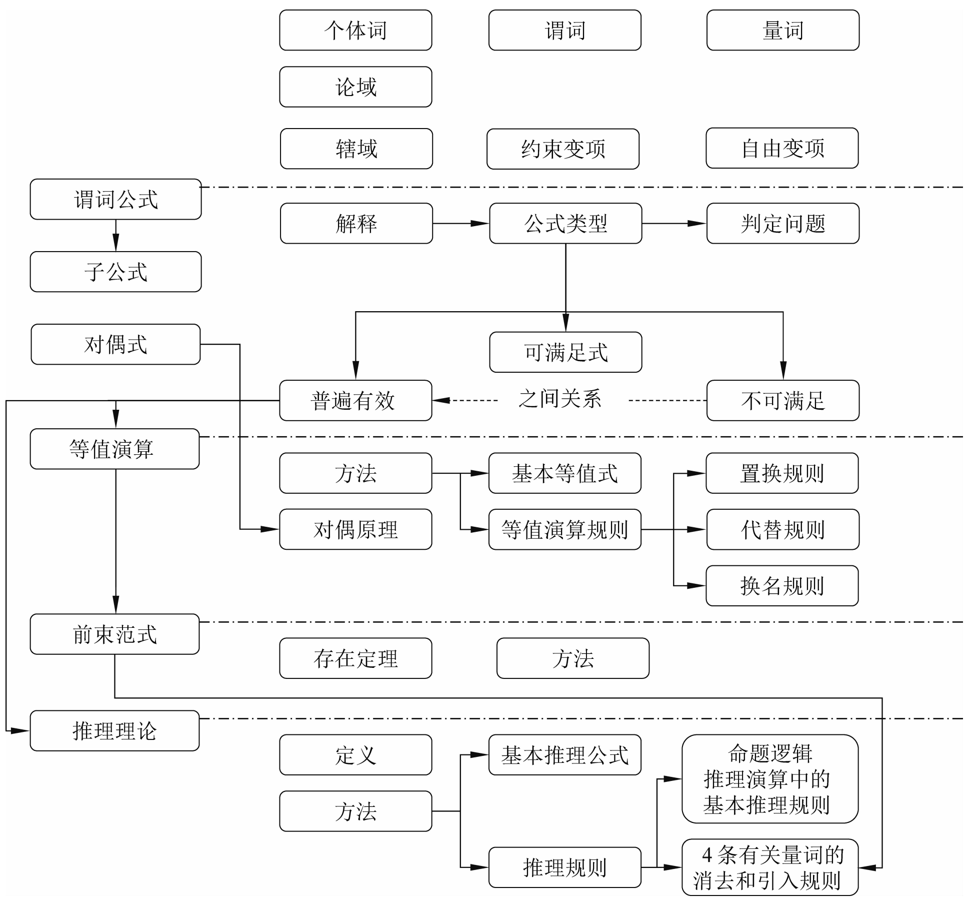
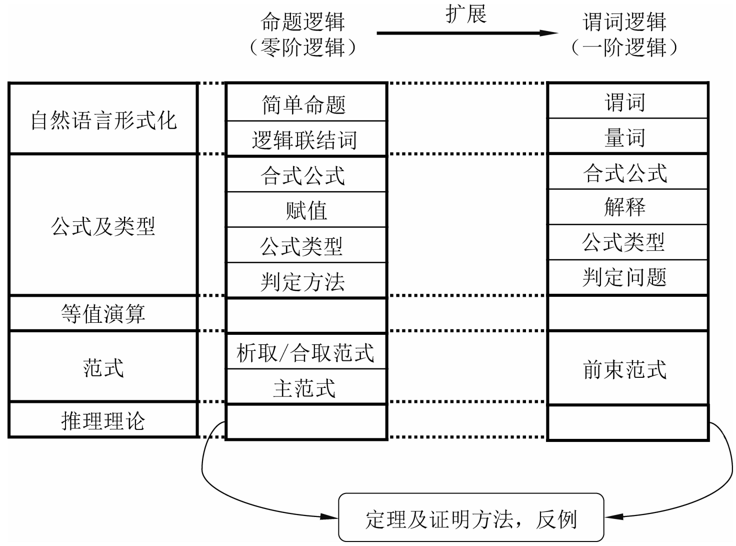
第 3 章

谓词逻辑

【本章知识结构图】



【由命题逻辑到谓词逻辑】



3.1 谓词与量词

3.1.1 内容提要

定义 3.1 **个体词**是一个命题里表示思维对象的词，表示独立存在的具体或抽象的客体。简单地讲，个体词表示各种事物，相当于汉语中的名词。具体的、确定的个体词称为**个体常项**，一般用 a、b、c 表示；抽象的、不确定的个体词称为**个体变项**，一般用 x、y、z 表示。个体变项的取值范围称为**个体域**或**论域**，宇宙间一切事物组成的个体域称为**全总个体域**。

定义 3.2 在命题中，表示个体词性质或相互关系的词称作**谓词**。

零元谓词 不包含个体变项的谓词。

一元(目)谓词 只有一个个体词的谓词。通常表示该个体词的性质或属性。

***n* 元(目)谓词** 有 n 个个体的谓词 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。通常表示这几个个体词间的关系。

用来表示个体数量的词是**量词**，给谓词加上量词称作谓词的**量化**。

定义 3.3 符号 $\forall$ 称作**全称量词**，读作“所有的 x”“任意 x”或“一切 x”，含义相当于自然语言中的“任意的”“所有的”“一切的”“每一个”“凡”等。$(\forall x)P(x)$意指对论域 D 中的所有个体都具有性质 P。命题$(\forall x)P(x)$当且仅当对论域中的所有 x 来说，$P(x)$均为真时方为真，此时称 $P(x)$被**全称量化**。

定义 3.4 符号 $\exists$ 称作**存在量词**，读作“存在 x”，含义相当于自然语言中的“某个”“存在”“有的”“至少有一个”“有些”等。$(\exists x)P(x)$意指论域 D 中至少有一个个体具有性质 P，此时称 $P(x)$被**存在量化**。

3.1.2 主教材习题参考解答

3.1 将下列命题用零元谓词表示。

(a) 天安门位于北京。

(b) 小李不是教师,而是运动员。

(c) 苗苗非常聪明和美丽。

(d) π 和 e 都是无理数。

(e) 俞伯牙和钟子期是好朋友。

(f) α 属于集合 A 或者集合 B。

(g) 乐乐既熟悉 C++ 语言,又熟悉 Java 语言。

(h) 鱼我所欲也,熊掌亦我所欲也。

(i) 若 3 大于 2 且 4 大于 3,则 4 大于 2。

解:

(a) 令谓词 $P(x,y)$表示"x 位于 y"。则 P(天安门,北京)表示"天安门位于北京"。

(b) 令谓词 $P(x)$表示"x 是教师",$Q(x)$表示"x 是运动员",则$\sim P$(小李)$\wedge Q$(小李)表示"小李不是教师,而是运动员"。

(c) 令谓词 $P(x)$表示"x 非常聪明",$Q(x)$表示"x 非常美丽",则 P(苗苗)$\wedge Q$(苗苗)表示"苗苗非常聪明和美丽"。

(d) 令谓词 $P(x)$表示"x 是无理数",则 $P(\pi)\wedge P(\mathrm{e})$表示"$\pi$ 和 e 都是无理数"。

(e) 令谓词 $P(x,y)$表示"x 和 y 是好朋友",则 P(俞伯牙,钟子期)表示"俞伯牙和钟子期是好朋友"。

(f) 令谓词 $P(x,y)$表示"x 属于集合 y",则 $P(\alpha,A)\vee P(\alpha,B)$表示"$\alpha$ 属于集合 A 或者集合 B"。

(g) 令谓词 $P(x,y)$表示"x 熟悉 y 语言"。则 P(乐乐,C++)$\wedge P$(乐乐,Java)表示"乐乐既熟悉 C++ 语言,又熟悉 Java 语言"。

(h) 令谓词 $P(x)$表示"x 是我所欲",则 P(鱼)$\wedge P$(熊掌)表示"鱼我所欲也,熊掌亦我所欲也"。

(i) 令谓词 $P(x,y)$表示"x 大于 y",则 $P(3,2)\wedge P(4,3)\Rightarrow P(4,2)$表示"若 3 大于 2 且 4 大于 3,则 4 大于 2"。

3.2 令论域为正整数集合,谓词 $\mathrm{Odd}(x)$表示"x 是奇数",$\mathrm{Even}(x)$表示"x 是偶数",$\mathrm{Prime}(x)$表示"x 是素数",$\mathrm{Equal}(x,y)$表示"$x=y$",$\mathrm{Greater}(x,y)$表示"$x>y$"。将以下各式译为汉语,并判断其真值。

(a) $\mathrm{Prime}(6)$。

(b) $(\forall x)\sim\mathrm{Odd}(x)$。

(c) $(\exists x)\mathrm{Greater}(5,x)$。

(d) $(\forall x)(\exists y)(\mathrm{Greater}(y,x)\wedge\mathrm{Prime}(y))$。

(e) $(\exists x)(\exists y)(\mathrm{Equal}(x,y+2)\wedge\mathrm{Prime}(x)\wedge\mathrm{Prime}(y))$。

(f) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((\mathrm{Equal}(z,x+y)\wedge\mathrm{Odd}(x)\wedge\mathrm{Odd}(y))\Rightarrow\mathrm{Even}(z))$。

解：

(a) 表示“6 是素数”，真值为“假”。

(b) 表示“所有正整数都不是奇数”，真值为“假”。

(c) 表示“有小于 5 的正整数”，真值为“真”。

(d) 表示“对于任意正整数，都存在大于它的素数”，真值为“真”。

(e) 表示“存在相差 2 的一对素数”，真值为“真”。①

(f) 表示“任意两个奇正整数的和是偶正整数”，真值为“真”。

3.2 谓词公式及分类

3.2.1 内容提要

定义 3.5 谓词逻辑中的**谓词公式**递归地定义为：

(1) 个体常项、个体变项、个体词的函数和原子谓词公式(不含联结词的谓词)是谓词公式。

(2) 如果 A 是谓词公式，则 $\sim A$ 也是谓词公式。

(3) 如果 A 和 B 是谓词公式，则由逻辑联结词联结 A 和 B 构成的符号串也是谓词公式，如 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \Rightarrow B)$、$(A \Leftrightarrow B)$ 等。

(4) 若 A 是谓词公式，且 A 中无 $\forall x$ 及 $\exists x$ 出现，则 $(\forall x)A(x)$、$(\exists x)A(x)$ 也是谓词公式。

(5) 只有有限次地应用(1)～(4)构成的符号串才是谓词公式。

在不引起混淆的情况下，谓词公式也称为**合式公式**，简称**公式**。

定义 3.6 谓词公式的一个**解释**由下面 4 部分组成：

(1) 非空的论域 D。

(2) D 中一部分特定元素的具体取值。

(3) D 上一些特定的函数的具体含义。

(4) D 上一些特定的谓词的具体含义。

定义 3.7 设 A 为一个谓词公式，若 A 在任何解释下真值均为真，则称 A 为**普遍有效的公式**或**逻辑有效式**。若 A 在任何解释下真值均为假，则称 A 为**不可满足式**或**矛盾式**；若至少存在一个解释使 A 为真，则称 A 为**可满足式**。

定理 3.1 (**丘奇-图灵定理**)谓词逻辑是**不可判定的**。即，对任一谓词公式而言，没有一个可行的方法判定它是否是逻辑有效的。

定义 3.8 设命题公式 A_0 含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，用 n 个谓词公式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别处处代换 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，所得公式 A 称为 A_0 的**代换实例**。

定理 3.2 命题公式中的重言式的代换实例都是逻辑有效式，在谓词公式中可仍称为重言式；命题公式中的矛盾式的代换实例都是矛盾式。

---

① 希尔伯特在 1900 年国际数学家大会的报告中的第 8 个问题为“孪生质数猜想”：存在无穷多个素数 p，使得 $p+2$ 是素数。该问题目前尚未得到证明。

定义 3.9　设 A 为谓词公式，B 为 A 中的一个连续的符号串，且 B 为谓词公式，则称 B 为 A 的**子公式**。

定义 3.10　设 A 为谓词公式，$(\forall x)P(x)$或$(\exists x)P(x)$为公式 A 的子公式，此时紧跟在$\forall$、$\exists$之后的 x 称为量词的**指导变项**或**作用变项**，$P(x)$称为相应量词的**作用域**或**辖域**，即量词的约束范围。在辖域中 x 的一切出现均称为**约束出现**，受指导变项的约束。所有约束出现的变项称为**约束变项**；在 A 中除了约束变项之外的变项均称为**自由变项**，不受指导变项的约束。

3.2.2　主教材习题参考解答

3.3　给定解释 I 为：论域 $D=\mathbb{Z}$，$f(x,y)=x+y$，谓词 $F(x,y)$表示 $x=y$，$a=2$。求下列各公式在解释 I 下的真值。

(a) $(\exists x)F(f(x,x),a)$。

(b) $(\forall x)F(f(x,a),x)$。

(c) $(\forall x)(\forall y)(F(f(x,a),y)\Rightarrow F(f(y,a),x))$。

(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)F(f(x,y),z)$。

(e) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)F(f(y,z),x)$。

(f) $(\forall x)(\exists y)F(f(x,y),x)$。

(g) $(\forall x)(\exists y)F(f(x,y),y)$。

(h) $(\exists x)(\forall y)F(f(x,y),x)$。

(i) $(\exists x)(\forall y)F(f(x,y),y)$。

解：(a)、(d)、(f)和(i)的真值为“真”，(b)、(c)、(e)、(g)和(h)的真值为“假”。

3.4　讨论公式$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$在下列解释下的真值。

(a) $D=\{$所有实数$\}$，谓词 $P(x,y)$表示 $xy=0$。

(b) $D=\{$所有实数$\}$，谓词 $P(x,y)$表示 $xy=1$。

(c) $D=\{$所有正实数$\}$，谓词 $P(x,y)$表示 $xy=1$。

解：在解释(a)下该公式的真值为“真”，在解释(b)和(c)下该公式的真值为“假”。

3.5　给出解释 I，使得在解释 I 下$(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$和$(\forall x)(P(x)\land Q(x))$具有不同的真值。

解：例如，论域 $D=\{$全体正整数$\}$，$P(x)$表示 $x<0$，$Q(x)$表示 $x>0$ 时，$(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$的真值为“真”，而$(\forall x)(P(x)\land Q(x))$的真值为“假”。

3.6　指出下列公式的辖域、自由变项和约束变项。

(a) $(\forall x)(P(x)\land Q(x))\land(\exists x)R(x)$。

(b) $(\exists x)(\forall y)(P(x)\Rightarrow R(x,y))$。

(c) $(\exists x)(P(x)\land(\forall y)(D(y)\Rightarrow L(x,y)))$。

(d) $(\forall x)(F(x)\Rightarrow G(y))\Rightarrow(\exists y)(H(x)\land L(x,y,z))$。

(e) $(\forall x)P(x,y,z)\lor((\exists u)Q(x,u)\Rightarrow(\exists w)Q(y,w))$。

解：

(a) $(\forall x)(P(x)\land Q(x))$中，$(P(x)\land Q(x))$是$(\forall x)$的辖域，其中 x 是约束变项；

$(\exists x)R(x)$中，$R(x)$是$(\exists x)$的辖域，其中 x 是约束变项。

(b) $(\exists x)(\forall y)(P(x)\Rightarrow R(x,y))$中，$(\forall y)(P(x)\Rightarrow R(x,y))$是$(\exists x)$的辖域，$(P(x)\Rightarrow R(x,y))$是$(\forall y)$的辖域，其中 x 和 y 是约束变项。

(c) $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(D(y)\Rightarrow L(x,y)))$中，$(P(x)\wedge(\forall y)(D(y)\Rightarrow L(x,y)))$是$(\exists x)$的辖域，$(D(y)\Rightarrow L(x,y))$是$(\forall y)$的辖域，其中 x 和 y 是约束变项。

(d) $(\forall x)(F(x)\Rightarrow G(y))\Rightarrow(\exists y)(H(x)\wedge L(x,y,z))$中，$(F(x)\Rightarrow G(y))$是$(\forall x)$的辖域，其中 x 是约束变项，y 是自由变项；$(H(x)\wedge L(x,y,z))$是$(\exists y)$的辖域，其中 y 是约束变项，x 和 z 是自由变项。

(e) $(\forall x)P(x,y,z)\vee((\exists u)Q(x,u)\Rightarrow(\exists w)Q(y,w))$中，$P(x,y,z)$是$(\forall x)$的辖域，其中 x 是约束变项，y 和 z 是自由变项；$Q(x,u)$是$(\exists u)$的辖域，其中 u 是约束变项，x 是自由变项；$Q(y,w)$是$(\exists w)$的辖域，其中 w 是约束变项，y 是自由变项。

3.3 自然语言形式化

3.3.1 内容提要

谓词逻辑中的自然语言形式化的基本方法如下：

(1) 将问题分解成一些原子命题和逻辑联结符。

(2) 分解出各个原子命题的个体词、谓词和量词。

(3) 按照谓词公式的表示规则将自然语言的语句翻译为谓词公式。

常见规律

(a) “所有的 A 是 B”“是 A 的都是 B”“一切 A 都是 B”应形式化为$(\forall x)(A(x)\Rightarrow B(x))$。

(b) “有的 A 是 B”应形式化为$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$。

(c) “所有的 A 都不是 B”“是 A 的都不是 B”“一切 A 都不是 B”应形式化为$(\forall x)(A(x)\Rightarrow\sim B(x))$或者$\sim(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$。

(d) “有的 A 不是 B”应形式化为$(\exists x)(A(x)\wedge\sim B(x))$或者$\sim(\forall x)(A(x)\Rightarrow B(x))$。

(e) “只有一个 A”应形式化为$(\exists x)(A(x)\wedge(\forall y)(A(y)\Rightarrow \mathrm{Equal}(x,y)))$。

(f) “若存在 A 则唯一”应形式化为$(\forall x)(A(x)\Rightarrow(\forall y)(A(y)\Rightarrow \mathrm{Equal}(x,y)))$；有时也使用符号$\exists!$ 表示量词“存在且唯一”。

(g) “所有的 A 和 B 都具有关系 C”应形式化为$(\forall x)(\forall y)(A(x)\wedge B(y)\Rightarrow C(x,y))$。

(h) “任何一个 A 都存在一个 B 与之对应满足性质 C”应形式化为$(\forall x)(A(x)\Rightarrow(\exists y)(B(y)\wedge C(x,y)))$。

3.3.2 主教材习题参考解答

3.7 令论域为正整数集合，谓词 $\mathrm{Odd}(x)$表示“x 是奇数”，$\mathrm{Even}(x)$表示“x 是偶

数”，Prime(x)表示“x 是素数”，Equal(x,y)表示“$x=y$”，Greater(x,y)表示“$x>y$”。利用谓词公式翻译下列命题。

(a) 有不是奇数的素数。

(b) 存在奇数 x、y 和偶数 z 使得 x 与 y 的和大于 x 与 z 的和。

(c) 对于任意的正整数 x、y，存在正整数 z 使得 $x+z=y$。

(d) 存在大于 10 000 的偶数。

(e) 存在介于 2 和 6 之间的正整数。

(f) 只存在唯一的奇数 1。

(g) 没有最大的素数。

解：

(a) $(\exists x)(\sim \mathrm{Odd}(x)\wedge \mathrm{Prime}(x))$

(b) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\mathrm{Odd}(x)\wedge \mathrm{Odd}(y)\wedge \mathrm{Even}(z)\wedge \mathrm{Greater}(x+y,x+z))$

(c) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\mathrm{Equal}(x+z,y)$

(d) $(\exists x)(\mathrm{Even}(x)\wedge \mathrm{Greater}(x,10000))$

(e) $(\exists x)(\mathrm{Greater}(x,2)\wedge \mathrm{Greater}(6,x))$

(f) $\mathrm{Odd}(1)\wedge(\forall x)(\mathrm{Odd}(x)\Rightarrow \mathrm{Equal}(x,1))$

(g) $\sim(\exists x)(\mathrm{Prime}(x)\wedge(\forall y)(\mathrm{Prime}(y)\Rightarrow(\mathrm{Greater}(x,y)\vee \mathrm{Equal}(x,y))))$

3.8 将下列命题用谓词表示出来，使用全总个体域。

(a) 人都生活在地球上。

(b) 有的人长着金色头发。

(c) 并不是所有的实数都能表示成分数。

(d) 没有能表示成分数的无理数。

(e) 任意的偶数 x 与 y 都有大于 1 的公因子。

(f) 存在奇数 x 与 y，它们没有大于 1 的公因子。

(g) 只有一个北京。

(h) 任何金属都可以溶解在某种液体中。

(i) 有一种液体可以溶解任何金属。

(j) 尽管有些人是勤奋的，但并非所有人都勤奋。

解：

(a) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$，其中 $P(x)$表示“x 是人”，$Q(x)$表示“x 生活在地球上”。

(b) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$，其中 $P(x)$表示“x 是人”，$Q(x)$表示“x 长着金色头发”。

(c) $\sim(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$，其中 $P(x)$表示“x 是实数”，$Q(x)$表示“x 能表示成分数”。

(d) $\sim(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$，其中 $P(x)$表示“x 能表示成分数”，$Q(x)$表示“x 是无理数”。

(e) $(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow Q(x,y))$，其中 $P(x)$表示“x 是偶数”，$Q(x,y)$表示“x 与 y 有大于 1 的公因子”。

(f) $(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge P(y)\wedge \sim Q(x,y))$，其中 $P(x)$表示“x 是奇数”，$Q(x,y)$

表示“x 与 y 有大于 1 的公因子”。

(g) $(\exists x)(P(x)\land(\forall y)(P(y)\Rightarrow Q(x,y)))$，其中 $P(x)$ 表示“x 是北京”，$Q(x,y)$ 表示“x 与 y 相同”。

(h) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)(Q(y)\land R(x,y)))$，其中 $P(x)$ 表示“x 是金属”，$Q(y)$ 表示“y 是液体”，$R(x,y)$ 表示“y 可以溶解 x”。

(i) $(\exists y)(Q(y)\land(\forall x)(P(x)\Rightarrow R(x,y)))$，其中 $P(x)$ 表示“x 是金属”，$Q(y)$ 表示“y 是液体”，$R(x,y)$ 表示“y 可以溶解 x”。

(j) $(\exists x)(P(x)\land Q(x))\land\sim(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$，其中 $P(x)$ 表示“x 是人”，$Q(x)$ 表示“x 勤奋”。

3.4 谓词逻辑的等值演算

3.4.1 内容提要

定义 3.11 设 A 和 B 是两个谓词公式，若 $A\Leftrightarrow B$ 是逻辑有效式，则称 A 与 B **等值**，记作 $A\equiv B$。

定理 3.3 **(消去量词等值式)**设论域 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是有限集合，则有

(a) $(\forall x)A(x)\equiv A(a_1)\land A(a_2)\land\cdots\land A(a_m)$。

(b) $(\exists x)A(x)\equiv A(a_1)\lor A(a_2)\lor\cdots\lor A(a_m)$。

定理 3.4 **(量词否定等值式/德摩根律)**设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，则有

(a) $\sim(\forall x)A(x)\equiv(\exists x)\sim A(x)$。

(b) $\sim(\exists x)A(x)\equiv(\forall x)\sim A(x)$。

定理 3.5 **(量词辖域收缩与扩张等值式)**设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，谓词公式 B 中不含 x 的出现，则有

(a) $(\forall x)(A(x)\lor B)\equiv(\forall x)A(x)\lor B$。

(b) $(\exists x)(A(x)\lor B)\equiv(\exists x)A(x)\lor B$。

(c) $(\forall x)(A(x)\land B)\equiv(\forall x)A(x)\land B$。

(d) $(\exists x)(A(x)\land B)\equiv(\exists x)A(x)\land B$。

定理 3.6 **(量词分配等值式)**设 $A(x)$ 和 $B(x)$ 是含 x 自由出现的谓词公式，则有

(a) $(\forall x)(A(x)\land B(x))\equiv(\forall x)A(x)\land(\forall x)B(x)$。

(b) $(\exists x)(A(x)\lor B(x))\equiv(\exists x)A(x)\lor(\exists x)B(x)$。

请注意，$\forall$ 对 $\lor$ 不满足分配律，$\exists$ 对 $\land$ 不满足分配律。

定理 3.7 设 $A(x,y)$ 是含 x、y 自由出现的谓词公式，则有

(a) $(\forall x)(\forall y)A(x,y)\equiv(\forall y)(\forall x)A(x,y)$。

(b) $(\exists x)(\exists y)A(x,y)\equiv(\exists y)(\exists x)A(x,y)$。

请注意，对于不同量词，不能随意更换次序。

定义 3.12 在仅含有联结词$\sim$、$\land$、$\lor$ 的谓词公式 A 中，将 $\lor$ 换成 $\land$，将 $\land$ 换成 $\lor$，将全称量词 $\forall$ 换成存在量词 $\exists$，将存在量词 $\exists$ 换成全称量词 $\forall$，若包含 F 和 T 也相互取代，

所得谓词公式称为 A 的**对偶式**，记作 A^*。

定理 3.8 （**对偶原理**）设 A 和 B 为两个仅含有联结词～、∧、∨的谓词公式，若 $A \equiv B$，则 $A^* \equiv B^*$。

谓词逻辑的等值演算规则

定理 3.9 （**置换规则**）设 $\Phi(A)$是含谓词公式 A 的公式，$\Phi(B)$是用谓词公式 B 取代 $\Phi(A)$中的 A（不一定是每一处）之后得到的谓词公式，若 $A \equiv B$，则 $\Phi(A) \equiv \Phi(B)$。

定理 3.10 （**代替规则**）将谓词公式 A 中某个自由出现的个体变项的所有自由出现改成A 中未曾出现的某个个体变项符号，其余部分不变，记所得谓词公式为 A'，则 $A \equiv A'$。

定理 3.11 （**换名规则**）将谓词公式 A 中某量词的指导变项及其在辖域内的所有约束出现改成该量词辖域内未曾出现的某个个体变项符号，其余部分不变，记所得谓词公式为 A'，则 $A \equiv A'$。

3.4.2 主教材习题参考解答

3.9 判断下列公式的类型，若是逻辑有效式，则给出证明，否则举出反例。

(a) $(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\exists y)G(y))$。

(b) $(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\forall x)(\exists y)H(x,y) \Rightarrow (\forall x)P(x))$。

(c) $\sim((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x)) \wedge (\exists x)B(x)$。

(d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$。

解：

(a) 是命题逻辑中重言式 $p \Rightarrow (p \vee q)$的代换实例，因此是逻辑有效式。

(b) 是命题逻辑中重言式 $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$的代换实例，因此是逻辑有效式。

(c) 是命题逻辑中矛盾式$\sim(p \Rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例，因此不是逻辑有效式。

(d) 不是逻辑有效式。例如，论域 $D=\{$全体正整数$\}$，$P(x,y)$表示"$x \times y = y$"时，命题$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$为假，命题$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$为真。此时蕴含式为假，因此不是逻辑有效式。

3.10 设论域为$\{a,b,c\}$，试消去下列谓词公式中的量词。

(a) $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$。

(b) $(\exists x)(P(x) \vee (\forall y)Q(y))$。

(c) $(\forall y)(\exists x)H(x,y)$。

解：

(a) $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x) \equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \Rightarrow (Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c))$。

(b) $(\exists x)(P(x) \vee (\forall y)Q(y)) \equiv (\exists x)P(x) \vee (\forall y)Q(y) \equiv P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee (Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c))$。

(c)
$$
\begin{aligned}
&(\forall y)(\exists x)H(x,y) \equiv (\exists x)H(x,a) \wedge (\exists x)H(x,b) \wedge (\exists x)H(x,c)\\
&\equiv (H(a,a) \vee H(b,a) \vee H(c,a)) \wedge (H(a,b) \vee H(b,b) \vee H(c,b)) \wedge\\
&\quad (H(a,c) \vee H(b,c) \vee H(c,c))。
\end{aligned}
$$

3.11 将下列公式化为与之等值的公式，使其没有既是约束出现又是自由出现的个

体变项符号。

(a) $(\forall x)P(x,y)\vee(\exists y)Q(x,y,z)$。

(b) $(\forall x)(P(x,y)\vee(\exists y)Q(x,y,z))$。

(c) $(\exists x)(\forall y)(P(x)\Rightarrow R(x,y))\Leftrightarrow L(x,y)$。

(d) $((\exists x)P(x,y)\Rightarrow(\forall y)Q(x,y))\Rightarrow(\forall x)(\exists y)R(x,y)$。

解：

(a) $(\forall x)P(x,y)\vee(\exists y)Q(x,y,z)\equiv(\forall u)P(u,y)\vee(\exists v)Q(x,v,z)$。

(b) $(\forall x)(P(x,y)\vee(\exists y)Q(x,y,z))\equiv(\forall x)(P(x,y)\vee(\exists v)Q(x,v,z))$。

(c) $(\exists x)(\forall y)(P(x)\Rightarrow R(x,y))\Leftrightarrow L(x,y)\equiv(\exists u)(\forall v)(P(u)\Rightarrow R(u,v))\Leftrightarrow L(x,y)$。

(d) $$((\exists x)P(x,y)\Rightarrow(\forall y)Q(x,y))\Rightarrow(\forall x)(\exists y)R(x,y)$$
$$\equiv((\exists u)P(u,y)\Rightarrow(\forall v)Q(x,v))\Rightarrow(\forall w)(\exists z)R(w,z)。$$

3.12 设 $A(x)$是含 x 自由出现的公式，谓词公式 B 中不含 x 的出现，证明下列等值式。

(a) $(\forall x)(A(x)\Rightarrow B)\equiv(\exists x)A(x)\Rightarrow B$。

(b) $(\exists x)(A(x)\Rightarrow B)\equiv(\forall x)A(x)\Rightarrow B$。

(c) $(\forall x)(B\Rightarrow A(x))\equiv B\Rightarrow(\forall x)A(x)$。

(d) $(\exists x)(B\Rightarrow A(x))\equiv B\Rightarrow(\exists x)A(x)$。

解：

(a) $(\forall x)(A(x)\Rightarrow B)\equiv(\forall x)(\sim A(x)\vee B)\equiv(\forall x)\sim A(x)\vee B\equiv\sim(\exists x)A(x)\vee B\equiv(\exists x)A(x)\Rightarrow B$。

(b) $(\exists x)(A(x)\Rightarrow B)\equiv(\exists x)(\sim A(x)\vee B)\equiv(\exists x)\sim A(x)\vee B\equiv\sim(\forall x)A(x)\vee B\equiv(\forall x)A(x)\Rightarrow B$。

(c) $(\forall x)(B\Rightarrow A(x))\equiv(\forall x)(\sim B\vee A(x))\equiv\sim B\vee(\forall x)A(x)\equiv B\Rightarrow(\forall x)A(x)$。

(d) $(\exists x)(B\Rightarrow A(x))\equiv(\exists x)(\sim B\vee A(x))\equiv\sim B\vee(\exists x)A(x)\equiv B\Rightarrow(\exists x)A(x)$。

3.13 证明下列等值式。

(a) $(\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y))\equiv(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$。

(b) $\sim(\exists x)(M(x)\wedge F(x))\equiv(\forall x)(M(x)\Rightarrow\sim F(x))$。

(c) $(\forall x)(\forall y)(P(x)\Rightarrow Q(y))\equiv(\exists x)P(x)\Rightarrow(\forall y)Q(y)$。

(d) $((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\wedge(\exists x)R(x))\vee((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\wedge(\exists x)S(x))$

$\equiv(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\exists x)(R(x)\vee S(x))$。

解：

(a) $(\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y))\equiv(\exists x)(A(x)\wedge(\exists y)B(y))\equiv(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$。

(b) $\sim(\exists x)(M(x)\wedge F(x))\equiv(\forall x)\sim(M(x)\wedge F(x))\equiv(\forall x)(\sim M(x)\vee\sim F(x))\equiv(\forall x)(M(x)\Rightarrow\sim F(x))$。

(c) $(\forall x)(\forall y)(P(x)\Rightarrow Q(y))\equiv(\forall x)(\forall y)(\sim P(x)\vee Q(y))\equiv(\forall x)\sim P(x)\vee$

$(\forall y)Q(y)$

$\equiv\sim(\exists x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)\equiv(\exists x)P(x)\Rightarrow(\forall y)Q(y)$。

(d) $((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\wedge(\exists x)R(x))\vee((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\wedge(\exists x)S(x))$

$\equiv((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x))\wedge((\exists x)R(x))\vee(\exists x)S(x))$

$\equiv(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\exists x)(R(x)\vee S(x))$。

3.5 前束范式

3.5.1 内容提要

定义 3.13 设 A 为谓词公式，如果满足以下条件：

(1) 所有量词都位于该公式的最左边。

(2) 所有量词前都不含否定词。

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端。

则称 A 为**前束范式**。

求前束范式的基本方法如下：

(1) 消去谓词公式中的联结词⇒和⇔。

(2) 将谓词公式中的否定词～右移。

(3) 将谓词公式中的量词左移(使用量词分配等值式、量词辖域收缩与扩张等值式)，必要时将变项改名。

定理 3.12 (**前束范式存在定理**)任一谓词公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。

3.5.2 主教材习题参考解答

3.14 将下列公式化为等值的前束范式。

(a) $(\forall x)F(x)\Rightarrow(\exists x)G(x)$。

(b) $(\exists x)F(x)\Rightarrow(\forall x)G(x)$。

(c) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y))$。

(d) $((\forall x)F(x,y)\Rightarrow(\exists y)G(y))\Rightarrow(\forall x)H(x,y)$。

解：

(a) $(\forall x)F(x)\Rightarrow(\exists x)G(x)\equiv\sim(\forall x)F(x)\vee(\exists x)G(x)\equiv(\exists x)\sim F(x)\vee(\exists x)G(x)\equiv(\exists x)(\sim F(x)\vee G(x))$。

(b) $(\exists x)F(x)\Rightarrow(\forall x)G(x)\equiv\sim(\exists x)F(x)\vee(\forall x)G(x)\equiv(\forall x)\sim F(x)\vee(\forall x)G(x)\equiv(\forall x)\sim F(x)\vee(\forall y)G(y)\equiv(\forall x)(\forall y)(\sim F(x)\vee G(y))$。

(c) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y))\equiv(\forall x)(\sim P(x)\vee(\exists y)Q(x,y))\equiv(\forall x)(\exists y)(\sim P(x)\vee Q(x,y))$。

(d) $((\forall x)F(x,y)\Rightarrow(\exists y)G(y))\Rightarrow(\forall x)H(x,y)$

$\equiv\sim(\sim(\forall x)F(x,y)\vee(\exists y)G(y))\vee(\forall x)H(x,y)$

$\equiv((\forall x)F(x,y)\wedge(\forall z)\sim G(z))\vee(\forall u)H(u,y)$

$\equiv(\forall x)(\forall z)(\forall u)((F(x,y)\wedge\sim G(z))\vee H(u,y))$。

3.6 谓词逻辑的推理

3.6.1 内容提要

谓词逻辑中的正确推理 $(H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n)\Rightarrow C$ 为逻辑有效式。

定理 3.13 (**基本推理公式**)以下蕴涵式都是逻辑有效式。

(a) $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$。

(b) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$。

(c) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))\Rightarrow((\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x))$。

(d) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))\Rightarrow((\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x))$。

(e) $((\exists x)P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x))\Rightarrow(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$。

(f) $(\forall x)(P(x)\Leftrightarrow Q(x))\Rightarrow((\forall x)P(x)\Leftrightarrow(\forall x)Q(x))$。

(g) $(\forall x)(P(x)\Leftrightarrow Q(x))\Rightarrow((\exists x)P(x)\Leftrightarrow(\exists x)Q(x))$。

(h) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\Rightarrow R(x))\Rightarrow(\forall x)(P(x)\Rightarrow R(x))$。

(i) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))\wedge P(a)\Rightarrow Q(a)$。

定理 3.14 以下谓词公式都是逻辑有效式。

(a) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)\Leftrightarrow(\forall y)(\forall x)P(x,y)$。

(b) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)\Rightarrow(\exists x)(\forall y)P(x,y)$。

(c) $(\forall y)(\forall x)P(x,y)\Rightarrow(\exists y)(\forall x)P(x,y)$。

(d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)\Rightarrow(\forall y)(\exists x)P(x,y)$。

(e) $(\exists y)(\forall x)P(x,y)\Rightarrow(\forall x)(\exists y)P(x,y)$。

(f) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)\Rightarrow(\exists y)(\exists x)P(x,y)$。

(g) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)\Rightarrow(\exists x)(\exists y)P(x,y)$。

(h) $(\exists y)(\exists x)P(x,y)\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)P(x,y)$。

有关量词的消去和引入规则有以下 4 个。

(a) **全称量词消去规则/全称举例规则**:$(\forall x)P(x)\Rightarrow P(y)$或$(\forall x)P(x)\Rightarrow P(a)$,其中 y 是论域中任一个体。

该规则的使用条件如下:

(1) 第一式中,取代 x 的 y 应为任意的不在 $P(x)$中约束出现的个体变项。

(2) 第二式中,a 为任意个体常项。

(3) 用 y 或 a 取代 $P(x)$中自由出现的 x 时,必须对 x 的所有自由出现进行取代。

(b) **全称量词引入规则/全称推广规则**:$P(y)\Rightarrow(\forall x)P(x)$,其中 y 是论域中任一个体。

该规则的使用条件如下：

(1) 无论 $P(y)$中自由出现的个体变项 y 取何值，$P(y)$应该均为真。

(2) 取代自由出现的 y 的 x 不能在 $P(y)$中约束出现。

(c) **存在量词消去规则/存在举例规则**：$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(a)$，其中 a 是论域中的一个个体常项。

该规则的使用条件如下：

(1) a 是使 P 为真的特定的个体常项。

(2) a 不在 $P(x)$中出现。

(3) $P(x)$中没有其他自由出现的个体变项。

(4) a 是在推导过程中未使用过的。

(d) **存在量词引入规则/存在推广规则**：$P(a) \Rightarrow (\exists x)P(x)$，其中 a 是论域中的一个个体常项。

该规则的使用条件如下：

(1) a 是特定的个体常项。

(2) 取代 a 的 x 不在 $P(a)$中出现。

使用推理规则的推理演算过程如下：

(1) 将以自然语言表示的推理问题形式化，转换为谓词公式。

(2) 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词。

(3) 在无量词的情况下使用规则和公式进行推理。

(4) (必要时)引入量词，得到相应结论。

请注意：

(1) 当对带量词的谓词公式进行推理证明时，当既需要消去存在量词又需要消去全称量词时，一般要先使用存在量词消去规则，再使用全称量词消去规则。

(2) 使用上述 4 个规则时，量词的辖域都必须延伸到整个公式的末端。换言之，在含有多个量词的谓词推理中，使用消去规则应该按照从左到右的顺序，而使用引入规则时应该按照从右到左的顺序。

3.6.2　主教材习题参考解答

3.15　假定论域是整数集，谓词 $P(x)$表示“x 是 4 的倍数”，$Q(x)$表示“x 是 2 的倍数”，$G(x,y)$表示“$x>y$”。判断下述推理是否正确，如果不正确，请指出错误的原因。

(a) (1) $(\exists x)G(x,5)$　　(前提引入)

(2) $G(3,5)$　　(存在量词消去)

(b) (1) $(\exists x)G(x,a)$　　(前提引入)

(2) $G(a,a)$　　(存在量词消去)

(c) (1) $(\exists x)G(x,a)$　　(前提引入)

(2) $(\exists x)(\exists x)G(x,x)$　　(存在量词引入)

(d) (1) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$　　(前提引入)

(2) $P(4) \Rightarrow Q(3)$　　(全称量词消去)

(e) (1) $(\forall x)Q(x)\Rightarrow P(x)$　　(前提引入)

(2) $Q(y)\Rightarrow P(y)$　　(全称量词消去)

(f) (1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$　　(前提引入)

(2) $(\exists y)G(z,y)$　　(全称量词消去)

(3) $G(z,b)$　　(存在量词消去)

(4) $(\forall z)G(z,b)$　　(全称量词引入)

(5) $G(b,b)$　　(全称量词消去)

(6) $(\forall x)G(x,x)$　　(全称量词引入)

解：

(a) 违反了存在量词消去规则的“(1)a 是使 P 为真的特定的个体常项”。

(b) 违反了存在量词消去规则的“(2)a 不在 $P(x)$中出现”。

(c) 违反了存在量词引入规则的“(2)取代 a 的 x 不在 $P(a)$中出现”。

(d) 违反了全称量词消去规则的“(3)用 y 或 a 取代 $P(x)$中自由出现的 x 时，必须对 x 的所有自由出现进行取代”；另外，应该使用相同的 y 或 a。

(e) 全称量词消去规则使用不正确，量词的辖域应该延伸到整个公式的末端。

(f) 步骤(3)违反了存在量词消去规则的“(3) $P(x)$中没有其他自由出现的个体变项”。

3.16　利用推理规则作推理演算，构造下列推理形式的证明。

(a) 前提：$(\forall x)(\sim P(x)\Rightarrow Q(x))$，$(\forall x)\sim Q(x)$。

结论：$P(a)$。

(b) 前提：$(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q)$。

结论：$(\forall x)P(x)\Rightarrow Q$。

(c) 前提：$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$，$(\forall x)(Q(x)\Rightarrow\sim R(x))$。

结论：$(\exists x)(R(x)\Rightarrow P(x))$。

(d) 前提：$(\forall x)(P(x)\Rightarrow(Q(x)\wedge R(x)))$，$(\exists x)(P(x)\wedge S(x))$。

结论：$(\exists x)(R(x)\wedge S(x))$。

解：

(a) 证明如下：

(1) $(\forall x)(\sim P(x)\Rightarrow Q(x))$　　(前提引入)

(2) $\sim P(a)\Rightarrow Q(a)$　　(全称量词消去)

(3) $(\forall x)\sim Q(x)$　　(前提引入)

(4) $\sim Q(a)$　　(全称量词消去)

(5) $P(a)$　　((2)、(4)拒取)

(b) 证明如下：

(1) $(\forall x)P(x)$　　(附加前提引入)

(2) $P(x)$　　(全称量词消去)

(3) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q)$　　(前提引入)

(4) $P(x)\Rightarrow Q$　　(全称量词消去)

(5) Q　　((3)、(4)分离)

(c) 证明如下：

(1) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$	(前提引入)
(2) $P(a)\vee Q(a)$	(全称量词消去)
(3) $(\forall x)(Q(x)\Rightarrow\sim R(x))$	(前提引入)
(4) $Q(a)\Rightarrow\sim R(a)$	(全称量词消去)
(5) $\sim Q(a)\Rightarrow P(a)$	((2)置换)
(6) $R(a)\Rightarrow\sim Q(a)$	((4)置换)
(7) $R(a)\Rightarrow P(a)$	((5)、(6)假言三段论)
(8) $(\exists x)(R(x)\Rightarrow P(x))$	(存在量词引入)

(d) 证明如下：

(1) $(\exists x)(P(x)\wedge S(x))$	(前提引入)
(2) $P(a)\wedge S(a)$	(存在量词消去)
(3) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(Q(x)\wedge R(x)))$	(前提引入)
(4) $P(a)\Rightarrow(Q(a)\wedge R(a))$	(全称量词消去)
(5) $P(a)$	((2)化简)
(6) $Q(a)\wedge R(a)$	((4)、(5)分离)
(7) $R(a)$	((6)化简)
(8) $S(a)$	((2)化简)
(9) $R(a)\wedge S(a)$	((7)、(8)合取)
(10) $(\exists x)(R(x)\wedge S(x))$	(存在量词引入)

3.17 在谓词逻辑中构造下列推理的证明。

(a) 大熊猫都产在中国。欢欢是大熊猫。所以，欢欢产在中国。

(b) 不存在不能表示成分数的有理数。无理数都不能表示成分数。所以，无理数都不是有理数。

(c) 有理数和无理数都是实数。虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数也不是无理数。

(d) 所有的狮子都是凶猛动物。有些狮子不喝咖啡。所以有些凶猛动物不喝咖啡。

解：

(a) 令 $P(x)$表示“x 是大熊猫”，$Q(x)$表示“x 产在中国”，得到如下推理形式：

前提：$(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$，$P$(欢欢)。

结论：Q(欢欢)。

然后进行谓词逻辑推理：

(1) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$	(前提引入)
(2) P(欢欢)$\Rightarrow Q$(欢欢)	(全称量词消去)
(3) P(欢欢)	(前提引入)
(4) Q(欢欢)	((2)、(3)分离)

(b) 令 $P(x)$表示“x 是有理数”，$Q(x)$表示“x 是无理数”，$R(x)$表示“x 能表示成分数”，得到如下推理形式：

前提：$\sim(\exists x)(P(x)\land\sim R(x))$，$(\forall x)(Q(x)\Rightarrow\sim R(x))$。

结论：$(\forall x)(Q(x)\Rightarrow\sim P(x))$。

然后进行谓词逻辑推理：

(1) $\sim(\exists x)(P(x)\land\sim R(x))$　　(前提引入)

(2) $(\forall x)(\sim R(x)\Rightarrow\sim P(x))$　　((1)置换)

(3) $\sim R(x)\Rightarrow\sim P(x)$　　((2)全称量词消去)

(4) $(\forall x)(Q(x)\Rightarrow\sim R(x))$　　(前提引入)

(5) $Q(x)\Rightarrow\sim R(x)$　　((4)全称量词消去)

(6) $Q(x)\Rightarrow\sim P(x)$　　((3)、(5)假言三段论)

(7) $(\forall x)(Q(x)\Rightarrow\sim P(x))$　　((6)全称量词引入)

(c) 令 $P(x)$表示"x 是有理数"，$Q(x)$表示"x 是无理数"，$R(x)$表示"x 是实数"，$S(x)$表示"x 是虚数"，得到如下推理形式：

前提：$(\forall x)(P(x)\lor Q(x)\Rightarrow R(x))$，$(\forall x)(S(x)\Rightarrow\sim R(x))$。

结论：$(\forall x)(S(x)\Rightarrow\sim P(x)\land\sim Q(x))$。

然后进行谓词逻辑推理：

(1) $(\forall x)(P(x)\lor Q(x)\Rightarrow R(x))$　　(前提引入)

(2) $P(x)\lor Q(x)\Rightarrow R(x)$　　((1)全称量词消去)

(3) $\sim R(x)\Rightarrow\sim P(x)\land\sim Q(x)$　　((2)置换)

(4) $(\forall x)(S(x)\Rightarrow\sim R(x))$　　(前提引入)

(5) $S(x)\Rightarrow\sim R(x)$　　((4)全称量词消去)

(6) $S(x)\Rightarrow\sim P(x)\land\sim Q(x)$　　((3)、(5)假言三段论)

(7) $(\forall x)(S(x)\Rightarrow\sim P(x)\land\sim Q(x))$　　((6)全称量词引入)

(d) 令 $P(x)$表示"x 是狮子"，$Q(x)$表示"x 是凶猛动物"，$R(x)$表示"x 喝咖啡"，得到如下推理形式：

前提：$(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$，$(\exists x)(P(x)\land\sim R(x))$。

结论：$(\exists x)(Q(x)\land\sim R(x))$。

然后进行谓词逻辑推理：

(1) $(\exists x)(P(x)\land\sim R(x))$　　(前提引入)

(2) $P(a)\land\sim R(a)$　　((1)存在量词消去)

(3) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$　　(前提引入)

(4) $P(a)\Rightarrow Q(a)$　　((3)全称量词消去)

(5) $P(a)$　　((2)化简)

(6) $Q(a)$　　((4)、(5)分离)

(7) $\sim R(a)$　　((2)化简)

(8) $Q(a)\land\sim R(a)$　　((6)、(7)合取)

(9) $(\exists x)(Q(x)\land\sim R(x))$　　((8)存在量词引入)

3.7 补充习题及参考解答

3.1 讨论公式$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$在以下不同解释下的真值。

(a) $D=$\{所有实数\},谓词$P(x,y)$表示$x\times y=0$。

(b) $D=$\{所有实数\},谓词$P(x,y)$表示$x\times y=1$。

(c) $D=$\{所有正实数\},谓词$P(x,y)$表示$x\times y=1$。

解:在解释(a)和(c)下该公式的真值为"真",在解释(b)下该公式的真值为"假"。

3.2 试给出解释I,使得在解释I下$(\exists x)(Q(x)\wedge P(x))$和$(\exists x)(Q(x)\Rightarrow P(x))$具有不同的真值。

解:例如,论域$D=$\{全体正整数\},$Q(x)$表示$x<0$,$P(x)$表示$x>0$时,$(\exists x)(Q(x)\wedge P(x))$的真值为"假",而$(\exists x)(Q(x)\Rightarrow P(x))$的真值为"真"。

3.3 证明以下两个公式都不是逻辑有效式。

(a) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$。

(b) $(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$。

证明:

(a) 例如,论域$D=$\{全体整数\},$P(x)$表示"x是奇数",$Q(x)$表示"x是偶数"时,$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$的真值为"假",而$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$的真值为"真"。此时蕴涵式的真值为"假",因此不是逻辑有效式。

(b) 例如,论域$D=$\{全体整数\},$P(x)$表示"x是奇数",$Q(x)$表示"x是偶数"时,$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$的真值为"假",而$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$的真值为"真"。此时蕴涵式的真值为"假",因此不是逻辑有效式。 □

3.4 将下列命题用谓词表示出来,使用全总个体域。

(a) 一切反动派都是纸老虎。

(b) 没有不透风的墙。

(c) 有位老师又可爱又聪明。

(d) 不存在又不好好学习又能得到好成绩的学生。

(e) 世界上没有两个完全一样的鸡蛋。

(f) 不是所有人都一样高。

(g) 整数都可以比较大小。

(h) 人固有一死,或重于泰山,或轻于鸿毛。

(i) 凡事预则立,不预则废。

(j) 凡是敌人反对的,我们就要拥护;凡是敌人拥护的,我们就要反对。

(k) 所有老师和有些学生总是准时到达教室。

(l) 凡对顶角都相等,但是相等的两个角未必都是对顶角。

(m) 不是所有的男生都比任何一名女生成绩好,但是至少有一名男生成绩超过所有女生。

(n) 过平面上两个相异点有且仅有一条直线。

解：

(a) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$，其中 $P(x)$表示“x 是反动派”，$Q(x)$表示“x 是纸老虎”。

(b) $\sim(\exists x)(P(x)\wedge\sim Q(x))$，其中 $P(x)$表示“x 是墙”，$Q(x)$表示“x 透风”。

(c) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)\wedge R(x))$，其中 $P(x)$表示“x 是老师”，$Q(x)$表示“x 可爱”，$R(x)$表示“x 聪明”。

(d) $\sim(\exists x)(P(x)\wedge\sim Q(x)\wedge R(x))$，其中 $P(x)$表示“x 是学生”，$Q(x)$表示“x 好好学习”，$R(x)$表示“x 得到好成绩”。

(e) $\sim(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge P(y)\wedge Q(x,y))$，其中 $P(x)$表示“x 是鸡蛋”，$Q(x,y)$表示“x 与 y 完全一样”。

(f) $\sim(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow Q(x,y))$，其中 $P(x)$表示“x 是人”，$Q(x,y)$表示“x 与 y 一样高”。

(g) $(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow Q(x,y))$，其中 $P(x)$表示“x 是整数”，$Q(x,y)$表示“x 与 y 能比较大小”。

(h) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(Q(x)\wedge(R(x)\vee S(x))))$，其中 $P(x)$表示“x 是人”，$Q(x)$表示“x 会死”，$R(x)$表示“x 的死轻于鸿毛”，$S(x)$表示“x 的死重于泰山”。

(i) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(Q(x)\Rightarrow R(x))\wedge(\sim Q(x)\Rightarrow\sim R(x)))$，其中 $P(x)$表示“x 是事情”，$Q(x)$表示“对 x 有准备”，$R(x)$表示“x 可以成功”。

(j) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow S(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\Rightarrow R(x))$，其中 $P(x)$表示“敌人拥护 x”，$Q(x)$表示“敌人反对 x”，$R(x)$表示“我们拥护 x”，$S(x)$表示“我们反对 x”。

(k) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow R(x))\wedge(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$，其中 $P(x)$表示“x 是老师”，$Q(x)$表示“x 是学生”，$R(x)$表示“x 准时到达教室”。

(l) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\Rightarrow Q(x,y))\wedge\sim(\forall x)(\forall y)(Q(x,y)\Rightarrow P(x,y))$，其中 $P(x,y)$表示“x 与 y 是对顶角”，$Q(x,y)$表示“x 与 y 是相等的两个角”。

(m) $\sim(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge Q(y)\Rightarrow R(x,y))\wedge(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(Q(y)\Rightarrow R(x,y)))$，其中 $P(x)$表示“x 是男生”，$Q(y)$表示“y 是女生”，$R(x,y)$表示“x 成绩超过 y”。

(n) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\Rightarrow(\exists z)(Q(z)\wedge R(z,x,y)\wedge(\forall u)(Q(u)\wedge R(u,x,y)\Rightarrow S(z,u))))$，其中 $P(x,y)$表示“x 和 y 是平面上的两个相异点”，$Q(x)$表示“x 是直线”，$R(z,x,y)$表示“z 通过 x 和 y”，$S(x,y)$表示“x 与 y 相同”。

3.5 假设论域是实数集，$\{f_n(x)\}$是一个函数序列，$f(x)$为一个函数，将函数序列$\{f_n(x)\}$在区间(a,b)内收敛于 $f(x)$的定义“对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $x\in(a,b)$，都存在正整数 N，使得对任意 $n>N$ 时有$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$”翻译为谓词公式。

解：采用易于理解的谓词表示形式，原语句可以表示为

$$(\forall\varepsilon)(\forall x)(\varepsilon>0\wedge x\in(a,b)$$
$$\Rightarrow(\exists N)(N\in\mathbb{Z}^+\wedge(\forall n)(n>N\wedge n\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon)))$$

3.6 假设论域是实数集，$\{f_n(x)\}$是一个函数序列，$f(x)$是一个函数，将函数序列$\{f_n(x)\}$在区间(a,b)内一致收敛于 $f(x)$的定义“对任意 $\varepsilon>0$，都存在正整数 N，使得 $n>N$ 时对所有 $x\in(a,b)$有$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$”翻译为谓词公式。

解：采用易于理解的谓词表示形式，原语句可以表示为

$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists N)(N \in \mathbb{Z}^+ \land (\forall n)(n > N \land n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (\forall x)(x \in (a,b) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon))))$

3.7 判断公式$((\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$的类型。如果它是逻辑有效式，请给出证明；否则举出反例。

解：$((\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\equiv \sim(\sim(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x)) \lor (\exists x)(\sim P(x) \lor Q(x))$

$\equiv ((\exists x)P(x) \land \sim(\exists x)Q(x)) \lor (\exists x)\sim P(x) \lor (\exists x)Q(x)$

$\equiv ((\exists x)P(x) \lor (\exists x)\sim P(x) \lor (\exists x)Q(x)) \land (\sim(\exists x)Q(x)) \lor (\exists x)\sim P(x) \lor (\exists x)Q(x))$

$\equiv (((\exists x)P(x) \lor (\exists x)\sim P(x)) \lor (\exists x)Q(x)) \land ((\sim(\exists x)Q(x) \lor (\exists x)Q(x))) \lor (\exists x)\sim P(x))$

$\equiv (\mathrm{T} \lor (\exists x)Q(x)) \land (\mathrm{T} \lor (\exists x)\sim P(x)) \equiv \mathrm{T}$

因此该公式是逻辑有效式。

3.8 证明下列各等值式：

(a) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \Rightarrow Q(y)) \equiv (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(y)$。

(b) $\sim(\forall x)(\exists y)((P(x,y) \lor Q(x,y)) \land (R(x,y) \lor S(x,y)))$
$\equiv (\exists x)(\forall y)((P(x,y) \lor Q(x,y)) \Rightarrow (\sim R(x,y) \land \sim S(x,y)))$。

(c) $\sim(\forall x)((\exists y)L(x,y) \Rightarrow (\forall y)H(x,y))$
$\equiv (\exists x)(\exists y)(\exists z)(L(x,y) \land \sim H(x,z))$。

(d) $(\exists z)(\exists x)((P(x,z) \Rightarrow Q(x,z)) \lor (R(x,z) \Rightarrow S(x,z)))$
$\equiv ((\forall z)(\forall x)P(x,z) \Rightarrow (\exists z)(\exists x)Q(x,z)) \lor ((\forall z)(\forall x)R(x,z) \Rightarrow (\exists z)(\exists x)S(x,z))$。

(e) $(\forall x)(P(x) \lor q) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \land q)$
$\equiv (q \Rightarrow (\exists x)P(x)) \land (\sim q \Rightarrow (\exists x)\sim P(x))$。

解：

(a) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \Rightarrow Q(y)) \equiv (\exists x)(\exists y)(\sim P(x) \lor Q(y)) \equiv (\exists x)\sim P(x) \lor (\exists y)Q(y) \equiv \sim(\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \equiv (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(y)$。

(b) $\sim(\forall x)(\exists y)((P(x,y) \lor Q(x,y)) \land (R(x,y) \lor S(x,y)))$

$\equiv (\exists x)(\forall y)\sim((P(x,y) \lor Q(x,y)) \land (R(x,y) \lor S(x,y)))$

$\equiv (\exists x)(\forall y)(\sim(P(x,y) \lor Q(x,y)) \lor \sim(R(x,y) \lor S(x,y)))$

$\equiv (\exists x)(\forall y)(\sim(P(x,y) \lor Q(x,y)) \lor (\sim R(x,y) \land \sim S(x,y)))$

$\equiv (\exists x)(\forall y)((P(x,y) \lor Q(x,y)) \Rightarrow (\sim R(x,y) \land \sim S(x,y)))$。

(c) $\sim(\forall x)((\exists y)L(x,y) \Rightarrow (\forall y)H(x,y))$

$\equiv (\exists x)\sim(\sim(\exists y)L(x,y) \lor (\forall z)H(x,z))$

$\equiv (\exists x)((\exists y)L(x,y) \land \sim(\forall z)H(x,z))$

$\equiv (\exists x)((\exists y)L(x,y) \land (\exists z)\sim H(x,z))$

$\equiv (\exists x)(\exists y)(\exists z)(L(x,y) \land \sim H(x,z))$。

(d) $(\exists z)(\exists x)((P(x,z)\Rightarrow Q(x,z))\vee(R(x,z)\Rightarrow S(x,z)))$

$\equiv(\exists z)(\exists x)((\sim P(x,z)\vee Q(x,z))\vee(\sim R(x,z)\vee S(x,z)))$

$\equiv((\exists z)(\exists x)\sim P(x,z)\vee(\exists z)(\exists x)Q(x,z))\vee((\exists z)(\exists x)\sim R(x,z)\vee (\exists z)(\exists x)S(x,z)))$

$\equiv(\sim(\forall z)(\forall x)P(x,z)\vee(\exists z)(\exists x)Q(x,z))\vee(\sim(\forall z)(\forall x)R(x,z)\vee (\exists z)(\exists x)S(x,z)))$

$\equiv((\forall z)(\forall x)P(x,z)\Rightarrow(\exists z)(\exists x)Q(x,z))\vee((\forall z)(\forall x)R(x,z)\Rightarrow(\exists z) (\exists x)S(x,z))$。

(e) $(\forall x)(P(x)\vee q)\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge q)$

$\equiv\sim(\forall x)(P(x)\vee q)\vee(\exists x)(P(x)\wedge q)$

$\equiv(\exists x)\sim(P(x)\vee q)\vee(\exists x)(P(x)\wedge q)$

$\equiv(\exists x)(\sim P(x)\wedge\sim q)\vee(\exists x)(P(x)\wedge q)$

$\equiv((\exists x)\sim P(x)\wedge\sim q)\vee((\exists x)P(x)\wedge q)$

$\equiv((\exists x)\sim P(x)\vee(\exists x)P(x))\wedge(\sim q\vee(\exists x)P(x))\wedge((\exists x)\sim P(x)\vee q)\wedge (\sim q\vee q)$

$\equiv(\sim q\vee(\exists x)P(x))\wedge((\exists x)\sim P(x)\vee q)$

$\equiv(q\Rightarrow(\exists x)P(x))\wedge(\sim q\Rightarrow(\exists x)\sim P(x))$。

3.9 以下哪个公式与$(\forall x)(A(x)\downarrow B(x))$等值？

$(\forall x)A(x)\downarrow(\forall x)B(x)$，$(\forall x)A(x)\uparrow(\forall x)B(x)$，$(\exists x)A(x)\downarrow(\exists x)B(x)$，$(\exists x)A(x)\uparrow(\exists x)B(x)$。

解：$(\forall x)(A(x)\downarrow B(x))\equiv(\forall x)\sim(A(x)\vee B(x))\equiv\sim(\exists x)(A(x)\vee B(x))$

$\equiv\sim((\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x))\equiv(\exists x)A(x)\downarrow(\exists x)B(x)$。

3.10 将下列公式化为等值的前束范式。

(a) $\sim((\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\wedge(\forall x)Q(x,b))\Rightarrow R(x)$。

(b) $(\exists x)P(x,y)\Leftrightarrow(\forall z)Q(z)$。

(c) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z)\wedge((\exists u)Q(x,u)\Rightarrow(\exists w)Q(y,w)))$。

(d) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\forall y)((P(y)\Rightarrow(Q(x)\Rightarrow Q(y)))\vee(\forall z)P(z)))$。

解：

(a) $\sim((\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\wedge(\forall x)Q(x,b))\Rightarrow R(x)$

$\equiv((\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\wedge(\forall x)Q(x,b))\vee R(x)$

$\equiv(\forall x)((\exists y)P(a,x,y)\wedge Q(x,b))\vee R(z)$

$\equiv(\forall x)(\exists y)((P(a,x,y)\wedge Q(x,b))\vee R(z))$。

(b) $(\exists x)P(x,y)\Leftrightarrow(\forall z)Q(z)$

$\equiv((\exists x)P(x,y)\Rightarrow(\forall z)Q(z))\wedge((\forall z)Q(z)\Rightarrow(\exists x)P(x,y))$

$\equiv(\sim(\exists x)P(x,y)\vee(\forall z)Q(z))\wedge(\sim(\forall z)Q(z)\vee(\exists x)P(x,y))$

$\equiv(\sim(\exists x)P(x,y)\vee(\forall u)Q(u))\wedge(\sim(\forall z)Q(z)\vee(\exists z)P(z,y))$

$\equiv((\forall x)\sim P(x,y)\vee(\forall u)Q(u))\wedge((\exists z)\sim Q(z)\vee(\exists z)P(z,y))$

$\equiv(\forall x)(\forall u)(\sim P(x,y)\vee Q(u))\wedge(\exists z)(\sim Q(z)\vee P(z,y))$