

第3章 集合及其运算

集合是现代数学中重要的基本概念之一,在数学领域中具有无可比拟的特殊性和重要性。在自然科学的研究中,经常会将一些相关的个体联合在一起进行研究,就是运用集合论的原理与方法进行研究的。集合论已经成为现代各数学分支的基础,同时还渗透到各个科学技术领域,成为不可或缺的数学工具和表达语言,在数据结构、开关理论、形式语言、自动机、人工智能、数据库等计算机相关领域有重要的应用。

本章学习目标及思政点

学习目标

- 集合的概念及其表示方法
- 集合的交、并、补和对称差等基本运算及其规律,化简集合表达式
- 集合的容斥原理及求解有限集的基数问题
- 利用基本定义法、公式法和集合成员表法证明新的集合恒等式

思政点

数学是一门古老而经典的学科,该学科历史悠久且成绩斐然,同时许多数学家具有坎坷人生经历,这些可增强学生文化自信,提高学生的爱国情怀;数学揭示的是普遍规律,蕴涵着丰富的哲学思想,能够培养学生的逻辑能力和创新能力;数学中的定义、定理和性质中蕴涵着丰富的思想、观点和方法,可以迁移到学习和生活中,指导我们的行为;通过集合基本概念的学习,学生可了解集合中元素与集合之间的关系,引申出个人与集体之间的关系,使学生正确认识个人与集体之间的利益关系,并树立正确的全局观念。

3.1 集合的基本概念

集合论的起源可以追溯到 16 世纪末期,人们开始对有关数集的研究。集合论的基础是由德国数学家康托尔(Cantor)在 19 世纪 70 年代奠定的,经过半个世纪的努力,到 20 世纪 20 年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位。可以说,现代数学各个分支的几乎所有成果都构筑在严格的集合理论上。

3.1.1 集合的概念

集合(set)是数学中一个最基本的概念。通常将一些具有确定的、可以区分的若干对象的全体称为集合,而将这些对象称为集合的元素。集合的元素不能重复出现,集合中的元素无顺序之分。例如,全体中国人的集合,它的元素就是每一个中国人。

通常,用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示元素。若 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A ,记为 $a \in A$ 。若 a 不是集合 A 的元素,则称 a 不属于 A ,记为

$a \notin A$ 。若组成集合的元素个数是有限的,则称为“有限集”,否则就称为“无限集”。

常见的几个集合用特定的符号表示如下:

1. 自然数集合 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
2. 整数集合 $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
3. 有理数集合 $\mathbf{Q} = \{x \mid x \text{ 是有理数}\}$
4. 实数集合 $\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 是实数}\}$
5. 复数集合 $\mathbf{C} = \{x \mid x = a + bi, a, b \in \mathbf{R}, i = -1\}$

3.1.2 集合的特性

集合性质包括确定性、互异性、无序性和抽象性。

(1) 确定性。确定性指集合中的元素是确定的。例如,若给定一个元素 a 和一个集合 A ,则元素 a 和集合 A 之间的关系是确定的,即 $a \in A$ 或者 $a \notin A$,二者必选其一,并且仅能选其一。

(2) 互异性。互异性指集合中的每个元素是可以互相区分的,并且每个元素只能出现一次。如果某个元素在集合中出现多次,也只能看作一个元素。例如,集合 $\{1, 2, 3, 3\}$ 就是集合 $\{1, 2, 3\}$ 。

(3) 无序性。无序性指组成一个集合的每个元素在该集合中是无次序的,可以任意排列,即集合的表现形式不是唯一的。例如,集合 $\{1, 2, 3\}$ 和集合 $\{2, 1, 3\}$ 是同一个集合。

(4) 抽象性。抽象性指集合中的元素可以是具体的,也可以是抽象的,甚至一个集合也可以作为另一个集合的元素。例如,集合 $\{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ 。

集合与元素之间存在属于“ $\in$ ”或不属于“ $\notin$ ”关系。

定义 3.1 设 A 为任意集合,用 $|A|$ 表示 A 含有不同元素的个数,也称为集合 A 的基数,则有:

- (1) 若 $|A| = 0$,则称 A 为空集,记为 $\emptyset$;
- (2) 若 A 包含所讨论问题的全部元素,则称 A 为全集,记为 U ;
- (3) 若 $|A| \neq 0$,则称 A 为非空集;
- (4) 若 $|A|$ 为某自然数,则称 A 为有限集;
- (5) 若 $|A|$ 为无穷,则称 A 为无限集。

例 3.1 举出集合 A, B 和 C 的例子,使得 $A \in B, B \in C$ 且 $A \notin C$ 。

解: $A = \{a\}; B = \{\{a\}, b\}; C = \{\{\{a\}, b\}, c\}$ 。

例 3.2 求证: 如果 $A \in \{\{b\}\}$,那么 $b \in A$ 。

证明: 由于 A 为集合 $\{\{b\}\}$ 的元素,而集合 $\{\{b\}\}$ 中只有一个元素 $\{b\}$,所以 $A = \{b\}$; 又因为 $b \in \{b\}$,所以 $b \in A$ 。

3.1.3 集合的表示方法

集合是由它所包含的元素完全确定的。集合可以有多种表示方法。常用的有列举法、描述法和文氏图法。

1. 列举法(枚举法)

列举法(枚举法)是将集合中的元素一一列举出来,或者列出足够多的元素,反映集合中成员的特征,并置于一对花括号内,元素之间用逗号隔开。

例如, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 或 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

列举法的优点在于具有透明性,但并不是所有的集合都可以用列举法表示。例如,闭区间 $[0, 1]$ 中的所有实数,就无法用列举法来表示。从计算机存储的角度看,列举法是一种“静态”表示法,将占据大量的内存。

例 3.3 用列举法表示下列集合。

- (1) 小于 5 的非负整数集合。
- (2) 10~20 之间的素数集合。
- (3) 不超过 65 的 12 之正整数倍数的集合。

解: (1) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 。

(2) $\{11, 13, 17, 19\}$ 。

(3) $\{12, 24, 36, 48, 60\}$ 。

2. 描述法

描述法是用一个条件来描述集合中元素具有的共同性质。该条件可以是一句话、一个或多个表达方式。

例如, $A = \{x | P(x)\}$ 或 $A = \{x : P(x)\}$ 。

其中, $P(x)$ 表示“ x 满足性质 P ”或“ x 具有性质 P ”。 $A = \{x | P(x)\}$ 或 $A = \{x : P(x)\}$ 的意义是: 集合 A 由且仅由满足性质 P 的对象所组成,也就是说 $a \in A$ 当且仅当 a 满足性质 P (或 $P(a)$ 为真)。若 a 不属于该集合,则 $P(a)$ 为假。

描述法是隐式表示方法。这种方法是通过给出集合中元素的特性来描述集合的。用描述法表示集合比较方便,尤其适用于元素较多或无穷的集合。例如,闭区间 $[0, 1]$ 中的所有实数可以表示为 $\{x | 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$ 。

例 3.4 用描述法给出下列集合。

- (1) 所有正偶数的集合。
- (2) 不超过 100 的自然数的集合。
- (3) 10 的整倍数的集合。

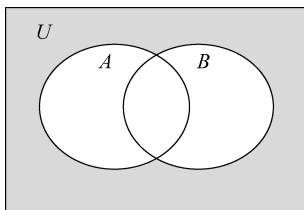
解: (1) $\{x | x = 2n \wedge n \in \mathbf{Z}^+\}$;

(2) $\{x | x \in \mathbf{N} \wedge x \leq 100\}$;

(3) $\{x | x = 10n \wedge n \in \mathbf{Z}\}$ 。

3. 文氏图法(图示法)

文氏图是用平面上封闭曲线来表示集合及其相互关系的一种图示方法,一般用一个矩形表示全集 U ,用椭圆或圆表示 U 的子集 A 、 B 等,如图 3.1 所示。

图 3.1 集合 A 和集合 B

文氏图法可以形象和直观地描述集合间的关系和有关运算,优点是直观、易于理解,但理论基础不严谨,故只能用于说明,不能用于证明。

3.2 集合间的关系

集合的包含与相等是集合之间的两个基本关系,两个集合之间也可以没有任何关系。下面就具体讨论集合之间的包含关系和相等关系。

3.2.1 包含关系

定义 3.2 设 A 、 B 为任意两个集合,则有:

(1) 如果对于每个 $a \in A$ 皆有 $a \in B$,那么称“ A 为 B 的子集”或“ B 包含 A ”,记作 $A \subseteq B$,读作“ A 包含于 B ”;也可记作 $B \supseteq A$,读作“ B 包含 A ”。称 $\subseteq$ 为包含关系。

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,则称“ A 为 B 的真子集”或“ B 真包含 A ”,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

定理 3.1 设 A 、 B 和 C 为任意三个集合,则有:

- (1) $\emptyset \subseteq A$;
- (2) $A \subseteq A$;
- (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;
- (4) 若 $A \supseteq B$ 且 $B \supseteq C$,则 $A \supseteq C$ 。

根据定义可知,集合间的包含关系具有下列性质。

自反性: 对于任意集合 A ,有 $A \subseteq A$ 。

反对称性: 对任意两个集合 A 和 B ,若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则 $A = B$ 。

传递性: 对任意 3 个集合 A 、 B 、 C ,若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$ 。

例 3.5 设集合 $A = \{1, 3, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 9\}$, $C = \{1, 9\}$,判定集合 A 、 B 和 C 的关系。

解: C 是 A 的子集,又是 B 的子集,但 B 不是 A 的子集,因为 $2 \in B$ 而 $2 \notin A$;同理, A 也不是 B 的子集,因为 $3 \in A$ 而 $3 \notin B$ 。

3.2.2 相等关系

定义 3.3 设 A 、 B 为任意两个集合,则有:

- (1) 若 A 和 B 中的元素完全相同,则称“ A 和 B 相等”,记作 $A = B$;否则称“ A 和 B 不

相等”,记作 $A \neq B$ 。

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称“A 和 B 相等”, 记作 $A = B$; 否则, 称“A 和 B 不相等”, 并记作 $A \neq B$ 。

定理 3.2 设 A, B 为任意两个集合, $A = B$ 的充要条件是 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 即两个集合相等的充要条件是它们互为子集。

证明: 必要性: $A = B \Rightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

因为 $A = B$, 由定义可知, A 中的每一个元素都是 B 中的元素, 所以 $A \subseteq B$ 。同理, B 中的每一个元素都是 A 中的元素, 所以 $B \subseteq A$ 。

充分性: $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ 。

用反证法。如果 $A \neq B$, 则 A 中至少有一个元素不在 B 中, 与 $A \subseteq B$ 矛盾; 或者 B 中至少有一个元素不在 A 中, 与 $B \subseteq A$ 矛盾。 $A \neq B$ 不可能成立, 所以 $A = B$ 。

根据定义可知, 集合间的相等关系具有下列性质。

自反性: 对于任意集合 A , 有 $A = A$ 。

对称性: 对任意两个集合 A, B , 若 $A = B$, 则 $B = A$ 。

传递性: 对任意 3 个集合 A, B, C , 若 $A = B$ 且 $B = C$, 则 $A = C$ 。

例 3.6 确定下列集合中哪些是相等的。

(1) $A = \{x \mid x \text{ 为偶数且 } x^2 \text{ 为奇数}\}$ 。

(2) $B = \{x \mid \text{有 } y \in \mathbf{Z} \text{ 使 } x = 2y\}$ 。

(3) $C = \{1, 2, 3\}$ 。

(4) $D = \{0, 2, -25, -34, -4\}$ 。

(5) $E = \{2x \mid x \in \mathbf{Z}\}$ 。

(6) $F = \{3, 3, 2, 1, 2\}$ 。

(7) $G = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = 0\}$ 。

解: $A = G, B = E, C = F$ 。

3.2.3 特殊集合

在集合论中有两个特殊的集合, 即空集和全集, 这两个集合在集合论中占有很重要的地位。

定义 3.4 不包含任何元素的集合称为空集, 用符号 $\emptyset$ 或 $\{\}$ 表示。

由定义可以看出, 如果集合 A 为空集, 则有 $|A| = 0$ 。空集的引入可以使许多问题的叙述得到简化。

例如: 集合 $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x^2 + 6x + 7 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 为空集, 即 $|A| = 0$ 。

定理 3.3 空集是唯一的。

证明: 假设有两个空集 $\emptyset_1$ 和 $\emptyset_2$, 由定理 3.2 可得 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$, 且 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ 。再由集合相等的定义可知 $\emptyset_1 = \emptyset_2$, 所以空集是唯一的。

定理 3.4 设 A, B 为任意两个集合, 则有:

(1) $\emptyset \in P(A)$;

(2) $A \in P(A)$;

(3) 若 $A \subseteq B$, 则 $P(A) \subseteq P(B)$ 。

例 3.7 列举下列集合的全部子集。

(1) $\{1, 2, 3\}$ 。

(2) $\{1, \{2, 3\}\}$ 。

(3) $\{\{1, \{2, 3\}\}\}$ 。

(4) $\{\emptyset\}$ 。

(5) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 。

(6) $\{\{1, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 2\}\}$ 。

(7) $\{\{\emptyset, 2\}, \{2\}\}$ 。

解:

(1) 有 8 个子集: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 。

(2) 有 4 个子集: $\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}$ 。

(3) 有 2 个子集: $\emptyset, \{\{1, \{2, 3\}\}\}$ 。

(4) 有 2 个子集: $\emptyset, \{\emptyset\}$ 。

(5) 有 4 个子集: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 。

(6) 有 2 个子集: $\emptyset, \{\{1, 2\}\}$ 。

(7) 有 4 个子集: $\emptyset, \{\{\emptyset, 2\}\}, \{\{2\}\}, \{\{\emptyset, 2\}, \{2\}\}$ 。

定义 3.5 在一个具体问题中, 如果所涉及的集合都是某个集合的子集, 则将这个集合称为全集, 记作 U 或 E 。

例如, 全体自然数组成了自然数的全集。

3.3 集合的运算

集合的运算就是以给定的一个或多个集合(称为运算对象), 按照一定的规则得到另外一个新的集合(称为运算结果)的过程。给定的集合 A 和 B 可以通过并($\cup$)、交($\cap$)、差($-$)和对称差($\oplus$)等运算产生新的集合。

3.3.1 集合的基本运算

定义 3.6 设 A, B 为任意两个集合, 令

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 和 } x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \notin A \cap B\} = (A \cup B) - (A \cap B)$$

分别称 $A \cup B$ 、 $A \cap B$ 、 $A - B$ 和 $A \oplus B$ 为 A 与 B 的并、交、差和对称差; 称差 $U - A$ 为 A 对于某全集 U 的补集, 并用 $\bar{A}$ 来表示。如果 $A \cap B = \emptyset$, 称 A 和 B 不相交。

例 3.8 给定下列自然数的集合:

$$A = \{1, 2, 7, 8\}.$$

$$B = \{i \mid i^2 < 50\}.$$

$$C = \{i \mid i \text{ 可被 } 3 \text{ 整除}, 0 \leq i \leq 30\}.$$

$$D = \{i \mid i = 2^k, k \in \mathbf{Z}^+, 1 \leq k \leq 6\}.$$

求下列集合:

$$(1) A \cup (B \cup (C \cup D)).$$

$$(2) A \cap (B \cap (C \cap D)).$$

$$(3) B - (A \cup C).$$

$$(4) (\bar{A} \cap B) \cup D.$$

解: 根据给定的条件, 得到

$$\text{集合 } B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

$$\text{集合 } C = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}.$$

$$\text{集合 } D = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}.$$

$$\text{集合 } \bar{A} = \{0, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$(1) A \cup (B \cup (C \cup D)) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 21, 24, 27, 30, 32, 64\}.$$

$$(2) A \cap (B \cap (C \cap D)) = \emptyset.$$

$$(3) B - (A \cup C) = \{4, 5\}.$$

$$(4) (\bar{A} \cap B) \cup D = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16, 32, 64\}.$$

例 3.9 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{2, 4\}$, 试求下列集合。

$$(1) A \cap \bar{B}.$$

$$(2) (A \cap B) \cup \bar{C}.$$

$$(3) \overline{A \cap B}.$$

$$(4) \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$(5) (A - B) - C.$$

$$(6) A - (B - C).$$

$$(7) (A \oplus B) \oplus C.$$

$$(8) (A \oplus B) \oplus (B \oplus C).$$

解: 根据给定的条件, 可得

$$\bar{A} = \{2, 3, 5\}.$$

$$\bar{B} = \{3, 4\}.$$

$$\bar{C} = \{1, 3, 5\}.$$

$$(1) \{4\}.$$

$$(2) \{1, 3, 5\}.$$

$$(3) \{2, 3, 4, 5\}.$$

$$(4) \{2, 3, 4, 5\}.$$

$$(5) \emptyset.$$

$$(6) \{4\}.$$

$$(7) \{5\}.$$

$$(8) \{1, 2\}.$$

定理 3.5 设任意集合 A, B 和 C , 则有:

- (1) $A \subseteq A \cup B$ 且 $B \subseteq A \cup B$;
- (2) $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$;
- (3) $A - B \subseteq A$;
- (4) $A - B = A \cap \bar{B}$;
- (5) 若 $A \subseteq B$, 则 $\bar{B} \subseteq \bar{A}$;
- (6) 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \cup B \subseteq C$;
- (7) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 则 $A \subseteq B \cap C$ 。

定理 3.6 设 A, B 为任意两个集合, 则以下条件互相等价。

- (1) $A \subseteq B$ 。
- (2) $A \cup B = B$ 。
- (3) $A \cap B = A$ 。

定理 3.7 设 A, B, C 是全集 U 的任意子集。

幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

同一律 $A \cup \emptyset = A, A \cap U = A$

零律 $A \cup U = U, A \cap \emptyset = \emptyset$

互补律 $A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset$

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$

德摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\bar{\bar{U}} = \emptyset$$

$$\bar{\emptyset} = U$$

对合律 $\bar{\bar{A}} = A$

例 3.10 求证: 对任意集合 A, B 和 C , 等式 $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ 成立的充要条件是 $C \subseteq A$ 。

证明: 必要性: $C \subseteq (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \subseteq A$, 即 $C \subseteq A$ 。

充分性: 若 $C \subseteq A$, 则 $A \cup C = A, (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$ 。

例 3.11 设 A 表示大学一年级学生集合, B 表示大学二年级学生集合, M 表示数学专业学生集合, C 表示计算机专业的学生集合, L 表示听离散数学课的学生集合, G 表示星期一晚上参加学术讲座的学生集合, H 表示星期一晚上很迟才睡觉的学生集合。问下列各句子所对应的集合表达式分别是什么?

(1) 所有计算机专业二年级的学生在学离散数学课。

(2) 这些且只有这些听离散数学课的学生或者星期一晚上去参加学术讲座的学生在星期一晚上很迟才睡觉。

(3) 听离散数学课的学生都没参加星期一晚上的学术讲座。

(4) 这个学术讲座只有大学一、二年级的学生参加。

(5) 除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加了学术讲座。

解: (1) $B \cap C \subseteq L$ 。

(2) $H = G \cup L$ 。

(3) $L \cap G = \emptyset$ 。

(4) $G \subseteq A \cup B$ 。

(5) $B - (C \cup M) \subseteq G$ 。

3.3.2 有限集的计数

计算有限集中元素的个数就是有限集的计数问题。有了集合的运算定律和定义 3.1 中集合基数的概念, 可以求出任意一个有限集中元素的个数。计算有限集中元素的个数通常有文氏图法和容斥定理法两种方法。

1. 文氏图法

通常从 n 个集合的交集填起, 根据计算结果逐步将数字填入其他空白区域。如果不知道交集的值, 可以设为 x , 根据题目的条件列方程或方程组, 求出所需结果。

图 3.2 中的画横线部分表示了每个图题所指出的集合。

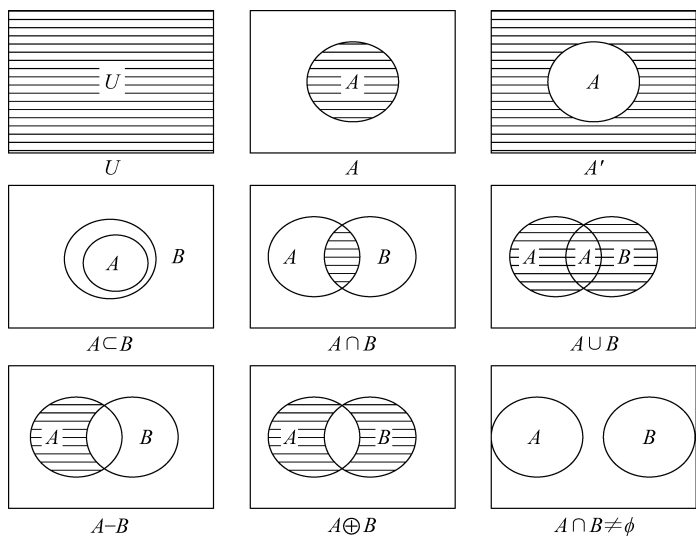


图 3.2 文氏图结果

例 3.12 设某校运动员共有 70 人, 其中乒乓球队员、篮球队员和排球队员分别有 38 人、35 人和 32 人, 有 8 人同时参加三个队。求同时参加两个队的队员有多少人?

解: 在如图 3.3 所示的文氏图中, 用 A 、 B 和 C 分别表示乒乓球、篮球和排球队员的集合, 同时参加两个队的队员集合为 $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$ 。

由题设可知, $|A| = 38$, $|B| = 35$, $|C| = 32$, $|A \cap B \cap C| = 8$, $|A \cup B \cup C| = 70$, 故有 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

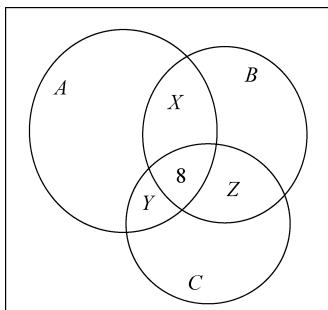


图 3.3 例 3.12 文氏图

$$70 = 38 + 35 + 32 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 8$$

$$70 = 113 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

设 $X = |A \cap B|$, $Y = |A \cap C|$, $Z = |B \cap C|$, 则 $X + Y + Z = 43$ 。

由于 $(A \cap B \cap \bar{C})$, $(A \cap \bar{B} \cap C)$ 和 $(\bar{A} \cap B \cap C)$ 两两不相交,

$$\begin{aligned} & \overline{(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)} \\ &= |(A \cap B \cap \bar{C})| + |(A \cap \bar{B} \cap C)| + |(\bar{A} \cap B \cap C)| \\ &= |(A \cap B)| - (A \cap B \cap C) + (A \cap C) - (A \cap B \cap C) + |(B \cap C)| - (A \cap B \cap C)| \\ &= X + Y + Z - 3|A \cap B \cap C| \\ &= 43 - 3 \times 8 \\ &= 19 \end{aligned}$$

因此,同时参加两个队的队员有 19 人。

2. 容斥定理法

定理 3.8 对任意两个有限集 A, B , 有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|。$$

在计数时,为了使若干集合重叠部分的元素的个数不被重复计算,人们研究出一种计数方法。基本思想是:不考虑重叠的情况,把包含于这些集合中的所有元素个数先分别计算出来,然后再把计数时重复计算的元素个数排斥出去,使计算的结果既无遗漏又无重复,这种计数的方法称为容斥定理。

推广结论:对于任意三个有限集 A, B, C , 有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|。$$

例 3.13 某学校学生选课的情况如下: 260 名学生选法语, 208 人选德语, 160 人选俄语, 76 人选法语和德语, 48 人选法语和俄语, 62 人选德语和俄语, 三门课都选的有 30 人, 三门都没选的有 150 人。

问: 共有多少学生? 有多少学生只选法语和德语? 有多少学生只选俄语?

解: 根据给定的条件, 设 A, B, C 分别表示学习法语、德语和俄语的学生集合, 则有 $|A| = 260$, $|B| = 208$, $|C| = 160$, $|A \cap B| = 76$, $|A \cap C| = 48$, $|B \cap C| = 62$, $|A \cap B \cap C| = 30$, $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 150$ 。

由容斥定理得

$$\begin{aligned}
 & |A \cup B \cup C| \\
 &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
 &= 260 + 208 + 160 - 76 - 48 - 62 + 30 \\
 &= 472
 \end{aligned}$$

(1) 共有学生 $472 + 150 = 622$ 人。

(2) 只选法语和德语的学生有 $76 - 30 = 46$ 人。

(3) 只选俄语的学生有 $48 + 62 - 30 = 80$ 人。

3.4 幂集和编码

3.4.1 幂集

幂集是集合的基本运算之一。所谓幂集(power set),就是原集合中所有子集(包括全集和空集)构成的集族。

定义 3.7 设 A 为任意集合,令 $P(A) = \{x | x \subseteq A\}$,称 $P(A)$ 为 A 的幂集,有时也记为 2^A ,或称幂集公理。

定理 3.9 集合 A 中所包含的不同元素的个数称为集合 A 的基数,通常用 $|A|$ 或 $\text{Card}(A)$ 表示,若 A 为有限集,则 $|P(A)| = 2^{|A|}$ 。

求集合 A 的幂集,需要按照顺序求集合 A 中由低元到高元的所有子集,再将这些子集组成集合(低元到高元的所有子集): 0 元集,1 元集,2 元集, ..., n 元集。

例如: 若集合 $A = \{a, b, c\}$, 则

0 元集 $\emptyset$ 。

1 元集 $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ 。

2 元集 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ 。

3 元集 $\{a, b, c\}$ 。

集合 A 的幂集是 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ 。

例 3.14 求下列集合的幂集。

(1) $\{a, b\}$ 。

(2) $\{\emptyset, a\}$ 。

(3) $\{\emptyset, a, \{b\}\}$ 。

解: (1) 对于集合 $\{a, b\}$, 含 0 个元素的子集是 $\emptyset$, 含 1 个元素的子集是 $\{a\}, \{b\}$, 含 2 个元素的子集是 $\{a, b\}$, 所以 $\{a, b\}$ 的幂集是 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 。

(2) 对于集合 $\{\emptyset, a\}$, 含 0 个元素的子集是 $\emptyset$, 含 1 个元素的子集是 $\{\emptyset\}, \{a\}$, 含 2 个元素的子集是 $\{\emptyset, a\}$, 所以 $\{\emptyset, a\}$ 的幂集是 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$ 。

(3) 对于集合 $\{\emptyset, a, \{b\}\}$, 含 0 个元素的子集是 $\emptyset$, 含 1 个元素的子集是 $\{\emptyset\}, \{a\}, \{\{b\}\}$, 含 2 个元素的子集是 $\{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{a, \{b\}\}$, 含 3 个元素的子集是 $\{\emptyset, a, \{b\}\}$, 所以 $\{\emptyset, a, \{b\}\}$ 的幂集是 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{a, \{b\}\}, \{\emptyset, a, \{b\}\}\}$ 。

3.4.2 幂集元素与编码

“编”就是将某样东西按照一定的规则放到一起,“码”在这里是数字的意思。编码就是将某东西编成数字。如邮政编码,就是将不同范围内的邮局编成不同的数字。计算机里只有0和1,编码就是将文本字符编成一系列的0和1。编码过程是计算编码矩阵中元素和数组的乘积过程。为保证乘积运算的结果仍在一个字节以内(0~255),必须应用到有限域。设集合 X 中有 n 个元素,下标为 n 位二进制数,每一位对应集合 X 中的一个元素。如果元素在某个子集中出现,则相应的二进制位为1,否则为0。

例如:以集合 $X=\{x,y,z\}$ 为例, $P(X)=\{x_i \mid i \in J\}$, $J=\{I \mid i \text{ 是二进制数且 } 000 \leq i \leq 111\}$ 。

$P(X)$ 中各个元素描述如下:

$$\emptyset = P_{000}, \{x\} = P_{100}, \{y\} = P_{010}, \{z\} = P_{001}, \{x,y\} = P_{110}, \{x,z\} = P_{101}, \{y,z\} = P_{011}, \{x,y,z\} = P_{111}。$$

有了集合的编码表示法,可以利用它来表示集合的运算。

两个子集的交集的编码是两个子集的编码对应位置的布尔积。布尔乘法规则如下:

$$1 \times 1 = 1, 1 \times 0 = 0, 0 \times 1 = 0, 0 \times 0 = 0, \text{ 则 } P_{001} \text{ 与 } P_{101} \text{ 的交集为 } P_{001}。$$

两个子集的并集的编码是两个子集的编码对应位置的布尔加法。布尔加法规则如下:

$$1 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1, 0 + 0 = 0, \text{ 则 } P_{001} \text{ 与 } P_{101} \text{ 的并集为 } P_{101}。$$

例 3.15 设集合 $P=\{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ 。求 P_{15} 和 P_{22} 所表示的子集,如何表示子集 $\{a_3, a_5\}$ 和 $\{a_2, a_4, a_6\}$?

$$\text{解: } P_{15} = P_{001111} = \{a_3, a_4, a_5, a_6\}。$$

$$P_{22} = P_{010110} = \{a_2, a_4, a_5\}。$$

$$\{a_3, a_5\} = P_{001010} = P_{10}。$$

$$\{a_2, a_4, a_6\} = P_{010101} = P_{21}。$$

3.5 集合恒等式证明

集合等式就是判定用两种不同形式定义、描述或表达的集合相等。证明集合等式也就是证明两个集合相等,是学习“离散数学”课程需要掌握的基本内容之一。通过对集合恒等式的证明,可以加深对集合性质的理解与掌握,是一种基本功的训练。本节主要通过三种方法证明恒等式,分别是基本定义法、公式法和集合成员表法。

3.5.1 基本定义法

基本定义法就是利用集合相等的定义,通过考查一个集合的元素是否相互属于另一个集合而证明集合等式的方法。

例 3.16 设 A, B 是任意两个集合,证明下面的吸收律。

$$(1) A \cup (A \cap B) = A。$$

证明: 对于任意的 X ,有

$$\begin{aligned}
 & X \in A \cup (A \cap B) \\
 \Leftrightarrow & X \in A \vee X \in (A \cap B) && (\text{集合并的定义}) \\
 \Leftrightarrow & X \in A \vee (X \in A \wedge X \in B) && (\text{集合交的定义}) \\
 \Leftrightarrow & X \in A && (\text{吸收律})
 \end{aligned}$$

$$(2) A \cap (A \cup B) = A.$$

证明：对于任意的 X ，有

$$\begin{aligned}
 & X \in A \cap (A \cup B) \\
 \Leftrightarrow & X \in A \wedge X \in (A \cup B) && (\text{集合交的定义}) \\
 \Leftrightarrow & X \in A \wedge (X \in A \vee X \in B) && (\text{集合并的定义}) \\
 \Leftrightarrow & X \in A && (\text{吸收律})
 \end{aligned}$$

但很多时候在证明过程中，当任意元素 X 属于某个集合与 X 属于另一个集合这两个命题之间不是简单的双蕴涵关系时，就不能用“当且仅当”进行证明。对于涉及复杂的等式，可以通过公式法或集合成员表法来证明。

3.5.2 公式法

公式法就是利用已证明过的集合恒等式的演算方式来证明所要结论的方法。证明时应注意以下几个基本原则。

- (1) 将集合运算表达式中的其他运算符号转换为 $\cup$ 和 $\cap$ 。
- (2) 将补运算作用到单一集合上。
- (3) 左式 $\Rightarrow$ 右式；右式 $\Rightarrow$ 左式；左式 $\Rightarrow$ 中间式，右式 $\Rightarrow$ 中间式。
- (4) 根据基本运算符号的定义和运算规律转换。

例 3.17 对任意集合 A, B, C ，证明下列各等式。

- (1) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$ 。
- (2) $A \cup (B - A) = A \cup B$ 。
- (3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ 。
- (4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ 。
- (5) $A - (A - B) = A \cap B$ 。
- (6) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$ 。

证明：(1) $(A \cap B) - C = A \cap B \cap \bar{C} = A \cap (B \cap \bar{C}) = A \cap (B - C)$ 。

$$(2) A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = A \cup B.$$

$$(3) (A - B) \cap (A - C) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \overline{B \cup C} = A - (B \cup C).$$

$$(4) (A - B) \cup (A - C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = A \cap \overline{B \cap C} = A - (B \cap C).$$

$$(5) A - (A - B) = A \cap \overline{A \cap \bar{B}} = A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

$$(6) (A - B) \cup (A \cap C) = (A \cap \bar{B}) \cup A \cap C = A \cap (\bar{B} \cup C) = A \cap \overline{B \cap \bar{C}} = A \cap (B - C) = A - (B - C).$$

实际上，在集合表达式中，通常认为集合和幂运算的优先级最高，其他依次是集合交、集合合并和对称差。尽量使用圆括号将每个运算的操作表达清楚。

例 3.18 化简集合表达式 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$ 。

利用集合成员表可以判断集合的性质与集合间的关系,判断规则如下:

- (1) 若集合是全集,则其成员表值必全为 1,即所有集合都是它的成员;
- (2) 若集合是空集,则其成员表值必全为 0,即没有集合是它的成员;
- (3) 若集合 A 和集合 B 相等,则它们的成员表对应行的值必相同;
- (4) 若集合 A 是集合 B 的子集,则当 A 的值为 1 时, B 的对应行的值必为 1。

3.6 例题解析

例 3.21 设 $S = \{2, a, \{3\}, 4\}$, $R = \{\{a\}, 3, 4, 1\}$, 指出下列哪些是正确的,哪些是错误的?

- (1) $\{a\} \in S$. (2) $\{a\} \in R$. (3) $\{a, 4, \{3\}\} \subseteq S$. (4) $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subset R$.
- (5) $S = R$. (6) $\{a\} \subset R$. (7) $\{a\} \subseteq R$. (8) $\emptyset \subseteq R$.
- (9) $\emptyset \subseteq \{\{a\}\} \subseteq R$. (10) $\{\emptyset\} \subseteq S$. (11) $\emptyset \in R$. (12) $\emptyset \subseteq \{\{3\}, 4\}$.

解: 在集合的概念中需要注意两种关系的区别:一种是元素和集合的属于关系;另一种是集合与集合之间的(真)包含关系,特别是空集是任意集合的子集。

- (1) (4) (5) (7) (10) (11) 是错误的, (2) (3) (6) (8) (9) (12) 是正确的。

例 3.22 若 A, B 为集合,则 $A \subseteq B$ 和 $A \in B$ 能同时成立吗? 请证明你的结论。

解: $A \subseteq B$ 和 $A \in B$ 有可能同时成立。

因为 $A \subseteq B$, 要求 A 中的元素都在 B 中,但 B 中除去 A 的元素外,还可能还有其他元素。故如果 B 中有元素为集合 A 时,则本命题就可能成立。

例如: $A = \{a\}$, $B = \{a, \{a\}\}$, 则就有 $A \subseteq B \wedge A \in B$ 。

例 3.23 求下列集合的幂集。

- (1) $\{a, \{b\}\}$.
- (2) $\{1, \emptyset\}$.

解: (1) 设 $A = \{a, \{b\}\}$, 则 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a, \{b\}\}\}$ 。

(2) 设 $B = \{1, \emptyset\}$, 则 $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1, \emptyset\}\}$ 。

例 3.24 用列举法或描述法表示下列集合。

- (1) 能被 3 整除且小于 16 的正整数。
- (2) 小于 10 的正偶数。
- (3) 小于 100 的正奇数。
- (4) 所有能被 5 整除的正整数。

解: (1) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ 。

(2) $\{2, 4, 6, 8\}$ 。

(3) $\{x \mid x = 2n + 1 \wedge n \in \mathbf{N} \wedge x < 100\}$ 。

(4) $\{x \mid x = 5n \wedge n \in \mathbf{Z}^+\}$ 。

例 3.25 求证: 对任意集合 A 和 B , $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ 。

证明: $\forall S \in P(A) \cap P(B)$, 有 $S \in P(A)$ 且 $S \in P(B)$, 所以 $S \subseteq A$ 且 $S \subseteq B$ 。从而 $S \subseteq A \cap B$, 故 $S \in P(A \cap B)$ 。即 $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$ 。

$\forall S \in P(A \cap B)$, 有 $S \subseteq A \cap B$, 所以 $S \subseteq A$ 且 $S \subseteq B$, 从而 $S \in P(A)$ 且 $S \in P(B)$, 故 $S \in P(A) \cap P(B)$ 。即 $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$ 。

故 $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ 。

例 3.26 对任意集合 A, B, C , 求证 $(A \cup C) - (B \cup C) \subseteq A - B$ 。

证明: $(A \cup C) - (B \cup C) = (A \cup C) \cap \overline{B \cup C} = (A \cup C) \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$
 $= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B} \cap \bar{C})$
 $= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \subseteq A \cap \bar{B}$
 $= A - B$

例 3.27 某学校学生选课的情况如下: 200 人选计算机, 150 人选英语, 160 人选日语, 66 人选计算机和英语, 48 人选计算机和日语, 62 人选英语和日语, 三门课都选的有 30 人, 三门都没选的有 100 人, 问: 学生共有多少人? 有多少人只选计算机和英语? 有多少人只选日语?

解: 根据给定的条件, 设 A, B, C 分别表示学习计算机、英语和日语的学生的集合, 则有 $|A| = 200, |B| = 150, |C| = 160, |A \cap B| = 66, |A \cap C| = 48, |B \cap C| = 62, |A \cap B \cap C| = 30, |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 100$ 。

由容斥定理可得

$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 200 + 150 + 160 - 66 - 48 - 62 + 30 \\ &= 364 \end{aligned}$$

(1) 共有学生 $364 + 100 = 464$ 人。

(2) 只选计算机和英语的有 $66 - 30 = 36$ 人。

(3) 只选日语的有 $48 + 62 - 30 = 80$ 人。

本章小结

1. 重点与难点

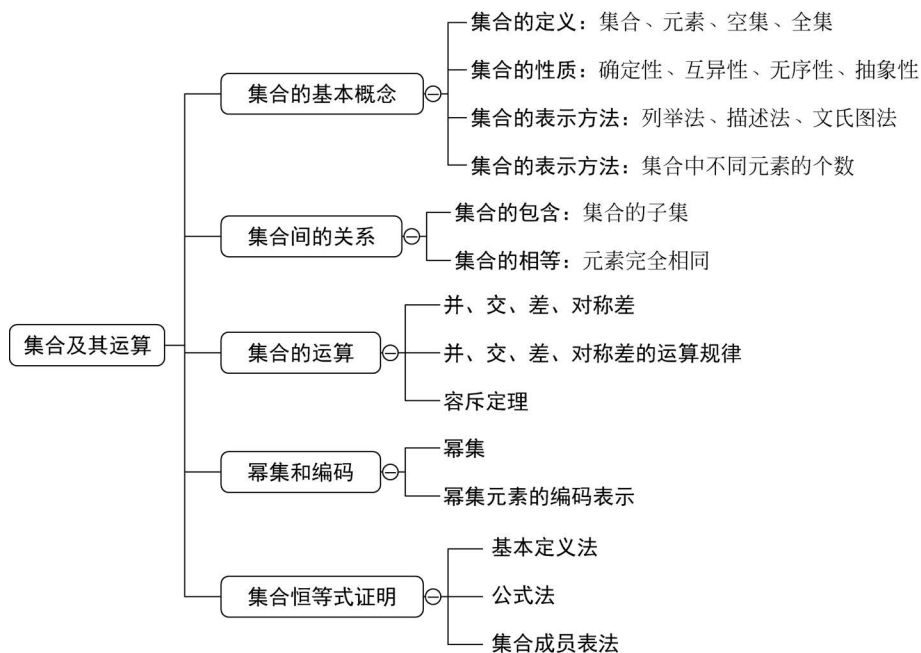
本章重点:

- (1) 元素与集合的属于关系, 集合与集合的包含关系;
- (2) 空集和幂集的定义, 有限集幂集元素的编码表示;
- (3) 集合的并、交、差和对称差运算及运算规律, 容斥定理的应用;
- (4) 基本定义法、公式法和集合成员表法证明集合恒等式。

本章难点:

- (1) 幂集、有限集和幂集元素的编码表示;
- (2) 证明两个集合的包含与相等;
- (3) 容斥定理的应用。

2. 思维导图



习 题

1. 选择题

- (1) 判断下列命题哪个为真? ()
- A. $A - B = B - A \Rightarrow A = B$ B. 空集是任何集合的真子集
- C. 空集只是非空集的子集 D. 若 A 的一个元素属于 B , 则 $A = B$
- (2) 在 0 与 $\emptyset$ 之间的关系可表示为 $0(\quad)\emptyset$.
- A. $=$ B. $\subseteq$ C. $\in$ D. $\notin$
- (3) A, B, C 是三个集合, 则下列哪几个推理正确? ()
- A. $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ B. $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \in B$
- C. $A \in B, B \in C \Rightarrow A \in C$
- (4) 设 $S_1 = \{1, 2, \dots, 8, 9\}, S_2 = \{2, 4, 6, 8\}, S_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, S_4 = \{3, 4, 5\}, S_5 = \{3, 5\}$, 在条件 $X \subseteq S_1$ 且 $X \not\subseteq S_3$ 下, x 与 () 集合可能相等。
- A. $X = S_2$ 或 S_5 B. $X = S_4$ 或 S_5
- C. $X = S_1, S_2$ 或 S_4 D. X 与 $S_1, \dots, S_5$ 中任何集合都不相等
- (5) 设 $S = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$, 则有 () $\subseteq S$.
- A. $\{\{1, 2\}\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1\}$ D. $\{2\}$
- (6) 设 $A = \{a, \{a\}\}$, 下列命题错误的是 ()。
- A. $\{a\} \in P(A)$ B. $\{a\} \subseteq P(A)$ C. $\{\{a\}\} \in P(A)$ D. $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$

2. 填空题

(1) 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{2, 4\}$,
 则 $\overline{(A \cap B)} =$ _____, $(A - B) - C =$ _____, $(A \oplus B) \oplus C =$ _____。

(2) 设 $|A| = 5$, 则 A 有 _____ 个子集元素。

(3) 空集的幂集基数是 _____。

(4) 在 _____ 条件下等式 $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ 成立。

3. 确定下列关系中哪些是正确的。

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$ 。

(2) $\emptyset \in \emptyset$ 。

(3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 。

(4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ 。

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ 。

(6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ 。

(7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ 。

(8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ 。

4. 设 $A = \{n | n \in \mathbf{Z}^+ \text{ 且 } n < 12\}$, $B = \{n | n \in \mathbf{Z}^+ \text{ 且 } n \leq 8\}$, $C = \{2n | n \in \mathbf{Z}^+\}$, $D = \{3n | n \in \mathbf{Z}^+\}$, $E = \{2n - 1 | n \in \mathbf{Z}^+\}$ 。试用 A, B, C, D 和 E 表示下列集合:

(1) $\{2, 4, 6, 8\}$ 。

(2) $\{3, 6, 9\}$ 。

(3) $\{10\}$ 。

(4) $\{n | n \text{ 为偶数且 } n > 10\}$ 。

(5) $\{n | n \text{ 为正偶数且 } n \leq 10, \text{ 或 } n \text{ 为奇数且 } n \geq 9\}$ 。

5. 判断下列各命题是否为真, 并说明理由。

(1) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$ 。

(2) 若 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$ 。

6. 求下列集合的幂集。

(1) $\{x, y, z\}$ 。

(2) $\{\emptyset, a, \{a\}\}$ 。

(3) $P(\emptyset)$ 。

7. 求证: 对任意的集合 S , 有 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in P(S)$ 。

8. 设某集合有 n 个元素, 则:

(1) 可构成多少个子集?

(2) 其中有多少个子集的元素个数为奇数?

(3) 是否有 $n+1$ 个元素的子集?

9. 对任意集合 A, B, C , 证明下列集合恒等式。

(1) $(A - B) \oplus B = A \cup B$ 。

(2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 。

(3) $A \cap (A \cup B) = A$ 。

10. 判断下列等式并举例说明。

(1) 已知 $A \cup B = A \cup C$, 是否必须 $B = C$?

(2) 已知 $A \oplus B = A \oplus C$, 是否必须 $B = C$?