 Ω_p 处的衰减 α_p,求得 3dB 截止频率

$$\Omega_c=\frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_p}-1}} \tag{5-28}$$

表 5-1　归一化的巴特沃思低通滤波器传输函数分母多项式的系数

(1) 分母多项式 $A(s)=s^N+a_{N-1}s^{N-1}+a_{N-2}s^{N-2}+\cdots+a_0$

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1.00000000					
2	1.00000000	1.41421356				
3	1.00000000	2.00000000	2.00000000			
4	1.00000000	2.61312593	3.41421356	2.61312593		
5	1.00000000	3.23606798	5.23606798	5.23606798	3.23606798	
6	1.00000000	3.86370331	7.46410162	9.14162017	7.46410162	3.86370331

(2) 分母多项式 $A(s)=A_1(s)A_2(s)A_3(s)A_4(s)A_5(s)$

N	$A(s)$
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.41421356s+1)$
3	$(s^2+s+1)(s+1)$
4	$(s^2+0.76536686s+1)(s^2+1.84775907s+1)$
5	$(s^2+0.61803399s+1)(s^2+1.61803399s+1)(s+1)$
6	$(s^2+0.51763809s+1)(s^2+1.41421356s+1)(s^2+1.93185165s+1)$
7	$(s^2+0.44504187s+1)(s^2+1.24697960s+1)(s^2+1.80193774s+1)(s+1)$
8	$(s^2+0.39018064s+1)(s^2+1.11114047s+1)(s^2+1.66293922s+1)(s^2+1.96157056s+1)$
9	$(s^2+0.34729636s+1)(s^2+s+1)(s^2+1.53208889s+1)(s^2+1.87938524s+1)(s+1)$

由式(5-28)确定的滤波器通带处正好满足设计要求,但阻带指标有富裕量。类似地,也可由阻带截止频率 Ω_s 处的衰减 α_s,求得 3dB 截止频率

$$\Omega_c=\frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_s}-1}} \tag{5-29}$$

由式(5-29)确定的滤波器阻带处正好满足设计要求,但通带指标有富裕量。

用图表法设计滤波器的基本步骤如下:

(1) 以 Ω_c 为参考频率,将频率归一化,以便使用归一化后的图表曲线。

(2) 由归一化频率的幅频特性曲线(见图 5-9),查得阶数 N。

(3) 查表 5-1,得到归一化传输函数 $H_a(p)$的分母多项式。

(4) $H_a(p)$去归一化,将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$,得到实际滤波器的传输函数 $H_a(s)$。

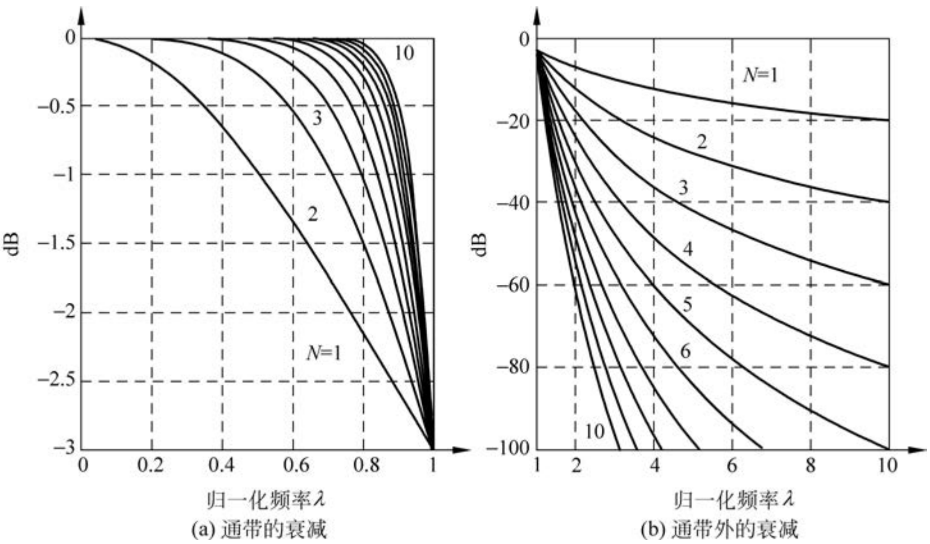


图 5-9 巴特沃思低通滤波器归一化的幅频特性（N 为 1～10）

例 5-4 利用图表法设计例 5-3 所述的巴特沃思滤波器。

解 （1）以 Ω_c 为参考频率，将各频率参数归一化，求得各归一化频率，即

$$\lambda_p=\Omega_p/\Omega_c=1,\quad \lambda_s=\Omega_s/\Omega_c=2$$

（2）由图 5-9(b)，得到满足指标要求的滤波器阶数 $N=4$。

（3）查表 5-1，得 $H_a(p)$ 的分母多项式［见表 5-1 中(2)栏］

$$(p^2+0.76536686p+1)(p^2+1.84775907p+1)$$

（4）将 $H_a(p)$ 去归一化。

将 $p=\dfrac{s}{\Omega_c}=\dfrac{s}{2\pi\times5\times10^3}$ 代入分母多项式，得到对应于真实频率的传输函数

$$H_a(s)=\frac{10^{16}\pi^4}{(s^2+7654\pi s+10^8\pi^2)(s^2+18478\pi s+10^8\pi^2)}$$

结果与例 5-3 相同。

5.3.3 切比雪夫低通滤波器

巴特沃思滤波器的频率特性无论在通带与阻带都随频率单调变化，因而如果在通带边缘满足指标，则在通带内肯定会有富裕量，因而并不经济。所以，更有效的办法是将指标的精度要求均匀地分布在通带内，或均匀地分布在阻带内，或同时均匀地分布在通带与阻带内。这样，在同样通带、阻带性能要求下，就可设计出阶数较低的滤波器。这种精度均匀分布的办法可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来实现。切比雪夫滤波器就是具有这种特性的典型例子。

1. 幅度平方函数

以切比雪夫Ⅰ型滤波器为例讨论这种逼近。切比雪夫Ⅰ型滤波器的幅度平方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+|K(j\Omega)|^2}=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2(\Omega/\Omega_p)} \tag{5-30}$$

$C_N(\Omega/\Omega_p)$ 是 N 阶切比雪夫多项式，即

$$C_N(x)=\begin{cases}\cos(N\arccos x), & |x|\leqslant 1\\ \cosh(N\operatorname{arcosh} x), & |x|>1\end{cases} \tag{5-31}$$

其中，$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$为双曲余弦函数。相应地，$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$为双曲正弦函数。双曲余弦函数有下列性质：

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y \tag{5-32}$$

$$C_N(x)=\cos(N\arccos x), \quad |x|\leqslant 1 \tag{5-33}$$

令 $\phi=\arccos x$，则 $x=\cos\phi$。

于是 $$C_N(x)=\cos N\phi$$

$$C_{N+1}(x)=\cos(N+1)\phi=\cos N\phi\cos\phi-\sin N\phi\sin\phi \tag{5-34}$$

$$C_{N-1}(x)=\cos(N-1)\phi=\cos N\phi\cos\phi+\sin N\phi\sin\phi \tag{5-35}$$

以上两式相加，得

$$C_{N+1}(x)+C_{N-1}(x)=2C_N(x)\cdot x$$

或

$$C_{N+1}(x)=2C_N(x)\cdot x-C_{N-1}(x) \tag{5-36}$$

式(5-36)是推导切比雪夫多项式的基本递推公式。根据式(5-33)，有

$$N=0,\quad C_0(x)=\cos 0=1$$

$$N=1,\quad C_1(x)=\cos(\arccos x)=x$$

根据式(5-36)，有

$$C_2(x)=2xC_1(x)-C_0(x)=2x^2-1$$

$$C_3(x)=2xC_2(x)-C_1(x)=4x^3-3x$$

$$C_4(x)=2xC_3(x)-C_2(x)=8x^4-8x^2+1$$

$$\vdots$$

注意：$C_N(x)$多项式中 x^N 的系数为 2^{N-1}。

应再次指出，在 $C_N(x)=\cos(N\arccos x)$中，$|x|$必须小于或等于 1，因为 $\cos\phi$ 是不能大于 1 的。但在设计滤波器的问题中常常出现$|x|>1$ 的情况。例如在低通滤波器中，以 Ω_p 为参考频率，则归一化的通带截止频率 $\lambda_p=1$，而归一化的阻带截止频率 $\lambda_s>1$，这时 $C_N(\lambda_s)=\cos(N\arccos\lambda_s)$就不成立了。此时，$C_N(x)$需另外定义，将 $C_N(x)$定义为

$$C_N(x)=\cosh(N\operatorname{arcosh} x), \quad |x|\geqslant 1 \tag{5-37}$$

令 $\phi=\operatorname{arcosh} x$，结合式(5-32)，可以得到与式(5-36)相同的递推公式，此处推导过程略。

表 5-2 列出了对应不同阶次 N 时的切比雪夫多项式。图 5-10 画出了 $C_2(x)\sim C_5(x)$ 多项式特性曲线，从这组曲线可以看出：$|x|\leqslant 1$ 时，$C_N(x)$在± 1 之间波动；当$|x|>1$ 时，$C_N(x)$单调上升。

表 5-2 N 为 0～7 时切比雪夫多项式 $C_N(x)$

N	$C_N(x)$	N	$C_N(x)$
0	1	4	$8x^4-8x^2+1$
1	x	5	$16x^5-20x^3+5x$
2	$2x^2-1$	6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$
3	$4x^3-3x$	7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$

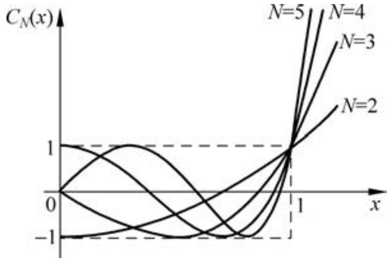


图 5-10 不同 N 值（N 为 2～5）时切比雪夫特性曲线

由于当 $|x|\leqslant 1$ 时，$|C_N(x)|\leqslant 1$，$1+\varepsilon^2 C_N^2(x)$ 的值将在 1 与 $1+\varepsilon^2$ 之间变化。根据式(5-30)，$|x|\leqslant 1$ 即为 $|\Omega/\Omega_p|\leqslant 1$，也就是在通带范围内，此时的 $|H_a(j\Omega)|^2$ 在 1 与 $\dfrac{1}{1+\varepsilon^2}$ 之间波动。当 $|x|>1$，也就是 $\Omega>\Omega_p$ 时，随着 Ω/Ω_p 的增大，$|H_a(j\Omega)|^2$ 迅速趋于零。图 5-11 是按式(5-30)画出的切比雪夫滤波器的幅度平方特性。由图 5-11 可以看出，当 N 为偶数时，$|H_a(j\Omega)|^2$ 在 $\Omega=0$ 处的值为 $\dfrac{1}{1+\varepsilon^2}$，是最小值；当 N 为奇数时，$|H_a(j\Omega)|^2$ 在 $\Omega=0$ 处的值为 1，是最大值。

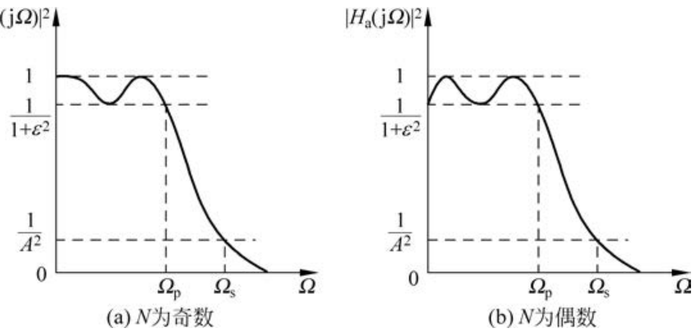


图 5-11 切比雪夫Ⅰ型滤波器的幅度平方特性

2. 参数的确定

根据给定的通带截止频率 Ω_p 和通带内最大衰减 α_p，由式(5-30)可得

$$\varepsilon=\sqrt{10^{0.1\alpha_p}-1} \tag{5-38}$$

再根据给定的阻带截止频率 Ω_s 和阻带内最小衰减 α_s，可得

$$\alpha_s=10\lg[1+\varepsilon^2 C_N^2(\Omega_s/\Omega_p)]=10\lg\{1+\varepsilon^2\cosh^2[N\operatorname{arcosh}(\Omega_s/\Omega_p)]\}$$

滤波器的阶数 N 为满足下式的最小整数：

$$N\geqslant\frac{\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}/\varepsilon\right)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_s/\Omega_p)} \tag{5-39}$$

在用式(5-39)计算 N 时，通常要用到恒等式 $\operatorname{arcosh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$。推导过程如下：

令 $\phi=\operatorname{arcosh}x$，则 $x=\cosh\phi=\dfrac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{2}$，解方程即可得 $\phi=\operatorname{arcosh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$。

根据切比雪夫Ⅰ型滤波器的幅度平方函数

$$H_a(s)H_a(-s)=\left.\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)}\right|_{\Omega=s/j}=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\dfrac{s}{j\Omega_p}\right)}$$

令 $p=s/\Omega_p$，即将 $H_a(s)$ 表示为归一化形式 $H_a(p)$。令 $H_a(p)$ 的分母多项式为 0，得

$$1+\varepsilon^2 C_N^2(-jp)=0$$

或

$$C_N(-\mathrm{j}p)=\pm\mathrm{j}1/\varepsilon \tag{5-40}$$

考虑到$-\mathrm{j}p$是复变量，为解出切比雪夫多项式，令

$$-\mathrm{j}p=\cos(\alpha+\mathrm{j}\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\mathrm{j}\beta-\sin\alpha\cdot\sin\mathrm{j}\beta=\cos\alpha\cdot\cosh\beta-\mathrm{j}\sin\alpha\cdot\sinh\beta$$

则极点

$$p=\sin\alpha\cdot\sinh\beta+\mathrm{j}\cos\alpha\cdot\cosh\beta=\sigma+\mathrm{j}\Omega \tag{5-41}$$

为了导出极点与N、ε的关系，把$-\mathrm{j}p=\cos(\alpha+\mathrm{j}\beta)$代入式(5-40)，并利用$C_N(x)$的定义$C_N(x)=\cos(N\arccos x)$，有

$$\begin{aligned}C_N(-\mathrm{j}p)&=\cos[N\arccos(-\mathrm{j}p)]=\cos[N(\alpha+\mathrm{j}\beta)]\\&=\cos N\alpha\cdot\cosh N\beta-\mathrm{j}\sin N\alpha\cdot\sinh N\beta=\pm\mathrm{j}1/\varepsilon\end{aligned}$$

得

$$\begin{cases}\cos N\alpha\cdot\cosh N\beta=0\\ \sin N\alpha\cdot\sinh N\beta=\pm1/\varepsilon\end{cases} \tag{5-42}$$

解得满足上式的α、β为

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{2k-1}{N}\times\dfrac{\pi}{2},\quad k=1,2,\cdots,2N\\ \beta=\pm\dfrac{1}{N}\operatorname{arsinh}(1/\varepsilon)\end{cases} \tag{5-43}$$

把α、β值代回式(5-41)，求得极点值

$$p_k=\sigma_k+\mathrm{j}\Omega_k=\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{N}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\varepsilon}\right)+\mathrm{j}\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{N}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$k=1,2,\cdots,2N \tag{5-44}$$

由式(5-44)实部与虚部的正弦和余弦函数平方约束关系可以看出，此极点分布满足

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2\left(\dfrac{1}{N}\operatorname{arsinh}\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}+\frac{\Omega_k^2}{\cosh^2\left(\dfrac{1}{N}\operatorname{arsinh}\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}=1 \tag{5-45}$$

这是一个椭圆方程，其短轴和长轴分别为

$$\begin{cases}a=\sinh\left(\dfrac{1}{N}\operatorname{arsinh}\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\\ b=\cosh\left(\dfrac{1}{N}\operatorname{arsinh}\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\end{cases} \tag{5-46}$$

取左半平面的极点

$$\begin{cases}\sigma_k=-\sinh\left(\dfrac{1}{N}\operatorname{arsinh}\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\sin\left(\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right)=-a\sin\left(\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right)\\ \Omega_k=\cosh\left(\dfrac{1}{N}\operatorname{arsinh}\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\cos\left(\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right)=b\cos\left(\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right)\end{cases},\quad k=1,2,\cdots,N \tag{5-47}$$

则此切比雪夫滤波器归一化的系统函数为

$$H_{\mathrm{a}}(p)=\frac{A}{\prod\limits_{k=1}^{N}(p-p_k)} \tag{5-48}$$

其中$p_k=\sigma_k+\mathrm{j}\Omega_k$。这里需要确定常数$A$。根据式(5-30)，得

$$|H_a(p)|=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_N^2(-jp)}}=\frac{A}{\left|\prod_{k=1}^{N}(p-p_k)\right|}$$

考虑到 $C_N(-jp)$是$-jp$ 的多项式，最高阶次系数是 2^{N-1}，因此常数 A 满足

$$A=\frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{N-1}} \tag{5-49}$$

最后，实际的传输函数 $H_a(s)$为

$$H_a(s)=H_a(p)\big|_{p=s/\Omega_p}=\frac{\Omega_p^N}{\varepsilon \cdot 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}(s-p_k\Omega_p)} \tag{5-50}$$

例 5-5 设计一个切比雪夫低通滤波器，其技术要求为：通带截止频率 $f_p=5\text{kHz}$，阻带截止频率 $f_s=20\text{kHz}$，通带最大衰减 $\alpha_p=0.1\text{dB}$，阻带最小衰减 $\alpha_s=60\text{dB}$。

解 由式(5-38)得滤波器的参数 ε 为

$$\varepsilon=\sqrt{10^{0.1\alpha_p}-1}=0.15262$$

由式(5-39)得滤波器的阶数 N 为

$$N\geqslant\frac{\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}/\varepsilon\right)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_s/\Omega_p)}=4.6,\quad \text{取整数 } N=5$$

由式(5-47)、式(5-48)和式(5-50)，求得滤波器传输函数 $H_a(s)$为

$$H_a(s)=\frac{1.25\times10^{22}}{(s+1.693\times10^4)(s^2+1.046\times10^4 s+1.179\times10^9)(s^2+2.739\times10^4 s+6.276\times10^8)}$$

3. 切比雪夫滤波器的图表法设计

切比雪夫滤波器也可以采用图表法进行设计，其步骤如下：

(1) 频率归一化，得到 λ_p 和 λ_s，注意，对于切比雪夫滤波器的表格曲线，没有特指 3dB 频率点。

(2) 根据 λ_p 和 λ_s 查归一化频率的幅频特性曲线(见图 5-12)，查得阶数 N。

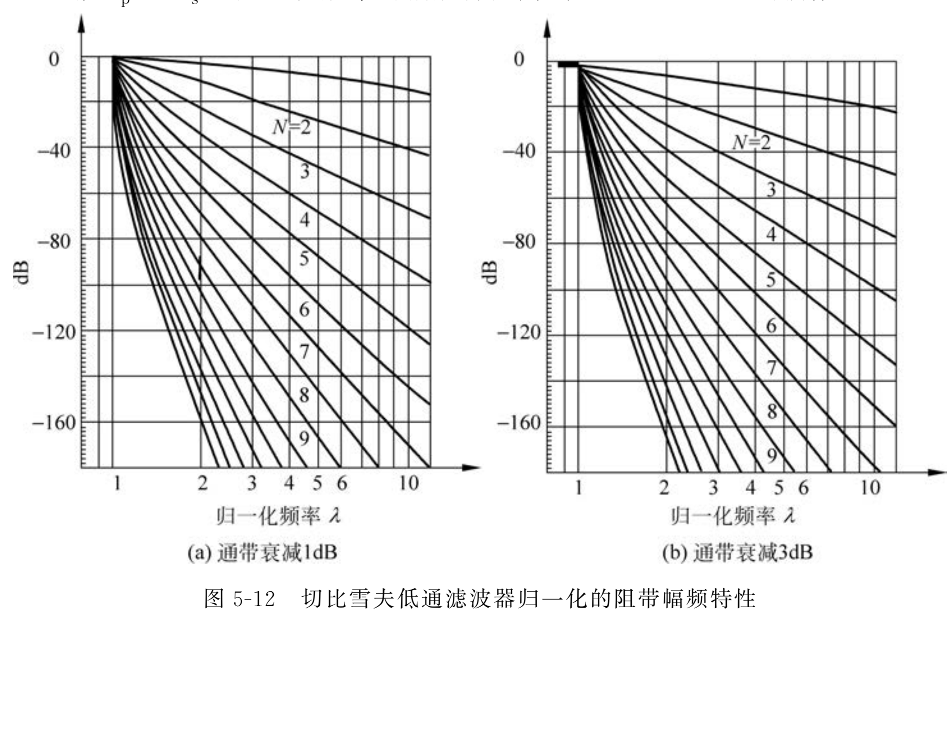


图 5-12 切比雪夫低通滤波器归一化的阻带幅频特性

（3）根据给定的通带内最大衰减，查表 5-3 得 ε（此值已列于表 5-3 中）。

（4）查表得到归一化传输函数 $H_a(p)$的分母多项式。

（5）$H_a(p)$去归一化，将 $p=s/\Omega_p$ 代入 $H_a(p)$，得到实际滤波器的传输函数 $H_a(s)$。

表 5-3 切比雪夫Ⅰ型低通原型滤波器分母多项式系数

1dB 波纹，$\varepsilon=0.5088471$

（1）分母多项式 $A(s)=s^N+a_{N-1}s^{N-1}+a_{N-2}s^{N-2}+\cdots+a_0$

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1.96522673					
2	1.10251033	1.09773433				
3	0.49130668	1.23840917	0.98834121			
4	0.27562758	0.74261937	1.45392476	0.95281138		
5	0.12282667	0.58053415	0.97439607	1.68881598	0.93682013	
6	0.06890690	0.30708064	0.93934553	1.20214039	1.93082492	0.92825096

（2）分母多项式 $A(s)=A_1(s)A_2(s)A_3(s)$

N	$A(s)$
1	$(s+1.96522673)$
2	$(s^2+1.09773433s+1.10251033)$
3	$(s^2+0.49417060s+0.99420459)(s+0.49417060)$
4	$(s^2+0.27907199s+0.98650488)(s^2+0.67373939s+0.27939809)$
5	$(s^2+0.17891672s+0.98831489)(s^2+0.46841007s+0.42929790)(s+0.28949334)$
6	$(s^2+0.12436205s+0.99073230)(s^2+0.33976343s+0.55771960)(s^2+0.46412548s+0.12470689)$

3dB 波纹，$\varepsilon=0.9976283$

（1）分母多项式 $A(s)=s^N+a_{N-1}s^{N-1}+a_{N-2}s^{N-2}+\cdots+a_0$

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1.00237729					
2	0.70794778	0.64489965				
3	0.25059432	0.92834806	0.59724042			
4	0.17698695	0.40476795	1.16911757	0.58157986		
5	0.06264858	0.40796631	0.54893711	1.41502514	0.57450003	
6	0.04424674	0.16342991	0.69909774	0.69060980	1.66284806	0.57069793

（2）分母多项式 $A(s)=A_1(s)A_2(s)A_3(s)$

N	$A(s)$
1	$(s+1.00237729)$
2	$(s^2+0.64489965s+0.70794778)$
3	$(s^2+0.29862021s+0.83917403)(s+0.29862021)$
4	$(s^2+0.17034080s+0.90308678)(s^2+0.41123906s+0.19598000)$
5	$(s^2+0.10971974s+0.93602549)(s^2+0.28725001s+0.37700850)(s+0.17753027)$
6	$(s^2+0.07645903s+0.95483021)(s^2+0.20888994s+0.52181750)(s^2+0.28534897s+0.08880480)$

除了上面介绍的巴特沃思滤波器和切比雪夫滤波器的设计方法，目前还有许多计算机软件支持这两种滤波器的设计，例如 MATLAB、Python，因此在实际使用中掌握这些软件的设计方法更有实际意义。

椭圆滤波器是一种通带与阻带都具有等波纹特性的滤波器，椭圆滤波器具有最窄的过渡带，但设计较为复杂，这里不作讨论。

5.3.4 模拟滤波器的频率变换

高通、带通和带阻滤波器的传输函数可以通过频率变换从低通变换到所需要的类型，从而不用对它们的表达式单独设计。我们前面所研究的低通滤波器设计实际上是一个低通原型滤波器，其他形式的滤波器可以由此滤波器通过频率变换得到。所以，不论要设计哪一种滤波器都要先将该滤波器的技术要求转换为低通原型滤波器的要求，然后设计低通原型滤波器，最后再用频率变换的方法转换为所需要的滤波器类型。图 5-13 给出了模拟滤波器设计流程。下面先研究低通原型滤波器与所需的滤波器技术要求之间的关系及它们之间的频率变换关系。

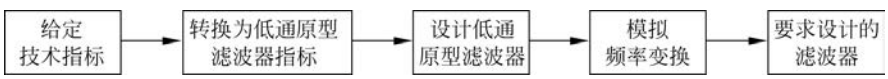


图 5-13 模拟滤波器设计流程

所谓频率变换是指低通原型滤波器与所需要的滤波器的传输函数中频率自变量之间的变换关系，即如果低通滤波器的归一化传输函数为 $G(p)$，所需要的滤波器的归一化传输函数为 $H(q)$，其中，p，q 分别为广义频率自变量，则 $p=f(q)$ 的函数关系叫作滤波器的频率变换。

为了避免符号上的混乱，先将所用符号作如下规定，如表 5-4 所示。

表 5-4 频率变换中符号的规定

变量名称	低通原型滤波器	待求（高通、带通、带阻）滤波器
未归一化的拉普拉斯变量		s
未归一化的传输函数		$H(s)$
未归一化的频率		Ω
归一化的拉普拉斯变量	p	q
归一化的传输函数	$G(p)$	$H(q)$
归一化的频率	$\lambda\ (=p/\mathrm{j})$	$\eta\ (=q/\mathrm{j})$

下面分别讨论低通到高通、低通到带通、低通到带阻各种形式滤波器之间的频率变换关系。

1. 低通到高通的频率变换

设高通滤波器 $H(\mathrm{j}\eta)$ 和低通滤波器 $G(\mathrm{j}\lambda)$ 的幅频特性如图 5-14 所示。图中，λ_p 和 λ_s 分别称为低通的归一化通带截止频率和归一化阻带截止频率，η_p 和 η_s 分别称为高通的归一化通带截止频率和归一化阻带截止频率。归一化频率 $\eta=\Omega/\Omega_r$，这里的 Ω_r 为参考角频率，一般选 $\Omega_r=\Omega_p$（Ω_p 为高通滤波器的通带截止频率）。由于 $|G(\mathrm{j}\lambda)|$ 和 $|H(\mathrm{j}\eta)|$ 都是频率的偶函数，可以把 $|G(\mathrm{j}\lambda)|$ 曲线的右半边与 $|H(\mathrm{j}\eta)|$ 曲线对应起来。低通的 λ 从 ∞ 经过 λ_s

和 λ_p 到 0 时，高通的 η 则从 0 经过 η_s 和 η_p 到 ∞，因此 λ 和 η 之间的关系为

$$\lambda = 1/\eta \tag{5-51}$$

在选择频率变换式时，为了简化计算，习惯上要使 $\lambda_p=1$（由于 λ_p 只是一个归一化系数，表示相对大小，因此可以定标为任意值，这里为了简化计算选择为 1，如图 5-14 所示），以下在推导低通到带通或带阻的频率变换式时均隐含要满足这个限定条件，下面不再重复说明。

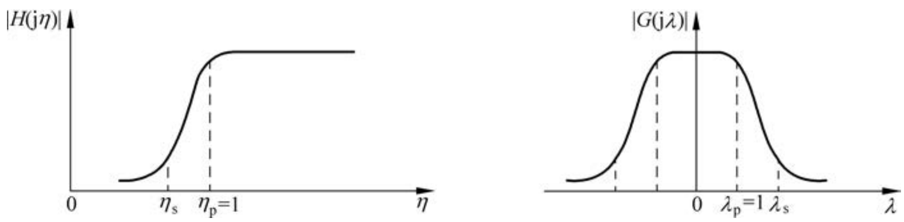


图 5-14 高通和低通滤波器的幅频特性（归一化）

式(5-51)是低通到高通的频率变换公式，如果已知低通 $G(\mathrm{j}\lambda)$，高通 $H(\mathrm{j}\eta)$ 则用下式转换：

$$H(\mathrm{j}\eta) = G(\mathrm{j}\lambda)\Big|_{\lambda=1/\eta} \tag{5-52}$$

低通和高通滤波器的边界频率用式(5-51)转换。

例 5-6 要求设计一个高通滤波器，给定技术要求为：在频率 $f_p=100\text{Hz}$ 处衰减为 3dB，在 $f_s=50\text{Hz}$ 以下为阻带，阻带中衰减不小于 30dB，试求相应的低通原型滤波器的技术要求。

解 高通技术要求为

$$f_p = 100\text{Hz},\quad \alpha_p = 3\text{dB}$$
$$f_s = 50\text{Hz},\quad \alpha_s = 30\text{dB}$$

令 f_r 为参考频率，$f_r = f_p = 100\text{Hz}$，归一化频率

$$\eta_p = f_p/f_r = 1,\quad \eta_s = f_s/f_r = 0.5$$

根据 $\lambda = 1/\eta$，低通滤波器的技术要求为

$$\lambda_p = 1,\quad \alpha_p = 3\text{dB}$$
$$\lambda_s = 2,\quad \alpha_s = 30\text{dB}$$

注意：在将高通滤波器的边界频率转换为低通滤波器的边界频率时，通带最大衰减 α_p 和阻带最小衰减 α_s 两个指标不变。

2. 低通到带通的频率变换

带通和低通滤波器的幅频特性如图 5-15 所示。图中，Ω_{p1} 和 Ω_{p2} 分别为通带下限截止频率和通带上限截止频率，$\Omega_{p2}-\Omega_{p1}$ 称为带宽，以 B 表示。Ω_{p1} 和 Ω_{p2} 一般是 3dB 处的频率（如果衰减不是 3dB 则要特别说明）。把带宽 B 作为参考频率 Ω_r，即 $\Omega_r=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}$。另外，定义 $\Omega_0^2=\Omega_{p1}\Omega_{p2}$，$\Omega_0$ 称为带通滤波器的中心频率。η_{s1}、η_{p1}、η_0、η_{p2}、η_{s2} 则分别为 Ω_{s1}、Ω_{p1}、Ω_0、Ω_{p2} 和 Ω_{s2} 的归一化频率。

现在将带通和低通的幅频特性对应起来，得到 λ 和 η 的对应关系如表 5-5 所示。

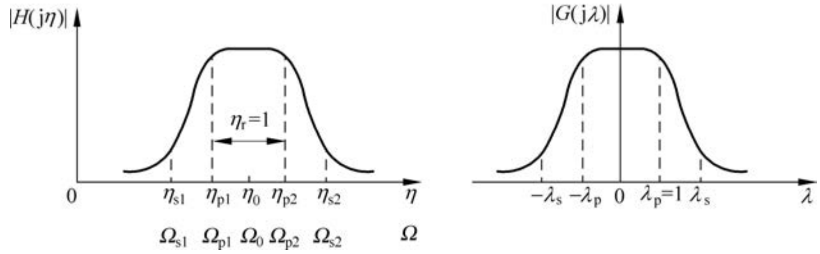


图 5-15 带通和低通滤波器的幅频特性(归一化)

表 5-5 λ 与 η 的对应关系

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	λ_p	λ_s	∞
η	0	η_{s1}	η_{p1}	η_0	η_{p2}	η_{s2}	∞

由 λ 和 η 的对应关系，得到

$$\lambda = \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta} \tag{5-53}$$

式(5-53)就是低通到带通的频率变换公式。下面推导由归一化低通到带通的变换公式，由于

$$p = \mathrm{j}\lambda = \mathrm{j}\,\frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta}$$

而 $q = \mathrm{j}\eta$，即 $\eta = -\mathrm{j}q$，代入上式，得

$$p = \frac{q^2 + \eta_0^2}{q}$$

为去归一化，将 $q = s/B$ 代入上式，得

$$p = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB} = \frac{s^2 + \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{s(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} \tag{5-54}$$

因此

$$H(s) = G(p)\Big|_{p = \frac{s^2 + \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{s(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}} \tag{5-55}$$

式(5-55)为低通到带通传输函数之间的频率变换关系。

例 5-7 给定带通滤波器的技术要求为带宽 200Hz，中心频率 $f_0 = 1\text{kHz}$，在通带范围内衰减不大于 3dB，并要求频率小于 830Hz 或大于 1200Hz 时，衰减不小于 25dB。试设计此带通滤波器。

解 选用切比雪夫滤波器。

首先将频率归一化，取参考频率 $f_r = f_{p_2} - f_{p1} = 200\text{Hz}$，则 $\eta_0 = 5$，$\eta_{s1} = 4.15$，$\eta_{s2} = 6$。η_{p1} 和 η_{p2} 的具体数值可以用以下方法求得：

因已知 $\eta_{p2} - \eta_{p1} = 1$，$\eta_{p2}\eta_{p1} = \eta_0^2 = 25$，所以可得 $\eta_{p1} = 4.525$，$\eta_{p2} = 5.525$。

根据 η_{s1}(或 η_{s2})可求 λ_s 为

$$\lambda_s = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}} = 1.833$$

或

$$-\lambda_s=\frac{\eta_{s1}^2-\eta_0^2}{\eta_{s1}}=-1.874$$

由于低通原型滤波器的幅频特性是偶对称的。现在求得的$-\lambda_s$与λ_s的绝对值不相等,这是因为所给的技术要求略有不对称所致。为了使在η_{s1}及η_{s2}处都有不小于25dB的衰减,取两者中较小的数值,即$\lambda_s=1.833$。

下面采用图表法设计低通原型滤波器。

查图5-11及表5-3,得$N=3$,$G(p)=\dfrac{0.2506}{(p^2+0.2986p+0.8392)(p+0.2986)}$。

最后,利用式(5-55)得到所求的对应于真实频率的系统函数为

$$H(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_{p1}\Omega_{p2}}{s(\Omega_{p2}-\Omega_{p1})}}=\frac{4.973\times10^8s^3}{s^2+375.2s+3.9478\times10^7}\cdot$$

$$\frac{1}{s^4+375.2s^3+8.028\times10^6s^2+1.4814\times10^{10}s+1.5585\times10^{15}}$$

3. 低通到带阻的频率变换

带阻和低通滤波器的幅频特性如图5-16所示。图中,Ω_{p1}和Ω_{p2}分别为通带下限截止频率和通带上限截止频率,Ω_{s1}和Ω_{s2}分别为阻带下限截止频率和阻带上限截止频率。将$\Omega_{p2}-\Omega_{p1}$定义为阻带带宽,以B表示,并以此带宽作为参考频率Ω_r,即$\Omega_r=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}$。另外,定义$\Omega_0^2=\Omega_{p1}\Omega_{p2}$,$\Omega_0$称为阻带的中心频率。$\eta_{s1}$、$\eta_{p1}$、$\eta_0$、$\eta_{p2}$、$\eta_{s2}$则分别为$\Omega_{s1}$、$\Omega_{p1}$、$\Omega_0$、$\Omega_{p2}$和$\Omega_{s2}$的归一化频率。

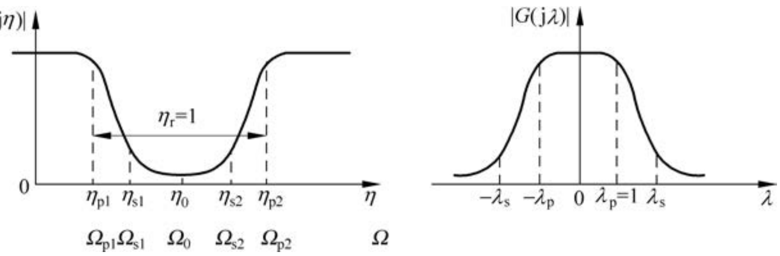


图5-16 带阻和低通滤波器的幅频特性(归一化)

现在将带阻和低通滤波器的幅频特性对应起来,得到λ和η的对应关系如表5-6所示。

表5-6 λ与η的对应关系

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	0	λ_p	λ_s	∞
η	η_0	η_{s2}	η_{p2}	∞	0	η_{p1}	η_{s1}	η_0

由λ和η的对应关系,得

$$\lambda=\frac{\eta}{\eta^2-\eta_0^2} \tag{5-56}$$

式(5-56)就是低通到带阻的频率变换公式。将式(5-56)代入$p=j\lambda$,并去归一化,可得

$$p=\frac{sB}{s^2+\Omega_0^2}=\frac{s(\Omega_{p2}-\Omega_{p1})}{s^2+\Omega_{p1}\Omega_{p2}} \tag{5-57}$$

因此

$$H(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s(\Omega_{p2}-\Omega_{p1})}{s^2+\Omega_{p1}\Omega_{p2}}} \tag{5-58}$$

式(5-58)为低通到带阻传输函数之间的频率变换关系。

以上讨论了低通到高通滤波器、低通到带通滤波器、低通到带阻滤波器的频率变换关系，现将讨论结果归纳如表 5-7 所示。

表 5-7 模拟滤波器的频率变换

滤波器类型	归一化低通滤波器 $G(p)$ 的技术指标要求	要求设计的滤波器 $H(s)$
低通 $G(p)\to$低通 $H(s)$	$\lambda_p=\frac{1}{a},\lambda_s=\frac{1}{a}\frac{\Omega_s}{\Omega_p}$	$p=\frac{1}{a}\frac{s}{\Omega_p}$
低通 $G(p)\to$高通 $H(s)$	$\lambda_p=\frac{1}{a},\lambda_s=\frac{1}{a}\frac{\Omega_p}{\Omega_s}$	$p=\frac{1}{a}\frac{\Omega_p}{s}$
低通 $G(p)\to$带通 $H(s)$	$\lambda_p=\frac{1}{a},\lambda_s=\frac{1}{a}\frac{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}$	$p=\frac{1}{a}\frac{s^2+\Omega_0^2}{Bs}$
低通 $G(p)\to$带阻 $H(s)$	$\lambda_p=\frac{1}{a},\lambda_s=\frac{1}{a}\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}$	$p=\frac{1}{a}\frac{Bs}{s^2+\Omega_0^2}$

表中，Ω_p 表示所要求滤波器的通带截止频率，Ω_{p2} 和 Ω_{p1} 表示所要求滤波器的通带上限和下限截止频率，Ω_s 表示所要求滤波器的阻带截止频率，Ω_{s2} 和 Ω_{s1} 表示所要求滤波器的阻带上限和下限截止频率，Ω_0 是滤波器的通带中心频率，B 是滤波器的通带(或阻带)带宽，a 是一个取决于滤波器类型的归一化参数。这些参数的定义如下：

$$\Omega_0=\sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}} \tag{5-59}$$

$$B=\Omega_{p2}-\Omega_{p1} \tag{5-60}$$

归一化参数 a 的取值要视所设计滤波器的类型而定。当所设计滤波器是巴特沃思或切比雪夫滤波器时，$a=1$。当所设计滤波器是椭圆滤波器时，对于低通滤波器，a 取 $\sqrt{\Omega_s/\Omega_p}$；对于高通滤波器，a 取$\sqrt{\Omega_p/\Omega_s}$；对于带通滤波器，a 取$\sqrt{\frac{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}}$；对于带阻滤波器，$a$ 取$\sqrt{\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}}$。

5.4 脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器

5.4.1 变换原理

5.4.1
微课视频

利用模拟滤波器设计数字滤波器，也就是使数字滤波器能模仿模拟滤波器的特性，这种模仿可以从不同的角度出发。脉冲响应不变法是从时域出发，使数字滤波器的脉冲响应序列 $h(n)$模仿模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$，即使 $h(n)$等于 $h_a(t)$的采样值，即

$$h(n)=h_a(t)\Big|_{t=nT}=h_a(nT) \tag{5-61}$$

其中，T 为采样周期。这样，用数字系统代替模拟系统，至少能保证在采样点上的响应是相等的。

数字滤波器的系统函数可由下式求得：

$$H(z)=Z[h(n)]=Z[h_a(nT)] \tag{5-62}$$

下面研究已经获得了满足性能要求的模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$后，怎样根据脉冲响应不变法求与之对应的数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

首先，对已知的 $H_a(s)$进行拉普拉斯反变换，求出 $h_a(t)$。

设模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$只有单阶极点，且假定分母的阶数高于分子的阶数（一般都满足这一要求，因为只有这样才相当于一个稳定的模拟系统），则可将 $H_a(s)$展开成部分分式表示式

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i} \tag{5-63}$$

其相应的单位冲激响应 $h_a(t)$是 $H_a(s)$的拉普拉斯反变换，即

$$h_a(t)=L^{-1}[H_a(s)]=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i t}u(t) \tag{5-64}$$

其次，对 $h_a(t)$采样，得到 $h_a(nT)$，即

$$h_a(nT)=h_a(t)\Big|_{t=nT}=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i nT}u(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i(e^{s_i T})^n u(n) \tag{5-65}$$

然后，令 $h(n)=h_a(nT)$，以求出 $h(n)$。

最后，对 $h(n)$进行 Z 变换，得到所需的数字滤波器系统函数 $H(z)$

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_i T}z^{-1}} \tag{5-66}$$

对比式(5-63)和式(5-66)，可以发现，模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$与数字滤波器的系统函数 $H(z)$具有以下对应关系：

(1) s 平面上的每一个单阶极点 $s=s_i$ 变换到 z 平面上的单阶极点 $z_i=e^{s_i T}$ 处。

(2) $H_a(s)$与 $H(z)$的部分分式中所有对应系数不变。

(3) 如果模拟滤波器是稳定的，即所有极点 s_i 位于 s 平面的左半平面(极点的实部 $R_e(s_i)<0$)，则变换后的数字滤波器的所有极点位于单位圆内，即模小于 1，$|e^{s_i T}|=e^{R_e(s_i)T}<1$，因此数字滤波器也必然是稳定的。

值得注意的是，虽然脉冲响应不变法能保证 s 平面极点与 z 平面极点有这种对应关系，但是并不等于整个 s 平面与 z 平面有这种对应关系，特别是两者的零点就没有这种对应关系。因此，不能将关系 $z=e^{sT}$ 直接代入 $H_a(s)$来获取 $H(z)$。

例 5-8 利用脉冲响应不变法将模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+3s+2}$变换为数字滤波器的系统函数 $H(z)$，采样周期 $T=0.1\text{s}$。

解 模拟滤波器的传输函数

$$H_a(s)=\frac{2s+3}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

极点：$s_1=-1$，$s_2=-2$。

其相应数字滤波器的极点为 $z_1=e^{-0.1}$，$z_2=e^{-0.2}$。

因此，所求数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-0.1}z^{-1}}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-0.2}z^{-1}}=\frac{2-1.7236z^{-1}}{1-1.7236z^{-1}+0.7408z^{-2}}$$

5.4.2
微课视频

5.4.2 s 平面与 z 平面的映射关系

1. 采样序列的 Z 变换与模拟信号的拉普拉斯变换的关系

设 $h_{\mathrm{a}}(t)$ 理想采样 $\hat{h}_{\mathrm{a}}(t)$ 的表达式为

$$\hat{h}_{\mathrm{a}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_{\mathrm{a}}(t)\delta(t-nT) \tag{5-67}$$

两边取拉普拉斯变换得

$$\hat{H}_{\mathrm{a}}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_{\mathrm{a}}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_{\mathrm{a}}(t)\delta(t-nT)\Big]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_{\mathrm{a}}(nT)\mathrm{e}^{-nsT} \tag{5-68}$$

序列 $h(n)$ 的 Z 变换为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n} \tag{5-69}$$

比较式(5-68)和式(5-69)可以看出，当 $z=\mathrm{e}^{sT}$ 时，序列 $h(n)$ 的 Z 变换就等于采样信号 $\hat{h}_{\mathrm{a}}(t)$ 的拉普拉斯变换，即

$$H(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT}}=\hat{H}_{\mathrm{a}}(s) \tag{5-70}$$

根据 1.5 节讨论的理想采样的频谱特性

$$\hat{H}_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}k\Omega_{\mathrm{s}}) \tag{5-71}$$

令 $s=\mathrm{j}\Omega$，不难得到 $\hat{h}_{\mathrm{a}}(t)$ 的拉普拉斯变换与原有模拟信号 $h_{\mathrm{a}}(t)$ 的拉普拉斯变换存在以下关系：

$$\hat{H}_{\mathrm{a}}(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{a}\left(s-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\right) \tag{5-72}$$

综合式(5-70)和式(5-72)，可以得到

$$H(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{\mathrm{a}}\left(s-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\right) \tag{5-73}$$

上式表明，脉冲响应不变法将模拟滤波器变换为数字滤波器时，首先对 $H_{\mathrm{a}}(s)$ 进行周期延拓，然后再经过 $z=\mathrm{e}^{sT}$ 映射关系。这就是说，$H(z)$ 与 $H_{\mathrm{a}}(s)$ 的周期延拓相联系，而不仅仅和 $H_{\mathrm{a}}(s)$ 相联系。

2. s 平面和 z 平面的映射关系

脉冲响应不变法把 $H_{\mathrm{a}}(s)$ 从 s 平面映射到 z 平面中的 $H(z)$ 时，s 与 z 的映射关系是

$$z=\mathrm{e}^{sT} \tag{5-74}$$

现在来讨论这种映射关系。将 s 平面用直角坐标表示为

$$s=\sigma+\mathrm{j}\Omega \tag{5-75}$$

而 z 平面用极坐标表示为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \tag{5-76}$$

将它们都代入式(5-76)中，得

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} = \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\Omega)T} = \mathrm{e}^{\sigma T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T} \tag{5-77}$$

因此

$$r = \mathrm{e}^{\sigma T} \tag{5-78}$$

$$\omega = \Omega T \tag{5-79}$$

上面两式说明 z 的模 r 只与 s 的实部 σ 相对应，而 z 的相角 ω 只与 s 的虚部 Ω 相对应。

1) r 与 σ 的关系

由式(5-78)可知，当 $\sigma=0$ 时，$r=1$，这表明 s 平面虚轴映射为 z 平面的单位圆。

当 $\sigma<0$ 时，$r<1$，这表明 s 左半平面映射为 z 平面的单位圆内部，这样的映射可以保证稳定的模拟滤波器变换成数字滤波器后仍然是稳定的。

当 $\sigma>0$ 时，$r>1$，这表明 s 右半平面则映射为 z 平面单位圆外部，这样就使得原来不稳定的模拟滤波器变换为数字滤波器后仍是不稳定的。

2) ω 与 Ω 的关系

由于 $\omega=\Omega T$，因此当 Ω 由 $-\pi/T$ 增长到 π/T，对应于 ω 由 $-\pi$ 增长到 π，即 s 平面宽为 $2\pi/T$ 的一个水平条带相当于 z 平面幅角转了一周，也就是覆盖了整个 z 平面。因此 Ω 每增加一个采样角频率 $\Omega_s=2\pi/T$，则 ω 相应地增加一个 2π，也就是说，Ω 是 ω 的周期函数。所以，s 平面到 z 平面的映射是多值映射，s 平面和 z 平面的映射关系如图 5-17 所示。

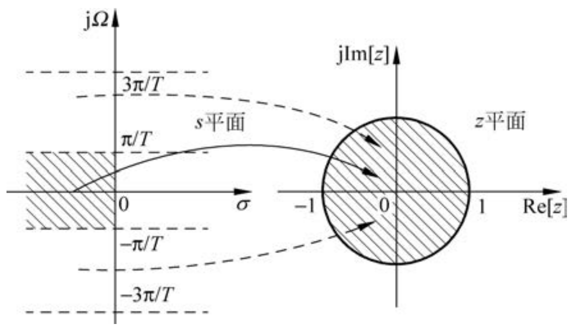


图 5-17 s 平面到 z 平面的映射

脉冲响应不变法不是从 s 平面到 z 平面的单值映射关系，s 平面上每一条宽为 $2\pi/T$ 的横带，都将重复地映射到整个 z 平面上。具体来说，这是反映了 $H_a(s)$的周期延拓与 $H(z)$ 的关系，而不是 $H_a(s)$本身与 $H(z)$的关系。这正是用脉冲响应不变法设计的数字滤波器的频率响应产生混叠失真的根本原因，关于这一点下面将详细讨论。

5.4.3 混叠失真

5.4.3
微课视频

由于 s 平面虚轴映射为 z 平面的单位圆，根据式(5-73)和式(5-70)，令 $s=\mathrm{j}\Omega$ 和 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，则

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\mathrm{j}\Omega - \mathrm{j}\,\frac{2\pi}{T}k\right) = \hat{H}_a(\mathrm{j}\Omega) \tag{5-80}$$

上式表明，数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓，$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$只是将

$\hat{H}_a(\mathrm{j}\Omega)$做一个尺度变换的结果，这种尺度变换可以认为是一种频率轴的归一化。因为$\hat{h}_a(t)$在样本之间保留一个与采样周期 T 相等的样本间隔，而 $h(n)$序列值之间的间隔总是1，因此可以认为 $h(n)$的时间轴被因子 T 归一化，相应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$频率被因子 $1/T$ 归一化，如图 5-18 所示。

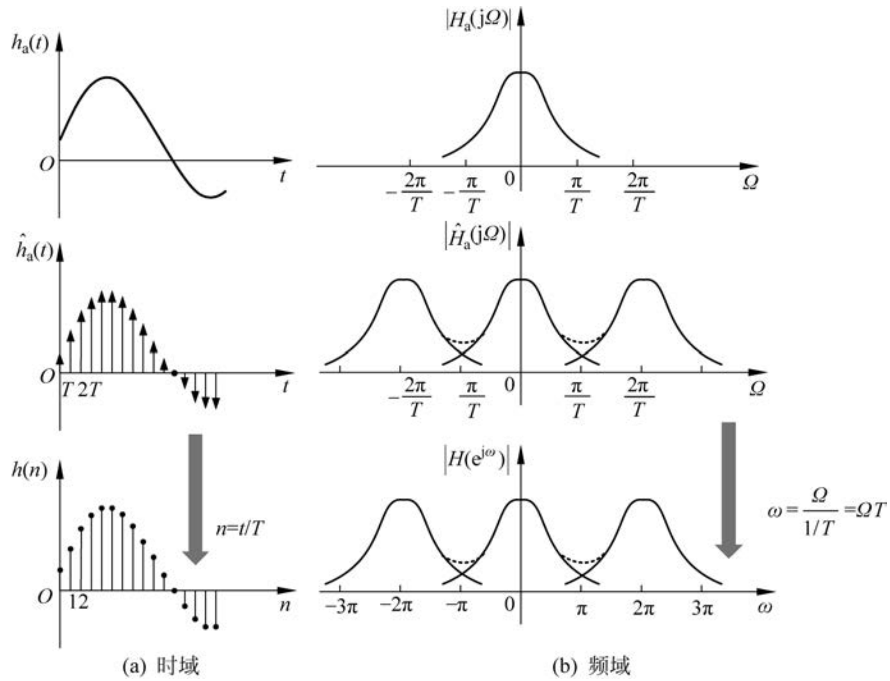


图 5-18　脉冲响应不变法中的时频对应关系与频率混叠现象

如果模拟滤波器频率响应的带宽被限定在折叠频率以内，即

$$H_a(\mathrm{j}\Omega)=0,\quad |\Omega|\geqslant \pi/T$$

那么，数字滤波器的频率响应能够重现模拟滤波器的频率响应，即

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{T}H_a\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{T}\right),\quad |\omega|<\pi \tag{5-81}$$

然而，任何实际的模拟滤波器都不是带限的，因此数字滤波器的频率响应必然产生混叠。但是，如果模拟滤波器在折叠频率以上的频率响应衰减很大，那么这种混叠失真很小，采用脉冲响应不变法设计数字滤波器就能得到很好的效果。所以，利用脉冲响应不变法时一定要把 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$的最高频率限制在采样角频率 Ω_s 的一半以下，这个要求在高通与带阻滤波器中显然是无法满足的。

为了减小混叠失真，可以增大采样频率 f_s，即令采样周期($T=1/f_s$)减小，则系统频率响应各周期延拓分量之间相距更远，因而可减少混叠失真。但是，当滤波器的指标用数字域频率 ω 给定时，用减小 T 的方法就不能解决混叠问题。

由式(5-81)可知，当采样频率很高时，即 T 很小时，数字滤波器增益会很高，要使数字滤波器的频率响应不受采样频率的影响，可作以下修正，令

$$h(n)=Th_a(nT) \tag{5-82}$$

则有

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{TA_i}{1-\mathrm{e}^{s_iT}z^{-1}} \tag{5-83}$$

及

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{\mathrm{a}}\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{T}-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\right)\approx H_{\mathrm{a}}\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{T}\right),\quad |\omega|<\pi \tag{5-84}$$

这样，数字滤波器的增益不随 T 变化。

5.4.4　脉冲响应不变法的优缺点

考察脉冲响应不变法，可以得出以下结论：

脉冲响应不变法使得数字滤波器的单位脉冲响应完全模仿模拟滤波器的冲激响应，所以时域逼近良好。

模拟滤波器频率 Ω 与数字滤波器频率 ω 之间呈线性关系 $\omega=\Omega T$，因而一个线性相位的模拟滤波器(例如贝塞尔滤波器)可以映射成一个线性相位的数字滤波器。

由于频率混叠效应，脉冲响应不变法只适用于带限的模拟滤波器。高通和带阻滤波器不宜采样脉冲响应不变法，否则要加保护滤波器，滤掉高于折叠频率以上的频率分量。对于带通和低通滤波器，需充分的带限，阻带衰减越大，则混叠效应越小。

例 5-9　用脉冲响应不变法设计一个数字低通滤波器，已知模拟低通原型滤波器传输函数为 $H_{\mathrm{a}}(s)=\dfrac{2}{s^2+4s+3}$，模拟截止频率 $f_{\mathrm{c}}=1\mathrm{kHz}$，采样频率 $f_{\mathrm{s}}=4\mathrm{kHz}$，求数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$。

分析　题目给出的是归一化模拟低通传输函数，为了得到满足指标要求的模拟低通传输函数，需要"去归一化"，方法是用 s/Ω_{c} 代替 $H_{\mathrm{a}}(s)$ 中的 s。

解　$\Omega_{\mathrm{c}}=2\pi f_{\mathrm{c}}=2\pi\times1000=2000\pi\mathrm{rad/s}$，去归一化，则

$$H_{\mathrm{a}}(s)=\frac{2}{\left(\dfrac{s}{\Omega_{\mathrm{c}}}\right)^2+4\times\left(\dfrac{s}{\Omega_{\mathrm{c}}}\right)+3}=\frac{1}{s/\Omega_{\mathrm{c}}+1}-\frac{1}{s/\Omega_{\mathrm{c}}+3}=\frac{\Omega_{\mathrm{c}}}{s+\Omega_{\mathrm{c}}}-\frac{\Omega_{\mathrm{c}}}{s+3\Omega_{\mathrm{c}}}$$

极点 $s_1=-\Omega_{\mathrm{c}}$，$s_2=-3\Omega_{\mathrm{c}}$，$T=\dfrac{1}{f_{\mathrm{s}}}=\dfrac{1}{4000}(\mathrm{s})$。

$$H(z)=\frac{\Omega_{\mathrm{c}}}{1-\mathrm{e}^{-\Omega_{\mathrm{c}}T}z^{-1}}-\frac{\Omega_{\mathrm{c}}}{1-\mathrm{e}^{-3\Omega_{\mathrm{c}}T}z^{-1}}=\frac{2000\pi}{1-\mathrm{e}^{-\pi/2}z^{-1}}-\frac{2000\pi}{1-\mathrm{e}^{-3\pi/2}z^{-1}}$$

5.4.5　MATLAB 实现

MATLAB 信号处理工具箱提供了专用函数 impinvar 实现从模拟滤波器到数字滤波器的脉冲响应不变映射，调用格式为：

```
[bz,az] = impinvar(b,a,fs)
```

其中，b 和 a 分别为模拟滤波器的分子和分母多项式系数向量；fs 为采样频率，单位为 Hz，fs 默认为 1Hz；bz 和 az 分别为数字滤波器分子和分母多项式系数向量。

以例 5-8 为例，利用 MATLAB 实现程序如下：

```
b = [2,3]; a = [1,3,2]; T = 0.1;
```

```
[bz,az] = impinvar(b,a,1/T)
```

运行后，bz=[0.2000，−0.1724]，az=[1.0000，−1.7236，0.7408]。因此，所求数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{0.2-0.1724z^{-1}}{1-1.7236z^{-1}+0.7408z^{-2}}$$

请注意，上式 $H(z)$ 的表达式与例 5-8 中变换结果并不完全一致，它们之间差了一个系数 0.1（采样周期 T），这说明 MATLAB 中 impinvar 函数采用的是修正后的变换式。

5.4.5
微课视频

例 5-10 利用脉冲响应不变法设计一个数字巴特沃思低通滤波器，滤波器的技术要求为：通带截止频率 $\Omega_p=200\pi\text{rad/s}$，通带最大衰减 $\alpha_p=3\text{dB}$，阻带截止频率 $\Omega_s=600\pi\text{rad/s}$，阻带最小衰减 $\alpha_s=12\text{dB}$。研究不同采样频率对所设计数字滤波器频率响应的影响，设采样频率 f_s 分别取 1kHz、2kHz 和 4kHz。

解 模拟滤波器的技术要求为

$$\Omega_p=200\pi\text{rad/s},\quad \alpha_p=3\text{dB},\quad \Omega_s=600\pi\text{rad/s},\quad \alpha_s=12\text{dB}$$

参照 5.3.3 节内容，可得满足技术要求的模拟滤波器传输函数为

$$H_a(s)=\frac{-\mathrm{j}141.4\pi}{s+141.4\pi-\mathrm{j}141.4\pi}+\frac{\mathrm{j}141.4\pi}{s+141.4\pi+\mathrm{j}141.4\pi}$$

因此，所求数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{-\mathrm{j}141.4\pi}{1-\mathrm{e}^{(-141.4\pi+\mathrm{j}141.4\pi)T}z^{-1}}+\frac{\mathrm{j}141.4\pi}{1-\mathrm{e}^{(-141.4\pi-\mathrm{j}141.4\pi)T}z^{-1}}$$

显然 $H(z)$ 与采样间隔 T 有关。将 $T=1\times10^{-3}$s、$T=5\times10^{-4}$s、$T=2.5\times10^{-4}$s 分别代入 $H(z)$ 中，再利用 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 可得到 $H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$、$H_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 和 $H_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。将 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$、$H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$、$H_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 和 $H_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的幅频特性用它们的最大值归一化后，并在同一张图中绘出，如图 5-19 所示。由图可见，在 $f_s=1$kHz 时，模拟和数字滤波器的幅频特性在频率较低处就已经分得很开，拖尾现象较为严重，这是因为采样频率较低，产生了较大的混叠失真。随着采样频率 f_s 的增高，数字滤波器的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 对模拟滤波器频率响应 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|$ 的逼近也越来越好。当 f_s 足够高时，脉冲响应不变法可给出满意的结果。

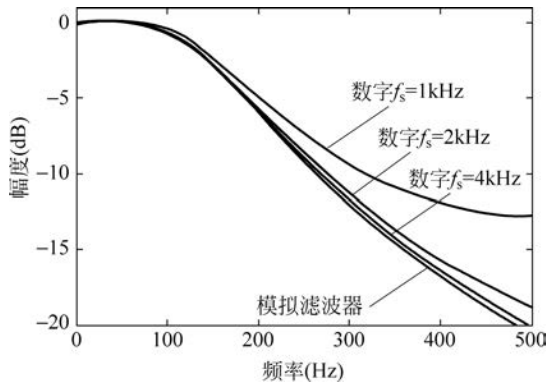


图 5-19 不同采样频率对所设计数字滤波器频率响应的影响

采用 MATLAB 编程，主要程序如下：

```
wp = 200 * pi;ws = 600 * pi;Rp = 3;Rs = 12;
```

```
%求模拟滤波器的系统函数
[n,wn] = buttord(wp,ws,Rp,Rs,'s')
[b,a] = butter(n,wn,'s')
%求模拟滤波器的频率响应,频率显示范围(0～500) Hz
[db,mag,pha,w] = freqs_m(b,a,500 * 2 * pi);
%绘图,横坐标为频率 f(单位为 Hz)
plot(w/(2 * pi),db);axis([0,500, - 20,1]);hold on
%脉冲响应不变法
fs = 1000; [bz,az] = impinvar(b,a,fs);
%求数字滤波器的频率响应
[db,mag,pha,grd,w] = freqz_m(bz,az);
%绘图,将数字频率 w 转换为模拟频率 f,以便将频率响应在同一坐标系中绘出
plot(0.5 * fs * w/pi,db);axis([0,500, - 20,1]);hold off
```

f_s 取 2kHz、4kHz 的编程语句与上面类似,这里不再给出相应代码。

程序中为了画出两种滤波器的频率响应,使用了 freqs_m 和 freqz_m 函数,这两个函数不是 MATLAB 软件自带函数,属于特殊函数。freqs_m 函数为模拟滤波器频率响应计算函数,函数代码如下:

```
function [db,mag,pha,w] = freqs_m(b,a,wmax);
w = [0:1:500] * wmax/500;
H = freqs(b,a,w); mag = abs(H);
db = 20 * log10((mag + eps)/max(mag));pha = angle(H);
```

其中,b 和 a 分别为模拟滤波器 $H_a(s)$的分子和分母多项式系数;wmax 为希望绘制的频率响应最大频率值,单位为 rad/s;db、mag 和 pha 分别为幅度(dB 值)、幅度(绝对值)和相位值。

函数 freqz_m 为数字滤波器频率响应计算函数,函数代码如下:

```
function [db,mag,pha,grd,w] = freqz_m(bz,az);
[H,w] = freqz(bz,az,1000,'whole'); H = (H(1:1:501))'; w = (w(1:1:501))';
mag = abs(H); db = 20 * log10((mag + eps)/max(mag));
pha = angle(H); grd = grpdelay(bz,az,w);
```

其中,bz 和 az 为数字滤波器 $H(z)$的分子和分母多项式系数向量;grd 为滤波器的群时延;w 的取值范围为$[0,\pi]$。

以上两个函数,在涉及利用 MATLAB 求滤波器的频率响应时,会被反复用到。

5.5　双线性变换法设计 IIR 数字滤波器

脉冲响应不变法使数字滤波器在时域上模仿模拟滤波器,但是它的缺点是产生频率响应的混叠失真,这是因为从 s 平面到 z 平面不是一一映射关系。实际上,只要 s 平面上的一个宽度为 $2\pi/T$ 的水平带状区域就足以映射成整个 z 平面了。正是由于 s 平面上许许多多这样的水平带状区域一次次地重叠映射到 z 平面,导致了频率响应的混叠。为了克服这个缺点,可以采用双线性变换法。

5.5.1　变换原理

5.5.1
微课视频

双线性变换法针对 $z=e^{sT}$ 映射关系的多值性,先设法将 s 平面压缩成 s_1 平面上一个

宽度为 $2\pi/T$ 的水平带状区域，进而通过 $z=e^{s_1T}$ 将这个带状区域映射成 z 平面，即可实现 s 平面到 z 平面的单值映射，也就消除了频率响应混叠现象，双线性变换法的映射关系如图 5-20 所示。

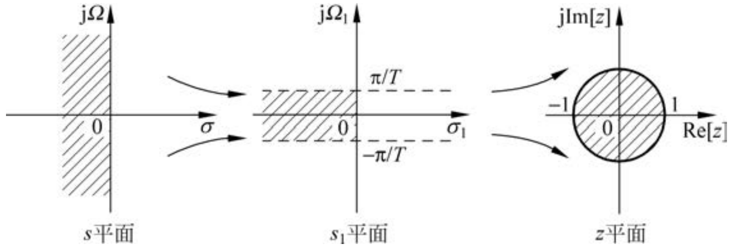


图 5-20 双线性变换法的映射关系

为了将 s 平面上的 $j\Omega$ 轴压缩成 s_1 平面的 $j\Omega_1$ 轴从 $-\pi/T$ 到 π/T 的一段，可以通过如下的正切变换实现：

$$\Omega=c\tan\frac{\Omega_1T}{2}\tag{5-85}$$

式中，c 是待定常数，一般选 $c=\frac{2}{T}$。当 Ω_1 较小时，有 $\tan\frac{\Omega_1T}{2}\approx\frac{\Omega_1T}{2}$，此时 $\Omega=c\tan\frac{\Omega_1T}{2}\approx\frac{2}{T}\cdot\frac{\Omega_1T}{2}=\Omega_1$。可见，这种 c 的选择可使模拟原型滤波器的低频特性近似等于数字滤波器的低频特性。

很明显，当 Ω_1 从 $-\pi/T$ 经过原点变化到 π/T 时，Ω 就相应的由 $-\infty$ 经过原点变化到 $+\infty$。也就是说，s 平面的 $j\Omega$ 轴与 s_1 平面的 $j\Omega_1$ 轴从 $-\pi/T$ 到 π/T 的一段互为映射。

将式(5-85)所示关系解析延拓到整个 s 平面和 s_1 平面，令 $s=j\Omega$，$s_1=j\Omega_1$，则得

$$s=\frac{2}{T}\cdot\frac{e^{\frac{s_1T}{2}}-e^{-\frac{s_1T}{2}}}{e^{\frac{s_1T}{2}}+e^{-\frac{s_1T}{2}}}=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-e^{-s_1T}}{1+e^{-s_1T}}=\frac{2}{T}\mathrm{th}\frac{s_1T}{2}\tag{5-86}$$

再将 s_1 平面通过以下标准变换关系映射到 z 平面：

$$z=e^{s_1T}\tag{5-87}$$

从而得到 s 平面和 z 平面的单值映射关系为

$$s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\tag{5-88}$$

或

$$z=\frac{2/T+s}{2/T-s}\tag{5-89}$$

式(5-88)和式(5-89)中分子与分母都是变量的线性函数，此即双线性变换名称的由来。

用双线性变换法设计数字滤波器时，在得到了相应的模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$ 后，只要将相应的变换关系代入 $H_a(s)$，即可得到数字滤波器的系统函数，即

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}\tag{5-90}$$

反过来，在已得到设计后的数字滤波器表达式 $H(z)$ 后，只要将 $z=\frac{2/T+s}{2/T-s}$ 代入 $H(z)$，即可还原出变换前对应的模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$。

5.5.2　s 平面与 z 平面的映射关系

5.5.2
微课视频

将 $s=\sigma+\mathrm{j}\Omega$ 和 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 代入式(5-89)，得

$$r=\left[\frac{(2/T+\sigma)^2+\Omega^2}{(2/T-\sigma)^2+\Omega^2}\right]^{1/2} \tag{5-91}$$

$$\omega=\arctan\frac{\Omega}{2/T+\sigma}+\arctan\frac{\Omega}{2/T-\sigma} \tag{5-92}$$

由此可以得出 s 平面与 z 平面的映射关系，即 s 平面的虚轴确实与 z 平面的单位圆相对应。当 $\sigma<0$ 时，$r<1$；当 $\sigma>0$ 时，$r>1$；当 $\sigma=0$ 时，$r=1$。因此稳定的模拟滤波器经双线性变换法后所得的数字滤波器也一定是稳定的。这些映射关系与脉冲响应不变法类似，不同的是，在双线性变换下，模拟滤波器的复频率 s 与数字滤波器的复频率 z 之间的映射有单值的对应关系，不存在频率混叠现象，但为此付出了非线性的代价。

下面重点讨论双线性变换法中，模拟频率 Ω 与数字频率 ω 之间的关系。考虑 s 平面虚轴上的变换，令式(5-92)中 $\sigma=0$，则得

$$\omega=2\arctan(\Omega T/2) \tag{5-93}$$

或

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \tag{5-94}$$

s 平面上 Ω 与 z 平面的 ω 成单值非线性的正切关系，如图 5-21 所示。这种映射关系有什么优点呢？我们学习过信号的尺度变换，例如对于信号 $x(t)$、$x(2t)$ 和 $x(t/2)$ 分别对应着信号的时域压缩和时域扩张，由图 5-22 可见，信号尺度变换的特点是信号时域发生压缩或扩张，而对应幅值不变。双线性变换法也可以理解为一种滤波器频域的尺度变换，只不过前面举例的信号尺度变换是一种线性压缩或扩张，而双线性变换法则是一种非线性压缩变换。这两种尺度变换可形式化表示为

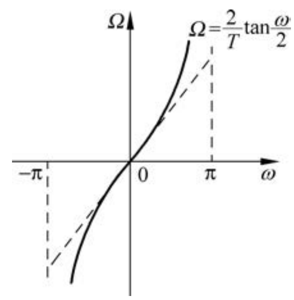


图 5-21　双线性变换法的模拟频率与数字频率之间的关系

$$\begin{cases} x(2t)=x(t)\big|_{t=2t} \\ H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H_a(\mathrm{j}\Omega)\big|_{\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}} \end{cases} \tag{5-95}$$

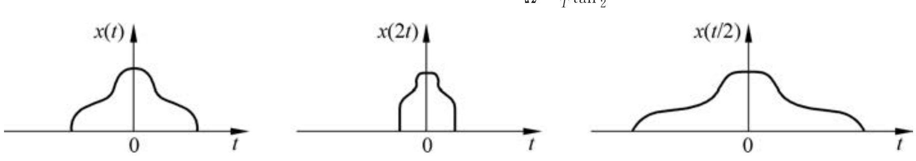


图 5-22　信号的尺度变换

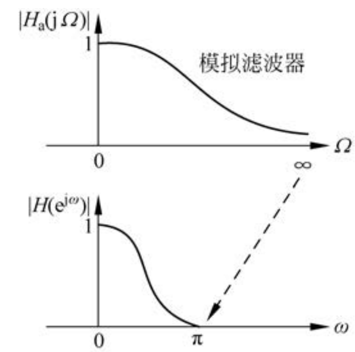


图 5-23　双线性变换法中模拟滤波器与数字滤波器之间的映射示意

由于Ω与ω成非线性正切映射关系，如图 5-23 所示，当Ω从 0 变到$+\infty$时，ω从 0 变到π（折叠频率）。这意味着模拟滤波器的全部频率特性被压缩成数字滤波器在$0<\omega<\pi$频率范围内的特性，所以不会有高于折叠频率的分量。因此采用双线性变换法设计数字滤波器不存在频率混叠失真的问题，克服了脉冲响应不变法的缺点。

这种频率标度之间的非线性在高频段较为严重，而在低频段接近于线性，作为线性来看，误差不太大，因此数字滤波器的频率特性能够逼近模拟滤波器的频率特性。

5.5.3　双线性变换法中的频率失真和预畸变

5.5.3
微课视频

1. 双线性变换法中的频率失真

双线性变换法与脉冲响应不变法相比，其主要的优点是避免了频率响应的混叠现象，这是因为 s 平面与 z 平面是单值的一一对应关系。

但是双线性变换的这个特点是靠频率的严重非线性关系而得到的。由于这种频率之间的非线性变换关系，就产生了新的问题。首先，一个线性相位的模拟滤波器经双线性变换后得到非线性相位的数字滤波器，不再保持原有的线性相位了；其次，这种非线性关系要求模拟滤波器的幅频响应必须是分段常数型的，即某一频率段的幅频响应近似等于某一常数（这正是一般低通、高通、带通、带阻滤波器的响应特性），不然变换所产生的数字滤波器幅频响应相对于原模拟滤波器的幅频响应会有畸变，例如一个模拟微分器将不能变换成数字微分器，理想微分器经双线性变换后幅频响应产生畸变，如图 5-24 所示。因此，只有当非线性失真是允许的或能被补偿时，才能采用双线性变换法。

对于分段常数的滤波器，双线性变换后，仍得到幅频特性为分段常数的滤波器，只是各个分段边缘的临界频率点产生了畸变。例如，一个恒定带宽的多通带模拟滤波器，变换后数字滤波器的通带将逐步压缩，高频段被挤在一起，不再是恒定带宽的多通道滤波器，但仍然不失多通带数字滤波器的结构模式，如图 5-25 所示。这说明，用双线性变换法所得出的数字滤波器在性能上与作为原型的模拟滤波器有明显的差异，但结构模式没有改变。这种情况可以用如图 5-26 所示的模拟滤波器与数字滤波器的幅频特性关系来说明。

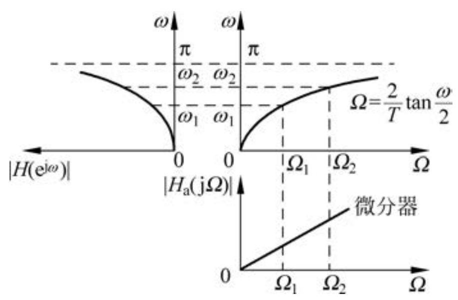


图 5-24　理想微分器经双线性变换后幅频响应产生畸变

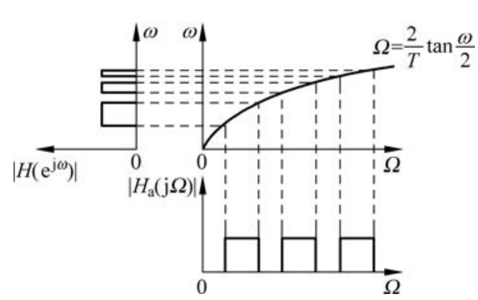


图 5-25　分段常数数字滤波器的频率畸变

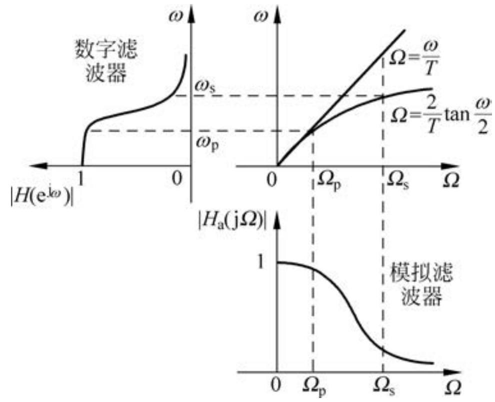


图 5-26　双线性变换法的频率畸变

数字滤波器和模拟滤波器的频率映射关系不是通过线性关系 $\Omega=\omega/T$ 进行的，而是通过非线性关系 $\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$ 进行的。因为 ω 与 Ω 的映射通过这条曲线，所以

$$\frac{\omega_p}{\Omega_p}\neq\frac{\omega_s}{\Omega_s}$$

比如说 $\frac{\omega_s}{\omega_p}=2$，经过转换后 $\frac{\Omega_s}{\Omega_p}$ 可能等于 3。这样，如果设计模拟滤波器时，按照 $\frac{\Omega_s}{\Omega_p}=\frac{\omega_s}{\omega_p}=2$ 计算，则设计出来的模拟滤波器原型经双线性变换后得到的数字滤波器的 ω_s/ω_p 必然不是 2，而可能是 1.5，于是数字滤波器的性能与原型模拟滤波器的性能就有了失真，这种失真称为频率失真。可以看出，这种失真是双线性变换所固有的，这是双线性变换法的一个很大的缺点。

2. 畸变与预畸变

模拟滤波器的边界频率经双线性变换后，频率间的比例关系被改变，称为畸变。怎样弥补这个缺点呢？一般的做法是，在给定数字滤波器的通带截止频率 ω_p 和阻带截止频率 ω_s 后，我们并不直接按照这个给定的数据去设计原型模拟滤波器，而是先根据 $\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$ 的关系求出相应的 Ω_p 和 Ω_s，然后根据 Ω_p 和 Ω_s 设计模拟滤波器原型，求出其传输函数 $H_a(s)$，最后再将 $s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入求出数字滤波器的系统函数 $H(z)$。比如说数字滤波器的技术要求是 $\frac{\omega_s}{\omega_p}=2$，应先通过作 $\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$ 的畸变，得到 Ω_p 和 Ω_s，这时 $\frac{\Omega_s}{\Omega_p}$ 并不等于 2 而是等于 3(比如说)，按 $\Omega_s/\Omega_p=3$ 设计模拟滤波器，再转换到数字滤波器时又经过相反的过程，于是 ω_s/ω_p 又能等于 2，这种方法称为预畸变。

因此，预畸变就是将分段常数数字滤波器各个分段边缘的临界模拟频率事先畸变进行校正，然后经变换后正好映射到所需要的数字频率上，此时数字滤波器将满足要求的技术指标。

以上讨论是以已知数字滤波器的边界频率(ω_p 和 ω_s)为例说明的。若已知模拟滤波器的边界频率 Ω_p 和 Ω_s，情况则要复杂一些。下面，通过一个例子说明这个方法。

例 5-11 设计一个一阶数字低通滤波器，其通带截止频率为 200Hz，通带最大衰减为 3dB，采样频率为 1000Hz，将双线性变换法应用于模拟巴特沃思滤波器。

$$H_a(s)=\frac{1}{1+s/\Omega_p}$$

分析 利用数字滤波器处理模拟信号，参考本书 0.2 节数字信号处理系统的基本组成，模拟信号先经过采样转化为时域离散信号，如图 5-27 所示，转化前后信号频率以 $\omega=\Omega T$ 关联。题目直接给出了模拟滤波器的边界频率，这实际为待处理的模拟信号的技术指标（保留模拟信号中频率小于 200Hz 的分量）。需要注意的是，待处理的模拟信号的技术要求（Ω_p、Ω_s）和所需要设计的原型模拟滤波器的技术要求（Ω'_p、Ω'_s）并不是一个概念。因为我们需要设计的是数字滤波器，并不关心采用何种设计方法由模拟滤波器得到这个数字滤波器。不同的设计方法因为有不同的频率映射关系，需要不同技术要求的模拟滤波器，因此，作为设计要求而言，不可能给出模拟滤波器的技术要求（因为不知道具体采用何种设计方法），给出的只能是待处理的模拟信号的技术要求。但是，不管采用何种设计方法，却要求经过变换后能得到相同技术要求的数字滤波器（ω_p、ω_s），这样才能保证所得到的数字滤波器性能满足需要。基于这样一种考虑，本题中给出的频率指标（200Hz），只能作为待处理模拟信号的技术要求 Ω_p。这样，先根据其求出所需要设计的数字滤波器技术要求 ω_p，然后再针对选用的变换方法（脉冲响应不变法或双线性变换法）计算出所需要设计的原型模拟滤波器技术要求 Ω'_p，最后根据这个指标再进行模拟滤波器的设计和数字滤波器的转换。

以上我们提到了线性变换关系 $\omega=\Omega T$，这是信号从模拟域映射为数字域频率间的对应关系，而滤波器经双线性变换法产生的频率间对应关系是 $\omega=2\arctan(\Omega T/2)$。为保证相同的数字频率，解决办法即“预畸变”，如图 5-27 所示。

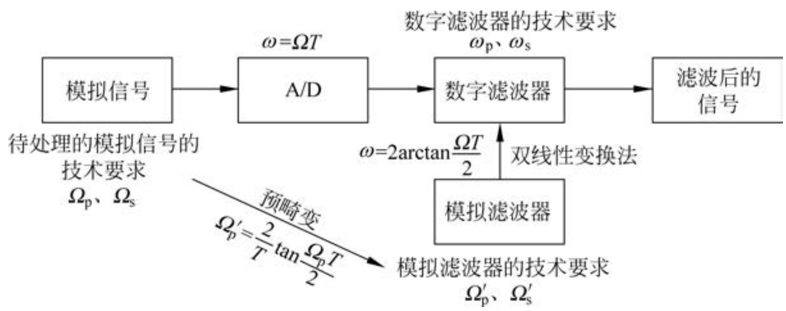


图 5-27 双线性变换法设计数字滤波器时各参数之间的关系

解 本题采用双线性变换法。先求出待设计的数字滤波器的通带截止频率 ω_p，即

$$\omega_p=\Omega_p T=2\pi f_p/f_s=0.4\pi(\text{rad})$$

经过预畸变后，相应的模拟滤波器通带截止频率为

$$\Omega'_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}=1453(\text{rad/s})$$

即模拟滤波器 3dB 衰减处的通带截止频率为

$$f'_p=\Omega'_p/2\pi=231(\text{Hz})$$

一阶巴特沃思低通滤波器的传输函数为

$$H_a(s)=\frac{\Omega'_p}{s+\Omega'_p}=\frac{1453}{s+1453}$$

所求得数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.421(z+1)}{z-0.1583}$$

如果不预畸变，则

$$\Omega_p=\omega_p/T=2\pi f_p=400\pi(\text{rad/s})$$

一阶巴特沃思低通滤波器的传输函数变为

$$H_a(s)=\frac{\Omega_p}{s+\Omega_p}=\frac{1257}{s+1257}$$

于是

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.386(z+1)}{z-0.2283}$$

由上面可以看出，有无预畸变所得到的结果是不同的。对于预畸变处理，模拟滤波器是按照通带截止频率为231Hz设计的，经过双线性变换后得到的数字滤波器的通带截止频率为要求的200Hz。而不经过预畸变处理设计的模拟滤波器对应的数字滤波器通带截止频率为

$$\omega_p=2\arctan(\Omega_p T/2)=0.357\pi(\text{rad})$$

所以

$$f_p=\frac{\omega_p}{T}\cdot\frac{1}{2\pi}=178(\text{Hz})$$

可见，不经过预畸变，所得的数字滤波器性能不符合给定的200Hz技术要求。

因此，我们得到预畸变方法：在设计模拟低通滤波器时，可以设想，一开始就把目标修正为Ω'_p而不是Ω_p，这样，双线性变换后，Ω'_p正好"畸变"到ω_p。把目标从Ω_p修正为Ω'_p就称为"预畸变"。需要说明的是，预畸变不能消除在整个频率段的非线性失真，只是消除了模拟滤波器和数字滤波器在临界频率上的畸变。具体做法为：

先由Ω_p按线性变换关系求出$\omega_p(\omega=\Omega T)$，再代入式$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$，求出$\Omega'_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p T}{2}$。

5.5.4　双线性变换法的优缺点

考察双线性变换法，可以得出以下结论：

(1) 由于引入了模拟频率的非线性压缩，双线性变换法避免了频率混叠现象，可适用于低通、高通、带通或带阻等各种分段常数数字滤波器的设计。

(2) 模拟域频率与数字域频率之间呈非线性变换关系，引入了非线性频率失真，使得一个线性相位的模拟滤波器经双线性变换法后得到的是一个非线性相位的数字滤波器。

5.5.5　模拟滤波器的数字化方法

双线性变换法是目前最普遍采用的设计方法。一般来说，当着眼于滤波器的瞬态响应

时，采用脉冲响应不变法较好，而在其他情况下，大多采用双线性变换法。而且双线性变换法对进行变换的滤波器类型没有限制，能直接用于低通、高通、带阻、带阻等各种类型的滤波器设计。

利用模拟滤波器设计 IIR 数字低通滤波器的步骤如下：

（1）确定数字低通滤波器的技术要求：ω_p、ω_s、α_p、α_s。如果给出的是模拟技术要求 Ω_p、Ω_s、α_p、α_s，可利用公式 $\omega=\Omega T$ 将边界频率进行转换。

（2）将数字低通滤波器的技术指标转换成模拟低通滤波器的技术指标。

如果采用脉冲响应不变法，边界频率的转换关系为

$$\Omega=\omega/T$$

如果采用双线性变换法，边界频率的转换关系为

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$$

（3）按照模拟低通滤波器的技术指标设计模拟低通滤波器。

（4）将模拟滤波器 $H_a(s)$，从 s 平面转换到 z 平面，得到数字低通滤波器系统函数 $H(z)$。

例 5-12 已知归一化模拟低通原型滤波器的传输函数为 $H_a(s)=\dfrac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$，试用双线性变换法设计一个数字低通滤波器，其 3dB 截止频率 $f_c=1\text{kHz}$，采样频率 $f_s=4\text{kHz}$，写出数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$。

分析 题目给出的是归一化模拟低通传输函数，为了得到满足指标要求的模拟低通传输函数，需要“去归一化”，方法是用 s/Ω_c 代替 $H_a(s)$ 中的 s。同时，由于要求采用双线性变化法设计数字滤波器，因此去归一化中的 Ω_c 应用“畸变”后的 Ω'_c 代替。

本题需先对 Ω_c 进行“预畸变”得到 Ω'_c，然后将 s/Ω'_c 代入 $H_a(s)$，去归一化得到新的 $H_a(s)$，最后对新的 $H_a(s)$ 进行双线性变换。

解 （1）预畸变，即

$$\Omega'_c=\frac{2}{T}\tan\frac{2\pi f_c T}{2}=\frac{2}{T}\tan\frac{2\pi\times 1000}{2\times 4000}=\frac{2}{T}$$

（2）去归一化，用 s/Ω'_c 代替 $H_a(s)$ 中的 s，即

$$H_a(s)=\frac{1}{\left(\dfrac{s}{\Omega'_c}\right)^2+\sqrt{2}\left(\dfrac{s}{\Omega'_c}\right)+1}=\frac{1}{\left(\dfrac{T}{2}\right)^2 s^2+\sqrt{2}\left(\dfrac{T}{2}\right)s+1}$$

（3）采用双线性变换法，得

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{1}{\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\sqrt{2}\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+1}$$

5.5.6 MATLAB 实现

5.5.6
微课视频

MATLAB 信号处理工具箱提供了实现双线性变换法的工具函数。函数 bilinear 可实现模拟 s 域到数字 z 域的双线性不变映射。对于不同形式模拟滤波器模型，函数有不同调用格式。常用的一种调用格式为：

```
[bz,az] = bilinear(b,a,fs)
```

式中，b 和 a 分别为模拟滤波器的分子和分母多项式系数向量；fs 为采样频率，单位为 Hz；bz 和 az 分别为数字滤波器分子和分母多项式系数向量。

例 5-13 已知 $f_p=0.3\text{kHz}$，$\alpha_P=1\text{dB}$，$f_s=0.2\text{kHz}$，$\alpha_s=20\text{dB}$，$T=1\text{ms}$，利用双线性变换法设计一个切比雪夫Ⅰ型数字高通滤波器。

解 MATLAB 主要实现程序如下：

```
Rp = 1;Rs = 20;T = 0.001;fp = 300;fs = 200;
%求出待设计的数字滤波器的边界频率
wp = 2 * pi * fp * T;ws = 2 * pi * fs * T;
%预畸变
wp1 = (2/T) * tan(wp/2);ws1 = (2/T) * tan(ws/2);
%设计模拟滤波器
[n,wn] = cheb1ord(wp1,ws1,Rp,Rs,'s'); [b,a] = cheby1(n,Rp,wn,'high','s');
%双线性变换
[bz,az] = bilinear(b,a,1/T);
[db,mag,pha,grd,w] = freqz_m(bz,az); plot(w/pi,db); axis([0,1,-30,2])
```

程序运行结果如图 5-28 所示。

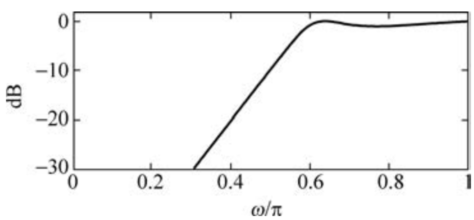


图 5-28 切比雪夫Ⅰ型数字高通滤波器幅频特性

5.6 IIR 数字滤波器的频率变换及应用

5.6.1 IIR 数字滤波器的频率变换及 MATLAB 实现

5.6.1
微课视频

设计 IIR 数字滤波器时常常借助于模拟滤波器，即先将所需要的数字滤波器技术要求转换为一个低通模拟滤波器的技术要求，然后设计这个模拟低通原型滤波器。在得到低通模拟滤波器的传输函数 $H(p)$[或 $H(s)$]后，再变换为所需要的数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

将 $H(p)$[或 $H(s)$]变换为 $H(z)$的方法有两种。一种是先将设计出来的模拟低通原型滤波器通过频率变换成所需要的模拟高通、带通或带阻滤波器，然后再利用脉冲响应不变法或双线性变换法将其变换为相应的数字滤波器，变换过程如图 5-29(a)所示。这种方法的频率变换是在模拟滤波器之间进行的。另一种方法是先将设计出来的模拟低通原型滤波器通过脉冲响应不变法或双线性变换法转换为归一化数字低通滤波器，最后通过频率变换把数字低通滤波器变换成所需要的数字高通、带通或带阻滤波器，变换过程如图 5-29(b)所示。这种方法的频率变换是在数字滤波器之间进行的。

对于第一种方法，重点是模拟域频率变换，即如何由模拟低通原型滤波器转换为截止频率不同的模拟低通、高通、带通、带阻滤波器。转换公式在 5.3.5 节中已有论述，这里结合 MATLAB 编程，介绍一下它的一般实现步骤。具体步骤如下：

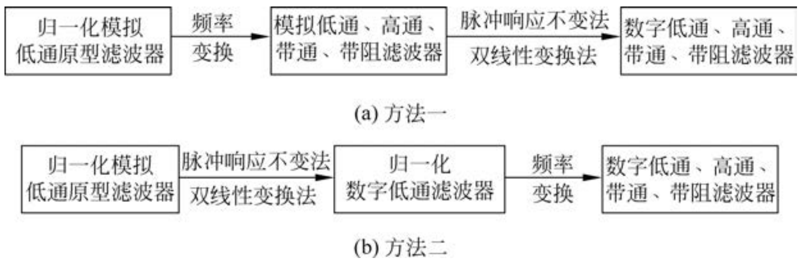


图 5-29　数字高通、带通及带阻滤波器的设计方法

（1）确定所需类型数字滤波器的技术指标。

（2）将所需类型数字滤波器的技术指标转换成模拟滤波器的技术指标。

（3）将所需类型模拟滤波器技术指标转换成模拟低通滤波器技术指标（具体转换公式参考 5.3.4 节）。

（4）设计模拟低通滤波器。

在 MATLAB 中，步骤（3）、（4）的实现一般是先利用 buttord、cheb1ord、cheb2ord、ellipord 等函数求出满足性能要求的模拟低通原型阶数 N 和 3dB 截止频率 ω_c，然后利用 buttap、cheb1ap、cheb2ap、ellipap 等函数求出零极点和增益形式的模拟低通滤波器传输函数 $H(s)$，最后利用 zp2tf 函数转换为分子、分母多项式形式的 $H(s)$。

① 最小阶数选择函数。

```
[n,wn] = buttord/cheb1ord/cheb2ord/ellipord(wp,ws,Rp,Rs,'s')
```

其中，wp 为通带截止频率，单位为 rad/s；ws 为阻带截止频率，单位为 rad/s；Rp 为通带波动，单位为 dB；Rs 为阻带最小衰减，单位为 dB；'s'表示模拟滤波器（默认时该函数适用于数字滤波器，但 wp 和 ws 需归一化处理，保证取值为 0～1）；函数返回值 n 为模拟滤波器的最小阶数；wn 为模拟滤波器的截止频率（－3dB 频率），单位为 rad/s。该函数适用低通、高通、带通、带阻滤波器。

对于高通滤波器，wp＞ws。对于带通和带阻滤波器存在两个过渡带，wp 和 ws 均应为包含两个元素的向量，分别表示两个过渡带的边界频率，这时返回值 wn 也为两个元素的向量。

② 模拟低通原型函数。

```
[z,p,k] = buttap(n)/cheb1ap(n,Rp)/cheb2ap(n,Rs)/ellipap(n,Rp,Rs)
```

参数 z、p 和 k 分别为滤波器的零极点和增益，n 为滤波器的阶次。采用上述函数所得到的原型滤波器的传输函数为零极点和增益形式，需要和函数[b,a]＝zp2tf(z,p,k)配合使用，以转化为多项式形式。

（5）将模拟低通通过频率变换，转换成所需类型的模拟滤波器。

在 MATLAB 中，可利用的 lp2lp、lp2hp、lp2bp、lp2bs 等函数来实现。

低通到低通的频率变换[b1,a1]＝lp2lp(b,a,w0)，其中，w0 为低通滤波器的截止频率(rad/s)。

低通到高通的频率变换[b1,a1]＝lp2hp(b,a,w0)，其中，w0 为高通滤波器的截止频率(rad/s)。

低通到带通的频率变换[b1,a1]=lp2bp(b,a,w0,Bw),其中,w0 为带通滤波器的中心频率,Bw 为带通滤波器的带宽。当滤波器通带的下截止频率为 w1,上截止频率为 w2 时,w0=sqrt(w1 * w2),Bw=w2-w1。

低通到带阻的频率变换[b1,a1]=lp2bs(b,a,w0,Bw),其中,w0 为带阻滤波器的中心频率,Bw 为带阻滤波器的带宽。当滤波器通带的下截止频率为 w1,上截止频率为 w2 时,w0=sqrt(w1 * w2),Bw=w2-w1。

(6) 将所需类型的模拟滤波器转换成所需类型的数字滤波器。可利用 MATLAB 中的 impinvar、bilinear 函数实现。

需要说明的是,MATLAB 信号处理工具箱也提供了模拟滤波器设计的完全工具函数:butter、cheby1、cheby2、ellip、besself,用户只需一次调用就可完成以上第(3)~(5)步的设计工作,这样可以大大简化仿真的工作量。这些工具函数既适用于模拟滤波器设计,也适用于数字滤波器。

① 巴特沃思滤波器:

```
[b,a] = butter(n,wn,'ftype','s')
```

其中,n 为滤波器阶数;wn 为滤波器截止频率;'s'为模拟滤波器,缺省时为数字滤波器。'ftype'为滤波器类型:'high'表示高通滤波器,截止频率 wn;'stop'表示带阻滤波器,wn=[w1,w2](w1<w2);'ftype'缺省时表示为低通或带通滤波器。如是低通、高通滤波器时,wn 为截止频率;如是带通或带阻滤波器时,wn=[w1,w2](w1<w2)。b、a 分别为滤波器传输函数分子、分母多项式系数向量。滤波器传输函数具有下列形式:

$$H_{\mathrm{a}}(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_1 s^n+b_2 s^{n-1}+\cdots+b_{n+1}}{a_1 s^n+a_2 s^{n-1}+\cdots+a_{n+1}}$$

② 切比雪夫滤波器:

```
[b,a] = cheby1(n,Rp,wn,'ftype','s')或[b,a] = cheby2(n,Rs,wn,'ftype','s')
```

③ 椭圆滤波器:

```
[b,a] = ellip(n,Rp,Rs,wn,'ftype','s')
```

例 5-14 用双线性变换法设计一个切比雪夫Ⅰ型数字带通滤波器,设计指标为:$\alpha_{\mathrm{P}}=1\mathrm{dB}$,$\omega_{\mathrm{P1}}=0.4\pi$,$\omega_{\mathrm{P2}}=0.6\pi$,$\alpha_{\mathrm{s}}=40\mathrm{dB}$,$\omega_{\mathrm{s1}}=0.2\pi$,$\omega_{\mathrm{s2}}=0.8\pi$,$T=1\mathrm{ms}$。

解 根据以上实现步骤,MATLAB 程序如下。

```
% 确定所需类型数字滤波器的技术指标
Rp = 1;Rs = 40;T = 0.001;
wp1 = 0.4 * pi;wp2 = 0.6 * pi;ws1 = 0.2 * pi;ws2 = 0.8 * pi;
% 将所需类型数字滤波器的技术指标转换成模拟滤波器的技术指标
wp3 = (2/T) * tan(wp1/2);wp4 = (2/T) * tan(wp2/2);
ws3 = (2/T) * tan(ws1/2);ws4 = (2/T) * tan(ws2/2);
% 将所需类型模拟滤波器技术指标转换成模拟低通滤波器技术指标,设计模拟滤波器
wp = [wp3,wp4];ws = [ws3,ws4];
[n,wn] = cheb1ord(wp,ws,Rp,Rs,'s'); [z,p,k] = cheb1ap(n,Rp); [b,a] = zp2tf(z,p,k);
% 频率变换
w0 = sqrt(wp3 * wp4);Bw = wp4 - wp3;
[b1,a1] = lp2bp(b,a,w0,Bw);
% 双线性变换法
```

```
[bz,az] = bilinear(b1,a1,1/T);
[db,mag,pha,grd,w] = freqz_m(bz,az); plot(w/pi,db); axis([0,1,-50,2]);
```

程序运行结果如图 5-30 所示。

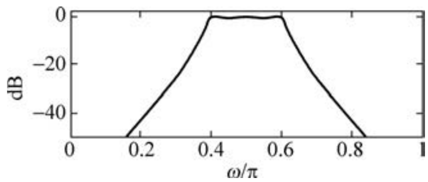


图 5-30　切比雪夫Ⅰ型数字带通滤波器幅频特性

对于第二种方法，由于其频率变换是在离散域内进行的，因而可以避免脉冲响应不变法由于频率响应混叠严重而不适合用于设计高通、带阻滤波器的限制。表 5-8 列出了数字低通到其他类型滤波器的频率变换关系式，进一步的讨论可参考文献[22]。

表 5-8　数字滤波器的频率变换

变换类型	变换关系 $z^{-1}=G(z^{-1})$	变换参数
低通→低通	$\dfrac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$	$a=\dfrac{\sin\dfrac{\omega_r-\omega_p}{2}}{\sin\dfrac{\omega_r+\omega_p}{2}}$ 其中 ω_r、ω_p 分别为低通原型滤波器和所需要设计的滤波器的通带截止频率
低通→高通	$-\dfrac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}}$	$a=-\dfrac{\cos\dfrac{\omega_p+\omega_r}{2}}{\cos\dfrac{\omega_p-\omega_r}{2}}$
低通→带通	$-\dfrac{z^{-2}-\dfrac{2ak}{k+1}z^{-1}+\dfrac{k-1}{k+1}}{\dfrac{k-1}{k+1}z^{-2}-\dfrac{2ak}{k+1}z^{-1}+1}$	$a=\dfrac{\cos\dfrac{\omega_{p2}+\omega_{p1}}{2}}{\cos\dfrac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2}},k=\tan\dfrac{\omega_r}{2}\cot\dfrac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2}$ 其中 ω_{p2}、ω_{p1} 分别为所需要设计的滤波器的通带上限、下限截止频率
低通→带阻	$\dfrac{z^{-2}-\dfrac{2ak}{1+k}z^{-1}+\dfrac{1-k}{1+k}}{\dfrac{1-k}{1+k}z^{-2}-\dfrac{2ak}{1+k}z^{-1}+1}$	$a=\dfrac{\cos\dfrac{\omega_{p2}+\omega_{p1}}{2}}{\cos\dfrac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2}},k=\tan\dfrac{\omega_r}{2}\tan\dfrac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2}$

通过频率变换可以实现不同类型滤波器之间的相互转换，方便了滤波器的设计，下面举一个例子说明。

例 5-15　假设某模拟滤波器 $H_a(s)$ 是一个高通滤波器，通过 $s=\dfrac{z+1}{z-1}$ 映射为数字滤波器 $H(z)$，求所得数字滤波器 $H(z)$ 为何种类型的通带滤波器。若 $H(z)$ 是一个低通滤波器，$H(-z)$ 又为何种类型的通带滤波器。

分析　滤波器的通带类型，一般通过选择一些特殊点进行近似判别。对于模拟滤波器

而言，$\Omega=0$(或 $s=0$)和 $\Omega=\infty$(或 $s=\infty$)是其两个特殊点。判断时，若 $H_a(0)>H_a(\infty)$，则为低通滤波器；反之，则为高通滤波器。若出现 $H_a(0)=H_a(\infty)$ 的情况，则还要判断 $H_a(0)$ 或 $H_a(\infty)$ 与 $H_a(\Omega_0)$ 的大小关系，Ω_0 为$[0,\infty]$中某一值，若 $H_a(0)<H_a(\Omega_0)$ 则为带通滤波器，反之则为带阻滤波器。

对于数字滤波器，$\omega=0$(或 $z=1$)和 $\omega=\pi$(或 $z=-1$)则是其两个特殊点。为了判断数字滤波器是低通还是高通，只需比较 $H(e^{j\omega})$ 在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 两点处值的大小。而带通和带阻滤波器则还要比较与 ω_0 取$[0,\pi]$中某一值时 $H(e^{j\omega})$ 的大小。

解 (1) 模拟滤波器为高通，通带中心在 $\Omega=\infty$ 处。由于频率变换时，只是频率进行映射，而幅度的相对关系不发生变化，因此只要找到 ω 与 Ω 的关系，就可得到数字滤波器的通带中心。

由题意，s 与 z 的关系为

$$s=\frac{z+1}{z-1}$$

取 $s=j\Omega$，$z=e^{j\omega}$，得

$$j\Omega=\frac{e^{j\omega}+1}{e^{j\omega}-1}\Rightarrow e^{j\omega}=\frac{j\Omega+1}{j\Omega-1}$$

当 $\Omega=0$ 时，$\omega=\pi$；当 $\Omega=\infty$ 时，$\omega=0$。变换将模拟高通中心频率 $\Omega=\infty$ 映射到 $\omega=0$ 处，而数字低通滤波器的通带在 $\omega=0$，故数字滤波器为低通滤波器。

(2) $H(z)$是一个低通滤波器，因而通带位于 $z=1$。通过 $z_1=-z$ 所得到的滤波器 $H(-z)$，其通带位于 $z_1=-1$，故 $H(-z)$为高通滤波器。

5.6.2 IIR 滤波器的应用实例——人体脉象分析预处理

人体生物信号种类繁多，包括电生理信号，如心电信号、脑电信号、肌电信号；非电生理信号，如心音、脉搏、颈动脉搏动、呼吸、鼾声等；生理特征信号，如指纹、掌形、面部、虹膜、步态等；其他信号，如医院化验得到的生化信息、DNA 基因信息、超声等医学图像信息等。其中，脉搏是中医人体脉象分析的基础。中医是我国传统文化的瑰宝，在我国中医理论中，一直有候脉诊病的做法，其理论依据为心脏搏动是形成脉象的动力，气血是形成脉象的物质基础，脉象反映了整个机体的植物神经和内分泌系统的机能状态，通过研究脉象与心、脉、气、血的关系，形成了通过脉象诊断人体健康的一整套中医理论。我国正在推进“面向 2035 人工智能在中医药领域的应用战略研究”，在互联网医疗模式下，借助于新开发的健康腕表、智能脉诊仪等智能医疗器械，将实时采集的患者脉搏波、心率值、心电波和血压值等体质数据实时传送给云诊断平台，再利用高精度诊断算法给出初步诊断结果。

人体脉象信号的采集可以利用压力传感器或光电脉搏波传感器完成。人体脉搏波信号是典型的时间序列，具有准周期性。图 5-31(a)和图 5-31(b)所示为采集到的脉搏波信号及其频谱图，采样频率 $f_s=200\text{Hz}$。脉搏波信号在采集过程中，容易受到诸如工频、肌电等人体和外部因素的干扰，对后续脉搏波信号的分析产生较大影响。为了减少干扰信号的影响，需要对采集到的原始信号进行预处理，这就用到了本章介绍的方法。由于脉搏波信号频率主要限定在 10Hz 之内，为此可设计一个五阶巴特沃思低通滤波器完成信号的滤波，截止频率设置为 10Hz。图 5-31(c)～图 5-31(e)显示了利用脉冲响应不变法设计的巴特沃思低通

滤波器的幅频响应及滤波后的脉搏波信号及其频谱。

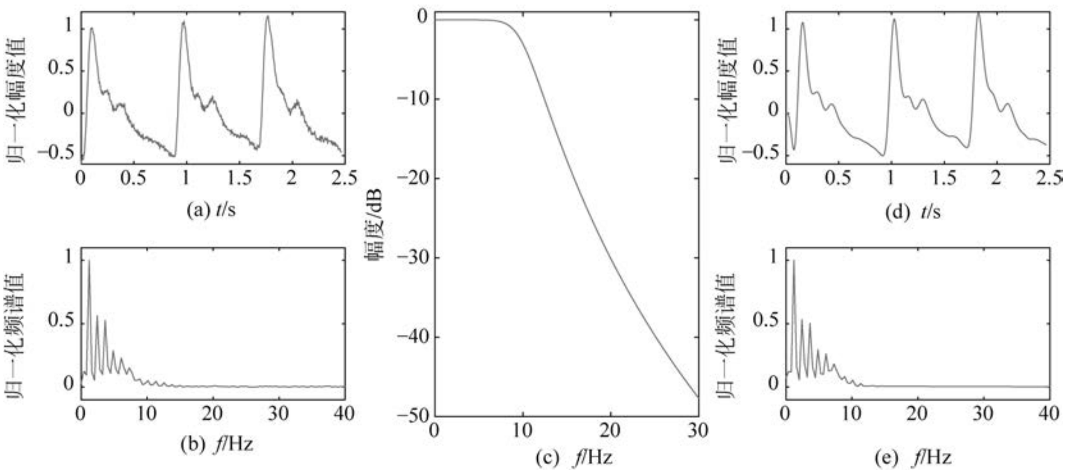


图 5-31 五阶巴特沃思低通滤波器幅频响应及滤波前后脉搏波信号及其频谱

根据中医理论,一个完整的脉搏波包括一个上升支、一个下降支及 5 个特征点(始射点、主波峰值点、潮波峰值点、降中峡谷点和重搏波峰值点),根据这些关键点再结合脉搏周期等参数即可获得脉搏波信号的时域特征,从而可以分为浮、沉、迟、数、滑、涩等 28 种脉象。后续还可进一步利用信号处理方法提取脉搏波频域或时域特征,如功率谱、倒谱、小波系数或经验模态分解系数等,即可利用人工智能方法,如支持向量机、深度神经网络等完成对脉搏波的分类与识别。目前,基于多模态的生物医学信号处理是当前研究的热点。学习完第 6 章内容,大家还可以尝试设计 FIR 滤波器完成对脉搏波信号的预处理。对其他人体生物信号处理的方法类似。

5.7 IIR 数字滤波器的直接设计法

前面介绍的 IIR 数字滤波器设计方法是通过先设计模拟滤波器,再进行 s 平面到 z 平面的映射达到设计数字滤波器的目的。这种设计方法实际上是数字滤波器的一种间接设计方法,而且幅频特性受到所选模拟滤波器特性的限制。对于要求任意幅度特性的滤波器,则不适合采用这种方法。本节介绍在数字域直接设计 IIR 数字滤波器的设计方法,这种算法需要借助于最优化设计理论和迭代算法逼近所需的滤波器。首先初始化一个系统函数,然后计算该滤波器的幅频响应,并与要求的滤波器的幅频响应进行数学上的比较,当出现失配时,调整滤波器的系数值并重新计算,直到找到满足要求的滤波器幅频响应的系统函数为止。

由于这种逼近所需滤波器的方法常常需要解线性的或非线性的联立方程组,需要计算机完成大量的计算工作,所以也称为数字滤波器的计算机辅助设计。采用计算机辅助设计技术逼近任意频率响应特性,可以有多种方法,例如零极点累试法、最小平方逆滤波法、最小均方误差法、最小 p 误差法和线性规划法等。本节只介绍零极点累试法和最小均方误差法。在下面的讨论中,我们只限于导出各种方法的设计方程的公式,而不去讨论数值计算的细节。

5.7.1　零极点累试法

在第 2 章中讲到了系统函数的零极点分布对系统频率响应的影响，通过前面的分析可以看到：系统极点位置主要影响系统幅频响应的峰值位置及尖锐程度，零点主要影响频率响应的谷值位置及下凹程度，通过零极点位置可以定性地确定系统的幅频响应。

基于上述理论提出了一种直接设计 IIR 数字滤波器的方法，这种设计方法是根据滤波器的幅频响应先确定零极点位置，再按照确定的零极点位置写出系统函数，画出幅频特性曲线，并与希望得到的 IIR 数字滤波器进行比较，如果不满足要求，可以通过移动零极点位置或增减零极点数量进行修正。这种修正是多次的，因此称为零极点累试法。零极点位置并不是随意确定的，需要注意以下几点：

(1) 极点必须位于 z 平面单位圆内，以保证数字滤波器的因果稳定性。

(2) 零极点若为复数必须共轭成对，以保证系统函数为 z 的有理分式。

下面通过一个例子，说明零极点累试法的实现过程。

例 5-16　设计一个数字带通滤波器，通带中心频率 $\omega_0=\pi/2\text{rad}$，当 $\omega=\pi$ 和 $\omega=0$ 时，幅度衰减到 0。

解　根据题意确定零极点位置。

设极点为 $z_{1,2}=r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\pi/2}$，零点为 $z_{3,4}=\pm 1$，零极点分布图如图 5-32(a)所示。数字带通滤波器的系统函数为

$$H(z)=A\,\frac{(z-1)(z+1)}{(z-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2})(z-r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2})}$$

上式中 A 为待定系数，如果要求在 $\omega=\pi/2\text{rad}$ 处，幅度为 1，即 $\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|_{\omega=\pi/2}=1$，则 $A=(1-r^2)/2$。

取 $r=0.6$，$r=0.9$，分别画出数字带通滤波器的幅频响应，如图 5-32(b)所示。从图中可以看出，极点越靠近单位圆(r 约接近 1)，带通特性越尖锐。

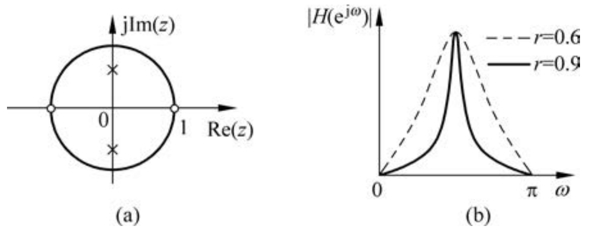


图 5-32　零极点累试法设计 IIR 数字滤波器

5.7.2　最小均方误差法

滤波器设计的目的是要使所得到的数字滤波器的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 尽可能地逼近所要求的频率响应 $H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，使它们之间的误差最小。为了表示它们之间的差别，就需要规定一种误差判别准则。最小均方误差准则是使用较多的一种，它是施泰利兹(K. Steiglitz)于 1970 年提出的。

已知在一组离散频率点 ω_i $(i=1,2,\cdots,N)$ 上所要求的频率响应 $H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的值为

$H_d(e^{j\omega_i})$，假定实际求出的频率响应为 $H(e^{j\omega})$，那么，在这些给定离散频率点上，所要求的频率响应的幅值与求出的实际频率响应幅值的均方误差为

$$E=\sum_{i=1}^{N}[\,|H(e^{j\omega_i})|-|H_d(e^{j\omega_i})|\,]^2 \tag{5-96}$$

设计的目的是调整各 $H(e^{j\omega_i})$，即调整 $H(e^{j\omega})$ 的系数，使 E 为最小，这样得到的 $H(e^{j\omega})$ 作为 $H_d(e^{j\omega_i})$ 的逼近值。

实际滤波器 $H(e^{j\omega})$ 常采用二阶的级联形式表示，因为这种结构的频率响应对系数变化的灵敏度低（这使系数量化造成的误差减小），便于调整频率响应，而且在最优化过程中计算导数较为方便。设

$$H(z)=A\prod_{i=1}^{M}\frac{1+a_iz^{-1}+b_iz^{-2}}{1+c_iz^{-1}+d_iz^{-2}}=AG(z) \tag{5-97}$$

将从式(5-97)得到的 $H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$ 代入式(5-96)，可以看出，均方误差 E 是 $a_i,b_i,c_i,d_i(i=1,2,\cdots,M)$ 及 A 的函数，所以 E 是 $4M+1$ 个未知参量的函数。

将这 $4M+1$ 个参量用矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 表示为

$$\boldsymbol{\theta}=[a_1,b_1,c_1,d_1,\cdots,a_M,b_M,c_M,d_M,A] \tag{5-98}$$

则均方误差 E 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数，记为 $E(\boldsymbol{\theta})$。设计的目的就是要找到 $\boldsymbol{\theta}$ 的最优值 $\boldsymbol{\theta}^*$，使均方误差为最小，即 $E(\boldsymbol{\theta}^*)\leqslant E(\boldsymbol{\theta})$，这就是最小均方误差准则。此准则追求的目标是使总的逼近误差为最小，但不排除在个别频率点上有较大的误差，特别是在滤波器的过渡带附近。采用此准则的优点是有较成熟的数学解法。

一般来说，求误差函数 $E(\boldsymbol{\theta})$ 的最小值，可令它的各一阶偏导数为0，即

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{\theta})}{\partial|A|}=0,\quad \frac{\partial E(\boldsymbol{\theta})}{\partial a_i}=0,\quad \frac{\partial E(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_i}=0,\quad \frac{\partial E(\boldsymbol{\theta})}{\partial c_i}=0,\quad \frac{\partial E(\boldsymbol{\theta})}{\partial d_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,M \tag{5-99}$$

利用计算机就可以解出这 $4M+1$ 个系数，把系数值代入式(5-97)，即可求得所设计的 $H(z)$。

理论上，解 $4M+1$ 个方程组成的方程组，可求得 $4M+1$ 个未知数，这就是 $\boldsymbol{\theta}^*$。但实际求解起来很困难，一般不直接求解，而采用迭代的方法，其中弗莱切·鲍威尔（Fletcher Powell）的优化算法是效率比较高的一种算法，它是以最陡下降法的线性搜索为主的一种混合型算法。

最优化过程比较烦琐，这里只介绍大概的思路。它是在得到滤波器的理想特性与实际特性之间的误差函数后，找到使误差函数最小的自变量的一组数据。选定这组数据为滤波器系统函数的各系数或零极点，这样就得到了所求的数字滤波器的系统函数。寻找一组最佳参数使误差函数最小的过程即为最优化过程，其方法即为最优化算法。

令 $Q(\boldsymbol{X})$ 表示误差函数，$\boldsymbol{X}$ 是它的自变量向量，设

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_N],\quad N\text{ 为正整数}$$

$x_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是待求的一组参数。首先设定 $\boldsymbol{X}$ 的初值 $\boldsymbol{X}(0)$，然后按一定方向寻找 $\boldsymbol{X}$ 的下一个值 $\boldsymbol{X}(i)$，使 $Q(\boldsymbol{X})$ 的值以较快的速度下降。每找到一个 $\boldsymbol{X}(i)$，都需要计算 $Q(\boldsymbol{X}(i))$ 和梯度

$$\nabla Q = \left[\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial Q}{\partial x_N}\right] \tag{5-100}$$

当 $Q(\boldsymbol{X}(i))$下降到一定程度，以至于使

$$|Q(\boldsymbol{X}(i))| - |Q(\boldsymbol{X}(i-1))| < \varepsilon \tag{5-101}$$

且

$$|\nabla Q| < \varepsilon \tag{5-102}$$

时，认为此时 $\boldsymbol{X}(i)$即为所寻求的最佳参数。整个过程必须借助于计算机，采用迭代方法完成。

应当指出，这种最小化方法只涉及幅度函数。由于并未对传输函数的零极点作任何限制，最优化算法的结果，得到的参量值可能相当于一个不稳定的滤波器，也就是可能有位于单位圆外的极点 p_i。此时，可级联一个全通网络将单位圆外的极点反射到单位圆内镜像位置上(用 $1/p_i$ 来代替 p_i)。这样处理后不会影响幅频特性的形状，但整个级联后的系统却变成了一个稳定的滤波器。

将所有单位圆外的极点反射到单位圆内后，可再次运行此最优化程序，直到达到一个新的最小点为止。如果要求滤波器是最小相位的，可以把单位圆外的零点反射到单位圆内。

需要注意，上面所说的 ω_i 值可以是均匀分布的，也可以不是均匀分布的。这样，设计起来就比较灵活，可视情况决定不同滤波区域抽样点的间隔。

5.8 IIR 数字滤波器的相位均衡

设计 IIR 数字滤波器时，只考虑了幅频特性，没有考虑相位特性。因此，所设计的 IIR 数字滤波器的相位特性一般都是非线性的。为了补偿这种相位失真，必须给滤波器级联一个时延均衡器，也就是说要对 IIR 数字滤波器进行相位均衡。

5.8.1 全通滤波器的群时延特性

全通滤波器的幅频特性对所有频率均为常数或 1，而其相位特性却随频率变化而变化，即

$$H_{\mathrm{ap}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = |H_{\mathrm{ap}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{5-103}$$

式(5-103)表明，信号通过全通滤波器后，幅度谱不发生变化，仅相位谱发生变化，形成纯相位滤波。因此，全通滤波器是一种纯相位滤波器，经常用于相位均衡，以使系统的群延时特性保持为一个常数，故又称为时延均衡器。

全通滤波器的系统函数可以写成如下形式：

$$H_{\mathrm{ap}}(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - z_k^*}{1 - z_k z^{-1}} \tag{5-104}$$

显然，极点 z_k 与零点 $1/z_k^*$ 互为共轭倒数关系。

全通滤波器的频率响应可以表示为

$$H_{\mathrm{ap}}(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - z_k^*}{1 - z_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} \tag{5-105}$$

对于一个因果稳定的全通系统来说，其极点全部位于单位圆内部。

对于 $z_k = re^{j\theta}$ 的一阶全通滤波器，由式(5-105)可求出相位函数为

$$\varphi_1(\omega) = \arg \frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} = -\omega - 2\arctan \frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)} \tag{5-106}$$

于是可得出此一阶全通系统的群时延特性为

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \mathrm{grd}\, \frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2} \tag{5-107}$$

图 5-33 显示了 $z_k = 0.9(\theta = 0, r = 0.9)$ 和 $z_k = -0.9(\theta = \pi, r = 0.9)$ 两种情况下一阶全通系统的相位、群时延特性曲线。由图可以看出，由于 $r < 1$，因果全通系统的相位在 $0 < \omega < \pi$ 内总是非正的，而对群时延的贡献总是正的。由于高阶全通滤波器的群时延就是如式(5-107)的一些正的项之和，所以一个系统函数为有理函数的全通滤波器的群时延总是正的。

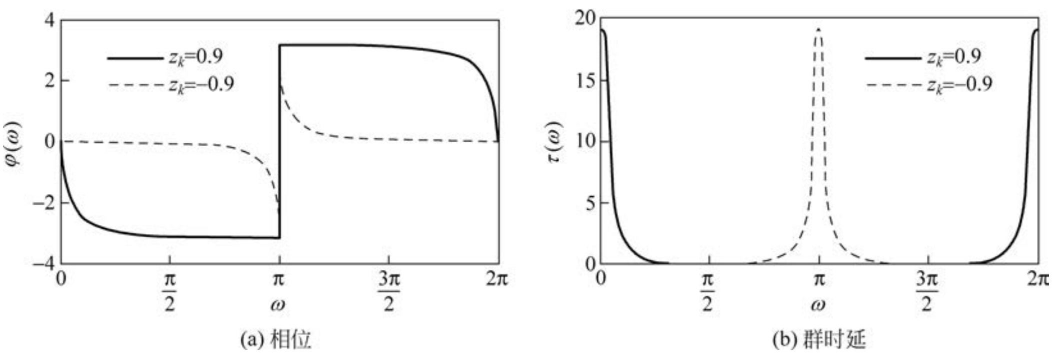


图 5-33　一阶全通系统的频率响应(相位和群时延)

全通滤波器有很多用途，除可用作相位(或群时延)失真的补偿之外，还可用于最小相位系统，以及用于把数字低通滤波器变换到其他类型的滤波器的频率变换中等。

5.8.2　IIR 数字滤波器的群时延均衡

为了补偿 IIR 数字滤波器产生的相位非线性失真，需在其后面接入一个均衡器进行相位均衡，使其群时延特性得到改善。设 $H_c(z)$ 为一个待补偿的 IIR 滤波器的系统函数，$H_{ap}(z)$ 为所要设计的群时延均衡器(全通滤波器)的系统函数，两者连接的框图如图 5-34 所示。

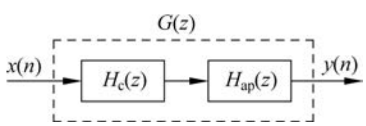


图 5-34　利用全通滤波器进行失真补偿的框图

由图可知，接入群时延均衡器后整个系统的频率响应为

$$G(e^{j\omega}) = H_c(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega}) \tag{5-108}$$

由于 $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$，所以 $|G(e^{j\omega})| = |H_c(e^{j\omega})|$。

均衡后整个系统总的群时延为

$$\mathrm{grd}[G(e^{j\omega})] = \mathrm{grd}[H_c(e^{j\omega})] + \mathrm{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \tag{5-109}$$

理想的情况是，均衡后整个系统总的群时延为 0，此时有

$$\tau_d(\omega) = \mathrm{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] = -\mathrm{grd}[H_c(e^{j\omega})] \tag{5-110}$$

其中，$\tau_d(\omega)$为所设计均衡器的群时延。一般来说，可使均衡后整个系统总的群时延为一个常数，设 $\mathrm{grd}[G(e^{j\omega})]=\tau$，$\mathrm{grd}[H_c(e^{j\omega})]=\tau_c(\omega)$，则群时延均衡器应有的时延特性为

$$\tau_d(\omega)=\tau-\tau_c(\omega) \tag{5-111}$$

$\tau_d(\omega)$就是希望设计的群时延均衡器的群时延特性。假设实际设计的群时延均衡器的群时延为$\tau(\omega)$，利用最小 p 误差法可得到所设计的群时延均衡器的误差函数为

$$E=\sum_{i=1}^{N}W(\omega_i)[\tau(\omega_i)-\tau_d(\omega_i)]^p \tag{5-112}$$

若取 $p=2$，则 E 为均方误差函数。有了误差函数，就可以用相应的计算机辅助优化设计的方法进行群时延均衡器的最佳设计了。

本章小结

本章主要介绍了数字滤波器的基本概念、模拟滤波器的设计过程、利用模拟滤波器的理论设计 IIR 数字滤波器的方法，以及 IIR 数字滤波器的直接设计方法等，其主要内容包括以下几个方面：

(1) 数字滤波器是一个时域离散系统，按其单位脉冲响应$h(n)$的长短可分为 IIR 滤波器和 FIR 滤波器；按频率响应的通带特性分为低通、高通、带通、带阻和全通滤波器。数字滤波器的频率响应以 2π 为周期，所以低频在 ω 为 $0,2\pi,4\pi,\cdots$附近，高频在 ω 为 $\pi,3\pi,5\pi,\cdots$附近。

数字滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$一般为复函数，表示为 $H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$。对 IIR 滤波器，重点讨论幅频响应，其相频响应一般为非线性相位。其主要指标包括通带截止频率 ω_p、阻带截止频率 ω_s、通带最大衰减 α_p 及阻带最小衰减 α_s。

IIR 滤波器是利用模拟滤波器理论设计的数字滤波器，就是由模拟低通原型滤波器的传输函数 $H_a(s)$求出相应的数字低通原型滤波器的系统函数 $H(z)$。转换方法的优劣主要从稳定性和逼近程度来考察，工程上常用的转换方法有脉冲响应不变法和双线性变换法。

(2) 模拟滤波器是 IIR 滤波器设计的基础。模拟滤波器的技术指标与数字滤波器类似。在设计模拟滤波器时，先将待设计的模拟滤波器技术指标转换为模拟低通原型滤波器技术指标，然后设计模拟低通原型滤波器，再通过频率变换(原型变换)将模拟低通滤波器转换为所需的滤波器。

常用模拟滤波器有巴特沃思滤波器、切比雪夫滤波器、椭圆滤波器等。巴特沃思滤波器的特点是通带和阻带内都具有平坦的幅度特性。切比雪夫滤波器的幅频特性在通带(Ⅰ型)或阻带(Ⅱ型)内具有等波纹特性。椭圆滤波器在通带和阻带内都具有等波纹幅频特性。

滤波器的阶数通常定义为传输函数的极点数，就同一滤波器而言，以上三种滤波器总是阶数越高，过渡带越窄，曲线越陡。三种滤波器之间比较，如果对过渡带的要求相同，则选用椭圆滤波器所需要的阶数最低，切比雪夫滤波器次之，巴特沃思滤波器最高。若从设计的复杂性和参数的灵敏度来看，情况正好相反。

(3) 脉冲响应不变法是从时域出发，使 $h(n)$等于 $h_a(t)$的采样值，由于实现了时域采样，因而时域逼近良好，但数字滤波器的频谱为模拟滤波器频谱的周期延拓，所以存在频谱

混叠效应。当 $H_a(s)$ 只有单阶极点 $H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$ 时，变换后数字滤波器 $H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$。

s 平面与 z 平面的映射关系为 $z=e^{sT}$。由于 s 平面到 z 平面的非单值映射关系，s 平面上每一条宽为 $2\pi/T$ 的横带，都将重复地映射到整个 z 平面上。所以，当模拟滤波器的最高频率高于 $\Omega_s=\pi/T_s$ 时，便会产生频率混叠现象。

这种变换方法的优点是时域逼近良好和模拟频率与数字频率之间呈线性关系，即 $\omega=\Omega T$，缺点是会产生频率混叠现象，只适用于带限模拟滤波器的设计，如低通、带通滤波器。

(4) 双线性变换法由于采用了非线性压缩，从而实现 s 平面到 z 平面的单值映射，模拟滤波器和数字滤波器的映射关系为 $H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$。其优点是不会产生频率混叠现象，适用具有分段常数频率特性的任意滤波器的设计，缺点是模拟频率与数字频率是非线性关系，即 $\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$。

双线性变换法所得的数字频率响应将产生"畸变"，可以采用"预畸变"的方法来补偿。"预畸变"就是将临界模拟频率事先加以畸变，然后经变换后正好映射到所需要的数字频率上。具体做法为：先由 Ω_p 按线性变换关系求出 $\omega_p(\omega=\Omega T)$，再代入式 $\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$，求出 $\Omega_p'=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p T}{2}$。这在利用双线性变换法设计数字滤波器时一定要注意！

(5) 非低通滤波器的设计方法可通过频率变换实现，具体方法为：①确定所需类型数字滤波器的技术指标；②将所需类型数字滤波器的技术指标转换成模拟滤波器的技术指标；③由频率变换将所需类型模拟滤波器技术指标转换成模拟低通原型滤波器指标；④设计模拟低通原型滤波器；⑤将模拟低通原型通过频率变换，转换成所需类型的模拟滤波器；⑥选择合适的变换方法(脉冲响应不变法或双线性变换法)，将 $H_a(s)$ 映射为 $H(z)$。

(6) 脉冲响应不变法和双线性变换均属于数字滤波器的一种间接设计方法，幅频特性受到所选模拟滤波器特性的限制。对于要求任意幅度特性的滤波器，可采用在数字域直接设计 IIR 滤波器的方法，这种算法需要借助于最优化设计理论和迭代算法来逼近所需的滤波器。常用方法包括零极点累试法、最小平方逆滤波法、最小均方误差法、最小 p 误差法和线性规划法等。

(7) IIR 数字滤波器的设计，由于只考虑了幅频特性，没有考虑相位特性。因此，所设计的 IIR 数字滤波器的相位特性一般都是非线性的。为了补偿这种相位失真，可以给滤波器级联一个时延均衡器，常用均衡器为全通滤波器。

习题

5-1 设 $H_a(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}$，试用脉冲响应不变法和双线性变换法将其转换为数字滤

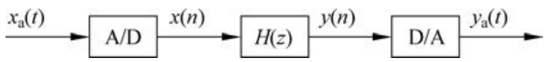
波器，采样周期 $T=2\text{s}$。

5-2　设 $h_a(t)$表示一模拟滤波器的单位冲激响应

$$h_a(t)=\begin{cases}e^{-0.9t}, & t \geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

用脉冲响应不变法，将此模拟滤波器转换成数字滤波器。确定系统函数 $H(z)$，并把 T 作为参数，证明：T 为任何值时，数字滤波器都是稳定的，并说明数字滤波器近似为低通滤波器还是高通滤波器。

5-3　一个采样数字处理低通滤波器如图题 5-3 所示，$H(z)$的截止频率 $\omega_c=0.2\pi$，整个系统相当于一个模拟低通滤波器，令采样频率 $f_s=1\text{kHz}$，问等效于模拟低通的截止频率 f_c 为多少？若采样频率 f_s 分别改变为 5kHz、200Hz，而 $H(z)$不变，问这时等效于模拟低通的截止频率又各为多少？



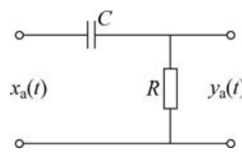
图题　5-3

5-4　图题 5-4 所示是由 RC 组成的模拟滤波器。

(1) 写出传输函数 $H_a(s)$，判断并说明是低通还是高通滤波器；

(2) 选用一种合适的转换方法将 $H_a(s)$转换成数字滤波器 $H(z)$，设采样周期为 T；

(3) 比较脉冲响应不变法和双线性变换法的优缺点。



图题　5-4

5-5　某数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{2}{1-0.5z^{-1}}-\frac{1}{1-0.25z^{-1}}$$

如果该滤波器是用双线性变换法设计得到的，且 $T=2\text{s}$，求可以作为原型的模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$。

5-6　一个二阶连续时间滤波器的系统函数为 $H_a(s)=\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b}$，其中，$a<0$，$b<0$ 都是实数。用脉冲响应不变法将模拟滤波器 $H_a(s)$变换为数字滤波器 $H(z)$，抽样周期 $T=2\text{s}$，并确定 $H(z)$的极点和零点位置。

5-7　用脉冲响应不变法设计一个数字低通滤波器，已知模拟低通原型滤波器传输函数为 $H_a(s)=\dfrac{2}{s^2+3s+2}$，模拟截止频率 $f_c=1\text{kHz}$，采样频率 $f_s=4\text{kHz}$。

(1) 求数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$。

(2) 该数字滤波器的截止频率为多少？

(3) 一个以 2kHz 频率采样的输入信号通过该数字滤波器后，输出信号的最大频率范围为多少？

(4) 若保持 $H(z)$不变，采样频率 f_s 提高到原来的 4 倍，则该低通滤波器截止频率有什么变化？

5-8　某二阶模拟低通滤波器的传输函数为 $H_a(s)=\dfrac{\Omega_c^2}{s^2+\sqrt{3}\Omega_c s+3\Omega_c^2}$，试用双线性变换法设计一个数字低通滤波器，其 3dB 截止频率 $f_c=1\text{kHz}$，采样频率 $f_s=4\text{kHz}$，写出数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$。

5-9　用双线性变换法设计一个三阶巴特沃思高通数字滤波器（要求预畸变），采样频率 $f_s=6\text{kHz}$，3dB 截止频率为 1.5kHz，已知三阶巴特沃思滤波器的归一化低通原型滤波器传输函数为 $H_a(s)=\dfrac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$，求高通滤波器的系统函数 $H(z)$。

5-10　用脉冲响应不变法设计一个数字低通滤波器，已知模拟低通原型滤波器传输函数为 $H_a(s)=\dfrac{2}{s^2+3s+2}$，模拟截止频率 $f_c=1\text{kHz}$，采样频率 $f_s=4\text{kHz}$。

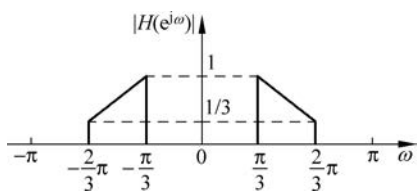
（1）求数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$。

（2）如果采用双线性变换法设计该数字低通滤波器，求预畸变后的模拟低通截止频率 Ω_c'。

5-11　用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器时，为什么要“预畸变”？如何“预畸变”？

5-12　试从以下几个方面比较脉冲响应不变法和双线性变换法的特点：基本思路，如何从 s 平面映射到 z 平面，频率变换的线性关系。

5-13　给定滤波器参数 f_p、f_s、α_p、α_s、T（分别表示通带截止频率、阻带截止频率、通带最大衰减、阻带最小衰减、采样周期），说明采用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的步骤（假设滤波器的阶数 N，各种归一化模拟原型 LPF 的传输函数 $H_a(s)$ 都可以查表得到）。



图题　5-14

5-14　图题 5-14 所示为一个数字滤波器的频率响应。

（1）当采用脉冲响应不变法时，求模拟原型滤波器的频率响应。

（2）当采用双线性变换法时，求模拟原型滤波器的频率响应。

5-15　假设某模拟滤波器 $H_a(s)$ 是一个低通滤波器，又知 $H(z)=H_a(s)\big|_{s=\frac{z+1}{z-1}}$，数字滤波器 $H(z)$ 的通带中心位于下面哪种情况？并说明原因。

（1）$\omega=0$（低通）。

（2）$\omega=\pi$（高通）。

（3）除 0 或 π 以外的某一频率（带通）。

5-16　系统函数为 $H(z)$，单位脉冲响应为 $h(n)$ 的一个数字滤波器的频率响应

$$H(e^{j\theta})=\begin{cases}A, & |\theta|\leqslant\theta_c\\ 0, & \theta_c<|\theta|\leqslant\pi\end{cases}$$

其中，$0<\theta_c<\pi$，通过变换 $z=-z_1^2$，将这个滤波器变换成一个新滤波器，即

$$H_1(z_1)=H(z)\big|_{z=-z_1^2}$$

（1）求原低通滤波器 $H(z)$ 的频率变量 θ 与新滤波器 $H_1(z_1)$ 的频率变量 ω 之间的关系式。

(2) 画出新滤波器的频率响应 $H_1(e^{j\omega})$，并判断这是哪一种通带滤波器。

(3) 写出用 $h(n)$表示 $h_1(n)$的表达式。

5-17　在利用脉冲响应不变法和双线性变换法将一个模拟滤波器变换为数字滤波器时，针对下面列出的几种情况，试分析采用哪一种(或两种)变换方法可以得出要求的结果。

(1) 最小相位模拟滤波器(所有极点和零点均在 s 左半平面上)变换为最小相位数字滤波器。

(2) 模拟全通滤波器(极点在左半平面 $-s_i$ 处，而零点在对应的右半平面 s_i 处)变换为数字全通滤波器。

(3) $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0}=H_a(j\Omega)\big|_{\Omega=0}$。

(4) 模拟带阻滤波器变换为数字带阻滤波器。

(5) 设 $H_1(z)$、$H_2(z)$和 $H(z)$分别由 $H_{a1}(s)$、$H_{a2}(s)$和 $H_a(s)$变换得到，若 $H_a(s)=H_{a1}(s)H_{a2}(s)$，则 $H(z)=H_1(z)H_2(z)$。

(6) 设 $H_1(z)$、$H_2(z)$和 $H(z)$分别由 $H_{a1}(s)$、$H_{a2}(s)$和 $H_a(s)$变换得到，若 $H_a(s)=H_{a1}(s)+H_{a2}(s)$，则 $H(z)=H_1(z)+H_2(z)$。

5-18　已知某数字滤波器的系统函数为 $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$：

(1) 画出系统的频率响应，并分析这一系统是哪一种通带滤波器？

(2) 在上述系统中，用下列差分方程表示的网络代替它的 z^{-1} 延时单元：

$$y(n)=x(n-1)-\frac{1}{2}x(n)+\frac{1}{2}y(n-1)$$

试问变换后的数字滤波器又是哪一种通带滤波器？为什么？

5-19　已知模拟滤波器的幅度平方函数为 $|H_a(j\Omega)|^2=\dfrac{4}{6+5\Omega^2+\Omega^4}$，求 $H_a(s)$，画出它的零极点分布图，并用脉冲响应不变法将其转换为数字滤波器(已知 $T=10^{-4}$s)。

5-20　用双线性变换法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，截止频率为 $f_c=1$kHz，采样频率 $f_s=25$kHz，在 12kHz 处阻带衰减为-30dB。求其差分方程，并画出滤波器的幅频响应。

5-21　用脉冲响应不变法设计一个三阶巴特沃思数字低通滤波器，截止频率为 $f_c=1$kHz，设采样频率 $f_s=6.283$kHz。

5-22　用双线性变换法设计一个三阶切比雪夫数字高通滤波器，采样频率为 $f_s=8$kHz，截止频率为 $f_c=2$kHz，通带波动 3dB。

5-23　用双线性变换法设计一个满足下面指标要求的数字带阻巴特沃思滤波器：通带上下边带各为 0～95Hz 和 105～500Hz，通带波动为 3dB，阻带为 99～101Hz，阻带衰减为 20dB，取样频率为 1kHz。