# 第 3 章　经典检测理论

**本章提要**

本章简要介绍信号检测理论的基本概念，分析在经典检测理论中常用的检测准则，例如最大后验概率准则、Bayes（贝叶斯）准则、最小错误概率准则、极大极小准则和 Neyman-Pearson（奈曼-皮尔逊）准则等。

在许多实际问题中，经常会遇到在几种可能发生的情况中做出判断的问题。如在雷达系统中要观测雷达回波，根据观测到的被各种干扰淹没了的随机信号波形，做出目标是否存在的判决。在数字通信系统中，信号在传输过程中，可能会受到工业噪声、交流噪声、随机脉冲噪声、宇宙噪声以及元器件内部热噪声的污染，同时还会受到符号间干扰、同信道干扰、邻信道干扰的影响，波形会产生畸变。因此，接收机要根据接收到的、畸变了的波形来判断发送波形是几种可能波形中的哪一种。

以上所列举的判决问题就是需要利用检测理论来解决的问题。检测理论就是在噪声和干扰环境下，根据有限的观测数据来识别信号有无或判断信号类别的理论。

在检测过程中，每次判决得到的结论并不都是正确的，而是尽可能使判决结论满足某种准则。这里的准则是指在特定条件下具有不同含义的最优准则，检测理论中常用的准则有 Bayes 准则、最大后验概率准则、最小错误概率准则、极大极小准则、Neyman-Pearson 准则等。因此，信号检测是一种基于某种最优准则，对观测数据的概率统计特性进行分析，最终做出判决的过程，它属于统计判决的范畴，其理论基础是统计判决理论和假设检验理论。

## 3.1　检测理论的基本概念

本节先从最简单的二元检测问题入手，讨论检测理论的基本概念。

二元检测又称为双择检测，其理论模型如图 3.1 所示。

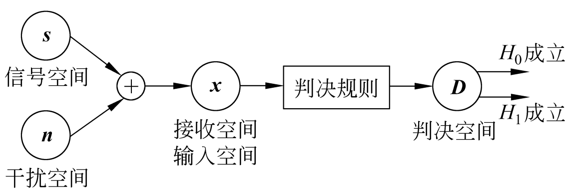


图 3.1　二元检测模型

在二元检测模型中，第一部分是信号空间 $\boldsymbol{s}$，即发射端发送的信号，只有 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 两种状态。如在数字通信系统中，$s_1(t)$ 可以代表 1 码的波形，$s_0(t)$ 代表 0 码的波形。在雷达中，$s_1(t)$ 代表有雷达回波信号的波形，$s_0(t)$ 代表无回波信号的波形。

第二部分是干扰空间 $\boldsymbol{n}$，是指信号在信道上传输时所叠加的噪声。一般假设为均值为

0，方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声。

第三部分为接收空间，或称为输入空间 $\boldsymbol{x}$，它既是接收端接收到的受到干扰的信号，也是需要进行判决处理的信号，即判决处理单元的输入信号。对于二元检测系统，$x(t)=s_i(t)+n(t)(i=0,1)$。

第四部分为判决规则，是对输入空间的受噪信号按照某种准则进行判决归类，判断发送端发送的是 $s_1(t)$ 还是 $s_0(t)$。

第五部分为判决空间 $\boldsymbol{D}$，在二元检测中，$\boldsymbol{D}$ 分为 $D_0$ 区域和 $D_1$ 区域两部分。如果输入空间的信号落在 $D_1$ 区域，则判决发送端发送的是 $s_1(t)$；如果落在 $D_0$ 区域，则判决发送端发送的是 $s_0(t)$。这样，二元检测就有两种可能的判决结果，对应两种假设 $H_0$ 和 $H_1$。即

$$H_0: x(t)=s_0(t)+n(t) \tag{3.1}$$

$$H_1: x(t)=s_1(t)+n(t) \tag{3.2}$$

其中，$x(t)$ 为观测到的信号，即输入空间的元素；$n(t)$ 为干扰信号，即干扰空间的元素。

因此，二元检测就是将判决空间 $\boldsymbol{D}$ 按照某种准则划分为 $D_1$ 和 $D_0$ 两个区域。若输入信号 $x(t)$ 落在 $D_1$ 区域，则判定 $H_1$ 假设为真；反之，则判定 $H_0$ 假设为真，如图 3.2 所示。

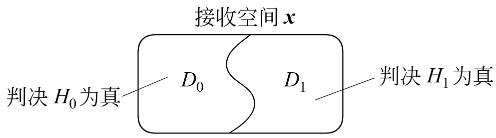


图 3.2　双择检测示意图

这样会出现 4 种可能的判决结果：

(1) 实际是 $H_0$ 假设为真，而判决为 $H_0$ 假设为真；

(2) 实际是 $H_0$ 假设为真，而判决为 $H_1$ 假设为真；

(3) 实际是 $H_1$ 假设为真，而判决为 $H_0$ 假设为真；

(4) 实际是 $H_1$ 假设为真，而判决为 $H_1$ 假设为真。

显然，(1)、(4)两种判决是正确的，(2)、(3)两种判决是错误的。

设代价函数 $C_{ij}$ 表示实际是 $H_j$ 假设为真，而判决为 $H_i$ 假设为真所付出的代价，也称为风险函数。第一个下标表示选择哪一种假设为真，第二个下标表示哪一种假设实际为真。

当 $H_0$ 假设为真，而判决为 $H_1$ 假设为真，即本来无信号而判决为有信号，称为虚警，也称为第一类错误。虚警发生的概率表示为 $P(D_1|H_0)$，称为虚警概率。虚警引入的代价称为虚警代价，记作 $C_{10}$。

当 $H_1$ 假设为真，而判决为 $H_0$ 假设为真，即本来有信号而判决为无信号，称为漏报，也称为第二类错误。漏报发生的概率表示为 $P(D_0|H_1)$，称为漏报概率。漏报引入的代价称为漏报代价，记作 $C_{01}$。

正确判决应无代价，一般记作 $C_{00}=C_{11}=0$。正确判决的概率分别表示为 $P(D_1|H_1)$ 和 $P(D_0|H_0)$，称为检测概率。

双择检测的本质是如何决定判决区间的划分，使判决在某种意义上为最佳。即如何设计信号处理系统，以便能够最佳地从干扰背景中发现信号和提取信号所携带的信息，这也是设计各种条件下的最佳接收机(又称理想接收机，是指在检测时能够使错误判决为最小的接

收机，或是能够从信号加噪声的波形中提取最多有用信息的接收机），并根据其输入做出有无信号或信号参量取值的决策。

## 3.2 最大后验概率准则

### 3.2.1 接收机结构形式

在二元检测中，信源的输出有 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 两种状态，对应 $H_0$ 和 $H_1$ 两种假设。两个输出发生的概率 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$ 称为先验概率。先验概率表示实验进行之前，观察者关于源的知识。

$H_0$ 和 $H_1$ 两个假设总有一个要发生，因此有

$$P(H_0)+P(H_1)=1 \tag{3.3}$$

用条件概率 $P(H_0|x)$ 表示在得到样本 $x$ 的条件下，$H_0$ 假设为真的概率。用 $P(H_1|x)$ 表示在得到样本 $x$ 的条件下，$H_1$ 假设为真的概率。这两种条件概率都称为后验概率。

二元检测就是根据观测到的样本值 $x$，选择或判决 $H_0$ 假设为真还是 $H_1$ 假设为真。

判决必须遵循一定的原则或准则。一种直观上合理的准则就是最大后验概率准则，按照这个准则就是要选择最可能出现的信号为最终的判决结果。也就是，若 $P(H_0|x)>P(H_1|x)$，则判决 $H_0$ 假设为真；反之，判决 $H_1$ 假设为真。记作

$$\frac{P(H_1\mid x)}{P(H_0\mid x)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1 \tag{3.4}$$

即选择与最大后验概率相对应的那个假设作为判决结果，这个准则称为最大后验概率准则(maximum a posterior probability criterion，简称 MAP 准则)，或记作

$$P(H_1\mid x)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}P(H_0\mid x) \tag{3.5}$$

也可表示为 $P(H_0|x)/P(H_1|x)>1$，判为 $H_0$ 假设为真；反之，判为 $H_1$ 假设为真。

根据贝叶斯(Bayes)公式，后验概率可以表示为

$$P(H_i\mid x)=\frac{P(H_i)P(x\mid H_i)}{P(x)} \tag{3.6}$$

其中，$P(H_i)$ 为 $H_i$ 假设发生的先验概率。

若随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)$，则

$$P(x)=P(x\leqslant X\leqslant x+\mathrm{d}x)\approx f(x)\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

同理

$$P(x\mid H_i)=P(x\leqslant X\leqslant x+\mathrm{d}x\mid H_i)\approx f(x\mid H_i)\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

式中，$f(x|H_i)$ 称为条件概率密度函数，在概率论中又称为似然函数。

将式(3.7)和式(3.8)代入式(3.6)，得

$$P(H_i\mid x)=\frac{P(H_i)f(x\mid H_i)}{f(x)} \tag{3.9}$$

将上式代入最大后验概率准则公式(3.4)，得

$$\frac{P(H_1\mid x)}{P(H_0\mid x)}=\frac{\dfrac{P(H_1)f(x\mid H_1)}{f(x)}}{\dfrac{P(H_0)f(x\mid H_0)}{f(x)}}=\frac{f(x\mid H_1)P(H_1)}{f(x\mid H_0)P(H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1 \tag{3.10}$$

上式也可以等效为

$$l(x)=\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=\frac{P(H_0)}{1-P(H_0)} \tag{3.11}$$

式中，$l(x)$称为似然比，$l_0=P(H_0)/P(H_1)$称为门限值。

由上式可见，判决过程变为求出在不同假设条件下似然函数的似然比，然后与门限值相比，如果大于门限值，则判决 $H_1$ 假设为真；否则，判决 $H_0$ 假设为真。其接收机结构形式如图 3.3 所示。

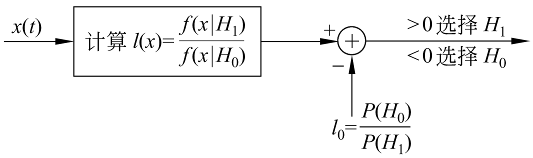


图 3.3　最大后验概率准则下的接收机形式

**【例 3.1】**　设在某二元通信系统中，有通信信号和无通信信号的先验概率分别为 $P(H_1)=0.9$、$P(H_0)=0.1$。若对某观测值 $x$ 有条件概率分布 $f(x|H_1)=0.25$ 和 $f(x|H_0)=0.45$，试用最大后验概率准则对该观测样本 $x$ 进行分类。

**解法 1**：利用 Bayes 公式，分别计算 $H_1$ 和 $H_0$ 的后验概率为

$$P(H_1 \mid x)=\frac{f(x \mid H_1)P(H_1)}{\sum_{i=0}^{1} f(x \mid H_i)P(H_i)}=\frac{0.25\times 0.9}{0.25\times 0.9+0.45\times 0.1}\approx 0.833$$

$$P(H_0 \mid x)=\frac{f(x \mid H_0)P(H_0)}{\sum_{i=0}^{1} f(x \mid H_i)P(H_i)}=\frac{0.45\times 0.1}{0.25\times 0.9+0.45\times 0.1}\approx 0.167$$

根据最大后验概率准则可知

$$P(H_1 \mid x) > P(H_0 \mid x)$$

故合理的判决是把 $x$ 归类于有信号状态，即判决 $H_1$ 假设为真。

**解法 2**：

由于 $l(x)=\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)}=\frac{0.25}{0.45}\approx 0.56$

$$l_0=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=\frac{0.1}{0.9}\approx 0.11$$

$$l(x) > l_0$$

所以判决 $H_1$ 假设为真。

### 3.2.2　接收机性能评价

最大后验概率准则可以使平均错误概率为最小。下面予以证明。

虚警概率为

$$P(D_1 \mid H_0)=\int_{D_1} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x \tag{3.12}$$

漏报概率为

$$P(D_0 \mid H_1) = \int_{D_0} f(x \mid H_1) \mathrm{d}x \tag{3.13}$$

总错误率(即平均错误概率)为

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_1)P(D_0 \mid H_1) + P(H_0)P(D_1 \mid H_0) \\ &= P(H_1)\int_{D_0} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x + P(H_0)\int_{D_1} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.14}$$

因为 $D_0$、$D_1$ 覆盖了 $x$ 的全部空间,故

$$\int_{D_0+D_1} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x = 1 \tag{3.15}$$

即

$$\int_{D_0} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x + \int_{D_1} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x = 1 \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} P(D_0 \mid H_1) &= \int_{D_0} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x = 1 - \int_{D_1} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x \\ &= 1 - P(D_1 \mid H_1) \end{aligned} \tag{3.17}$$

同理

$$P(D_1 \mid H_0) = 1 - P(D_0 \mid H_0) \tag{3.18}$$

利用式(3.17)消去式(3.14)中的 $D_0$,则有

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_1)\left[1 - \int_{D_1} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x\right] + P(H_0)\int_{D_1} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x \\ &= P(H_1) + \int_{D_1} [P(H_0)f(x \mid H_0) - P(H_1)f(x \mid H_1)]\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.19}$$

为使总错误率最小,显然应该选择使第二项的被积函数在 $D_1$ 区域不为正,即

$$P(H_1)f(x \mid H_1) > P(H_0)f(x \mid H_0) \tag{3.20}$$

$$\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} > \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = l_0 \tag{3.21}$$

这恰好是最大后验概率准则,故最大后验概率准则又称为最小错误概率准则。

**【例 3.2】** 在存在加性噪声的情况下,测量只能为 1V 或 0V 的直流电压,设噪声服从均值为 0、方差为 $\sigma^2$ 的正态分布,试对一次测量结果进行分类。

**解**:根据正态分布的概率密度函数形式

$$f(x \mid H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x \mid H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$$

似然比为

$$l(x) = \frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} = \mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2} + \frac{x^2}{2\sigma^2}} = \mathrm{e}^{\frac{2x-1}{2\sigma^2}}$$

根据最大后验概率准则,判决规则为

$$l(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x-1}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0$$

由于 $\ln(x)$ 是 $x$ 的单调函数,故对上式两边取对数不等式依然成立。

$$\frac{2x-1}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln l_0$$

即

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}+\sigma^2 \ln l_0=\beta$$

可见，当观测值 $x$ 大于$\frac{1}{2}+\sigma^2 \ln l_0$ 时，判为被测直流电压为 1V；当观测值小于$\frac{1}{2}+\sigma^2 \ln l_0$ 时，判为被测直流电压为 0V。

上述判决过程可以认为是以 $\beta$ 为分界点，将 $x$ 的样本空间$(-\infty,\infty)$划分为 $D_0$（区间范围为$(-\infty,\beta)$）和 $D_1$（区间范围为$(\beta,\infty)$）两部分，如图 3.4 所示。若 $x$ 落入 $D_0$ 区域，判为 $H_0$ 假设（0V）为真；若落入 $D_1$ 区域，则判为 $H_1$ 假设（1V）为真。

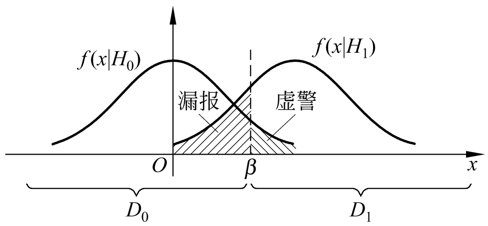


图 3.4　例 3.2 中似然函数及虚警和漏报概率图示

二元数字通信系统中，经常设定等概发送二元信号，即 $P(H_0)=P(H_1)=0.5$。此时，$l_0=1$，$\beta=0.5$，漏报概率和虚警概率相等。

## 3.3　最小风险 Bayes 准则

### 3.3.1　接收机结构形式

最大后验概率准则只能使平均错误概率最小，并未考虑两类错误判决所造成的损失大小。Bayes 准则是使平均风险（也称为平均代价或平均损失）最小的准则。

风险函数 $C_{ij}$ 表示实际是 $H_j$ 假设为真，而判决为 $H_i$ 假设为真所引起的风险。

从理论上讲，正确判决的风险小于错误判决的风险，因此

$$\begin{cases} C_{01}-C_{11}>0 \\ C_{10}-C_{00}>0 \end{cases} \tag{3.22}$$

在已知 $H_1$ 假设为真的条件下，做出判决的平均代价称为 $H_1$ 假设下的条件风险，记作 $\gamma_1$，即

$$\gamma_1=P(D_0 \mid H_1)C_{01}+P(D_1 \mid H_1)C_{11} \tag{3.23}$$

在已知 $H_0$ 假设为真的条件下，做出判决的平均代价称为 $H_0$ 假设下的条件风险，记作 $\gamma_0$，即

$$\gamma_0=P(D_0 \mid H_0)C_{00}+P(D_1 \mid H_0)C_{10} \tag{3.24}$$

由于事先并不知道是 $H_1$ 假设还是 $H_0$ 假设为真，因而总的平均代价，即平均风险应为各条件风险按其先验概率进行平均。

$$
\begin{aligned}
R &= P(H_0)\gamma_0 + P(H_1)\gamma_1 \\
&= P(H_0)[P(D_0 \mid H_0)C_{00} + P(D_1 \mid H_0)C_{10}] + \\
&\quad P(H_1)[P(D_0 \mid H_1)C_{01} + P(D_1 \mid H_1)C_{11}]
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Bayes 准则就是按照使 $R$ 为最小的原则来划分 $D_0$ 和 $D_1$ 区域。

将 $P(D_0 \mid H_1)=1-P(D_1 \mid H_1)$，$P(D_0 \mid H_0)=1-P(D_1 \mid H_0)$代入上式，得

$$
\begin{aligned}
R &= P(H_0)\{[1-P(D_1 \mid H_0)]C_{00} + P(D_1 \mid H_0)C_{10}\} + \\
&\quad P(H_1)\{[1-P(D_1 \mid H_1)]C_{01} + P(D_1 \mid H_1)C_{11}\} \\
&= P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{01} + P(H_0)(C_{10}-C_{00})P(D_1 \mid H_0) - \\
&\quad P(H_1)(C_{01}-C_{11})P(D_1 \mid H_1)
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

将虚警概率及检测概率的计算公式代入上式，得

$$
\begin{aligned}
R = P(H_0)C_{00} + P(H_1)C_{01} + \int_{D_1} [P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(x \mid H_0) - \\
P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(x \mid H_1)]\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

上式中，由于第一项、第二项为常数项，$P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(x \mid H_0)$和 $P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(x \mid H_1)$均为正，故欲使 $R$ 为最小，必须把第三项的被积函数不为正的点分配到 $D_1$ 域，即

$$
P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(x \mid H_0) < P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(x \mid H_1) \tag{3.28}
$$

$$
\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} > \frac{C_{10}-C_{00}}{C_{01}-C_{11}} \cdot \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{3.29}
$$

因此，最小风险 Bayes 准则叙述为，若

$$
l(x) = \frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} > \frac{(C_{10}-C_{00})P(H_0)}{(C_{01}-C_{11})P(H_1)} \tag{3.30}
$$

则判决 $x \in H_1$，反之 $x \in H_0$。也可以等效为 $l(x)=\dfrac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0 = \dfrac{(C_{10}-C_{00})P(H_0)}{(C_{01}-C_{11})P(H_1)}$。

若将 $l_0=(C_{10}-C_{00})P(H_0)/(C_{01}-C_{11})P(H_1)$也视为一个门限值，则 Bayes 准则也是一种似然比检验，即将似然函数 $l(x)$与门限值 $l_0$ 比较。若 $l(x)>l_0$，判决 $H_1$ 假设为真；反之，则判决 $H_0$ 假设为真，其接收机结构形式如图 3.5 所示。

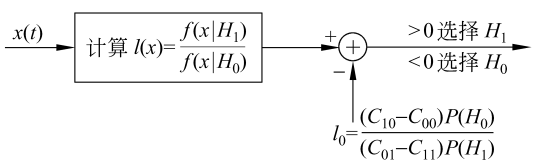


图 3.5　Bayes 准则下的接收机形式

下面是 Bayes 准则的另一种推导方法。

设判决区间 $D_0$、$D_1$ 的分界点为 $\beta$，则区域 $D_0$ 和 $D_1$ 的区间范围分别为$(-\infty,\beta)$和$(\beta,\infty)$。

平均风险为

$$
\begin{aligned}
R = P(H_0)[C_{00}P(D_0 \mid H_0) + C_{10}P(D_1 \mid H_0)] + \\
P(H_1)[C_{01}P(D_0 \mid H_1) + C_{11}P(D_1 \mid H_1)]
\end{aligned}
$$

$$=P(H_0)\left[C_{00}\int_{-\infty}^{\beta}f(x\mid H_0)\mathrm{d}x+C_{10}\int_{\beta}^{\infty}f(x\mid H_0)\mathrm{d}x\right]+$$
$$P(H_1)\left[C_{01}\int_{-\infty}^{\beta}f(x\mid H_1)\mathrm{d}x+C_{11}\int_{\beta}^{\infty}f(x\mid H_1)\mathrm{d}x\right] \tag{3.31}$$

要使平均风险 $R$ 为最小,可令$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\beta}=0$,得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\beta}=P(H_0)[C_{00}f(\beta\mid H_0)-C_{10}f(\beta\mid H_0)]+$$
$$P(H_1)[C_{01}f(\beta\mid H_1)-C_{11}f(\beta\mid H_1)]=0 \tag{3.32}$$

得

$$l_0=\frac{f(\beta\mid H_1)}{f(\beta\mid H_0)}=\frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}$$

因此,Bayes 准则可表示为

$$l(x)=\frac{f(x\mid H_1)}{f(x\mid H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}l_0=\frac{(C_{10}-C_{00})P(H_0)}{(C_{01}-C_{11})P(H_1)} \tag{3.33}$$

### 3.3.2 Bayes 准则与最大后验概率准则的关系

(1) Bayes 准则与最大后验概率准则均属于似然比检验,只是门限值不同而已。

(2) 最小风险 Bayes 准则的门限值不仅与先验概率 $P(H_0)$和 $P(H_1)$有关,而且还与代价函数 $C_{10}$、$C_{00}$、$C_{01}$、$C_{11}$有关。最大后验概率准则的门限值仅与先验概率有关。

(3) 最大后验概率准则是最小风险 Bayes 准则中取 $C_{10}-C_{00}=C_{01}-C_{11}$时的一种特例。一般地,$C_{00}=C_{11}=0$,$C_{10}=C_{01}$,即最大后验概率准则中两类错误判决的代价是相同的,故又将最大后验概率准则称为理想观测者准则,理想指最少主观偏见。

## 3.4 最小错误概率准则

在二元假设检验的情况下,判决的平均错误概率为

$$P_e=P(H_1)P(D_0\mid H_1)+P(H_0)P(D_1\mid H_0) \tag{3.34}$$

最小错误概率准则就是使上述平均错误概率为最小的准则。

比较上式与 Bayes 准则中的平均风险表达式(3.25),可以看到,当 $C_{00}=C_{11}=0$、$C_{10}=C_{01}=1$ 时,平均风险等于平均错误概率,平均风险最小等价于平均错误概率最小,即

$$R=P(H_0)[P(D_0\mid H_0)C_{00}+P(D_1\mid H_0)C_{10}]+$$
$$P(H_1)[P(D_1\mid H_1)C_{11}+P(D_0\mid H_1)C_{01}]$$
$$=P(H_0)P(D_1\mid H_0)+P(H_1)P(D_0\mid H_1)=P_e \tag{3.35}$$

事实上,风险函数的确定是非常困难的。在雷达系统中漏报的风险就很难确定;二元数字通信系统中,“0”“1”码误判的风险也很难确定。因此,在许多应用场合,常常假定正确判决的风险为零,错误判决的风险为 1。在此条件下,Bayes 准则就转化为最小错误概率准则。

将 $C_{00}=C_{11}=0$、$C_{10}=C_{01}=1$ 代入 Bayes 准则的判决公式(3.33)中,得到最小错误概率准则的判决公式,为

$$l(x)=\frac{f(x\mid H_1)}{f(x\mid H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{3.36}$$

最小错误概率准则下的接收机结构形式如图 3.6 所示。

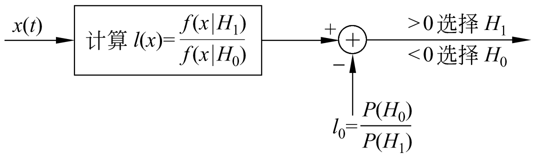


图 3.6　最小错误概率准则下的接收机结构形式

由此可见,最小错误概率准则与最大后验概率准则的判决公式相同,均称为理想观测者准则。

**【例 3.3】** 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是统计独立的方差为 $\sigma^2$ 的高斯随机变量,在 $H_1$ 假设下均值为 $a_1$,$H_0$ 假设下均值为 $a_0$($a_1 > a_0$),试对其进行判决,并证明随着观测次数 $n$ 的增加,判决的错误概率减小。

**解**:在 $H_1$ 假设下,$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的联合概率密度函数为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x} \mid H_1) &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid H_1) \\
&= f(x_1 \mid H_1) f(x_2 \mid H_1) \cdots f(x_n \mid H_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

在 $H_0$ 假设下,$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的联合概率密度函数为

$$
f(\boldsymbol{x} \mid H_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}{2\sigma^2}}
$$

似然比为

$$
l(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x} \mid H_1)}{f(\boldsymbol{x} \mid H_0)} = \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}{2\sigma^2}}
$$

指数部分可以进行如下简化:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}{2\sigma^2} \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2a_0 x_i + n a_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2a_1 x_i - n a_1^2\right) \\
&= \frac{a_1 - a_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n(a_1^2 - a_0^2)}{2\sigma^2} = \frac{n(a_1 - a_0)}{\sigma^2}\bar{x} - \frac{n(a_1^2 - a_0^2)}{2\sigma^2}
\end{aligned}
$$

根据判决公式得

$$
l(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\frac{n(a_1 - a_0)}{\sigma^2}\bar{x} - \frac{n(a_1^2 - a_0^2)}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0
$$

即

$$
\bar{x} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a_1 + a_0}{2} + \frac{\sigma^2}{n(a_1 - a_0)} \ln l_0 = \beta
$$

根据算术平均值的分布,写出其概率密度函数

$$f(\bar{x} \mid H_1) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a_1)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(\bar{x} \mid H_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a_0)^2}{2\sigma^2}}$$

两种错误概率分别为

$$P(D_1 \mid H_0) = \int_\beta^\infty f(\bar{x} \mid H_0) \mathrm{d}\bar{x} = \int_\beta^\infty \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a_0)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\bar{x}$$

$$P(D_0 \mid H_1) = \int_{-\infty}^\beta f(\bar{x} \mid H_1) \mathrm{d}\bar{x} = 1 - \int_\beta^\infty \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n(\bar{x}-a_1)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\bar{x}$$

根据误差函数的计算公式

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

令 $t = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}$，得 $\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sigma}\mathrm{d}\bar{x}$，$\mathrm{d}\bar{x} = \dfrac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{d}t$，代入上式得

$$\begin{aligned} P(D_1 \mid H_0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{n}(\beta-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}}^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{n}(\beta-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-t^2} \mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{n}(\beta-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} P(D_0 \mid H_1) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{n}(\beta-a_1)}{\sqrt{2}\sigma}}^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{n}(\beta-a_1)}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-t^2} \mathrm{d}t\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{n}(\beta-a_1)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{n}(a_1-\beta)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned}$$

当观测次数 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{erf}\left(\dfrac{\sqrt{n}(\beta-a_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \to 1$，$\mathrm{erf}\left(\dfrac{\sqrt{n}(a_1-\beta)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \to 1$，故 $P(D_1 \mid H_0) \to 0$，$P(D_0 \mid H_1) \to 0$。

可见，随着观测次数的增加，判决的错误概率降低。

## 3.5 极大极小准则

在使用 Bayes 准则时，必须事先知道各个代价因子 $C_{ij}$（$i$，$j$ 为 0 或 1）和先验概率 $P(H_0)$ 及 $P(H_1)$。在有些情况下，这些参数难以确定。如在雷达观测中，敌机出现与不出现的先验概率很难确定，虚警与漏报的代价也无法估计。在博弈时，对手出某牌的先验概率也很难知道。

在先验概率未知的情况下，要想使用 Bayes 准则就必须首先推测一个先验概率 $P(H_0)=q$（如在一些二元数字通信系统中，都假定先验概率相等，即 $q=0.5$）。但采用推测的先验概率进行判决可能会产生很大的风险。

极大极小准则是在先验概率未知的情况下，使可能出现的最大风险达到极小的一种判决准则，也称为极小化极大准则。其关键是确定一个能使最大风险达到极小的先验概率。再将此先验概率应用到 Bayes 准则的判决公式中，就得到了极大极小准则的判决公式。

### 3.5.1 不同 $P(H_0)$ 下的 Bayes 风险

假定 $P(H_0)=q$，则 $P(H_1)=1-q$。

显然判决区间 $D_0$、$D_1$ 的划分与先验概率 $q$ 有关，使得第一、第二类错误概率也与 $q$ 有关。

令

$$P(D_1 \mid H_0)=\int_{D_1} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x=\alpha(q) \tag{3.37}$$

$$P(D_0 \mid H_1)=\int_{D_0} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x=\beta(q) \tag{3.38}$$

则 $P(D_0 \mid H_0)=1-\alpha(q)$，$P(D_1 \mid H_1)=1-\beta(q)$。当 $P(H_1)\to 0$，$\alpha(1)\to 0$；$P(H_0)\to 0$，$\beta(0)\to 0$。

对于未知的 $q$ 值，Bayes 风险为

$$\begin{aligned}R(q)=&P(H_0)[P(D_0 \mid H_0)C_{00}+P(D_1 \mid H_0)C_{10}]+\\&P(H_1)[P(D_0 \mid H_1)C_{01}+P(D_1 \mid H_1)C_{11}]\\=&q[(1-\alpha(q))C_{00}+\alpha(q)C_{10}]+(1-q)[\beta(q)C_{01}+(1-\beta(q))C_{11}]\\=&C_{00}q+C_{11}(1-q)+(C_{10}-C_{00})\alpha(q)q+(C_{01}-C_{11})\beta(q)(1-q)\end{aligned} \tag{3.39}$$

由于

$$R(0)=C_{11}+(C_{01}-C_{11})\beta(0)\to C_{11} \tag{3.40}$$

$$R(1)=C_{00}+(C_{10}-C_{00})\alpha(1)\to C_{00} \tag{3.41}$$

因此，$R(q)$与 $q$ 之间的关系如图 3.7 中的曲线 $A$ 所示。

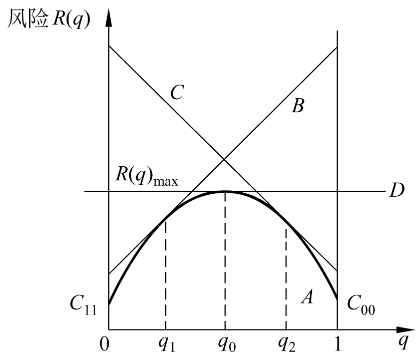


图 3.7 Bayes 风险与极大极小风险

### 3.5.2 假定 $P(H_0)=q_1$，实际 $P(H_0)$ 不一定是 $q_1$ 时的平均风险

当先验概率未知时，只能按照推测的先验概率如 $q_1$ 来设计 Bayes 检测，相对应于 $q_1$，把观测区间划分成 $D_0'$和 $D_1'$区间，于是虚警和漏报概率都是 $q_1$ 的函数，分别为

$$P(D_1 \mid H_0)=\int_{D_1'} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x=\alpha(q_1) \tag{3.42}$$

$$P(D_0 \mid H_1)=\int_{D_0'} f(x \mid H_1)\mathrm{d}x=\beta(q_1) \tag{3.43}$$

如果真实的先验概率为 $P(H_0)=q$（其中 $0\leqslant q\leqslant 1$），则 Bayes 风险为

$$\begin{aligned}R(q,q_1)=&\ P(H_0)[P(D_0 \mid H_0)C_{00}+P(D_1 \mid H_0)C_{10}]+\\&\ P(H_1)[P(D_0 \mid H_1)C_{01}+P(D_1 \mid H_1)C_{11}]\\=&\ q\{[1-\alpha(q_1)]C_{00}+\alpha(q_1)C_{10}\}+(1-q)\{\beta(q_1)C_{01}+[1-\beta(q_1)]C_{11}\}\\=&\ \{C_{00}+(C_{10}-C_{00})\alpha(q_1)-C_{11}-(C_{01}-C_{11})\beta(q_1)\}q+\end{aligned}$$

$$C_{11}+(C_{01}-C_{11})\beta(q_1) \tag{3.44}$$

若令 $G(q_1)=(C_{10}-C_{00})\alpha(q_1)$，$Q(q_1)=(C_{01}-C_{11})\beta(q_1)$，则上式变为

$$R(q,q_1)=[C_{00}-C_{11}+G(q_1)-Q(q_1)]q+Q(q_1)+C_{11} \tag{3.45}$$

可见，$R(q,q_1)$与 $q$ 构成线性关系，其关系曲线如图 3.7 中的直线 $B$ 所示。当真实的先验概率 $q$ 等于推测的先验概率 $q_1$ 时，$R(q,q_1)=R(q_1)$；当 $q$ 不等于 $q_1$ 时，$R(q,q_1)>R(q)$。因此，直线 $B$ 在点$[q_1,R(q_1)]$与曲线 $A$ 相切，且达到最小值。

由图可知，当真实的 $q\in[q_0,1]$时，使用 $R(q,q_1)$进行 Bayes 检验，其风险不仅大于 $R(q_1)$，而且总大于曲线 $R(q)$的极大值 $R(q)_{\max}$，$q$ 越接近 1，其风险越大。

同理，直线 $C$ 为用$R(q,q_2)$设计的 Bayes 检验。由图可见，对于 $q\in[0,q_0]$所冒风险均比 $R(q)_{\max}$大。

若选择使 Bayes 风险为最大的先验概率 $q_0$ 来设计 Bayes 检验，这时 $R(q,q_0)$是一条在点$[q_0,R(q_0)]$与曲线 $A$ 相切的直线 $D$，且该直线平行于横坐标轴。此时，无论实际的 $q$ 为多大，其风险均等于最大 Bayes 风险，这样就可以避免引起太大的风险，即使最大可能的风险极小化，这就满足了极大极小准则。极大极小准则等效于选择最不利的先验概率 $q_0$，使 Bayes 风险极大化。虽然这种做法是保守的，但它避免了错误估计 $q$ 而带来的更大风险。

当用 $q_0$ 来设计 Bayes 检验时，$R(q,q_0)$与曲线 $A$ 相切，$R(q,q_0)$的斜率为 0，即

$$\frac{\mathrm{d}R(q,q_0)}{\mathrm{d}q}=C_{00}-C_{11}+(C_{10}-C_{00})\alpha(q_0)-(C_{01}-C_{11})\beta(q_0)=0 \tag{3.46}$$

将上式变形，可以得到

$$C_{00}+(C_{10}-C_{00})\alpha(q_0)=C_{11}+(C_{01}-C_{11})\beta(q_0) \tag{3.47}$$

将上式代入式(3.39)，得到极大极小风险，为

$$\begin{aligned}R(q_0)&=C_{00}q_0+C_{11}(1-q_0)+(C_{10}-C_{00})\alpha(q_0)q_0+(C_{01}-C_{11})\beta(q_0)(1-q_0)\\&=[C_{00}+(C_{10}-C_{00})\alpha(q_0)]q_0-[C_{11}+(C_{01}-C_{11})\beta(q_0)]q_0+\\&\quad C_{11}+(C_{01}-C_{11})\beta(q_0)\\&=C_{11}+(C_{01}-C_{11})\beta(q_0)\\&=C_{00}+(C_{10}-C_{00})\alpha(q_0)\end{aligned} \tag{3.48}$$

根据上式可求得的 $q_0$，将 $q_0$ 代入 Bayes 准则的判决公式即可得到极大极小准则的判决公式，为

$$l(x)=\frac{f(x\mid H_1)}{f(x\mid H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}l_0=\frac{(C_{10}-C_{00})q_0}{(C_{01}-C_{11})(1-q_0)} \tag{3.49}$$

极大极小准则下的接收机结构形式如图 3.8 所示。

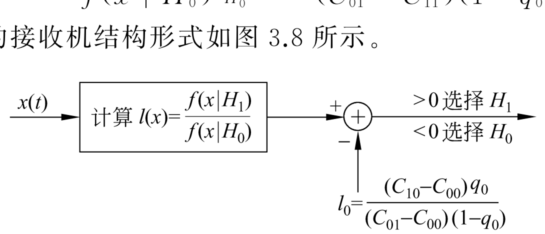


图 3.8 极大极小准则下的接收机结构形式

**【例 3.4】** 在二元数字通信系统中，时间间隔 $T$ 秒内，发送一个幅度为 $d$ 的脉冲信号，即 $s_1=d$，代表 1；或者不发送信号，即 $s_0=0$，代表 0。加性噪声服从零均值和单位方差的高

斯分布，当先验概率未知，正确判决不花代价，错误判决代价相等且等于1时，采用极大极小准则计算一次测量结果的极大极小风险为多大？相应的 $q_0$ 为多少？

**解**：由题意可知，在两种假设情况下，其似然函数分别为

$$f(x \mid H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f(x \mid H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-d)^2}{2}}$$

根据式(3.48)得，极大极小风险为

$$R(q_0)=C_{00}+(C_{10}-C_{00})\alpha(q_0)=C_{11}+(C_{01}-C_{11})\beta(q_0)$$

代入 $C_{00}=C_{11}=0, C_{01}=C_{10}=1$，得

$$R(q_0)=\alpha(q_0)=\beta(q_0)$$

由于

$$\alpha(q_0)=\int_{\beta}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\beta}{\sqrt{2}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\beta}{\sqrt{2}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\beta(q_0)&=\int_{-\infty}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-d)^2}{2}}\,\mathrm{d}x=1-\int_{\beta}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-d)^2}{2}}\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\beta-d}{\sqrt{2}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\\&=1-\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\beta-d}{\sqrt{2}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\beta-d}{\sqrt{2}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{d-\beta}{\sqrt{2}}\right)\right]\end{aligned}$$

可以得到

$$\beta=d-\beta,\quad \beta=\frac{d}{2}$$

得到极大极小风险为

$$R(q_0)=\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{d}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

根据极大极小准则，得

$$l(x)=\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)}=\mathrm{e}^{\frac{2dx-d^2}{2}}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{q_0}{1-q_0}$$

即

$$2dx-d^2\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}2\ln\frac{q_0}{1-q_0},\quad x\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{d}{2}+\frac{1}{d}\ln\frac{q_0}{1-q_0}=\beta=\frac{d}{2}$$

得

$$\frac{q_0}{1-q_0}=1,\quad q_0=P(H_0)=\frac{1}{2}$$

即二元数字通信系统采用等概发送。

## 3.6 Neyman-Pearson 准则

使用 Bayes 准则需要知道先验概率和代价函数。在先验概率未知情况下，可以使用极大极小准则。但在许多情况下，如雷达检测中，要指定代价函数和先验概率都很困难，上述

准则无法使用。运用 Neyman-Pearson(奈曼-皮尔逊)准则不需要知道代价函数和先验概率。它假定有一类错误较其他错误更为重要,因而对这一类错误出现的概率进行严格限制,然后再去确定能使其他错误概率最小的判决门限。

Neyman-Pearson 准则是在给定虚警概率的情况下,使检测概率尽可能大,即漏报概率尽可能小,但漏报概率的减小又会使虚警概率增大,因此在实际中要统筹兼顾、辩证分析、折中处理,漏报概率尽可能小是最低要求。

Neyman-Pearson 准则限定 $P(D_1|H_0)=\alpha$($\alpha$ 为常数),根据这个限定设计一个检验,使得 $P(D_1|H_1)$最大或 $P(D_0|H_1)$最小。应用拉格朗日(Lagrange)乘子 $\lambda$ 构造下述目标函数。

$$\begin{aligned}J&=P(D_0\mid H_1)+\lambda[P(D_1\mid H_0)-\alpha]\\&=\int_{D_0}f(x\mid H_1)\mathrm{d}x+\lambda\left[\int_{D_1}f(x\mid H_0)\mathrm{d}x-\alpha\right]\\&=\int_{D_0}f(x\mid H_1)\mathrm{d}x+\lambda\left[1-\int_{D_0}f(x\mid H_0)\mathrm{d}x-\alpha\right]\\&=\lambda(1-\alpha)+\int_{D_0}[f(x\mid H_1)-\lambda f(x\mid H_0)]\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{3.50}$$

要使 $J$ 达到最小,只有把上式中被积函数不为正的点分配到 $D_0$ 域,即 $x\in D_0$ 时

$$f(x\mid H_1)<\lambda f(x\mid H_0)\tag{3.51}$$

或将式(3.50)变换为

$$\begin{aligned}J&=\int_{D_0}f(x\mid H_1)\mathrm{d}x+\lambda\left[\int_{D_1}f(x\mid H_0)\mathrm{d}x-\alpha\right]\\&=1-\int_{D_1}f(x\mid H_1)\mathrm{d}x+\lambda\left[\int_{D_1}f(x\mid H_0)\mathrm{d}x-\alpha\right]\\&=1-\alpha\lambda+\int_{D_1}[\lambda f(x\mid H_0)-f(x\mid H_1)]\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{3.52}$$

要使 $J$ 达到最小,只有把上式中被积函数不为正的点分配到 $D_1$ 域,即 $x\in D_1$ 时

$$f(x\mid H_1)>\lambda f(x\mid H_0)\tag{3.53}$$

由式(3.51)和式(3.53)得到判决公式为

$$\frac{f(x\mid H_1)}{f(x\mid H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda\tag{3.54}$$

显然也是一种似然比检验,门限值为拉格朗日乘子 $\lambda$,其值由给定条件 $P(D_1|H_0)=\alpha$ 来确定。其接收机结构形式如图 3.9 所示。

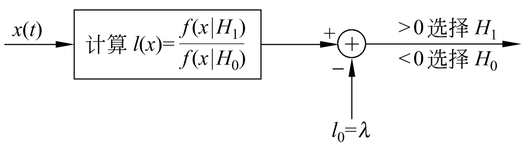


图 3.9 Neyman-Pearson 准则下的接收机结构形式

在最小风险 Bayes 判决准则中,若令

$$C_{00}=C_{11}=0,\quad C_{10}P(H_0)=\lambda,\quad C_{01}P(H_1)=1\tag{3.55}$$

则

$$\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10}-C_{00})P(H_0)}{(C_{01}-C_{11})P(H_1)}=\lambda \tag{3.56}$$

Bayes 判决准则即变为 Neyman-Pearson 准则。

**【例 3.5】** 在加性噪声背景下，测量 0V 和 1V 的直流电压，在 $P(D_1 \mid H_0)=0.1$ 的条件下，采用 Neyman-Pearson 准则，对一次观测数据进行判决。假定加性噪声服从均值为 0，方差为 2 的正态分布。

**解**：根据正态分布的概率密度函数得

$$f(x \mid H_0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$f(x \mid H_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$$

根据 Neyman-Pearson 准则的判决规则，可得

$$\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)}=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

上式判决等效于

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}+2\ln\lambda=\beta$$

对于 Neyman-Pearson 准则，门限 $\lambda$ 应满足 $P(D_1 \mid H_0)=\alpha$ 的约束条件，即

$$\begin{aligned}P(D_1 \mid H_0)=0.1&=\int_{D_1} f(x \mid H_0)\mathrm{d}x=\int_{\beta}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\,\frac{x}{2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\beta}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\,\frac{x}{2}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\beta}{2}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

得

$$\mathrm{erf}\left(\frac{\beta}{2}\right)=1-0.2=0.8$$

查误差函数表得　$\mathrm{erf}(0.9)=0.796\,915$

因此

$$\frac{\beta}{2}=0.9,\quad \beta=1.8$$

得到判决规则，为

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1.8$$

由于 $\frac{1}{2}+2\ln\lambda=1.8$，$\ln\lambda=0.65$，$\lambda=\mathrm{e}^{0.65}=1.92$。

## 3.7 $M$ 元 检 测

前面讨论的二元信号检测问题,是在 $H_0$ 和 $H_1$ 两个假设之间进行选择。在实际应用中,还会遇到多元信号检测问题。如在数字通信系统中,常常通过传输 $M$ 个信号来传递信息,这种情况就属于 $M$ 元检测问题。

假设发送端有 $M$ 个可能的输出 $s_1(t),s_2(t),\cdots,s_M(t)$,对应有 $M$ 个假设,记作

$$\begin{cases} H_1: x(t)=s_1(t)+n(t) \\ H_2: x(t)=s_2(t)+n(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ H_M: x(t)=s_M(t)+n(t) \end{cases} \tag{3.57}$$

从中选择一个并假设为真,即为 $M$ 择 1 假设检验,或称为 $M$ 元检测。

### 3.7.1 $M$ 元检测的 Bayes 准则

Bayes 准则是使判决的平均风险达到极小的准则。要利用 Bayes 准则,各类假设的先验概率和各种判决的代价函数必须已知。设 $C_{ij}$ 为 $H_j$ 假设为真而选择了 $H_i$ 假设的代价,$P(H_j)$为 $H_j$ 假设的先验概率,则平均风险为

$$R=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}C_{ij}P(D_i \mid H_j)P(H_j) \tag{3.58}$$

Bayes 准则是使平均风险 $R$ 最小,即在给定样本 $x$ 的情况下,选择 $H_i$ 假设为真所产生的风险比选择 $H_j(j\neq i)$假设为真所产生的风险小。

在观测样本为 $x$ 的条件下,选择 $H_i$ 假设为真的条件代价为

$$C_i=\sum_{j=1}^{M}C_{ij}P(H_j \mid x) \tag{3.59}$$

其中,$P(H_j \mid x)$表示给定观测样本 $x$ 后,$H_j$ 假设为真的概率,亦称 $H_j$ 假设的后验概率。

如在二元检测中

$$C_0=C_{00}P(H_0 \mid x)+C_{01}P(H_1 \mid x) \tag{3.60}$$

$$C_1=C_{10}P(H_0 \mid x)+C_{11}P(H_1 \mid x) \tag{3.61}$$

Bayes 准则的判决规则是选择最小 $C_k$ 所对应的那个 $H_k$ 假设为真,即若有

$$C_k<C_i,\quad i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,M \tag{3.62}$$

则选择 $H_k$ 假设为真。

根据条件概率乘法公式,有

$$P(H_j \mid x)=\frac{f(x \mid H_j)P(H_j)}{f(x)} \tag{3.63}$$

式中,$f(x)$为输入样本 $x$ 的先验概率密度函数。

有

$$C_i=\sum_{j=1}^{M}C_{ij}\,\frac{f(x \mid H_j)P(H_j)}{f(x)} \tag{3.64}$$

令

$$L_i = \sum_{j=1}^{M} C_{ij} f(x \mid H_j) P(H_j)$$

则

$$C_i = \frac{L_i}{f(x)} \tag{3.65}$$

由于 $f(x)$ 与假设无关，因而选择 $C_i$ 最小等价于选择 $L_i$ 最小。即 Bayes 检验变为计算 $L_i$，并判决 $L_i$ 为最小 $L_k$ 对应的那个 $H_k$ 假设为真，其接收机结构形式如图 3.10 所示。

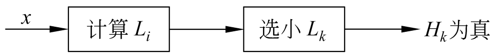


图 3.10　Bayes 准则下的 $M$ 元检测接收机形式

### 3.7.2　*M* 元检测的最大后验概率准则

采用 Bayes 准则，必须同时知道各假设的先验概率和各种错误代价。当代价函数未知时，一般假定正确判决无代价，错误判决代价相等且为 1，即 $C_{ii}=0, C_{ij}=1(i\neq j)$，在此情况下，Bayes 准则等效为最大后验概率准则。

将 $C_{ii}=0, C_{ij}=1(i\neq j)$ 代入式(3.59)中，得

$$C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P(H_j \mid x) \tag{3.66}$$

由于 $C_i$ 的和式中恰好缺少 $P(H_i \mid x)$，因而有

$$C_k - C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{M} P(H_j \mid x) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P(H_j \mid x) = P(H_i \mid x) - P(H_k \mid x) \tag{3.67}$$

因此，选择所有 $C_i$ 中最小者 $C_k$，等价于选择所有 $P(H_i \mid x)$ 中的最大者 $P(H_k \mid x)$，即选择与最大后验概率 $P(H_k \mid x)$ 所对应的那个 $H_k$ 假设为真，则为最大后验概率准则。其接收机结构形式如图 3.11 所示。


图 3.11　最大后验概率准则下的 $M$ 元检测接收机形式

### 3.7.3　*M* 元检测的最大似然检验准则

根据条件概率乘法公式(3.63)可知，$P(H_k \mid x) > P(H_i \mid x)$ 等价于

$$P(H_k) f(x \mid H_k) > P(H_i) f(x \mid H_i) \tag{3.68}$$

当先验概率 $P(H_i)$ 未知时，无法使用最大后验概率准则，一般假定各假设的先验概率相等，即 $P(H_i)=1/M$，此时，$P(H_i) f(x \mid H_i)$ 最大等效于 $f(x \mid H_i)$ 最大，称为最大似然准则。相应的判决设备称为最大似然处理器，或称为最大似然准则的接收机，如图 3.12 所示。

**【例 3.6】**　根据 $n$ 维输入矢量 $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 设计一种最佳检测器，$n$ 维输入矢量 $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中的任意两个元素 $x_i$ 和 $x_j$ 是独立的，对下述 4 种假设做出判决：$H_1$

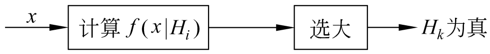


图 3.12　最大似然准则下的 $M$ 元检测接收机形式

表示均值为 1，$H_2$ 表示均值为 2，$H_3$ 表示均值为 3，$H_4$ 表示均值为 4，各假设下的条件概率密度函数是高斯的，方差为 $\sigma^2$，假定所有假设的先验概率相等，且 $C_{ij}=1(i\neq j)$，$C_{ii}=0$。

**解**：根据先验概率相等，且 $C_{ij}=1(i\neq j)$，$C_{ii}=0$ 的条件，四元假设检验可按最大似然准则来设计。

4 种假设可表示为

$$H_1: x_i = 1 + n_i \quad i = 1,2,\cdots,n$$
$$H_2: x_i = 2 + n_i \quad i = 1,2,\cdots,n$$
$$H_3: x_i = 3 + n_i \quad i = 1,2,\cdots,n$$
$$H_4: x_i = 4 + n_i \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$n$ 维输入矢量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中的任意两个元素 $x_i$ 和 $x_j$ 是独立的，因此在各种假设下的似然函数可表示为

$$f(\boldsymbol{x} \mid H_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-k)^2}{2\sigma^2}}, \quad k=1,2,3,4$$

选择 $f(\boldsymbol{x}|H_k)$最大等效为选择 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i-k)^2}{2\sigma^2}$ 最小，由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-k)^2}{2\sigma^2} &= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}kx_i + \frac{n}{2\sigma^2}k^2 \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{n}{2\sigma^2}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}kx_i - k^2\right] \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{n}{2\sigma^2}[2k\bar{x} - k^2]\end{aligned}$$

上式中，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$，$\bar{x}$ 表示 $x$ 的算术平均值。上式中的第一项与选择何种假设无关，所以选择 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i-k)^2}{2\sigma^2}$ 最小，又等效为选择 $2k\bar{x}-k^2$ 最大。

即判决准则变为比较 $2\bar{x}-1$、$4\bar{x}-4$、$6\bar{x}-9$、$8\bar{x}-16$，并选择其中最大者所对应的假设 $H_k$ 为真。

假定 $f(x|H_1)$最大，则必有

$$\begin{cases}2\bar{x}-1 \geqslant 4\bar{x}-4 \\ 2\bar{x}-1 \geqslant 6\bar{x}-9 \\ 2\bar{x}-1 \geqslant 8\bar{x}-16\end{cases}$$

等价于选择 $H_1$ 的区域 $D_1$ 满足条件

$$\bar{x} \leqslant 1.5$$

假定 $f(x|H_2)$最大，则必有

$$\begin{cases}4\bar{x}-4 \geqslant 2\bar{x}-1 \\ 4\bar{x}-4 \geqslant 6\bar{x}-9 \\ 4\bar{x}-4 \geqslant 8\bar{x}-16\end{cases}$$

等价于选择 $H_2$ 的区域 $D_2$ 满足条件

$$1.5 \leqslant \bar{x} \leqslant 2.5$$

假设 $f(x|H_3)$最大,则必有

$$\begin{cases}6\bar{x}-9 \geqslant 2\bar{x}-1 \\ 6\bar{x}-9 \geqslant 4\bar{x}-4 \\ 6\bar{x}-9 \geqslant 8\bar{x}-16\end{cases}$$

等价于选择 $H_3$ 的区域 $D_3$ 满足条件

$$2.5 \leqslant \bar{x} \leqslant 3.5$$

假设 $f(x|H_4)$最大,则必有

$$\begin{cases}8\bar{x}-16 \geqslant 2\bar{x}-1 \\ 8\bar{x}-16 \geqslant 4\bar{x}-4 \\ 8\bar{x}-16 \geqslant 6\bar{x}-9\end{cases}$$

等价于选择 $H_4$ 的区域 $D_4$ 满足条件

$$\bar{x} \geqslant 3.5$$

$\bar{x}$ 服从高斯分布,其方差为 $\sigma^2/n$,均值分别为 1、2、3、4,即 $\bar{x}$ 的条件分布密度函数为

$$f(\bar{x} \mid H_k)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{n(\bar{x}-k)^2}{2\sigma^2}}$$

如图 3.13 所示。

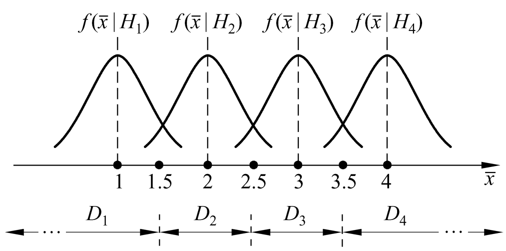


图 3.13 $\bar{x}$ 的条件概率密度函数及判决域的划分

从图可以看出,$M$ 元假设检验的实质是把输入空间划分成 $M$ 个区域,并在各个区域判决相应的假设为真。

## 本章小结

本章主要介绍 5 种判决准则,它们都属于似然比检验,表达式均为

$$l(x)=\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0$$

只是所取门限值 $l_0$ 不同而已。

(1) 最大后验概率准则和最小错误概率准则的门限值 $l_0=\dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}$；

(2) 最小风险 Bayes 准则的门限值 $l_0=\dfrac{(C_{10}-C_{00})P(H_0)}{(C_{01}-C_{11})P(H_1)}$；

(3) 极大极小准则的门限值 $l_0=\dfrac{(C_{10}-C_{00})q_0}{(C_{01}-C_{11})(1-q_0)}$；

(4) Neyman-Pearson 准则的门限值 $l_0=\lambda$，即拉格朗日乘数。

其中，除 Bayes 准则外，其余 4 种准则都可以看作 Bayes 准则的派生准则或特例。

(1) 最大后验概率准则是从信息论观点出发，后验概率谁大谁为真的准则，等效为 $C_{10}-C_{00}=C_{01}-C_{11}$ 条件下的 Bayes 准则。

(2) 最小错误概率准则是假设正确判决不花代价($C_{00}=C_{11}=0$)，错误判决代价相等($C_{01}=C_{10}=1$)条件下的 Bayes 准则，也称为理想观测者准则。

(3) 极大极小准则是使可能出现的最大风险极小化的一种判决准则，是选择最不利先验概率的 Bayes 准则。

(4) Neyman-Pearson 准则是给定虚警概率情况下，使漏报概率尽可能小的判决准则，等效为 $C_{00}=C_{11}=0$，$C_{10}P(H_0)=\lambda$，$C_{01}P(H_1)=1$ 条件下的 Bayes 准则。

另外，这 5 种判决准则的适用范围不同。

(1) 当先验概率和代价函数均已知时，使用 Bayes 准则；

(2) 当先验概率已知，代价函数未知时，使用最大后验概率准则或最小错误概率准则；

(3) 当先验概率未知，代价函数已知时，使用极大极小准则；

(4) 当先验概率和代价函数均未知时，使用 Neyman-Pearson 准则。

因此，在使用过程中，要根据实际情况和给定条件，综合分析，选择使用。

## 思 考 题

1. 最大后验概率准则和最小错误概率准则为何称为理想观测者准则？

2. 极大极小准则中的 $q_0$ 如何求得？

3. 如何确定 Neyman-Pearson 准则中的拉格朗日乘数 λ？

4. 试述最大后验概率准则、Bayes 准则、最小错误概率准则、极大极小准则和 Neyman-Pearson 准则的异同点。

5. 如何理解最大后验概率准则、最小错误概率准则、极大极小准则和 Neyman-Pearson 准则都是 Bayes 准则的特例？

## 习 题

1. 在二元数字通信系统中，发送端等概发送 2V 和 0V 的脉冲信号，信道上叠加的噪声服从均值为零，方差为 $\sigma^2$ 的正态分布，试用最大后验概率准则对接收信号进行判决。

2. 在存在加性噪声的情况下，测量只能为 1V 或 0V 的直流电压。设噪声均值为 0、均方根电压为 $\sigma=2$V，代价函数为 $C_{01}=2$，$C_{10}=1$，$C_{00}=C_{11}=0$。信号存在的先验概率 $P=$