

第 1 章

微积分的简史

- 1-1 前言
- 1-2 微积分简要说明
- 1-3 微积分的教学顺序
- 1-4 积分的历史
- 1-5 微积分的历史
- 1-6 微积分发明人的世纪之争

1-1 前言

在同系列图书《机器学习数学基础一本通（Python 版）》中，笔者介绍了函数、向量、矩阵、指数、对数、线性回归、逻辑函数、概率等数学概念。在本书中，笔者将介绍与机器学习有关的微积分与进阶数学。有了这两本书的数学基础知识，相信对于建立机器学习的数学理论可以更加完备，未来再使用 Python 语言搭配机器学习的模块，例如 TensorFlow、Keras 或 scikit-learn，读者除了会使用相关函数，还因为已经了解数学理论而可以更深入地理解函数的精神与内涵，为未来设计机器学习相关应用奠定良好的基础。

1-2 微积分简要说明

微积分是理工与经济类学科一年级的基础课程，在许多理学院、工学院或商学院的研究生入学考试中，微积分是必考科目。

在学期间的考试或研究生入学的考试，目的是要测出同学们对知识掌握的差异程度，所以部分考题有一点难度，使许多学生一开始就觉得微积分是一门很难的学科。书籍的目的是为读者解惑，本书笔者将以图解与程序实例详细解说，期待读者可以用最轻松的方式学会与机器学习有关的微积分知识。

简单地说，微积分最基本的概念如下。

微分：计算瞬间的变化量。

积分：计算总和。

类似乘法与除法，微分和积分彼此是互为逆运算的关系，一般均用合并方式研究与解说，所以称为微积分。

1-3 微积分的教学顺序

一般微积分教科书的学习顺序是从微分开始，而微分又是从极限开始，这是因为微分的计算从极限的观念而来，所以从极限开始，可以提高教学效率。



1-4 积分的历史

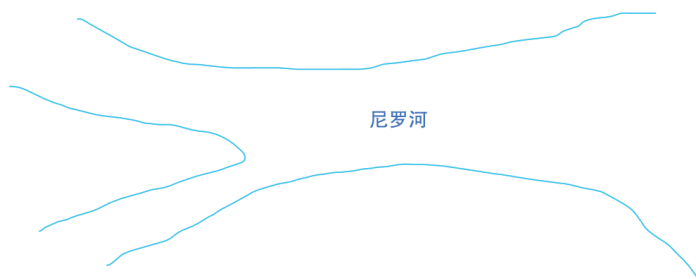
学术发展的起源是因为在不同阶段有不同需要，事实上在微积分的历史中，是先有积分，后有微分。



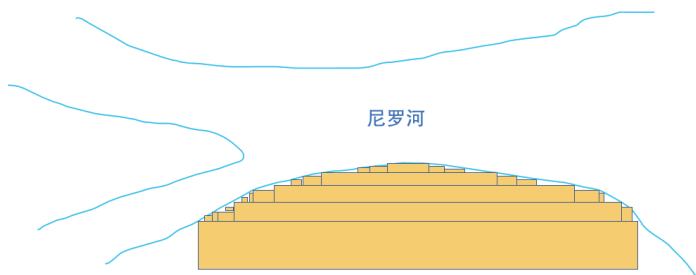
在古代数学的发展中，从工作需求出发，逐步推导，最后有了积分学。

1-4-1 古埃及

3000多年前的古埃及，雨水虽然孕育了沙漠的绿洲，但雨下得太大也会让尼罗河泛滥成灾，往往造成土地样貌的改变，此时需要对土地重新测量与规划，为了测量尼罗河河道改变产生的弯弯曲曲的土地，人们发明了类似积分的概念。



为了测量河道边土地的面积，人们使用绳子测量长度，先测量刚好大小的长方形，再测量较小的区块，整个概念如下图所示。



上述方法在数学上称为**穷尽法**（Method of Exhaustion），其实这个方法就是用无穷无尽的逼近去计算结果，如果经过数学推导，这个方法就会和**积分**产生关联。

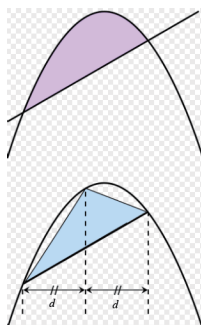
1-4-2 古希腊

1. 欧多克索斯

古希腊的数学家、医学家、天文学家**欧多克索斯**（公元前408—前355年）曾使用**穷尽法**来计算**面积**与**体积**。

2. 阿基米德

古希腊的数学家、物理学家、天文学家阿基米德（公元前 287—前 212 年）利用穷尽法计算球的表面积、球的体积和椭圆面积，后代数学家依据他的概念发展成近代的微积分。



此外，他还证明了下述公式：

$$\text{圆面积} = \text{圆周率} \times \text{半径的平方}$$

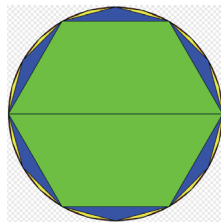
美国数学史学家 E. T. 贝尔在其所著的 *Men of Mathematics* 一书中，将阿基米德、牛顿和高斯并列为有史以来最伟大的三位数学家。

1-4-3 中国

三国时代魏国数学家刘徽也使用穷尽法计算圆面积，其概念是用切割圆的方法计算圆周率，可以参考右图。

从圆的内部正六边形开始，然后逐步加倍，最后计算到正 192 边形，得到圆周率的近似值：

$$\pi = \frac{157}{50} = 3.14$$



1-5 微积分的历史

古代埃及人建立了积分萌芽的基础后，两位古希腊的数学家欧多克索斯和阿基米德接棒将相关知识继续发展，不过有一段相当长的时间，微分与积分是分开应用的，彼此关联的概念并没有被发现，所以一直没有被一起讨论，直到 17 世纪两位欧洲的天才数学家牛顿和莱布尼茨将微分与积分概念澄清与整合，使其大量应用于几何学、物理与科学的研究中。

如今人工智能的发展，细分为机器学习与深度学习，大量使用微积分概念，因此微积分已成为当今计算机领域的重要基础知识。

1-5-1 牛顿

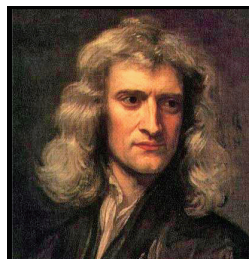
艾萨克·牛顿（Isaac Newton, 1643—1727）是英国的物理学家、数学家、天文学家，毕业于剑桥大学。他发现了万有引力（Law of Universal Gravitation）、运动定律（Law of Motion），这是现代工

程学的基础，同时也奠定了**物理学**、**天文学**的基础。牛顿躺在苹果树下，因为苹果掉落而发现万有引力，据说是虚构的。

牛顿的母亲曾经想让牛顿当农夫，所幸当时国王中学的校长**亨利斯·托克斯**发现了牛顿的潜力，说服了牛顿的母亲，牛顿得以回到学校继续完成他的学业，同时完成了一篇优秀的毕业报告，最后申请到了**剑桥大学**，开始迈向科学巨人之路。

在求学期间，牛顿对于**笛卡儿**的**几何学**著作进行了非常认真的研究，特别对于曲线的切线求法十分感兴趣，同时思索是否有更好的解决方法，牛顿在 25 岁左右开始有了**微积分**的框架。1665 年，他发明了广义二项式定理，同时发展了新的数学理论，这就是我们现在所探讨的微积分。在 1666 年他有了数学史上第一个有关微积分的论文**流数简论**，这是物理学运动定理中有关**微分**、**积分**的概念，因为可以描述物体在抛物线下的运动过程，因此开始受到了关注，只是牛顿没有正式发表，只在朋友间流传。牛顿的第一本正式著作是于 1669 年发表的 *De analysi*，一般称这是第一本微积分著作，同样只在朋友间流传。这本著作直到 1711 年才出版。

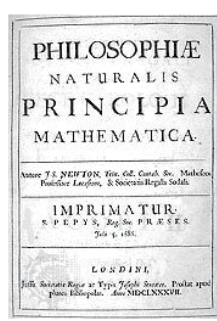
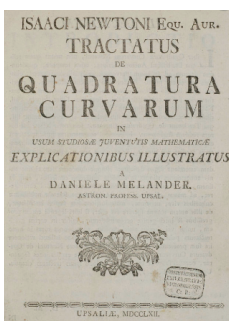
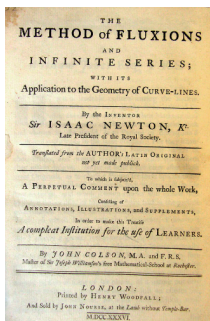
注：**正流数术**就是指**微分**，**反流数术**是指**积分**。



牛顿在 1671 年完成了第 2 本著作《流数法与无穷级数》（*Method of Fluxions and Infinite Series*），这本书直到 1736 年才出版。

牛顿在 1676 年发表了《曲线求积法》（*Tractatus de Quadratura Curvarum*），这本著作直到 1704 年才出版。

牛顿在 1687 年正式出版了 *Principia*，这本书的算法就是所谓的**微积分**，不过所使用的符号却采用了古典几何学的方法，使用上不太方便，同时使人难以理解。



下面是**牛顿**所使用的**微分**与**积分**符号。

$\dot{x}$
微分

 $\ddot{x}$
积分

由于此著作出版时间是 1687 年，相较于欧洲科学家**莱布尼茨**晚了 3 年，这也使究竟谁是发明微积分的人成为数学界最大的争议。

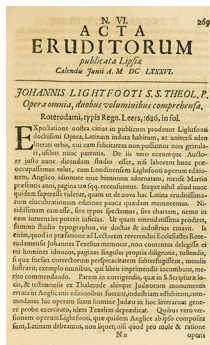
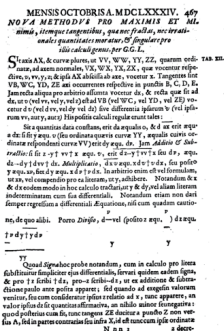
其实牛顿在**光学**与**力学**领域皆很有成就，但这些不属于本书叙述范围。

1-5-2 莱布尼茨

莱布尼茨 (Leibniz, 1646—1716) 是德国的**数学家**、**哲学家**，也是一位**律师**，是历史上少见的全才，他的许多数学公式皆是往返各大城市间在颠簸的马车完成的。

莱布尼茨与牛顿几乎是同一时期的代表性人物，莱布尼茨于 1684 年在 *Acta Eruditorum* 杂志发表了有关**微分**的论文《极大与极小值的新方法》(Nova Methodus pro Maximis et Minimis)。在这篇论文中，莱布尼茨使用了 dx 和 dy 的**微分**符号。

1686 年，莱布尼茨在 *Acta Eruditorum* 杂志上发表了有关**积分**的论文《深度隐藏的几何学和无限小与无限大的分析》(De geometria recondite et analysi indivisibilium atque infinitorum)，在这篇文章中他使用了**积分**符号 $\int$ ，这个积分符号类似 Sum (总和) 的首字母 S，然后将它拉长，称为 **Integer**，具有**总和**或**加总**的意义。



莱布尼茨在发明微积分时意识到好的数学符号可以利于思考，增加学习效果，所以他创设的微积分符号远优于牛顿所创的符号，我们现在所用的微积分符号就是当时**莱布尼茨**所创。

1714—1716 年，**莱布尼茨**在过世前完成了《微积分的历史和起源》，这篇文章直到 1846 年才发表，在这篇文章中，莱布尼茨叙述了他独立完成微积分的起源与思维。

1-6 微积分发明人的世纪之争

现在数学家一般认为**牛顿**与**莱布尼茨**分别独立发明了微积分，不过**莱布尼茨**的数学符号在使用上较为方便，因此成为我们学习**微积分**的主流。