



何谓稳态电路？比如前四章我们讨论的直流电源激励下的电阻电路，其电路中的电压、电流的大小和方向都不随时间变化，这就是直流稳态电路。本章将讨论在正弦电源激励下的正弦稳态电路，也就是在正弦电源激励下，电路中各部分产生的响应也按照正弦规律变化的电路。

在工农业生产和日常生活中有大量的正弦稳态电路，比如，电力系统中大多数电路即为正弦稳态电路，通信系统中常采用正弦信号，而对于非正弦周期性信号，我们可以借助傅里叶级数，将其分解为一系列不同频率的正弦波信号，因此，正弦稳态分析也是非正弦稳态分析的基础，是电路分析中十分重要的组成部分，具有广泛的理论和实际意义。

本章在正弦量的基本概念及其相量表示的基础上，介绍了两类约束的相量形式，以及电路的相量模型，由此对正弦稳态电路进行分析，并介绍了与本章内容相关的 Multisim 实战——瞬态分析和交流分析。

5.1 正弦量的基本概念

我们把电路中电压、电流均按同一频率的正弦时间函数变化的线性电路，称为正弦稳态电路，其中随时间按正弦规律变化的电压和电流分别称为正弦电压和正弦电流。由于这些正弦量的大小和方向均随时间作正弦规律变化，当分析正弦稳态电路中某一瞬时的电压或电流时，必须先设定它们的参考方向。

比如最简单的交流电阻电路，如图 5-1(a) 所示，图中标出电压 v 和电流 i 的参考方向，即表示正半周时的方向。而在负半周时，由于所标的参考方向与实际方向相反，其值则为负。

通常，正弦电压和正弦电流既可用 \sin 表示也可用 \cos 表示，本书采用 \cos 表示。在规定的参考方向下，正弦电压和正弦电流的一般表达式分别为

$$\begin{cases} v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases} \quad (5.1)$$

式(5.1)分别称为正弦电压和正弦电流的瞬时值表达式。

上述交流电阻电路中的正弦量可用式(5.1)来表示，其中 $\varphi_v = \varphi_i$ ，还可以用波形图来表示，如图 5-1(b) 所示，详见 5.3.2 节。

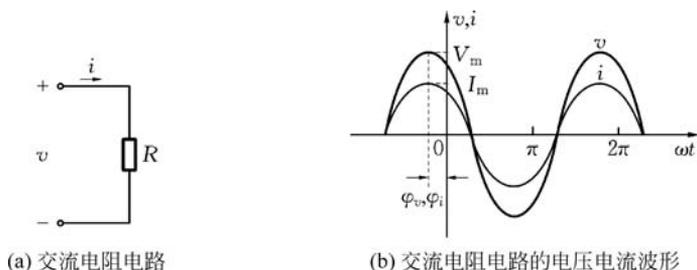


图 5-1 正弦电压和正弦电流的参考方向及其波形图

5.1.1 正弦量的三要素

由式(5.1)可以看出,正弦电压和正弦电流瞬时值表达式的形式是相同的,而每一个表达式都有三个物理量来决定,即 V_m 、 I_m 称为正弦量的最大值或振幅; ω 称为角速度或角频率; φ_v 、 φ_i 称为初相位。如果已知一个正弦量的最大值、角频率和初相位,则该正弦量即可唯一的确定下来,因此称这三个量为正弦量的三要素。

1. 最大值或振幅

正弦量在任一时刻的值称为瞬时值,以小写字母来表示,如式(5.1)中的 v 、 i 。正弦量在变化过程中出现的最大绝对值称为最大值(或幅值或振幅),以带有下标 m 的大写字母来表示,如 V_m 、 I_m 。显然,正弦量的幅值确定后,其变化范围也就确定了。

2. 周期、频率和角频率

(1) 周期 正弦量变化一次所需的时间称为周期,用 T 来表示,单位为秒(s)。

(2) 频率 单位时间内正弦量重复变化的次数称为频率,用 f 来表示,单位为赫(兹)(Hz)。周期与频率互为倒数关系,即

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.2)$$

我国工业用电的频率为 50Hz,也称为工频。除此之外,还有描述更高频率的单位,常用千赫(kHz)、兆赫(MHz)等,它们之间的换算关系为 $1\text{MHz} = 10^3\text{kHz} = 10^6\text{Hz}$ 。

(3) 角频率 正弦量在单位时间内变化的弧度称为角频率,用 ω 来表示,单位为弧度/秒(rad/s)。周期、频率和角频率三者的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (5.3)$$

据此,可以算出 50Hz 工频对应的角频率为

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 314\text{rad/s}$$

可见,周期、频率和角频率均可以表示正弦量随时间作周期性变化快慢的程度。

3. 初相位

由式(5.1)可知,正弦量的瞬时值除了与幅值有关外,还与 $(\omega t + \varphi)$ 值有关。我们把 $(\omega t + \varphi)$ 值称为正弦量的相位角(又称相位),它反映了正弦量变化的进程。

$t=0$ 时的相位角称为初相角(又称初相位或初相)。若幅值和初相已知,则正弦量在 $t=0$ 时的初始值便可以确定了。比如, $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$, 则 $t=0$ 时正弦电压的初始值为 $v(0) = V_m \cos \varphi_v$ 。

初相角与计时的零点有关。对于任意一个正弦量,初相可以任意指定。当初相位于坐标原点的左边时,则为正;初相位于坐标原点的右边时,则为负。若在同一个电路中有很多相关的正弦量时,这些正弦量需要相对于一个共同的计时零点来确定各自的初相。通常令初相为零的正弦量作为参考正弦量。

特别注意: 规定初相 $|\varphi| \leq \pi$ 。

在正弦稳态电路中,常需要分析比较两个同频率正弦量之间的相位关系。比如式(5.1)即为同频率的正弦电压和正弦电流,它们的相位角之差就是相位差,即

$$(\omega t + \varphi_v) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_v - \varphi_i$$

表明两个同频率正弦量在任意瞬时的相位差即为它们的初相之差,且与时间无关。

当 $\varphi_v - \varphi_i > 0$ 时,则称电压超前电流;当 $\varphi_v - \varphi_i < 0$ 时,则称电压滞后电流;当 $\varphi_v - \varphi_i = 0$ 时,则称电压与电流同相;当 $|\varphi_v - \varphi_i| = \frac{\pi}{2}$ 时,则称电压与电流相互正交;当 $|\varphi_v - \varphi_i| = \pi$ 时,则称电压与电流彼此反相。

5.1.2 正弦量的有效值

对于一个周期性的信号来说,其瞬时值是随时间变化的,通常没有必要知道它们每一个瞬间的大小,而需要知道周期量在一个周期内对外所做的功。因此,在工程上引入了有效值的概念,它是基于周期量的在一个周期内所做的功与直流量在同一时间内所做的功相比较来定义的。

若一周电流 i 流过电阻 R ,在一个周期内所做的功,与某一直流电流 I 流过同一个电阻 R 在相等时间内所做的功相等,则称直流电流 I 为周期电流 i 的有效值,可表示为

$$\int_0^T i^2 R dt = RI^2 T$$

由此可得周期电流的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (5.4)$$

表明周期电流 i 的有效值等于 i 的方均根值。同理,可以写出周期电压的有效值,即

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} \quad (5.5)$$

对于正弦电流来说,利用式(5.4),可导出其有效值与幅值的关系,即

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \frac{1 + \cos[2(\omega t + \varphi_i)]}{2} dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \approx 0.707 I_m \quad (5.6)$$

同理,可得正弦电压的有效值为

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \approx 0.707 V_m \quad (5.7)$$

据此,式(5.1)又可写成如下形式,即

$$\begin{cases} v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \varphi_v) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases} \quad (5.8)$$

特别提醒,通常所说的正弦电压、电流的大小均指其有效值的大小,比如日常生活中的用电电压 220V 即为有效值。另外,一些交流电气设备所标的电压、电流也是有效值,交流电压表、电流表也是按照有效值来刻度的。

5.2 正弦量的相量表示与相量变换

根据以上分析可知,正弦量可用瞬时值表达式和波形图来表示,这是正弦量的基本表示方法。这样,在正弦稳态电路中的电压、电流和功率等计算问题,势必会涉及同频率正弦量的运算,比如,两个同频率的正弦电压可用瞬时值表示为

$$v_1(t) = V_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$v_2(t) = V_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

两个电压之和为

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = V_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) + V_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

再利用三角公式求得 v 的幅值和初相。显然,利用正弦量的瞬时值进行计算是非常麻烦的。对此,人们常采用数学变换的方法,将正弦量的运算变换为相量的运算,而相量又有相量图和复数式两种表示形式,从而使对正弦稳态电路的分析变得简单。

5.2.1 正弦量的相量表示

设有一正弦量

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.9)$$

根据欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (5.10)$$

式(5.9)可表示为

$$f(t) = \operatorname{Re}(F_m e^{j(\omega t + \varphi)}) = \operatorname{Re}(F_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\dot{F}_m e^{j\omega t}) \quad (5.11)$$

式中, Re 为取复数的实部。

式(5.11)表明正弦量可以用复数指数函数来表示,且正弦量与其实部一一对应。复数指数函数中的 $F_m e^{j\varphi}$ 是以正弦量 $f(t)$ 的幅值 F_m 为模,以初相 φ 为幅角的复常数。我们把这个复常数定义为正弦量 $f(t)$ 的相量,以符号 \dot{F}_m 表示,即

$$\dot{F}_m = F_m e^{j\varphi} = F_m \angle \varphi \quad (5.12)$$

这是按照正弦量的幅值定义的相量,故式(5.12)称为幅值相量。由于正弦量的有效值是幅值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 故有

$$\dot{F}_m = F_m e^{j\varphi} = \sqrt{2} F e^{j\varphi} \quad (5.13)$$

这样,也可以定义有效值相量,即

$$\dot{F} = F e^{j\varphi} = F \angle \varphi \quad (5.14)$$

相量是一个复数,在复平面上可用有向线段来表示,有向线段的长度表示正弦量的幅值或有效值,有向线段与实轴之间的夹角表示正弦量的初相,据此表示相量的图形称为相量

图。图 5-2 给出了电压有效值相量和电流有效值相量的相量图。当把电路中的电压和电流相量表示在一个相量图中时,各个电压和电流的相量关系也就可以直接从相量图中看出来。

式(5.11)中的 $e^{j\omega t}$ 是一个随时间变化且以角速度 ω 逆时针旋转的因子,幅值相量与旋转因子之积 $\dot{F}_m e^{j\omega t}$ 表示长度为 F_m 的有向线段在复平面上以角速度 ω 逆时针旋转,故 $\dot{F}_m e^{j\omega t}$ 称为旋转相量。从几何意义上讲,以余弦形式表示的正弦量等于其对应的旋转相量在实轴上的投影。显然, $t=0$ 时旋转相量与实轴的夹角为正弦量的初相。在复平面上以相量表示正弦量时,只要确定其初相时的相量即可。这是因为同频率的正弦量表示在复平面上的相对位置是不变的。

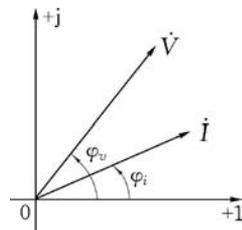


图 5-2 电压相量和电流相量的相量图

至此,我们可以将一个正弦量表示为相量,也可以将一个相量转换为正弦量,这就是相量变换。前者称为相量的正变换,后者称为相量的反变换。

相量变换:

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \dot{F}_m = F_m e^{j\varphi} = F_m \angle \varphi$$

相量反变换:

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \leftarrow \quad \dot{F}_m = F_m e^{j\varphi} = F_m \angle \varphi$$

比如,已知正弦电压的瞬时值表达式 $v(t) = 10\sqrt{2} \cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$,其幅值相量和有效值相量分别为

$$\dot{V}_m = 10\sqrt{2} \angle 30^\circ \text{ V} \quad \text{和} \quad \dot{V} = 10 \angle 30^\circ \text{ V}$$

若已知电流的有效值相量 $\dot{I} = 20 \angle -45^\circ \text{ A}$,频率 $f = 100 \text{ Hz}$,则电流的瞬时值表达式为

$$i = 20\sqrt{2} \cos(628t - 45^\circ) \text{ A}$$

特别注意: 正弦量与相应的相量之间是一一对应关系,不是相等关系。

现在我们重新认识一下 j 的意义。

根据欧拉公式, $e^{\pm j90^\circ} = \pm j$,所以,任一相量 $\dot{F} = F \angle \varphi$ 与 $e^{\pm j90^\circ}$ 之积,即

$$\dot{F} e^{\pm j90^\circ} = \pm j \dot{F} = F \angle \varphi \times 1 \angle \pm 90^\circ = F \angle \varphi \pm 90^\circ$$

表明若任一相量 \dot{F} 乘以 $+j$,则该相量沿逆时针方向旋转 90° ,其模的大小不变;若任一相量 \dot{F} 乘以 $-j$,则该相量沿顺时针方向旋转 90° ,其模的大小不变。因此, $\pm j$ 称为 90° 旋转因子。

5.2.2 相量变换的性质

正弦量可以表示为相量,相量也可以转换为正弦量,在这样的相量变换中还有哪些性质呢?

1. 线性性质

已知正弦量 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$,若其对应的相量分别为 \dot{F}_1 和 \dot{F}_2 ,则正弦量 $k_1 f_1(t) \pm$

$k_2 f_2(t)$ 对应的相量为 $k_1 \dot{F}_1 \pm k_2 \dot{F}_2$ 。式中 k_1, k_2 为两个实数。

相量的线性性质表明相量变换满足齐次性和可加性,即两个同频率正弦量的代数组成的相量等于对应相量同样的代数组。

例 5.1 已知 $i_1 = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$, $i_2 = 5\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$ 。试求 $i_1 + i_2$ 。

解: 根据已知条件,可得

$$\dot{I}_1 = 10 \angle 45^\circ, \quad \dot{I}_2 = 5 \angle -30^\circ$$

于是,有

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= 10 \angle 45^\circ + 5 \angle -30^\circ = 7.07 + j7.07 + 4.33 - j2.5 \\ &= 11.4 + j4.57 = 12.28 \angle 21.84^\circ \end{aligned}$$

由此,可得

$$i_1 + i_2 = 12.28\sqrt{2} \cos(\omega t + 21.84^\circ) \text{ A}$$

2. 微分性质

已知正弦量 $f(t)$ 对应的相量为 \dot{F} , 则 $\frac{df(t)}{dt}$ 对应的相量为 $j\omega\dot{F}$ 。推广之, $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ 对应的相量为 $(j\omega)^n \dot{F}$ 。

3. 积分性质

已知正弦量 $f(t)$ 对应的相量为 \dot{F} , 则 $\int f(t) dt$ 对应的相量为 $\frac{\dot{F}}{j\omega}$ 。推广之, $\underbrace{\int \cdots \int f(t) dt}_{n \text{ 个}}$ 对应的相量为 $\frac{\dot{F}}{(j\omega)^n}$ 。

由此可见,相量变换的性质可以将正弦量对时间的微分、积分等运算变换为复数代数运算,从而简化我们对问题的数学分析过程,这将在后续内容的讨论中得到应用。

5.3 基尔霍夫定律和电路元件 VCR 的相量形式

仿照直流电阻电路的研究方法,我们先讨论分析正弦稳态电路的基础——两类约束。因此,在本节将重点介绍基尔霍夫定律和三种基本电路元件 VCR 的相量形式,也就是通过相量变换,将基尔霍夫定律和三种基本电路元件 VCR 的时域形式变换为对应的相量形式。

5.3.1 基尔霍夫定律的相量形式

正弦稳态电路中任一节点的 KCL 时域形式为

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (5.15)$$

式中, n 为该节点处的支路数。根据相量的线性性质,式(5.15)的相量形式为

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{km} = 0 \quad (5.16)$$

式中, \dot{I}_{km} 为连接该节点第 k 条支路正弦电流 i_k 的幅值相量。

同理, 正弦稳态电路中任一回路的 KVL 时域形式为

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0 \quad (5.17)$$

式中, n 为该回路的支路数。根据相量的线性性质, 式(5.17)的相量形式为

$$\sum_{k=1}^n \dot{V}_{km} = 0 \quad (5.18)$$

式中, \dot{V}_{km} 为回路中第 k 条支路正弦电压 v_k 的幅值相量。

式(5.16)和式(5.18)也可以有效值相量表示, 即

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0 \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^n \dot{V}_k = 0 \quad (5.19)$$

式中, \dot{I}_k 和 \dot{V}_k 分别为连接该节点第 k 条支路正弦电流 i_k 的有效值相量和回路中第 k 条支路正弦电压 v_k 的有效值相量。

5.3.2 电路元件 VCR 的相量形式

由以上讨论可知, 基尔霍夫定律的相量形式与其时域形式完全相同, 那么, 线性时不变电阻、电容和电感三种基本电路元件 VCR 的相量形式又如何呢?

设待研究的元件与一正弦稳态电路相连, 元件的端电压和流过它的电流均为同频率的正弦波, 且电压和电流为关联参考方向, 二者的正弦量瞬时值表达式及其有效值相量分别为

$$\begin{cases} v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \varphi_v) & \Leftrightarrow \dot{V} = V \angle \varphi_v \\ i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) & \Leftrightarrow \dot{I} = I \angle \varphi_i \end{cases} \quad (5.20)$$

1. 电阻元件

电阻元件与正弦稳态电路相连的时域模型如图 5-3(a) 所示。电阻元件 VCR 的时域形式为

$$v = Ri \quad (5.21)$$

根据相量变换的线性性质, 可得

$$\dot{V} = R\dot{I} \quad (5.22)$$

式(5.22)即为电阻元件 VCR 的相量形式, 此式还可以写为

$$V \angle \varphi_v = RI \angle \varphi_i \quad (5.23)$$

根据复数相等的条件, 可分别得到电阻元件端电压与端电流的有效值及其相位关系为

$$\begin{cases} V = RI \\ \varphi_v = \varphi_i \end{cases} \quad (5.24)$$

可见, 电阻元件电压有效值(或幅值)与电流有效值(或幅值)之间的关系满足欧姆定律, 且二者的初相相等, 即电阻上的电压与电流同相。可见, 电阻元件 VCR 的相量形式既能表明电压有效值(或幅值)与电流有效值(或幅值)之间的关系, 又能表明电压、电流相位之间的关系。

根据电阻元件 VCR 的相量形式,可以得到对应的电路模型——相量模型,如图 5-3(b)所示。图中的电压、电流只需用对应的电压、电流相量来表示即可。

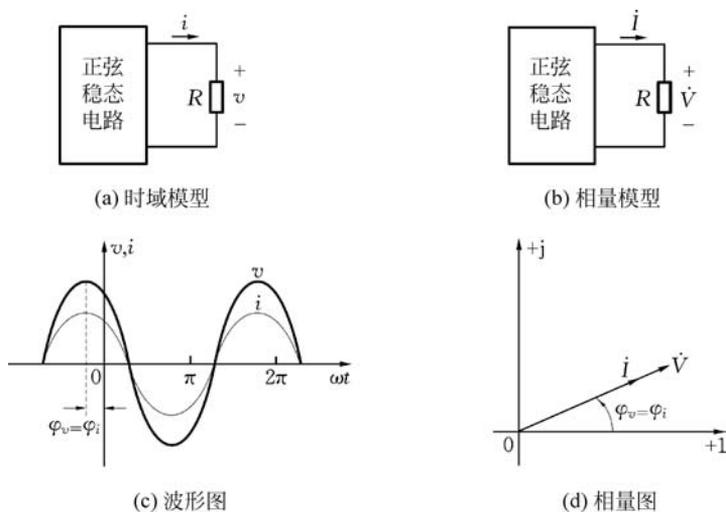


图 5-3 线性时不变电阻元件的正弦稳态分析

将式(5.20)代入式(5.21),可得到电阻元件 VCR 的瞬时值表达式,据此,画出电阻元件上电压、电流波形如图 5-3(c)所示。根据式(5.22)或式(5.23),可画出电阻元件电压、电流的相量图,如图 5-3(d)所示。图中, \dot{V} 、 \dot{I} 的长度表示各自的有效值,它们与实轴的夹角分别为各自的初相。显然,从相量图上可以非常直观地看出电压与电流有效值(或幅值)及其初相之间的关系。

2. 电容元件

电容元件与正弦稳态电路相连的时域模型如图 5-4(a)所示。电容元件 VCR 的时域形式为

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (5.25)$$

根据相量变换的微分性质,可得

$$\dot{I} = j\omega C \dot{V} \quad \text{或} \quad \dot{V} = \frac{\dot{I}}{j\omega C} \quad (5.26)$$

式(5.26)即为电容元件 VCR 的相量形式,此式还可以写为

$$\underline{I/\varphi_i} = \omega CV / \underline{\varphi_v + 90^\circ} \quad (5.27)$$

据此,可分别得到电容元件端电压与端电流的有效值及其相位关系为

$$\begin{cases} I = \omega CV \\ \varphi_i = \varphi_v + 90^\circ \end{cases} \quad (5.28)$$

式(5.28)的第一式反映电容元件电压有效值(或幅值)与电流有效值(或幅值)之间的关系,它不仅与 C 有关,还与激励源的角频率 ω 有关,注意电阻元件不具备这一特点。当 C 值给定后,对一定的 V 来说, ω 越高 I 越大,说明电流越容易通过 C ; ω 越低 I 越小,说明电流越不易通过 C 。当 $\omega = 0$ 即直流源激励时, $I = 0$,电容相当于开路,这与第 1 章中的讨论是一

致的。第二式反映电压与电流的相位关系,即电容的电流超前电压 90° 。

根据电容元件 VCR 的相量形式,可以得到对应的电路模型——相量模型,如图 5-4(b)所示。图中的电压、电流用对应的电压、电流相量来表示,电容 C 以 $\frac{1}{j\omega C}$ 表示。电容电压和电流的波形图如图 5-4(c)所示,相量图如图 5-4(d)所示。

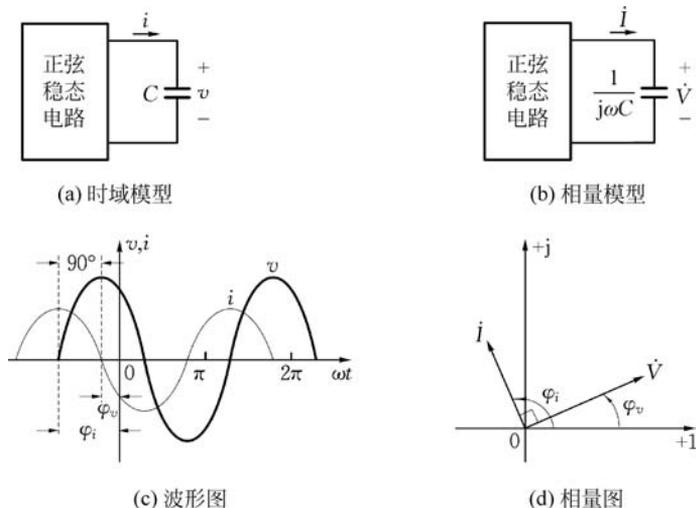


图 5-4 线性时不变电容元件的正弦稳态分析

3. 电感元件

电感元件与正弦稳态电路相连的时域模型如图 5-5(a)所示。电感元件 VCR 的时域形式为

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (5.29)$$

根据相量变换的微分性质,可得

$$\dot{V} = j\omega L \dot{I} \quad \text{或} \quad \dot{I} = \frac{1}{j\omega L} \dot{V} \quad (5.30)$$

式(5.30)即为电感元件 VCR 的相量形式,此式还可以写为

$$\underline{V/\varphi_v} = \omega L \underline{I/\varphi_i + 90^\circ} \quad (5.31)$$

据此,可分别得到电感元件端电压与端电流的有效值及其相位关系为

$$\begin{cases} V = \omega L I \\ \varphi_v = \varphi_i + 90^\circ \end{cases} \quad (5.32)$$

式(5.32)的第 1 式反映电感元件电压有效值(或幅值)与电流有效值(或幅值)之间的关系,它不仅与 L 有关,而且还与激励源的角频率 ω 有关。当 L 值给定后,对一定的 I 来说, ω 越高 V 越大; ω 越低 V 越小。当 $\omega = 0$ 即直流源激励时, $V = 0$,电感相当于短路,这与第 1 章中的讨论也是一致的。第 2 式反映电压与电流的相位关系,即电感的电压超前电流 90° 。

根据电感元件 VCR 的相量形式,可以得到对应的电路模型——相量模型,如图 5-5(b)所示。图中的电压、电流用对应的电压、电流相量来表示,电感 L 以 $j\omega L$ 表示。电感电压和电流的波形图如图 5-5(c)所示,相量图如图 5-5(d)所示。

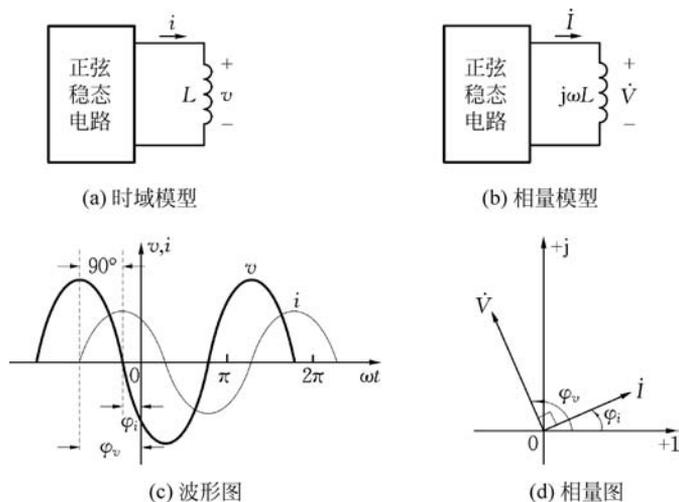


图 5-5 线性时不变电感元件的正弦稳态分析

例 5.2 电路如图 5-6(a) 所示, 已知 $v(t) = 100\sqrt{2} \cos(10^3 t)$ V, $R = 50\Omega$, $L = 20\text{mH}$, $C = 100\mu\text{F}$, 求 $i(t)$ 。

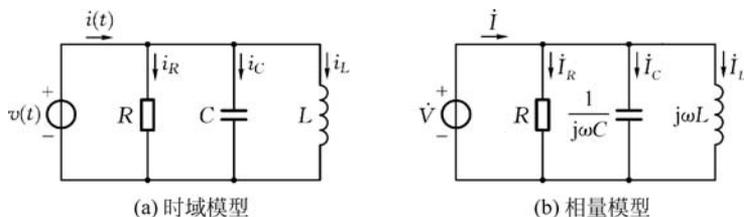


图 5-6 例 5.2 的图 1

解: (1) 将电路的时域模型转换为相量模型, 如图 5-6(b) 所示, 并将图中的电压、电流以有效值相量标出。

根据已知条件, 正弦激励源表示为 $\dot{V} = 100\angle 0^\circ$ V。

由此求得各个元件上的电流有效值相量分别为

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{100\angle 0^\circ}{50} = 2\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = j\omega C \dot{V} = 10^3 \times 100 \times 10^{-6} \times 100\angle 0^\circ + 90^\circ = 10\angle 90^\circ = j10 \text{ A}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}}{j\omega L} = \frac{100\angle 0^\circ - 90^\circ}{10^3 \times 20 \times 10^{-3}} = 5\angle -90^\circ = -j5 \text{ A}$$

(2) 根据 KCL 的相量形式, 有

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L = 2\angle 0^\circ + j10 - j5 = 2 + j5 = 5.39\angle 68.2^\circ \text{ A}$$

(3) 写出 $i(t)$ 的表达式

$$i(t) = 5.39\sqrt{2} \cos(10^3 t + 68.2^\circ) \text{ A}$$

(4) 根据各电压、电流的有效值相量,画出相量图如图 5-7 所示。可以看出电流超前电压 68.2° 。

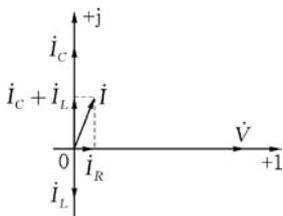


图 5-7 例 5.2 的图 2

5.4 正弦稳态电路与电阻电路的类比

由以上的讨论可以看出,当采用相量来表示正弦稳态电路的电压和电流时,基尔霍夫定律的形式与电阻电路中的形式完全相同,只是其中的电压和电流不直接用其时域形式,而是用表示电压和电流的相应的相量形式。在本节我们将通过引入阻抗和导纳以及相量模型,使正弦稳态电路的计算可以类比电阻电路的求解方法来进行。

5.4.1 阻抗和导纳的引入

根据 5.3 节的讨论,若端电压与端电流为关联参考方向,则电路中三种基本元件 VCR 的相量形式分别为

$$\begin{cases} \dot{V} = R\dot{I} \\ \dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} \\ \dot{V} = j\omega L\dot{I} \end{cases} \quad (5.33)$$

在正弦稳态电路下,将这三种元件的端电压相量与端电流相量之比定义为该元件的阻抗,以 Z 来表示,单位为欧姆(Ω),则有

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \quad (5.34)$$

这样,就可以将三种基本元件 VCR 的相量形式归结为统一形式,即

$$\dot{V} = Z\dot{I} \quad (5.35)$$

这就是欧姆定律的相量形式,注意其中电压相量与电流相量为关联参考方向。式中 Z 表示电阻、电容和电感的阻抗,具体地说,即

$$\begin{cases} Z_R = R \\ Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \\ Z_L = j\omega L \end{cases} \quad (5.36)$$

与电阻和电导类似,将阻抗的倒数定义为导纳,以 Y 来表示,即

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} \quad (5.37)$$

同样,导纳的单位为西门子(S)。电阻、电容和电感的导纳分别为

$$\begin{cases} Y_R = \frac{1}{R} = G \\ Y_C = j\omega C \\ Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} \end{cases} \quad (5.38)$$

这便可得到欧姆定律的另一种相量形式,即

$$\dot{I} = Y\dot{V} \quad (5.39)$$

下面由式(5.36)和式(5.38)对电容、电感的阻抗和导纳作进一步的分析。

(1) 电容的阻抗可表示为 $Z_C = -jX_C$ 的形式,式中的 X_C 称为电容的电抗(简称容抗),其单位为欧姆,且

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5.40)$$

表明容抗随频率变化而变化,当电容值一定时,其容抗与频率成反比。比如,当 $\omega = 0$ 时, $X_C \rightarrow \infty$,此时电容可视为开路,故电容具有隔断直流的作用;当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $X_C \rightarrow 0$,此时电容可视为短路,即电容具有通交流的作用。概括起来,电容在电路中的作用是“通交隔直”。利用电容的这一特性,在电子线路中,电容可用作隔直、旁路、滤波等。

(2) 电感的阻抗可表示为 $Z_L = jX_L$ 的形式,式中的 X_L 称为电感的电抗(简称感抗),其单位为欧姆,且

$$X_L = \omega L \quad (5.41)$$

表明感抗也随频率变化而变化,当电感值一定时,其感抗与频率成正比。比如,当 $\omega = 0$ 时, $X_L = 0$,此时电感可视为短路,故电感具有通过直流的作用;当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $X_L \rightarrow \infty$,此时电感可视为开路,即电感具有阻碍交流通过的作用。概括起来,电感在电路中的作用是“通直阻交”。利用电感的这一特性,在实际电路中,电感线圈可用作高频扼流线圈等。

(3) 类似地,电容和电感的导纳可分别表示为 $Y_C = jB_C$ 和 $Y_L = -jB_L$ 的形式,式中的 B_C 和 B_L 分别称为电容的电纳(简称容纳)和电感的电纳(简称感纳),且

$$B_C = \omega C \quad (5.42)$$

和

$$B_L = \frac{1}{\omega L} \quad (5.43)$$

综上所述,在引入阻抗和导纳后,三种基本元件 VCR 的相量形式统一为欧姆定律的相量形式,这就是正弦稳态电路中两类约束的元件约束,而阻抗和导纳成为采用复数描述正弦稳态电路的元件参数。可见,一旦用相量来表示正弦稳态电路的各电压、电流,则这些相量将服从基尔霍夫定律的相量形式和欧姆定律的相量形式,这样,计算电阻电路的一些公式和方法,就完全可以用于正弦稳态电路之中。

一般来说,在正弦稳态电路中,对于一个线性时不变无源单口网络,也可以引入阻抗和导纳的概念,此时式(5.34)和式(5.37)中的 \dot{V} 和 \dot{I} 分别为该单口网络的端口电压相量和端

口电流相量, Z 和 Y 则为单口网络的等效阻抗和等效导纳, 或称为输入阻抗和输入导纳。

将式(5.34)进一步写为

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V/\varphi_v}{I/\varphi_i} = \frac{V}{I} \frac{\varphi_v - \varphi_i}{1} = |Z| \angle \varphi_Z \quad (5.44)$$

显然, 阻抗是一个随频率变化的复数, 所以, 当频率发生变化时, 阻抗也随之变化。这样, 阻抗可表示为

$$Z(j\omega) = |Z(j\omega)| \angle \varphi_Z(\omega) \quad (5.45)$$

式中, 阻抗的模为

$$|Z(j\omega)| = \left| \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \right| = \frac{V}{I} \quad (5.46)$$

阻抗的幅角 $\varphi_Z(\omega)$ 称为阻抗角, 即

$$\varphi_Z(\omega) = \varphi_v - \varphi_i \quad (5.47)$$

表明阻抗角是端口电压与端口电流的相位差, 其主值范围为 $|\varphi_Z(\omega)| \leq 90^\circ$ 。根据阻抗角的正负, 可判断端口电压与端口电流的相位关系。比如, $\varphi_Z(\omega) > 0$, 说明电压超前电流 $\varphi_Z(\omega)$; $\varphi_Z(\omega) < 0$, 说明电压滞后电流 $|\varphi_Z(\omega)|$; $\varphi_Z(\omega) = 0$, 说明电压与电流同相。

阻抗常用的两种表示形式有极坐标形式如式(5.45)和代数形式。利用阻抗的代数形式, 可以得到其实部和虚部, 即

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (5.48)$$

式中, $R(\omega)$ 是 $Z(j\omega)$ 的实部, 称为电阻分量; $X(\omega)$ 是 $Z(j\omega)$ 的虚部, 称为电抗分量。这些概念会在 5.6 节(正弦稳态电路的功率)中得到应用。

在分析实际问题时, 阻抗的两种表示形式往往需相互转换。若已知阻抗的极坐标形式, 求其代数形式, 则有

$$R = |Z| \cos\varphi_Z, \quad X = |Z| \sin\varphi_Z \quad (5.49)$$

若已知阻抗的代数形式, 求其极坐标形式, 则有

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi_Z = \arctan \frac{X}{R} \quad (5.50)$$

由此可见, R 、 X 、 $|Z|$ 可构成一个直角三角形, 称为阻抗三角形, 如图 5-8 所示。同理, G 、 B 、 $|Y|$ 可构成导纳三角形。

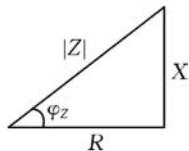


图 5-8 阻抗三角形

5.4.2 相量模型的引入

我们知道, 以前所用电路模型中的 R 、 L 、 C 是以原参数来表征的, 称为时域模型, 它反映了电压、电流与时间之间的函数关系, 电路中电压、电流所遵循的是时域下的两类约束, 即基尔霍夫定律的时域形式和元件 VCR 的时域形式。现在我们需要的是—种运用相量能对正弦稳态电路进行分析、计算的假想模型——相量模型, 其要求是, 与原正弦稳态电路具有相同的拓扑结构, 只是原电路中各个元件须由阻抗(或导纳)所取代, 即相量模型中的每个电阻元件看作是具有 R 值的阻抗; 每个电容元件看作是具有 $\frac{1}{j\omega C}$ 值的阻抗; 每个电感元件看作是具有 $j\omega L$ 值的阻抗, 模型中的电压、电流均为原电路图中各正弦电压和正弦电流的相

量,其参考方向与原电路一致。正如图 5-6(a)和图 5-6(b)所示,前者为电路的时域模型,后者为原电路的相量模型。因此,电路的相量模型可视为对原时域电路中的电路元件和电路变量进行相量变换的结果。

5.5 正弦稳态电路的分析

经过前几节的讨论可知,在对正弦稳态电路分析时,需要将电路中的所有元件均以元件的相量模型来表示,电路中的所有电压和电流均以相应的相量来表示,由此得到电路的相量模型服从相量形式的基尔霍夫定律和欧姆定律,线性电阻电路的分析方法、定理等可推广到正弦稳态电路的相量运算中。这就是基于相量模型的正弦稳态电路分析法——相量分析法。显然,线性电阻电路求解方程为实数运算,正弦稳态电路求解方程为复数运算。此外,还可以利用相量图分析、求解问题——相量图法。

相量分析法大致分为三步:

- (1) 将电路的时域模型变换为相量模型;
- (2) 利用相量形式的两类约束,以及电阻电路的分析法、定理、公式等,建立电路的相量方程,并以复数运算法则求解方程;
- (3) 根据相量解,写出解的时域表达式。

下面通过例题来进一步理解相量分析法。

1. 用两类约束求解

例 5.3 电路如图 5-9(a)所示,已知 $i_R = 4\sqrt{2} \cos(10^3 t) \text{ A}$, $R = 100\Omega$, $L = 0.1\text{H}$, $C = 5\mu\text{F}$ 。求电源电压 v 以及各元件上的电压、电流(电压和电流为关联参考方向),画出电压、电流的相量图。

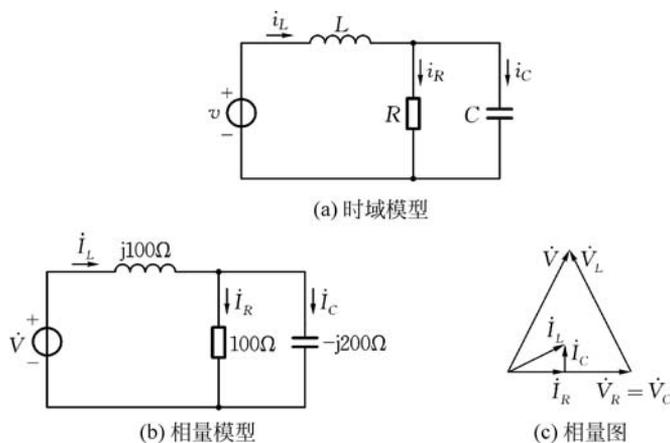


图 5-9 例 5.3 的图

解: 先将图 5-9(a)所示的时域模型转换为相量模型,如图 5-9(b)所示。

采用有效值相量,由已知条件,得 $\dot{I}_R = 4\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ A}$ 。

根据两类约束,可求得

$$\dot{V}_R = \dot{V}_C = R\dot{I}_R = 400\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_C}{-jX_C} = \frac{400\angle 0^\circ}{-j200} = 2\angle 90^\circ \text{A}$$

$$\dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R = 2\angle 90^\circ + 4\angle 0^\circ = 4 + j2 = 2\sqrt{5}\angle 26.6^\circ \text{A}$$

$$\dot{V}_L = jX_L\dot{I}_L = j100 \times 2\sqrt{5}\angle 26.6^\circ = 200\sqrt{5}\angle 116.6^\circ \text{V}$$

$$\dot{V} = \dot{V}_L + \dot{V}_R = 200\sqrt{5}\angle 116.6^\circ + 400\angle 0^\circ = 200\sqrt{5}\angle 63.4^\circ \text{V}$$

据此,画出各电压、电流的相量图如图 5-9(c)所示。

电源电压 v 以及各元件上的电压、电流的时域表达式分别为

$$v = 200\sqrt{10} \cos(10^3t + 63.4^\circ) \text{V}$$

$$i_C = 2\sqrt{2} \cos(10^3t + 90^\circ) \text{A}, \quad i_L = 2\sqrt{10} \cos(10^3t + 26.6^\circ) \text{A}$$

$$v_R = v_C = 400\sqrt{2} \cos(10^3t) \text{V}, \quad v_L = 200\sqrt{10} \cos(10^3t + 116.6^\circ) \text{V}$$

2. 用等效变换法求解

例 5.4 正弦稳态电路如图 5-10(a)所示,已知 $R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega, L = 2\text{H}, C = 0.25\text{F}$, $v_{S1} = 4\sqrt{2} \cos 2t \text{V}, v_{S2} = 10\sqrt{2} \cos(2t + 53.1^\circ) \text{V}$ 。求电路中的电流 i_C 。

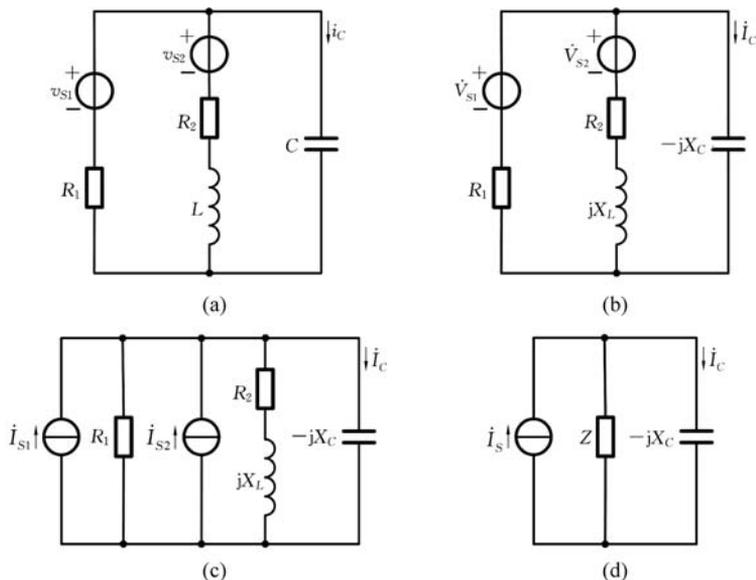


图 5-10 例 5.4 的图

解: 先将时域模型图 5-10(a)转化为相量模型图 5-10(b),其中(电源采用有效值相量)
 $\dot{V}_{S1} = 4\angle 0^\circ \text{V}$, $\dot{V}_{S2} = 10\angle 53.1^\circ \text{V}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $jX_L = j4\Omega$, $-jX_C = -j2\Omega$
 将两个电压源支路等效变换为电流源,如图 5-10(c)所示,其中

$$\dot{I}_{S1} = \dot{V}_{S1}/R = 2\angle 0^\circ \text{A}, \quad \dot{I}_{S2} = \dot{V}_{S2}/(R_2 + jX_L) = 2\angle 0^\circ \text{A}$$

将两个电流源求和,两个阻抗并联,如图 5-10(d)所示,其中

$$\dot{I}_S = \dot{I}_{S1} + \dot{I}_{S2} = 4\angle 0^\circ \text{A}, \quad Z = R_1 // (R_2 + jX_L) = 1.51 + j0.39 = 1.56\angle 14.5^\circ \Omega$$

由此可得

$$\dot{I}_C = \dot{I}_S Z / (Z - jX_C) = 2.82 / 61.3^\circ \text{ A}$$

最后,写出 \dot{I}_C 的瞬时值表达式 $i_C = 2.82\sqrt{2} \cos(2t + 61.3^\circ) \text{ A}$ 。

3. 用网孔法和节点法求解

例 5.5 电路和元件参数如图 5-11(a)所示,其中 $v_S = 10\sqrt{2} \cos(10^3 t) \text{ V}$ 。试分别以网孔法和节点法求电流 i_1 和 i_2 。

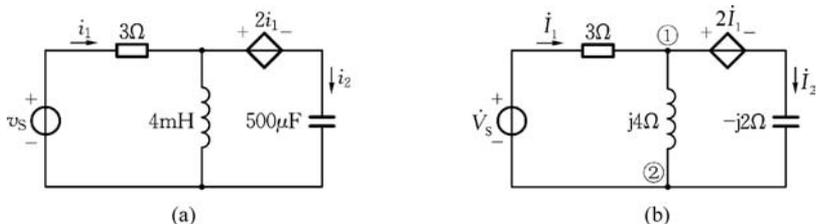


图 5-11 例 5.5 的图

解: 先将已知的时域模型转换为相量模型,如图 5-11(b)所示。以有效值相量分析,激励源电压的有效值相量为 $\dot{V}_S = 10 / 0^\circ \text{ V}$ 。

(1) 网孔法

以 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 分别作为图 5-11(b)所示电路中左右网孔的网孔电流,均为顺时针方向,列出的网孔电流相量方程为

$$\begin{cases} (3 + j4) \dot{I}_1 - j4 \dot{I}_2 = 10 / 0^\circ \\ -j4 \dot{I}_1 + (j4 - j2) \dot{I}_2 = -2 \dot{I}_1 \end{cases} \quad (5.51)$$

由式(5.51)的第 2 式,可得

$$(2 - j4) \dot{I}_1 + j2 \dot{I}_2 = 0 \quad (5.52)$$

式(5.52)联立式(5.51)第 1 式,可得

$$(7 - j4) \dot{I}_1 = 10$$

由此,得

$$\dot{I}_1 = \frac{10}{7 - j4} = 1.24 / 29.7^\circ \text{ A}$$

代入式(5.52),得

$$\dot{I}_2 = \frac{10}{7 - j4} (2 - j4) \frac{1}{-j2} = 2.77 / 56.3^\circ \text{ A}$$

由于网孔电流即为所求的电流,故 i_1 和 i_2 的时域表达式分别为

$$i_1 = 1.24\sqrt{2} \cos(10^3 t + 29.7^\circ) \text{ A}$$

$$i_2 = 2.77\sqrt{2} \cos(10^3 t + 56.3^\circ) \text{ A}$$

(2) 节点法

选图 5-11(b)所示电路中节点②为参考点,对节点①列写节点方程,有

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{j4}\right)\dot{V}_{n1} = \frac{10\angle 0^\circ}{3} + \frac{2\dot{I}_1}{-j2}$$

列写辅助方程,有

$$\dot{I}_1 = \frac{10\angle 0^\circ - \dot{V}_{n1}}{3}$$

代入节点方程,求得

$$\dot{V}_{n1} = 6.769 - j1.846$$

由此可求出

$$\dot{I}_1 = \frac{10\angle 0^\circ - \dot{V}_{n1}}{3} = 1.077 - j0.615 = 1.24\angle 29.7^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{n1} - 2\dot{I}_1}{-j2} = 1.539 + j2.308 = 2.77\angle 56.3^\circ \text{ A}$$

据此可得到与网孔法相同的 i_1 和 i_2 的时域表达式。

4. 用叠加定理求解

例 5.6 电路如图 5-12(a)所示,已知

$$v_{S1} = 10\sqrt{2}\cos(10^3t) \text{ V}, \quad v_{S2} = 5\sqrt{2}\cos(10^3t + 90^\circ) \text{ V}$$

试用叠加定理求电路中的电流 $i(t)$ 。

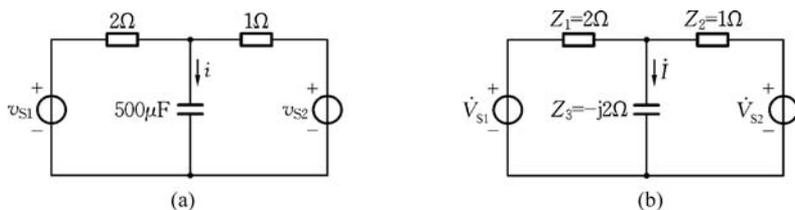


图 5-12 例 5.6 的图

解: 由于作用于电路的两激励源频率相同,故两个源的相量图合在一起,即图 5-12(a)的相量模型如图 5-12(b)所示。

采用有效值相量, $\dot{V}_{S1} = 10\angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{V}_{S2} = 5\angle 90^\circ \text{ V}$ 。

当 \dot{V}_{S1} 单独作用时,电流 \dot{I} 的分量为 $\dot{I}^{(1)}$,即

$$\dot{I}^{(1)} = \frac{\dot{V}_{S1}}{Z_1 + Z_2 // Z_3} \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{V}_{S1} Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{10}{2 - j6} = (0.5 + j1.5) \text{ A}$$

当 \dot{V}_{S2} 单独作用时,电流 \dot{I} 的分量为 $\dot{I}^{(2)}$,即

$$\dot{I}^{(2)} = \frac{\dot{V}_{S2}}{Z_2 + Z_1 // Z_3} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} = \frac{\dot{V}_{S2} Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{j10}{2 - j6} = (-1.5 + j0.5) \text{ A}$$

从而,有

$$\dot{I} = \dot{I}^{(1)} + \dot{I}^{(2)} = 0.5 + j1.5 - 1.5 + j0.5 = -1 + j2 = 2.24\angle 116.6^\circ \text{ A}$$

所求电流为 $i(t) = 2.24\sqrt{2}\cos(10^3t + 116.6^\circ) \text{ A}$ 。

值得注意的是,本例题本应针对两个源分别画出相应的相量模型,但因为作用于电路的两激励源频率相同,所以两个源的相量图可合在一起,然后计算任一激励源单独作用时的响应分量,最后对响应分量相量运用叠加定理,进而写出总响应的时域表达式。当两个源的频率不同时,若仍用相量法求得各自的响应分量,则需根据各自相应的相量模型来求解,从而写出各自响应分量的时域表达式,最后再运用叠加定理得到总响应的时域表达式。

5. 用戴维南定理求解

例 5.7 电路的相量模型如图 5-13(a) 所示,已知 $\dot{V}_s = 10\angle 0^\circ \text{V}$ 。试用戴维南定理求电流 \dot{I} 。

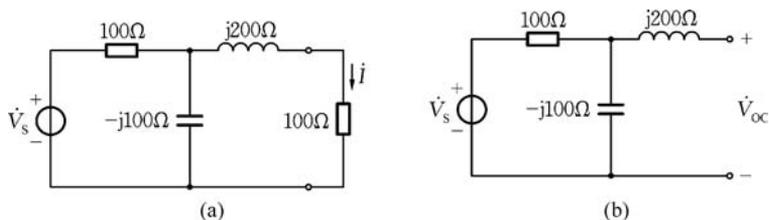


图 5-13 例 5.7 的图 1

解: 根据戴维南定理,先分别求得开路电压 \dot{V}_{oc} 和等效阻抗 Z_o 。

由图 5-13(b) 所示,可得

$$\dot{V}_{oc} = \frac{-j100}{100 - j100} \cdot 10\angle 0^\circ = \frac{-j}{1 - j} \cdot 10\angle 0^\circ = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{V}$$

将图中电压源短路,可得

$$Z_o = j200 + \frac{100(-j100)}{100 - j100} = (50 + j150) \Omega$$

于是,可得到戴维南等效相量模型如图 5-14 所示。

由此可得

$$\dot{I} = \frac{5\sqrt{2}\angle -45^\circ}{100 + 50 + j150} = \frac{5\sqrt{2}\angle -45^\circ}{150\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 0.033\angle -90^\circ \text{A}$$

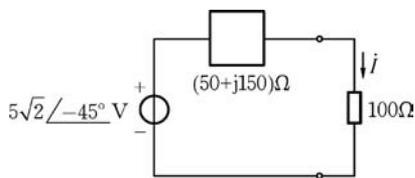


图 5-14 例 5.7 的图 2

6. 用相量图求解

例 5.8 在图 5-15(a)、(b) 所示的正弦稳态电路中,电流表 A_1 、 A_2 、 A 、电压表 V_1 、 V_2 、 V 的指示均为有效值,求电流表 A 和电压表 V 的读数。

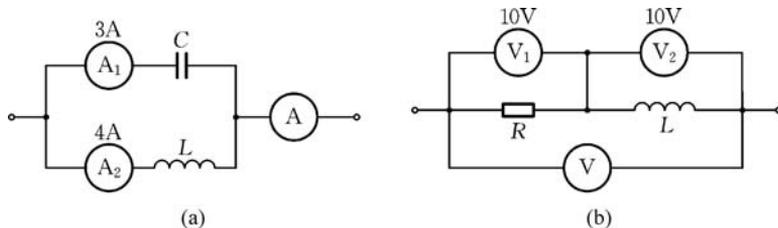


图 5-15 例 5.8 的图 1

解：画出图 5-15(a)、(b) 所示电路的相量模型，分别如图 5-16(a)、(b) 所示。

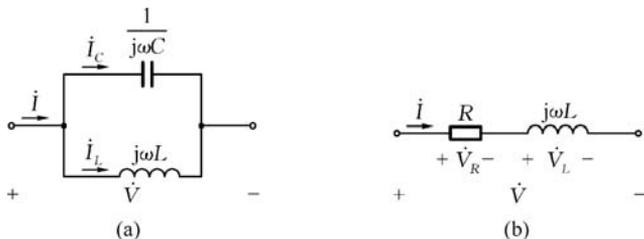


图 5-16 例 5.8 的图 2

对于图 5-16(a) 来说，属于并联结构，电压相量为两条支路的公共量，将其作为参考相量，并令其初相为零。

先在水平方向作出 \dot{V} 相量，因电容的电流超前电压 90° ，故相量 \dot{I}_C 垂直 \dot{V} 且处于超前 \dot{V} 的位置；因电感的电流滞后电压 90° ，故相量 \dot{I}_L 垂直 \dot{V} 且处于滞后 \dot{V} 的位置，如图 5-17(a) 所示。由相量图的几何关系，可得

$$I = I_L - I_C = 4 - 3 = 1\text{A}$$

故电流表 A 的读数为 1A。

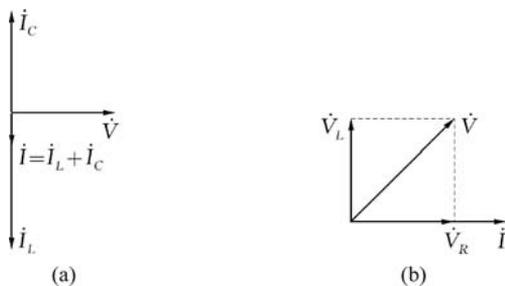


图 5-17 例 5.8 的图 3

对于图 5-16(b) 来说，属于串联结构，电流相量为 R 、 L 的公共量，将其作为参考相量，并令其初相为零。

先在水平方向作 \dot{I} 相量，因电感的电压超前电流 90° ，故相量 \dot{V}_L 垂直 \dot{I} 且处于超前 \dot{I} 的位置；因电阻的电压与电流同相，故相量 \dot{V}_R 与 \dot{I} 同相，如图 5-17(b) 所示。根据已知条件，相量 \dot{V}_L 和 \dot{V}_R 的长度相等，均为 10。由这两个相量所构成的平行四边形的对角线即可确定相量 \dot{V} ，根据相量图的几何关系，可得

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}\text{V}$$

故电压表 V 的读数为 $10\sqrt{2}\text{V}$ ，即 14.1V。

例 5.9 电路如图 5-18(a) 所示，正弦交流电压源 $v(t) = 200\sqrt{2} \cos\left(314t + \frac{\pi}{3}\right)\text{V}$ 作用于电感电容串联电路上，其中电感用其低频模型来表示。已知电流表 A 的读数为 2A，电压表 V_1 、 V_2 的读数均为 200V。试确定 R 、 L 、 C 的值。

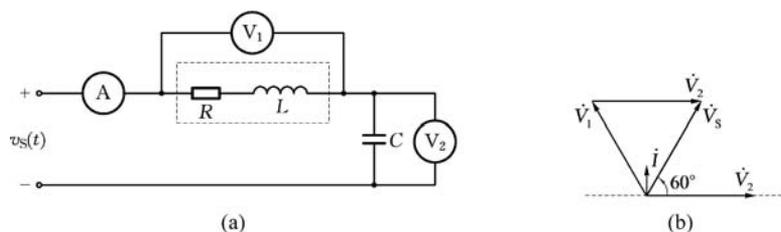


图 5-18 例 5.9 的图

解：根据已知条件可知， \dot{V}_S 、 \dot{V}_1 、 \dot{V}_2 应构成一个封闭的正三角形。显然，不论总电流 \dot{I} 超前总电压 \dot{V}_S ，还是滞后 \dot{V}_S ， \dot{V}_1 总是超前 \dot{I} ，且 \dot{V}_2 滞后 \dot{I} 90° 。由此画出的相量图如图 5-18(b) 所示。

根据图 5-18(b)，可得 $\dot{V}_1 = 200 \angle 120^\circ \text{V}$ ， $\dot{V}_2 = 200 \angle 0^\circ \text{V}$ ， $\dot{I} = 2 \angle 90^\circ \text{A}$ 。

据此，电感的等效阻抗为

$$Z_{\text{eq},L} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}} = \frac{200 \angle 120^\circ}{2 \angle 90^\circ} = 100 \angle 30^\circ = (86.60 + j50) \Omega$$

从而，可得

$$R = 86.60 \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{50}{314} = 0.159 \text{H} = 159 \text{mH}$$

电容的等效阻抗为

$$Z_{\text{eq},C} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}} = \frac{200 \angle 0^\circ}{2 \angle 90^\circ} = 100 \angle -90^\circ = -j100 \Omega$$

由此可得

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{314 \times 100} = 3.185 \times 10^{-5} \text{F} = 31.85 \mu\text{F}$$

7. 用位形图求解

位形相量图简称位形图，是标有电路接点符号的闭合的电压相量图，其特点是：①只适用于电压相量；②位形图中的点与相量模型图中的点一一对应；③连接任意两点之间的相量，便得到该两点间的电压相量。根据作图时电压相量的指向，位形图分为电位降位形图和电位升位形图，其中电位降位形图应用较多。具体做法是：先在电路图中各元件两端标出相应的接点符号，以便与位形图相对应，恰当选择起点和参考相量，然后，严格按照各元件在电路中的顺序，依次做出各元件的电压相量，便得到各电压相量按顺序首尾相连的位形图。

例 5.10 由 RLC 构成的串联电路如图 5-19(a) 所示，画出电路的位形图。

解：标出各元件两端的接点符号，如图 5-19(a) 所示。因为是串联电路，所以选择电流 \dot{I} 为参考相量。

按照各元件在电路中的排列顺序依次做出各元件的电压相量，且首尾相连。

电阻 R_1 上的电压与 \dot{I} 同相，即 \dot{V}_{ab} ，电感上的电压超前 \dot{I} 90° ，即 \dot{V}_{bc} ，电容 C_1 上的电压

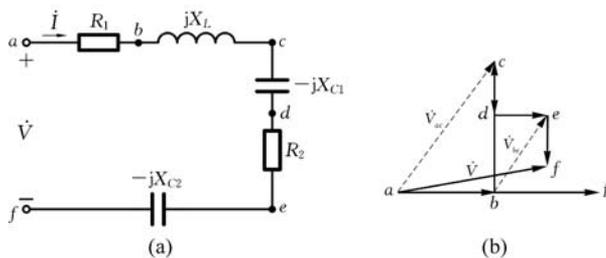


图 5-19 例 5.10 的图

滞后 $\dot{I} 90^\circ$, 即 \dot{V}_{cd} , 电阻 R_2 上的电压与 \dot{I} 同相, 即 \dot{V}_{de} , 电容 C_2 上的电压滞后 $\dot{I} 90^\circ$, 即 \dot{V}_{ef} 。连接 af 的相量 \dot{V}_{af} 即总电压 \dot{V} 。同理, 连接位形图中任意两个点, 即可得到相应的电压相量, 比如 \dot{V}_{ac} 和 \dot{V}_{be} 等, 如图 5-19(b) 所示。

例 5.11 如图 5-20 所示, 这是一个移相电路, 其功能是: 当可变电容 C 的值在 $0 \sim \infty$ 之间变化时, 电压 \dot{V}_{cd} 与端口电压 \dot{V} 的相位差在 $\pi \sim 0$ 之间变化, 且 \dot{V}_{cd} 的模始终等于 \dot{V} 的模的一半。试通过仿真进行验证。

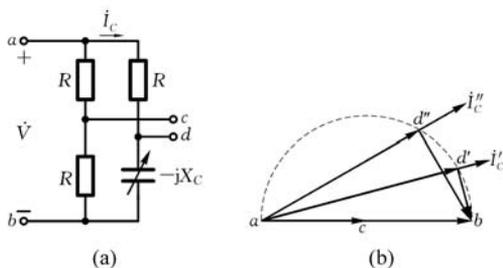


图 5-20 例 5.11 的图

解: 从理论上可以导出

$$\left| \frac{\dot{V}_{cd}}{\dot{V}} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{和} \quad \dot{V}_{cd} \text{ 与 } \dot{V} \text{ 的相位差为 } (\pi - 2\arctan\omega RC)$$

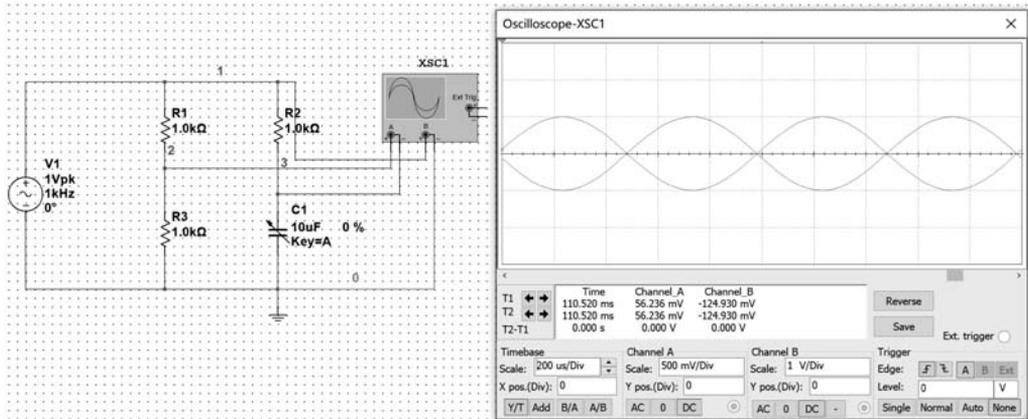
证明了该移相电路的功能(留给读者自己证明)。

下面利用位形图来证明之。根据图 5-20(a) 画出的位形图如图 5-20(b) 所示。因为从整体看该电路属于并联电路, 所以选端口电压 \dot{V} 为参考相量, 即图中的 \dot{V}_{ab} , c 点位于 ab 两点中间。为了确定 d 点的位置, 在图中做出了电流相量 \dot{I}_C , 且超前 \dot{V}_{ab} , 图中做出了两个不同电容 C 值时的 \dot{I}_C , 而 \dot{V}_{ad} 与 \dot{I}_C 同相, \dot{V}_{db} 滞后 $\dot{I}_C 90^\circ$, 且在电容 C 值的变化过程中, \dot{V}_{ad} 与 \dot{V}_{db} 之和始终等于 \dot{V}_{ab} , 据此可知, d 点的轨迹是一个半圆。

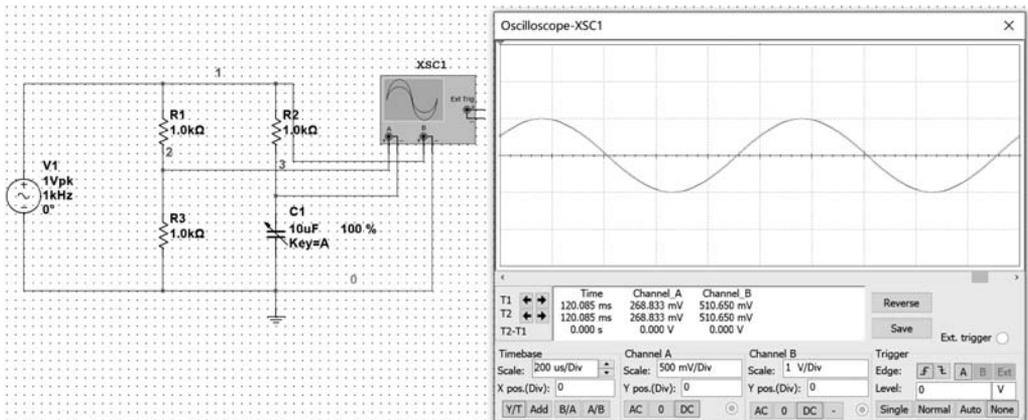
可以看出, \dot{V}_{cd} 的模为该半圆的半径, 所以, 它等于 \dot{V} 的模的一半; 当 C 值从 $0 \sim \infty$ 变化时, d 点从 a 点出发沿着半圆顺时针到 b 点, \dot{V}_{cd} 与 \dot{V} 的相位差从 $\pi \sim 0$ 。

下面给出了 Multisim 的仿真结果, 如图 5-21(a) 和图 5-21(b) 所示, 分别是 C 值为零和 $100\mu\text{F}$ 时 \dot{V}_{cd} 与 \dot{V} 的波形图, 由于实际中不可能有无限大的电容, 这里选取 $100\mu\text{F}$ 基本能

满足要求。根据示波器的显示结果,可以验证该移相电路的功能。



(a) $C=0$ 时, 仿真电路和 \dot{V}_{cd} 与 \dot{V} 的波形图



(b) $C=100\mu\text{F}$ 时, 仿真电路和 \dot{V}_{cd} 与 \dot{V} 的波形图

图 5-21 例 5.11 的图

5.6 正弦稳态电路的功率

由前几节的讨论可知,正弦稳态电路的相量分析法是从正弦量的相量表示入手,在引入阻抗和导纳概念后,以相量形式的两类约束为基础,把电阻电路的分析方法运用于正弦稳态电路分析,从而求得电路的电压和电流等。但由于正弦稳态电路不是一个纯电阻电路,而是其中还包含了电容、电感等储能元件,所以它在功率、能量、频率响应等方面要比电阻电路复杂得多。

我们知道,一个纯电阻单口网络的端口电压与端口电流之积即为该网络消耗的功率,那么,正弦稳态电路的功率又将如何计算? 本节将重点讨论这个问题。

5.6.1 正弦稳态单口网络的功率

正弦稳态电路电压和电流的基本表示形式为瞬时值表示式,所以研究它的功率就从同

一时刻的电压与电流之积——瞬时功率入手。

1. 瞬时功率

正弦稳态无源单口网络如图 5-22 所示,其端口电压和端口电流为关联参考方向,分别表示为

$$\begin{cases} v = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \varphi_v) \\ i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases} \quad (5.53)$$

由此可得该单口网络吸收的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p &= vi = 2VI \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= VI \cos(\varphi_v - \varphi_i) + UI \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) \\ &= VI \cos\varphi + VI \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) \end{aligned} \quad (5.54)$$

式中, $\varphi = \varphi_v - \varphi_i$ 为端口电压与端口电流的相位差。式(5.54)表明,瞬时功率 p 由两项组成:第一项是与时间无关的恒定分量,第二项是幅值为 VI 、频率为电压(或电流)频率的两倍的正弦分量。

为了进一步对瞬时功率进行分析,将式(5.54)作三角变换,写成如下形式

$$\begin{aligned} p &= VI \cos\varphi + VI \cos(2\omega t + 2\varphi_v - \varphi) \\ &= VI \cos\varphi + VI \cos\varphi \cos[2(\omega t + \varphi_v)] + VI \sin\varphi \sin[2(\omega t + \varphi_v)] \\ &= VI \cos\varphi \{1 + \cos[2(\omega t + \varphi_v)]\} + VI \sin\varphi \sin[2(\omega t + \varphi_v)] \end{aligned} \quad (5.55)$$

式(5.55)又表明,在 $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ 时,第一项始终大于或等于零,这是瞬时功率中的不可逆分量,说明单口网络始终吸收功率的部分;第二项是瞬时功率的可逆分量,其值以 2ω 按正弦规律正负交替变化,说明单口网络与外电路之间能量互换的部分。以下针对这两部分分别进行分析。

2. 平均功率

由于瞬时功率随时间变动,不用来衡量单口网络消耗功率的大小,因此,通常我们感兴趣的是瞬时功率的平均值——平均功率(又称有功功率),即电路中消耗功率的平均值。

将瞬时功率在一个周期内的平均值定义为平均功率,以大写字母 P 表示,即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T VI [\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)] dt = VI \cos\varphi \quad (5.56)$$

可见,平均功率恰为式(5.54)中的恒定分量,也是式(5.55)第一项的平均值,它表示无源单口网络实际消耗的功率,其值不仅取决于网络端口电压与端口电流的有效值,而且与它们之间的相位差有关。有功功率的单位用瓦(W)或千瓦(kW)表示。

我们把 $\cos\varphi = \cos(\varphi_v - \varphi_i)$ 称为功率因数,以符号 λ 表示,即

$$\lambda = \cos\varphi \quad (5.57)$$

表明功率因数的大小仅取决于该网络端口电压与端口电流的相位差 φ 。 φ 即为阻抗角,又称功率因数角。

根据 φ 的正负,可以判断单口网络的性质。若 $\varphi > 0$,说明端口电压超前端口电流,则网络呈现电感性质(简称感性);若 $\varphi < 0$,说明端口电压滞后端口电流,则网络呈现电容性质(简称容性);若 $\varphi = 0$,说明端口电压与端口电流同相,则网络呈现电阻性质(简称阻性)。

下面根据单口网络的性质,讨论两种特殊情况下的有功功率,以便我们对不同性质网络

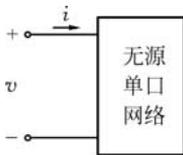


图 5-22 正弦稳态单口网络



视频 17
扫码观看

的分析:

(1) 若无源单口网络仅由一个电阻组成,即 $\varphi=0$,则 $\lambda=1$,由式(5.56)可得电阻吸收的平均功率为

$$P = VI \quad (5.58)$$

表明用端口电压和端口电流有效值可计算电阻的平均功率,与电阻电路中的对应公式一致。

(2) 若无源单口网络仅由一个电感或电容组成,即 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$,则 $\lambda=0$,可得电感或电容吸收的平均功率为

$$P = 0 \quad (5.59)$$

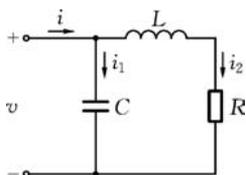


图 5-23 RLC 单口网络

说明电感和电容不消耗能量。

对一个无源单口网络来说,根据已知条件的不同,其有功功率可有多种求法。下面以图 5-23 所示电路,来说明这些方法。

(1) 已知端口电压 v 和端口电流 i ,则有功功率 $P =$

$$VI \cos(\varphi_v - \varphi_i);$$

(2) 已知电阻 R 和电流 i_2 ,则有功功率 $P = RI_2^2$;

(3) 已知 RL 支路的端口电压 v_2 和端口电流 i_2 ,则有功功率 $P = V_2 I_2 \cos(\varphi_{2v} - \varphi_{2i})$;

(4) 已知单口网络的等效阻抗 Z 和总电流 i ,则有功功率 $P = I^2 \operatorname{Re}[Z]$ 。

3. 无功功率

以式(5.55)中瞬时功率的可逆分量的幅值定义为无功功率,用大写字母 Q 表示,即

$$Q = VI \sin\varphi \quad (5.60)$$

它表明了单口网络与外电路进行能量交换的规模。无功功率的单位用乏(var)或千乏(kvar)表示。

下面根据单口网络的性质,讨论三种特殊情况下的无功功率,以便我们对不同性质网络的分析:

(1) 若无源单口网络仅由一个电阻组成,即 $\varphi=0$,由式(5.60)可知,电阻的无功功率为零。

(2) 若无源单口网络仅由一个电感组成,即 $\varphi = \frac{\pi}{2}$,电感的无功功率为

$$Q_L = VI \sin\varphi = VI \sin \frac{\pi}{2} = VI = \omega LI^2 = \frac{V^2}{\omega L} \quad (5.61)$$

(3) 若无源单口网络仅由一个电容组成,即 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$,电容的无功功率为

$$Q_C = VI \sin\varphi = VI \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -VI = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega CV^2 \quad (5.62)$$

4. 视在功率

以端口电压有效值与端口电流有效值之积定义为视在功率(又称表观功率),以 S 表示,即

$$S = VI \quad (5.63)$$

视在功率虽具有功率的形式,但并不表示无源单口网络实际消耗的功率,只代表激励源可能

提供的最大功率或网络可能消耗的最大有功功率。视在功率的单位用伏安(VA)或千伏安(kVA)表示。

值得注意的是,有功功率、无功功率和视在功率均具有功率的量纲,为了有所区别,它们分别采用了 W、var 和 VA 为单位。

显然,单口网络的有功功率、无功功率和视在功率在数值上满足

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (5.64)$$

这可以图 5-24 所示的直角三角形来表示,这就是功率三角形,它说明了 P 、 Q 、 S 和 φ 之间的关系。

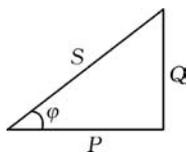


图 5-24 功率三角形

特别说明,对无源单口网络来说,总有功功率为

$$P = \sum P_k \quad (5.65)$$

式中, P_k 为第 k 个电阻的有功功率。总无功功率为

$$Q = \sum Q_k \quad (5.66)$$

式中, Q_k 为第 k 个电感或电容的无功功率,电感取正,电容取负。式(5.65)和式(5.66)分别称为有功功率守恒和无功功率守恒。注意,单口网络的视在功率

$$S \neq \sum S_k \quad (5.67)$$

式中, S_k 为第 k 个元件的视在功率。

例 5.12 正弦稳态电路如图 5-25 所示,已知 $i_s = 10\sqrt{2} \cos(10^3 t)$ A。试求电源提供的 P 和 Q , 计算 S 和 λ 。

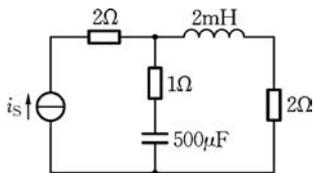


图 5-25 例 5.12 的图

解: 根据已知条件,先求得

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{10^3 \times 500 \times 10^{-6}} = -j2\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j10^3 \times 2 \times 10^{-3} = j2\Omega$$

再求单口网络的输入阻抗为

$$Z = 2 + \frac{(1 - j2)(2 + j2)}{1 - j2 + 2 + j2} = \left(4 - j \frac{2}{3}\right) \Omega$$

由此可得

$$P = I^2 \operatorname{Re}[Z] = 10^2 \times 4 = 400 \text{ W}$$

$$Q = I^2 \operatorname{Im}[Z] = 10^2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -66.7 \text{ var (电容性)}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 405.5 \text{ VA}$$

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{400}{405.5} = 0.986 \text{ (电容性)}$$

或者利用阻抗角,可得

$$\lambda = \cos\varphi = \cos \left[\arctan \left(\frac{-\frac{2}{3}}{4} \right) \right] = 0.986 \text{ (电容性)}$$

5.6.2 复功率

复功率是以相量法来计算功率所引入的一个复数变量,它是由有功功率 P 和无功功率

Q 分别作为实部和虚部所构成的,即

$$\tilde{S} = P + jQ = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi = VI \angle \varphi = V \angle \varphi_v I \angle -\varphi_i = \dot{V} \dot{I}^* \quad (5.68)$$

式中, \dot{I}^* 是电流相量 \dot{I} 的共轭复数。复功率的单位是伏安(VA)。

复功率的吸收或发出同样依据无源单口网络的端口电压和端口电流的参考方向来判断。不难看出,复功率的模即为视在功率,其幅角即为功率因数角,即

$$\begin{cases} |\tilde{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S \\ \varphi_{\tilde{S}} = \arctan \frac{Q}{P} = \varphi \end{cases} \quad (5.69)$$

可见,复功率将正弦稳态电路的有功功率、无功功率、视在功率及功率因数统一到一个公式来表示,为分析电路中的功率带来方便。

特别强调,复功率是一个辅助计算功率的复数,它不代表正弦量,也就不能视为相量。可以证明,电路中的复功率也是守恒的。

例 5.13 将 $v_s = 10\sqrt{2} \cos(10^3 t)$ V 作用于如图 5-26 所示的无源单口网络。求该网络的等效电路以及网络吸收的有功功率、无功功率、视在功率和功率因数。

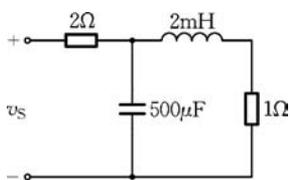


图 5-26 例 5.13 的图 1

解: 采用有效值相量,故有 $\dot{V}_s = 10 \angle 0^\circ$ V。

电容、电感元件的阻抗分别为 $-j2\Omega$ 和 $j2\Omega$ 。由此求得单口网络的等效阻抗为

$$Z = 2 + \frac{-j2(1+j2)}{-j2+1+j2} = 6 - j2 = 6.32 \angle -18.43^\circ \Omega (\text{电容性})$$

根据 Z 的实部和虚部,可得到串联等效电阻和等效电容分别为

$$R_{\text{eq}} = 6\Omega, \quad C_{\text{eq}} = 500\mu\text{F}$$

再求得该网络的等效导纳为

$$Y = \frac{1}{Z} = (0.15 + j0.05) \text{ S}$$

根据 Y 的实部和虚部,可得到并联等效电导和等效电容分别为

$$G_{\text{eq}} = 0.15 \text{ S}, \quad C_{\text{eq}} = 50\mu\text{F}$$

串、并联等效电路分别如图 5-27(a)、(b)所示。

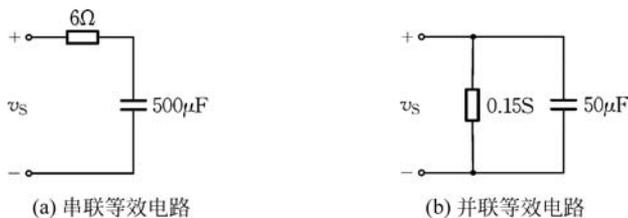


图 5-27 例 5.13 的图 2

电路的总电流为

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_s}{Z} = \frac{10}{6-j2} = (1.5 + j0.5) \text{ A}$$

求得电路的复功率为

$$\tilde{S} = \dot{V} \dot{I}^* = 10 \times (1.5 - j0.5) = (15 - j5) \text{ VA}$$

据此可知电路的视在功率、有功功率、无功功率和功率因数分别为

$$S = |\tilde{S}| = 15.8 \text{ VA}, \quad P = 15 \text{ W}, \quad Q = -5 \text{ var}, \quad \lambda = 0.949$$

5.6.3 功率因数的提高

一般来说,电气设备绝大多数为感性负载,且阻抗角较大,即功率因数 λ 较低,比如,日光灯的 λ 约为 0.5。由于供电系统的功率因数总是小于 1,因此产生了电源设备不能充分利用和输电线路损耗增加的问题。本节针对功率因数的提高展开讨论。

1. 提高功率因数的意义

我们知道,发电设备有一定的额定容量 $S_N = V_N I_N$,但发电设备向负载提供的功率是由负载来决定的。当负载的 $\lambda = 1$ 时,若电源工作在额定状态,则电源向负载提供的功率 P 等于额定容量 S_N ,电源得到充分利用。当负载的 $\lambda = 0.5$ 时,若电源仍工作在额定状态,则电源向负载提供的功率 P 只是额定容量 S_N 的一半。有功功率的降低,使电源设备不能充分利用。若设法提高整个线路的功率因数,可减小电源所供电流,这样电源就可多供负载,充分发挥电源设备的容量。

根据有功功率定义式(5.56),可得 $I = \frac{P}{V \cos \varphi}$,即供电电压和有功功率一定时,供电线路电流的大小与功率因数成反比,且线路(线路等效电阻为 R)损耗为

$$\Delta P = I^2 R = \left(\frac{P}{V}\right)^2 R \left(\frac{1}{\cos \varphi}\right)^2$$

表明功率因数越低,供电线路电流越大,线路压降越大,线路损耗也越大。这样,不利于电能的节约,同时还影响了供电质量。

2. 功率因数的提高

提高功率因数的前提是必须保证用电设备(负载)原有的工作状态不变,即加在负载上的电压和负载的有功功率不变。因此,通常采用的方法是在感性负载两端并联电容器,如图 5-28(a)所示。图中虚线框为等效的感性负载部分。

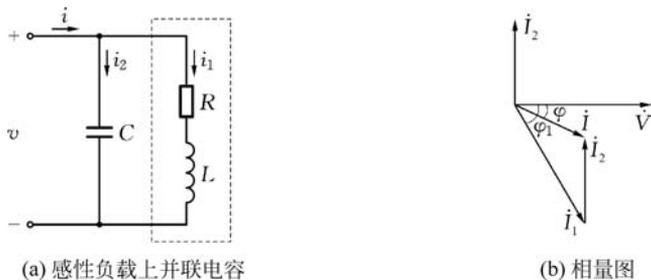


图 5-28 并联电容提高功率因数

采用相量图法,可以比较直观的分析图 5-28(a)所示电路是如何提高功率因数的。作出电压、电流相量图如图 5-28(b)所示。由相量图可以看出,在未并联 C 时,电路的 λ 即为感性负载的 $\lambda_1 = \cos \varphi_1$,此时感性负载消耗的功率 $P_1 = VI_1 \cos \varphi_1$,电路的总电流 $\dot{I} = \dot{I}_1$ 。并

联 C 之后,电路的总电流 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$,此时 \dot{V} 与 \dot{I} 的相位差 $\varphi < \varphi_1$,故 $\cos\varphi > \cos\varphi_1$,即电路的功率因数提高了,且总电流 $I < I_1$ 。

需要说明,由于电容 C 不消耗功率,所以电路的总有功功率仍是感性负载的功率,即

$$P = VI\cos\varphi = VI_1\cos\varphi_1$$

并联电容器的电容量如何选取呢?通常规定功率因数的标准值为 0.9。这是因为 C 过大,不仅成本高,而且功率因数大于 0.9 以后,再增大 C 值对减小线路电流的作用不明显,这可以通过例 5.14 具体理解这个问题。

下面由相量图给出并联电容 C 的计算方法。

由相量图可得

$$I_2 = I_1\sin\varphi_1 - I\sin\varphi = \frac{P}{V\cos\varphi_1}\sin\varphi_1 - \frac{P}{V\cos\varphi}\sin\varphi = \frac{P}{V}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi)$$

而 $I_2 = \omega CV$,故有

$$C = \frac{P}{\omega V^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi) \quad (5.70)$$

例 5.14 电路如图 5-28(a)所示,感性负载的功率为 10kW,功率因数为 0.6,供电电源为 220V、50Hz 交流电源。

(1) 若将功率因数提高到 0.9,问并联多大的电容量?比较并联前后电路的总电流。

(2) 若将功率因数由 0.9 再提高到 0.95,问还应增加多少并联电容的容值,此时电路的总电流又是多大?

解: (1) 根据已知条件,求得

$$\tan\varphi_1 = \tan(\arccos 0.6) = 1.333, \quad \tan\varphi = \tan(\arccos 0.9) = 0.484$$

故有

$$C = \frac{P}{\omega V^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi) = \frac{10 \times 10^3}{2\pi \times 50 \times 220^2}(1.333 - 0.484) = 558\mu\text{F}$$

并联 C 之前电路总电流

$$I = I_1 = \frac{P}{V\cos\varphi_1} = \frac{10 \times 10^3}{220 \times 0.6} = 75.8\text{A}$$

并联 C 之后电路总电流

$$I = \frac{P}{V\cos\varphi} = \frac{10 \times 10^3}{220 \times 0.9} = 50.5\text{A}$$

表明并联 C 之后电路总电流减小了。

(2) 根据已知条件,求得

$$\tan\varphi = \tan(\arccos 0.9) = 0.484, \quad \tan\varphi' = \tan(\arccos 0.95) = 0.329$$

故所需增加的电容值为

$$C' = \frac{P}{\omega V^2}(\tan\varphi - \tan\varphi') = \frac{10 \times 10^3}{2\pi \times 50 \times 220^2}(0.484 - 0.329) = 102\mu\text{F}$$

此时电路中的总电流为

$$I' = \frac{P}{V\cos\varphi} = \frac{10 \times 10^3}{220 \times 0.95} = 47.8\text{A}$$

可见,功率因数由 0.9 再提高到 0.95 所需并联的电容值增加很多,但总电流减小不明显。

5.6.4 最大功率传输

在第4章中,曾经研究了电阻电路的负载从直流电源获得最大功率的问题,同理,在正弦稳态电路中,我们做类似的分析,来研究负载从正弦交流源获得最大功率及其条件。

电路如图5-29所示,正弦交流源电压的有效值相量为 \dot{V}_s ,内阻抗为 $Z_s = R_s + jX_s$,负载阻抗为 $Z_L = R_L + jX_L$,式中下标L表示负载。

由于交流负载阻抗较直流负载电阻复杂,涉及的变量多,所以,在给定电源的前提下,分两种情况讨论:

- (1) 负载的 R_L 和 X_L 均可独立变化;
- (2) 负载的阻抗角不变,模 $|Z_L|$ 可变。

1. 共轭匹配

由图5-29可得电路电流为

$$\dot{i} = \frac{\dot{V}_s}{(R_s + R_L) + j(X_s + X_L)}$$

其有效值为

$$I = \frac{V_s}{\sqrt{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2}}$$

由此可得负载的有功功率为

$$P_L = R_L I^2 = \frac{V_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2} \quad (5.71)$$

负载获得最大有功功率须满足以下条件

$$\begin{cases} X_s + X_L = 0 \\ \frac{dP_L}{dR_L} = 0 \end{cases}$$

前一条件可在 R_L 为任意值时,使式(5.71)的分母最小,即 P_L 最大;后一条件是在满足前一条件下,求得使 P_L 为最大时的 R_L 值。由此可得负载获得最大功率的条件为

$$X_L = -X_s, \quad R_L = R_s \quad (5.72)$$

表明负载阻抗为电源内阻抗的共轭复数,即

$$Z_L = Z_s^* \quad (5.73)$$

满足式(5.73)条件时,负载阻抗与电源内阻抗为最大功率匹配,即共轭匹配,此时的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{V_s^2}{4R_s} \quad (5.74)$$

对含源单口网络向负载传输功率来说,根据戴维南定理,式(5.74)中的 V_s 应理解为含源单口网络的开路电压 V_{OC} , R_s 应为该网络戴维南等效阻抗的电阻分量 R_{eq} 。

2. 模匹配

负载阻抗可表示为

$$Z = |Z| \angle \varphi = |Z| \cos \varphi + j |Z| \sin \varphi$$

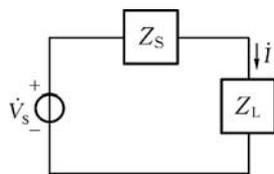


图5-29 最大功率传输

电路电流为

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_s}{(R_s + |Z| \cos\varphi) + j(X_s + |Z| \sin\varphi)}$$

负载的有功功率为

$$P_L = \frac{V_s^2 |Z| \cos\varphi}{(R_s + |Z| \cos\varphi)^2 + (X_s + |Z| \sin\varphi)^2}$$

令 $\frac{dP_L}{d|Z|} = 0$, 即

$$(R_s + |Z| \cos\varphi)^2 + (X_s + |Z| \sin\varphi)^2 - 2|Z| \cos\varphi (R_s + |Z| \cos\varphi) - 2|Z| \sin\varphi (X_s + |Z| \sin\varphi) = 0$$

可得

$$|Z|^2 = R_s^2 + X_s^2$$

即

$$|Z| = Z_s \quad (5.75)$$

表明负载获得最大有功功率的条件是负载阻抗的模与电源内阻抗的模相等, 即模匹配。

例 5.15 电路如图 5-30(a) 所示, 已知 $v_s = 10\sqrt{2} \cos(10^3 t) \text{ V}$ 。试求负载功率, 若 (1) 负载为 5Ω 电阻; (2) 负载为电阻且与电源内阻抗匹配; (3) 负载与电源内阻抗为共轭匹配。

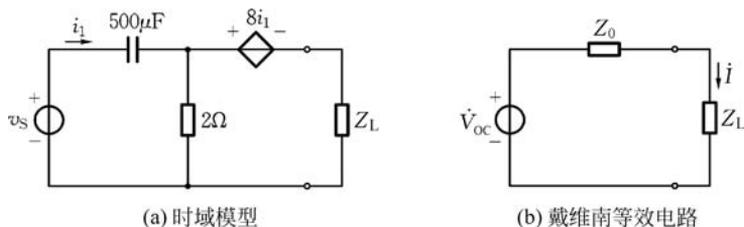


图 5-30 例 5.15 的图

解: 采用有效值相量。先求得图 5-30(a) 所示电路的戴维南等效电路, 如图 5-30(b) 所示。其中开路电压为

$$\dot{V}_{oc} = -8\dot{I}_1 + 2\dot{I}_1 = -6\dot{I}_1 = -6 \frac{10}{2-j2} = 15\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ V}$$

由加压求流法, 求得等效阻抗 Z_0 为

$$Z_0 = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{-8\dot{I}_1 + 2(\dot{I} + \dot{I}_1)}{\dot{I}} = 2 - 6 \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}} = 2 - 6 \left(-\frac{2}{2-j2} \right) = (5 + j3) \Omega$$

(1) $Z_L = R_L = 5\Omega$ 时

$$\dot{I} = \frac{15\sqrt{2} \angle -135^\circ}{5 + j3 + 5} = \frac{15\sqrt{2} \angle -135^\circ}{10 + j3} = \frac{15\sqrt{2} \angle -135^\circ}{7.38\sqrt{2} \angle 16.7^\circ} = 2.03 \angle -151.7^\circ \text{ A}$$

$$P_L = 2.03^2 \times 5 = 20.6 \text{ W}$$

(2) $Z_L = R_L = |Z_o| = 5.83\Omega$ 时(模匹配)

$$\dot{I} = \frac{15\sqrt{2} \angle -135^\circ}{5 + j3 + 5.83} = \frac{15\sqrt{2} \angle -135^\circ}{10.83 + j3} = \frac{15\sqrt{2} \angle -135^\circ}{7.95\sqrt{2} \angle 15.5^\circ} = 1.89 \angle -150.5^\circ \text{ A}$$

$$P_L = 1.89^2 \times 5.83 = 20.8 \text{ W}$$

(3) $Z_L = Z_o^* = (5 - j3)\Omega$ 时(共轭匹配)

$$\dot{I} = \frac{15\sqrt{2} \angle -135^\circ}{5 + j3 + 5 - j3} = \frac{15\sqrt{2} \angle -135^\circ}{10} = 2.12 \angle -135^\circ \text{ A}$$

$$P_L = 2.12^2 \times 5 = 22.5 \text{ W}$$

可见共轭匹配可使负载获得功率最大。

5.7 谐振电路

谐振是电路的一种特殊工作状态,以一个含有 R 、 L 、 C 元件的单口网络为例,若通过改变电路参数值或调节电源频率,使其端口电压与端口电流同相,即电路的阻抗呈现电阻性,则称电路发生了谐振,该电路称为谐振电路,而使谐振发生的条件称为谐振条件。由于电路谐振是在特定条件下出现在电路中的一种现象,且具有一些特点,所以了解谐振现象既可以利用这些特点,又可防止某些特点所带来的危害。

根据 R 、 L 、 C 元件连接方式的不同,谐振可分为串联谐振和并联谐振。

5.7.1 串联谐振

RLC 串联电路如图 5-31(a)所示,其输入阻抗为

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

当电路满足下列条件时,即

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (5.76)$$

则阻抗角 $\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = 0$,即端口电压 \dot{V} 与端口电流 \dot{I} 同相,电路出现谐振现象,此时称为串联谐振。

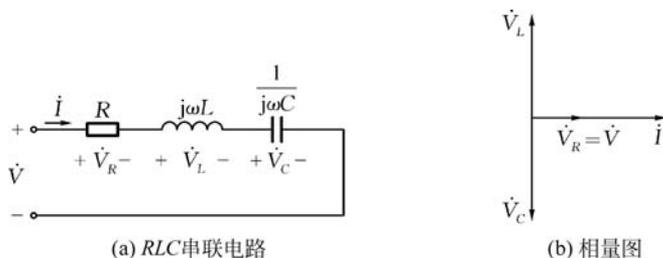


图 5-31 串联谐振电路及其相量图

由式(5.76)可得串联谐振时外接电源的频率 f 与电路参数之间的关系为

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5.77)$$

式中, f_0 称为谐振电路的固有频率, 它是由电路参数决定的。

显然, 要使电路发生谐振, 可以在电源频率 f 不变的条件下, 调节电路的参数 L 或 C , 使 f_0 作相应变化, 当 $f = f_0$ 时, 电路谐振; 也可以在电路参数不变的条件下, 改变电源频率 f , 使 $f = f_0$ 电路也将发生谐振。这两种使电路谐振的方法, 在实际电路中均有应用。

下面分析串联谐振电路所具有的一些特点。

(1) 由于 $X_L = X_C$, 故阻抗角 $\varphi = 0$, 电压与电流同相, 电路呈现电阻性, 此时电路阻抗为

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R \quad (5.78)$$

达到最小值。

(2) 在端口电压不变的情况下, 电路中的电流 I 达到最大值, 即

$$I = I_0 = \frac{V}{R} \quad (5.79)$$

称为谐振电流。

利用 Multisim 仿真软件, 通过 AC 扫描, 得到在端口电压不变的情况下, 电流与频率的关系曲线, 仿真电路图和曲线图分别如图 5-32(a)、(b) 所示。

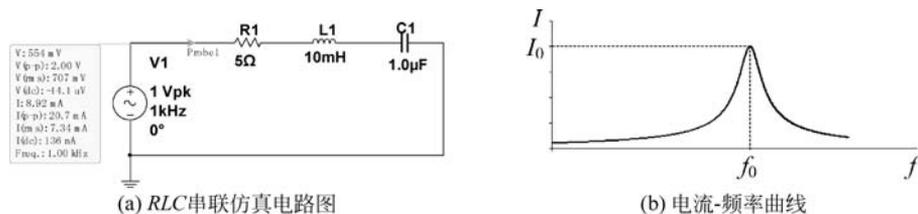


图 5-32 仿真电路图与电流-频率曲线

(3) 由于 $X_L = X_C$, 所以电感电压与电容电压大小相等 ($V_L = V_C$), 相位相反, 二者相互抵消, 电阻上的电压等于电源电压, 即

$$V_R = RI_0 = V \quad (5.80)$$

如图 5-31(b) 相量图所示。

电感和电容上的电压分别为

$$\begin{cases} V_L = I_0 X_L = \frac{V}{R} X_L \\ V_C = I_0 X_C = \frac{V}{R} X_C \end{cases} \quad (5.81)$$

若谐振时感抗和容抗远大于电阻, 即

$$X_L = X_C \gg R$$

则电感电压或电容电压远大于电源电压, 即

$$V_L = V_C \gg V_R = V$$

正因为可出现电感电压(或电容电压)远远大于电源电压的现象, 故串联谐振又称电压谐振。

在电子技术和无线电工程等系统中, 利用电压谐振, 可以在电感或电容上得到比微弱激

励电压高若干倍的响应电压,从而较易取出该电压进行处理。但在电力系统中,串联谐振可使电容器和电感器的绝缘层被谐振高压击穿而损坏,因此在这样的系统中要避免电路谐振或接近谐振。

(4) 谐振时,把电感电压或电容电压与外激励电压的比值定义为谐振电路的品质因数,以 Q 来表示,又简称 Q 值,即

$$Q = \frac{V_L}{V} = \frac{V_C}{V} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} \quad (5.82)$$

Q 是一个无量纲的纯数。由于谐振时电抗常比电路中的电阻大得多,所以 Q 值一般在几十到几百。

(5) 谐振电路中电流、电压与频率的关系曲线——谐振曲线,是描述串联谐振电路的两条重要曲线, Q 值的大小对谐振曲线的形状有很大影响。

① 电流谐振曲线

RLC 串联谐振电路电流的有效值为

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (5.83)$$

以 I 为纵坐标, ω 为横坐标,根据式(5.83)可作出电流谐振曲线,其中 Q 是决定该曲线的参变量。

图 5-33 给出了图 5-32(a) 仿真电路在 $Q=12.6$ 和 $Q=125.7$ 时的两条曲线。由此可见,电路谐振时,电流达到最大值,在对应的曲线上出现一个峰值,称为谐振峰,这说明谐振电路对外施激励源的频率具有选择性。 Q 值越高,曲线越尖锐,选择性越好。

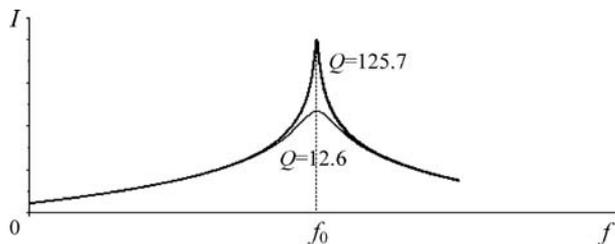


图 5-33 不同 Q 值的谐振曲线

定量的描述选择性通常用带宽(或通频带)来说明。带宽是由半功率点频率来确定的,这里的半功率点频率为电流下降至谐振电流值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (对应功率下降一半)时的频率,如

图 5-34 所示。图中有两个半功率点频率,即上、下半功率点频率(或上、下限频率) ω_2 和 ω_1 ,故通频带为

$$BW = \omega_2 - \omega_1 \quad (5.84)$$

式中, ω_1 和 ω_2 分别为

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right) \\ \omega_2 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right) \end{cases} \quad (5.85)$$

由此可得通频带为

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \quad (5.86)$$

表明通频带 BW 与 Q 值成反比,即 Q 值大通频带窄, Q 值小通频带宽。

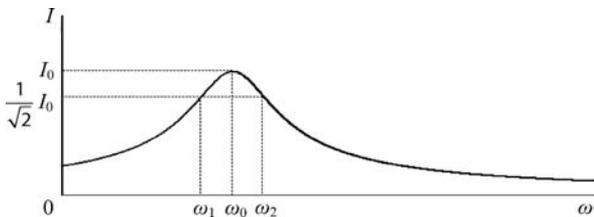


图 5-34 RLC 谐振电路的通频带

将式(5.85)的二式相乘,可得

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (5.87)$$

② 电压谐振曲线

RLC 串联谐振电路中电感电压的有效值为

$$V_L = \frac{\omega Q V}{\omega_0 \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (5.88)$$

电容电压的有效值为

$$V_C = \frac{\omega_0 Q V}{\omega \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (5.89)$$

由此可求出 V_L 和 V_C 出现最大值时所对应的频率,分别为

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad (5.90)$$

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (5.91)$$

由于 $Q \gg 1$,故 $\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1$,即 $\omega_C < \omega_L$ 。也就是说,在谐振时,电感电压和电容电压虽可出现高电压,却非它们的最高电压,前者的最高电压出现在谐振频率之后,后者则在谐振频率之前。图 5-35 给出了图 5-32(a) 仿真电路在 $Q = 1.57$ 时的 $V_L \sim f$ 和 $V_C \sim f$ 曲线,可以从图中清楚地看到曲线的这一特点。

式(5.90)和式(5.91)还表明,随着 Q 值的增大,将有 $\omega_C \approx \omega_L \rightarrow \omega_0$ 。将式(5.90)和式(5.91)分别代入式(5.88)和式(5.89),可求得 V_L 和 V_C 的最大值均为

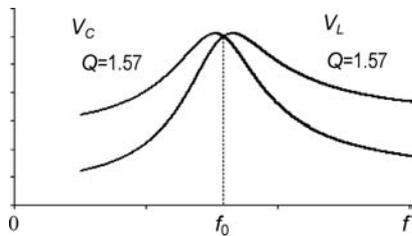


图 5-35 $V_L \sim f$ 和 $V_C \sim f$ 曲线

$$V_{L\max} = V_{C\max} = \frac{QV}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (5.92)$$

表明出现在不同频率上的 V_L 和 V_C 的最大值是相等的。

5.7.2 并联谐振

从对串联谐振电路的分析中不难理解,其电路端口应以理想电压源作激励,若激励源的内阻不可忽略,则其内阻必将计入电路的总电阻使之增大,从而降低了电路的品质因数和选择性,因此,在实际应用中,串联谐振电路只适于与低内阻的信号源相连。本节将讨论的并联谐振电路较适于高内阻的信号源。

图 5-36(a)给出了 GLC 并联谐振电路,根据对偶性,其分析方法与 RLC 串联谐振电路相同。

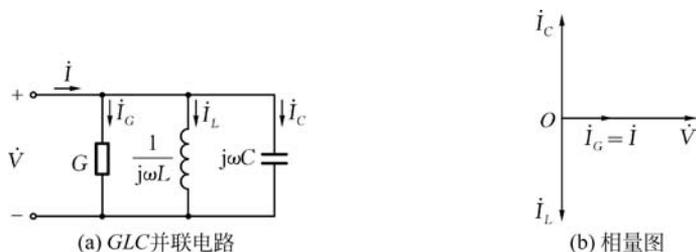


图 5-36 并联谐振电路及其相量图

GLC 并联谐振电路的输入导纳为

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

当电路满足下列条件时,即

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \quad (5.93)$$

则导纳角 $\varphi_Y = \arctan \frac{B_C - B_L}{G} = 0$, 即端口电压 \dot{V} 与端口电流 \dot{I} 同相, 电路出现谐振现象, 此时称为并联谐振。电路谐振时的频率为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{或者} \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5.94)$$

下面介绍并联谐振电路的一些特点。

(1) 谐振时, 导纳角 $\varphi_Y = 0$, 电流与电压同相, 电路呈现电阻性, 输入导纳最小, 即

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = G = \frac{1}{R} \quad (5.95)$$

(2) 在电源电压一定时, 谐振电路的总电流最小, 即

$$I_0 = I_G = GV \quad (5.96)$$

(3) 谐振时, 电感支路电流与电容支路电流大小相等、相位相反, 二者相互抵消, 如图 5-36(b)。当 $B_C = B_L > G$ 时, 由于 I_L 和 I_C 大于总电流 I , 所以并联谐振又称电流谐振。

(4) 根据对偶关系, 并联谐振电路的品质因数为

$$Q = \frac{I_C}{I} = \frac{I_L}{I} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{\omega_0 C}{G} \quad (5.97)$$

(5) 根据对偶关系, 理想电流源激励的并联谐振电路与理想电压源激励的串联谐振电路互为对偶, 前者的电压频率特性应与后者的电流频率特性互为对偶, 即

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (5.98)$$

同理, 电路的通频带为

$$BW = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{G}{C} \quad (5.99)$$

由于 GLC 并联电路与 RLC 串联电路互为对偶电路, 以上仅对 GLC 并联谐振电路有关结论进行了简单罗列, 仅供参考, 更多内容不再详细讨论。

例 5.16 设计一个 RLC 串联电路, 要求: 谐振频率为 10^5 Hz , 通频带为 10^3 Hz 。已知电路中的总电阻为 20Ω 。确定电路元件参数及通频带的上下限频率。

解: 根据已知条件, 求得电路的 Q 值为

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{10^5}{10^3} = 100$$

确定电感和电容参数, 分别为

$$L = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{100 \times 20}{2\pi \times 10^5} = 3.2 \text{ mH}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 RQ} = \frac{1}{2\pi \times 10^5 \times 20 \times 100} = 796 \text{ pF}$$

根据式(5.85), 可得

$$\begin{cases} f_1 = f_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right) \\ f_2 = f_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right) \end{cases}$$

考虑到 $Q = 100 \gg 1$, 略去 $\frac{1}{4Q^2}$, 故有

$$\begin{cases} f_1 \approx f_0 \left(-\frac{1}{2Q} + 1 \right) = 99500 \text{ Hz} \\ f_2 \approx f_0 \left(\frac{1}{2Q} + 1 \right) = 100500 \text{ Hz} \end{cases}$$

由此, 电路通频带的上、下限频率分别为 100.5 kHz 和 99.5 kHz 。

5.8 Multisim 实战——瞬态分析和交流分析

瞬态分析是在激励信号作用下分析电路节点的时域响应, 也就是观察该节点在整个显示周期里各个时刻的电压波形。交流分析是分析电路节点的频率特性, 也就是观察被分析

的电路节点的幅频特性和相频特性。本小节通过仿真实例,分别介绍这两种分析的使用方法。

5.8.1 瞬态分析

例 5.17 RC 串联电路如图 5-37 所示,试对电路中的节点 1、节点 2 进行瞬态分析。

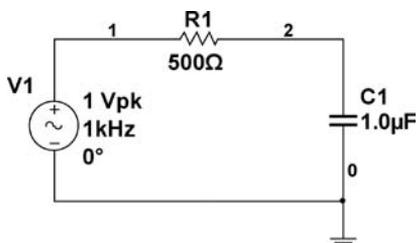


图 5-37 RC 串联电路

解: (1) 在电路工作窗口创建待分析电路,如图 5-37 所示。

(2) 执行 Simulate→Analyses→Transient Analysis 命令,打开相应对话框,在 Analysis Parameters 选项卡中,设置仿真参数,如图 5-38 所示。

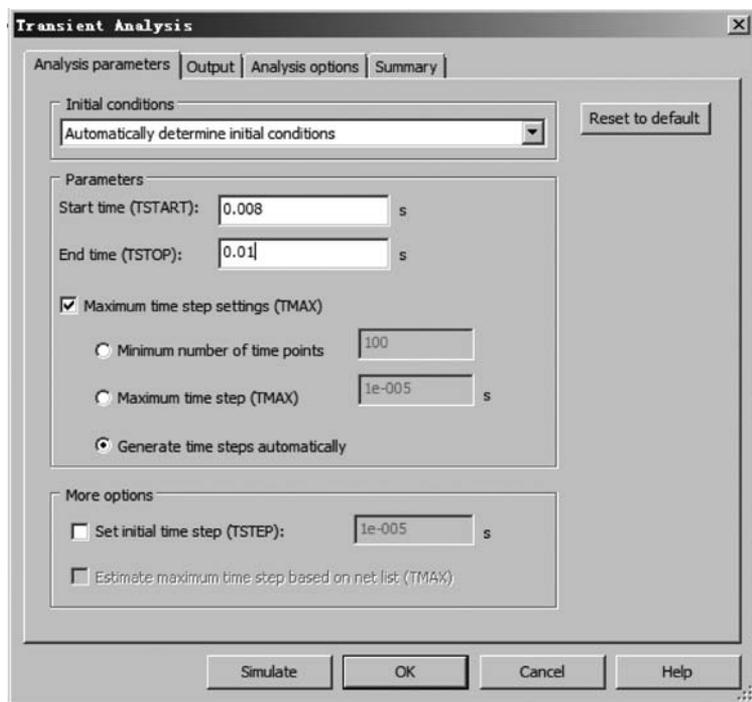


图 5-38 Analysis parameters 选项卡

① Initial Conditions 区域。

Automatically determine initial conditions: 默认设置 选用。

② Parameters 区域

由于 RC 电路从开始工作到稳定有一个暂态过程(详见第 8 章),为了能够看到一个稳定的波形,所以选择观察时间为

Start time: 0.008s

End time: 0.01s

(3) 在 Output 选项卡中,选择待分析的节点,如图 5-39 所示,其中 V(1)、V(2)分别为节点 1、节点 2 对地的电压。

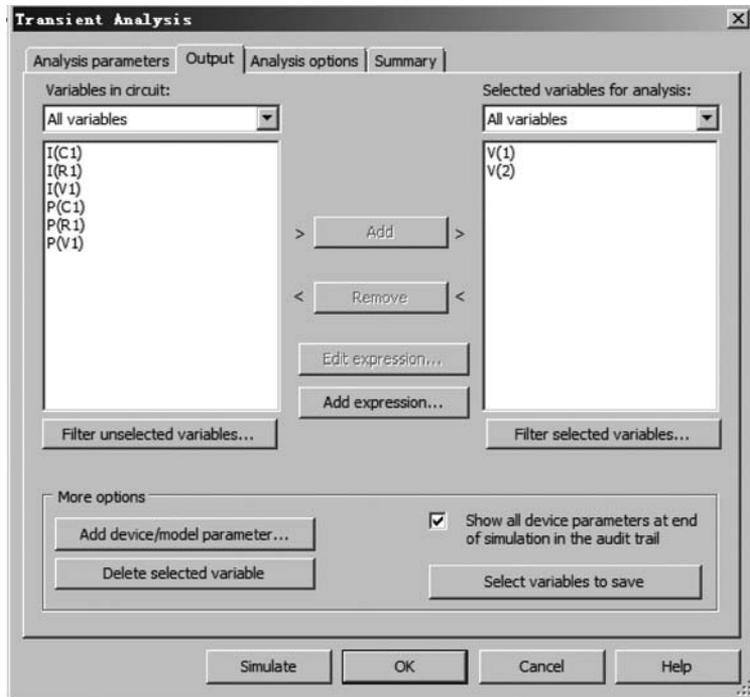


图 5-39 Output 选项卡

单击 Simulate 按钮,得到瞬态分析结果,如图 5-40 所示。其中粗实线和细实线分别为节点 2 和节点 1 的波形,常把前者称为输出波形,后者称为输入波形,且该电路的输出波形滞后输入波形。

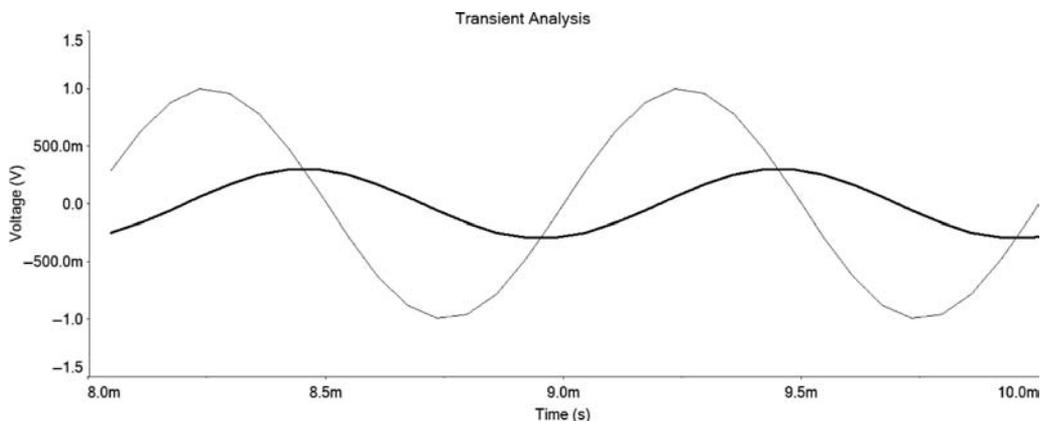


图 5-40 瞬态分析结果

由此可见,瞬态分析的结果即为电路中节点的电压波形,当然也可以用示波器来观察该节点的波形,相比之下,采用瞬态分析,通过参数设置,可以更详细的观察波形的细微变化情况。

5.8.2 交流分析

例 5.18 RC 串联电路如图 5-37 所示,试对电路中的节点 2 进行交流分析。

解: (1) 在电路工作窗口创建待分析电路,设定输入信号的幅值和相位,如图 5-37 所示。

(2) 执行 Simulate→Analyses→AC Analysis 命令,打开相应对话框,在 Frequency parameters 选项卡中,设置仿真参数,如图 5-41 所示。

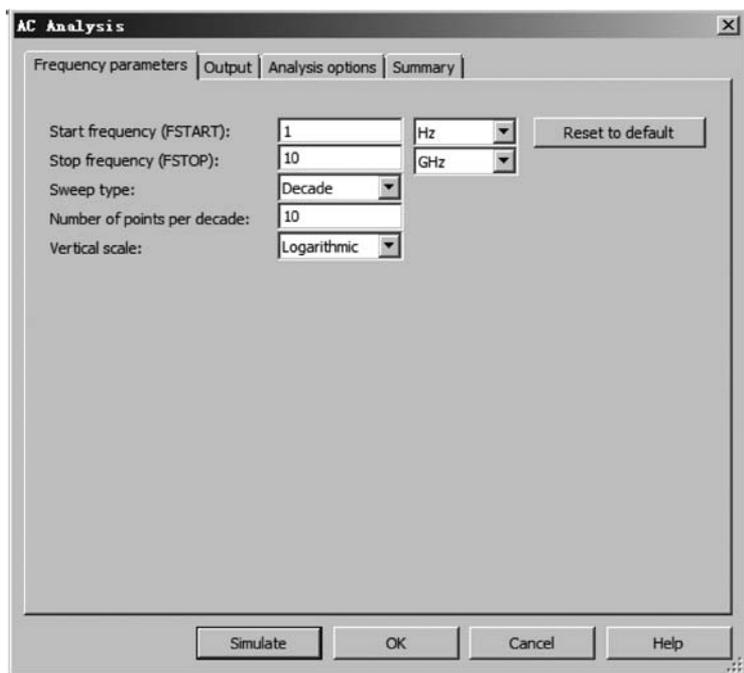


图 5-41 Frequency parameters 选项卡

- ① Start frequency: 1Hz
- ② Stop frequency: 10GHz
- ③ Sweep type: 默认设置为 Decade
- ④ Number of points per: 默认设置为 10
- ⑤ Vertical scale: 默认设置为 Logarithmic

(3) 在 Output 选项卡中,选择待分析的节点,如图 5-42 所示。

单击 Simulate 按钮,即可在 Grapher View 上得到交流分析结果,如图 5-43 所示,其中 Magnitude 为幅频特性,Phase 为相频特性。

由此可见,交流分析的结果即为电路中节点的频率特性,当然也可以用波特图仪来观察该节点的频率特性。

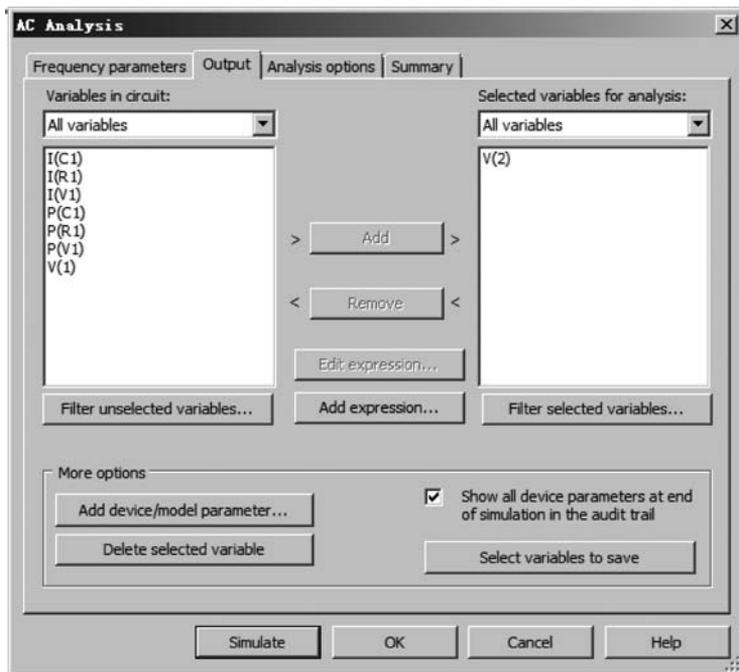
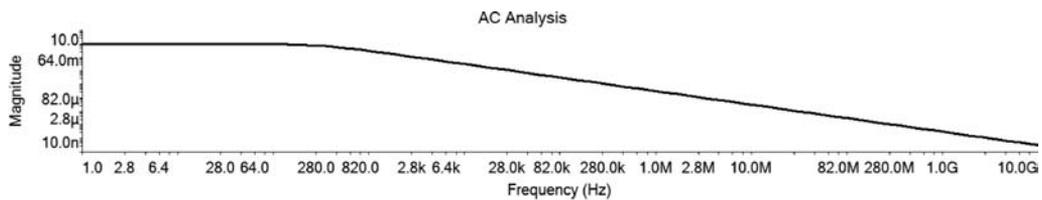


图 5-42 Output 选项卡



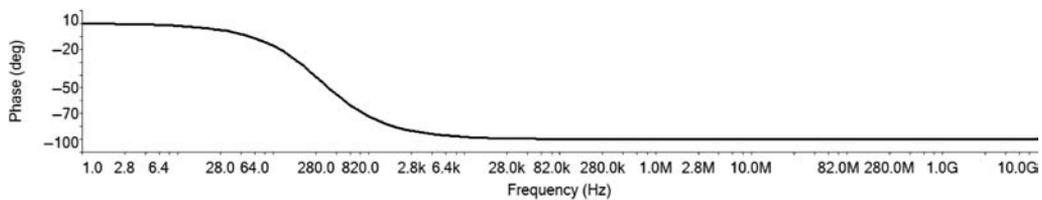
实验视频 5



(a) 幅频特性



实验视频 6



(b) 相频特性

图 5-43 交流分析结果

习题

分析题

5-1 已知 $A = 10 \angle 60^\circ$, $B = 5 \angle 150^\circ$ 。试求 $A+B$ 、 $A-B$ 、 $A \cdot B$ 、 A/B 。

5-2 求 $6 \angle 15^\circ - 4 \angle 40^\circ + 7 \angle -60^\circ = ?$ (1)用复数计算；(2)用相量图计算。

5-3 若 $100\angle 0^\circ + A\angle 60^\circ = 173\angle \theta$, 试求 A 和 θ 。

5-4 若 $i_1(t) = 10\cos(314t + 30^\circ)$ A, $i_2(t) = -20\sin(314t + 30^\circ)$ A, $i_3(t) = -8\cos(314t + 30^\circ)$ A。试写出对应的幅值相量, 并画出相量图。

5-5 已知幅值相量 $\dot{V}_{1m} = 20\angle -30^\circ$ V, $\dot{V}_{2m} = 40\angle 150^\circ$ V, 且 $f = 50$ Hz。试写出它们对应的正弦电压瞬时值表达式。

5-6 试写出下列正弦量对应的有效值相量:

(1) $4\cos 5t + 3\sin 5t$; (2) $-6\sin(2t - 75^\circ)$

5-7 已知 $f(t) = 3\cos(\omega t + 80^\circ) + 2\sin \omega t - 5\sin(\omega t + 130^\circ)$, 试用相量变换求解 $f(t)$ 。

5-8 已知 $i_1(t) = 10\cos(\omega t - 30^\circ)$ A, $i_2(t) = 20\cos(\omega t + 60^\circ)$ A。试用相量变换求解 $i_1(t) + i_2(t)$, 并绘出相量图。

5-9 已知 $v_{ab}(t) = -10\cos(\omega t + 60^\circ)$ V, $v_{bc}(t) = 8\sin(\omega t + 120^\circ)$ V。求 v_{ac} , 并绘出相量图。

5-10 已知 $100\cos \omega t = f(t) + 30\sin \omega t + 150\sin(\omega t + 150^\circ)$, 试用相量求解 $f(t)$ 。

5-11 电路中有四个节点 1、2、3、4, 已知节点间电压的有效值相量分别为 $\dot{V}_{12} = 20 + j50$ V, $\dot{V}_{32} = -40 + j30$ V, $\dot{V}_{34} = 30\angle 45^\circ$ V。求在 $\omega t = 20^\circ$ 时, v_{14} 及其幅值各是多少?

5-12 已知流过 0.2 F 电容的电流为 $i(t) = 10\sqrt{2}\cos(100t + 30^\circ)$ A。试求电容的电压 $v(t)$, 并绘相量图。

5-13 已知电感电压 $v(t) = 10\cos(10^3t + 30^\circ)$ V, 且 $L = 0.2$ H, 求电感电流 $i(t)$ 。

5-14 在图 5-44 所示的 RLC 串联电路中, 已知电源电压 $v_s(t) = 10\cos(10^3t + 30^\circ)$ V, $R = 2\Omega$, $L = 2$ mH, $C = 500\mu$ F。试求稳态电流 $i(t)$ 和各元件的端电压。

5-15 如图 5-44 所示, 求电路的端口等效阻抗和等效导纳, 问端口电压与端口电流的相位关系如何? 绘出端口电流和各元件端电压的相量图。

5-16 在图 5-45 所示的 GLC 并联电路中, 已知 $i_s(t) = 3\cos(10^3t + 45^\circ)$ V, $G = 2$ S, $L = 2$ mH, $C = 500\mu$ F。求电感端电压 $v_L(t)$ 。

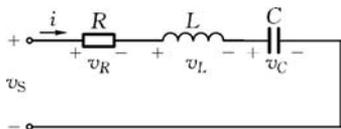


图 5-44 题 5-14 的图

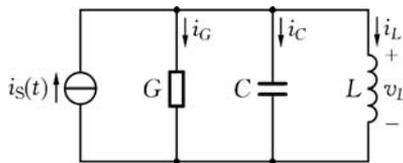


图 5-45 题 5-16 的图

5-17 如图 5-45 所示, 求电路的端口等效阻抗和等效导纳, 问端口电压与端口电流的相位关系如何? 绘出端口电压和各元件电流的相量图。

5-18 已知元件 A 可能为电阻或电感或电容, 若其两端电压和流过的电流如以下所示, 试确定元件的参数。

(1) $v(t) = 160\cos(628t + 10^\circ)$ V, $i(t) = 4\cos(628t - 80^\circ)$ A;

(2) $v(t) = 80\cos(314t + 30^\circ)$ V, $i(t) = 8\sin(314t + 120^\circ)$ A;

(3) $v(t) = 250\cos(200t + 60^\circ)$ V, $i(t) = 0.5\cos(200t + 150^\circ)$ A。

5-19 如图 5-46 所示,已知电路中电流源电流为 $i(t) = (8\cos t - 11\sin t)\text{A}$, 电路的端口电压为 $v(t) = (\sin t + 2\cos t)\text{V}$ 。求三个元件上的电流以及 L 的值。

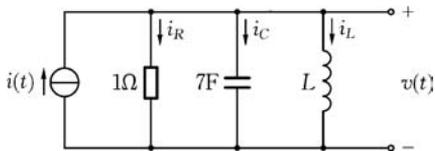


图 5-46 题 5-19 的图

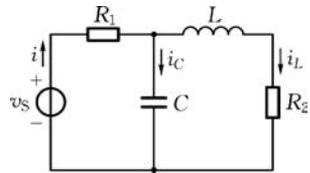


图 5-47 题 5-20 的图

5-21 如图 5-48 所示,已知电容电压 $v_C(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t)\text{V}$ 。试求电源电压 $v_S(t)$ 。

5-22 如图 5-49 所示,已知电路中的 $R = 3\Omega, r = 2\Omega, L = 2\text{mH}, C = 250\mu\text{F}, v_S(t) = 20\cos(2 \times 10^3 t)\text{V}$ 。分别用网孔法和节点法求 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。

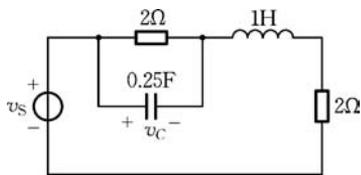


图 5-48 题 5-21 图

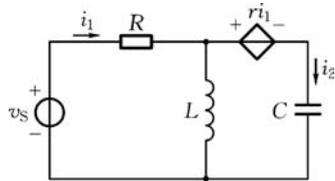


图 5-49 题 5-22 的图

5-23 如图 5-50 所示,试用叠加原理求电路中的电流 $i(t)$ 。已知 $R_1 = 1\Omega, R_2 = 2\Omega, L = 2\text{mH}, v_{S1}(t) = 5\sqrt{2}\cos(10^3 t)\text{V}, v_{S2}(t) = 10\sqrt{2}\cos(10^3 t + 90^\circ)\text{V}$ 。

5-24 用网孔法和节点法,求解图 5-50 所示电路中每条支路的电流(参考方向均向下)。

5-25 用戴维南定理,求解图 5-49 所示电路中的 $i_2(t)$ 。

5-26 电路相量模型如图 5-51 所示。用节点法求解流过电容的电流。

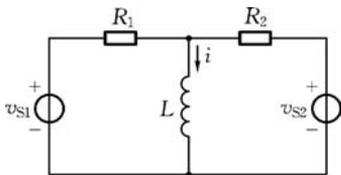


图 5-50 题 5-23 的图

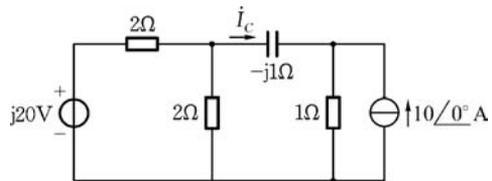


图 5-51 题 5-26 的图

5-27 电路相量模型如图 5-51 所示。用等效变换法求解流过电容的电流。

5-28 电路相量模型如图 5-51 所示。用叠加定理求解流过电容的电流。

5-29 电路相量模型如图 5-51 所示。用戴维南定理求解流过电容的电流。

5-30 如图 5-52 所示,试求单口网络的输入阻抗和输入导纳。

5-31 如图 5-53 所示,试在 $\omega = 4\text{rad/s}$ 和 $\omega = 10\text{rad/s}$ 时,求单口网络的等效相量模型

(串联相量模型和并联相量模型)。已知 $R_1 = 1\Omega, R_2 = 7\Omega, L = 2\text{H}, C = \frac{1}{80}\text{F}$ 。

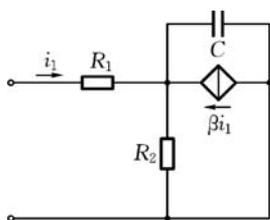


图 5-52 题 5-30 的图

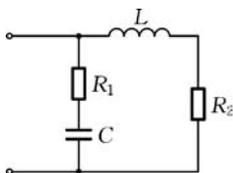


图 5-53 题 5-31 的图

5-32 如图 5-54 所示,已知 $v_s(t) = 2\sqrt{2} \cos(5t + 120^\circ) \text{V}$,求该正弦稳态电路的戴维南和诺顿相量模型。

5-33 如图 5-55 所示,已知电路中的 $X_C = 10\Omega, R = 5\Omega, X_L = 5\Omega$,电流表 A_1 和电压表 V_1 的读数如图所示。试求电流表 A_0 和电压表 V_0 的读数。

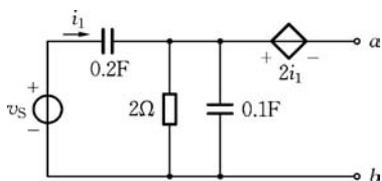


图 5-54 题 5-32 的图

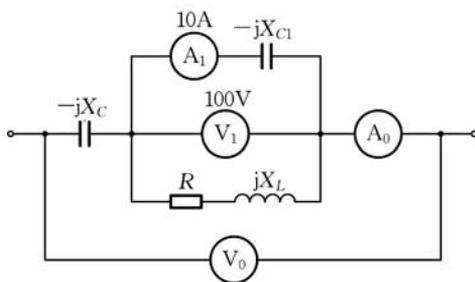


图 5-55 题 5-33 的图

5-34 电路如图 5-56 所示,已知电阻 $R = 7\Omega$,三个电压表 V, V_1 和 V_2 的读数分别为 $200\text{V}, 70\text{V}$ 和 150V 。求复阻抗 Z_1 。

5-35 如图 5-57 所示,电路的输入电压 v_s 为正弦波电压。(1)求输出电压 v_2 与 v_1 的相位差;(2)若要求二输出电压为正交信号,则应满足什么条件?

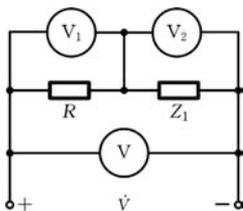


图 5-56 题 5-34 的图

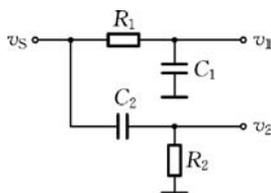


图 5-57 题 5-35 的图

5-36 图 5-58 所示为一移相电路,图中 $R_w = \frac{1}{\omega C}$,当 R_w 在 $0 \sim R_w$ 变化时,则输出电压 v_{ab} 与输入电压 v_s 的相位差在 $0 \sim 90^\circ$ 变化,而输出电压的有效值始终等于输入电压有效值的一半。试证明之。

5-37 如图 5-59 所示,求电路的输出电压与输入电压之比 $\frac{\dot{V}_0}{\dot{V}_s}$ 的表达式。



视频 18
扫码观看

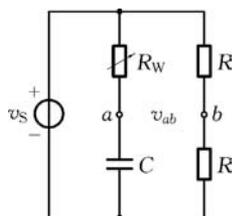


图 5-58 题 5-36 的图

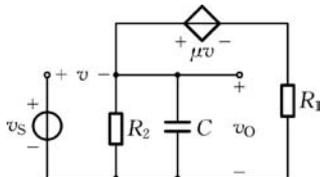


图 5-59 题 5-37 的图

5-38 求图 5-60 所示正弦稳态电路的 P 、 Q 、 S 和 λ 。

5-39 有一 220V、50Hz、20kW 的用电设备,其功率因数为 0.5。求

(1) 电源提供的电流是多少? 无功功率是多少?

(2) 要使功率因数提高到 0.9,问所需的电容器容值是多少? 此时电源提供的电流又是多少?

5-40 将 $\dot{V} = 220\angle -30^\circ$ V 的正弦交流电压施于阻抗为 $Z = 110\angle 30^\circ \Omega$ 的负载上,试求其视在功率、有功功率和无功功率。

5-41 如图 5-61 所示,已知电压有效值相量 $\dot{V} = 4\angle 0^\circ$ V,当电路最佳匹配时,求负载获得的最大功率。

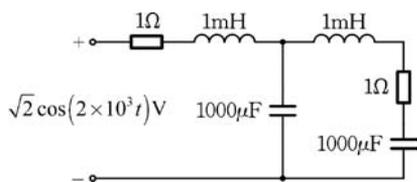


图 5-60 题 5-38 的图

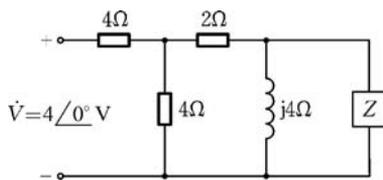


图 5-61 题 5-41 的图

5-42 RLC 串联电路的端电压 $v = 10\sqrt{2}\cos(2500t + 10^\circ)$ V,当 $C = 8\mu\text{F}$ 时,电路中吸收的功率最大, $P_{\max} = 100\text{W}$ 。试求电感 L 和 Q 值。

5-43 在 RLC 串联电路中,调节电容可使电路电流达到最大值 0.5A,电感端电压为 200V。已知电源电压为 $v = 2\sqrt{2}\cos(10^4t + 10^\circ)$ V。(1)求 R 、 L 、 C 和 Q 值;(2)若使电路的谐振频率范围为 6~15kHz,求电容的调节范围。

设计题

5-44 设计一个 RLC 串联谐振电路,要求:谐振频率为 10kHz,带宽为 200Hz。已知电路中的总电阻为 20Ω 。试确定电路元件参数、电路的 Q 值和频带的上下限频率,并仿真验证你的设计。

5-45 设计一个 RLC 并联谐振电路,要求:谐振频率为 38MHz,带宽为 6MHz。已知与谐振电路并联的负载电阻为 $2\text{k}\Omega$ 。试确定电路元件参数、电路的 Q 值和频带的上下限频率,并仿真验证你的设计。

5-46 现有正弦交流电压源、交流电压表和固定电阻各一个,设计一个测量方案,完成对日光灯电感式镇流器参数的测定。