



微课视频

## 第 3 章

### CHAPTER 3

# 数字控制器的设计与实现

一个控制系统的整体特性,既与被控对象的特性有关,也与控制器有关。而被控对象的特性是由其本身的工作环境、运行条件和功能目标所决定的,往往不能随意更改,只有通过改变控制器的特性,来影响整个系统的特性,从而满足系统的整体性能指标。控制系统的重要设计任务就是控制器的设计。

对离散采样控制系统来说,数字控制器的设计就是确定控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ , 常见的方法有两种:一是根据对应连续系统的设计方法确定控制器的传递函数  $D(s)$ , 然后利用离散化方法求出近似的  $D(z)$ ; 二是根据对象的脉冲传递函数  $G(z)$ 、给定输入信号的  $R(z)$  以及系统的特性要求,确定系统广义闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$ , 然后求出控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ 。前者称为近似设计方法,后者称为解析设计方法。

如何根据连续系统的传递函数  $D(s)$  求出对应离散系统的脉冲传递函数  $D(z)$ ? 这就是离散化方法的任务,离散化方法有积分变换法、零极点匹配法和等效变换法之分。

由于不少系统对象的脉冲传递函数  $G(z)$  难以获取,人们选用了一种适用性较好的控制器传递函数  $D(s)$ , 这就是 PID 控制。PID 控制是一种基于给定值与输出值之间偏差的比例、积分、微分的反馈控制,它是一种适用面广、历史悠久的控制规律,在计算机离散采样控制系统中得到了广泛的应用。数字 PID 控制就是结合计算机逻辑运算的特点来实现的 PID 控制。数字 PID 控制器的脉冲传递函数  $D(z)$  可通过离散化方法,由连续系统的  $D(s)$  求得。然而,数字 PID 控制器的  $D(z)$  不仅仅是连续系统 PID 控制器  $D(s)$  的简单近似,而且还可以进行多种优化。

最少拍随动控制系统的设计是一种解析设计方法,其设计目标就是使系统的输出以最快的响应速度跟踪随机变化的输入信号,而最少拍无纹波随动系统不仅是追求快的响应速度,还要兼顾控制器的输出没有纹波,以达到更好的控制质量。

最终如何来实现由近似设计方法或解析设计方法得到控制器的  $D(z)$  呢? 除了可用硬件实现  $D(z)$  外,更普遍的办法是利用计算机软件,通过迭代法求解差分方程实现  $D(z)$ 。由  $D(z)$  可得到相应的实现控制方框图、差分方程,按照状态空间描述方法也可得到相应的状态方程和输出方程。对高阶的  $D(z)$ , 可通过串行或并行的实现减少由于系数误差对系统性能造成的影响。

本章首先给出了数字控制器的设计方法,分析了几种离散化方法的原理和特点,接着介绍数字 PID 控制器的基本算式、优化措施和整定方法,然后介绍属于解析设计方法的最少拍随动控制系统(包括最少拍无纹波随动控制系统)的设计方法,最后介绍控制器算法的实现方法。

## 3.1 数字控制器的设计方法

### 3.1.1 近似设计法

根据采样定理,连续信号的控制系统可用离散采样控制系统代替,如图 3-1(a)所示,其中被控对象  $G(s)$  可假定含有 ZOH。简化后可看成由控制器  $D(z)$ <sup>①</sup> 与被控对象  $G(z)$  组成的反馈控制系统,如图 3-1(b)所示。离散采样控制系统的广义闭环传递函数为  $\Phi(z)$ ,如图 3-1(c)所示。

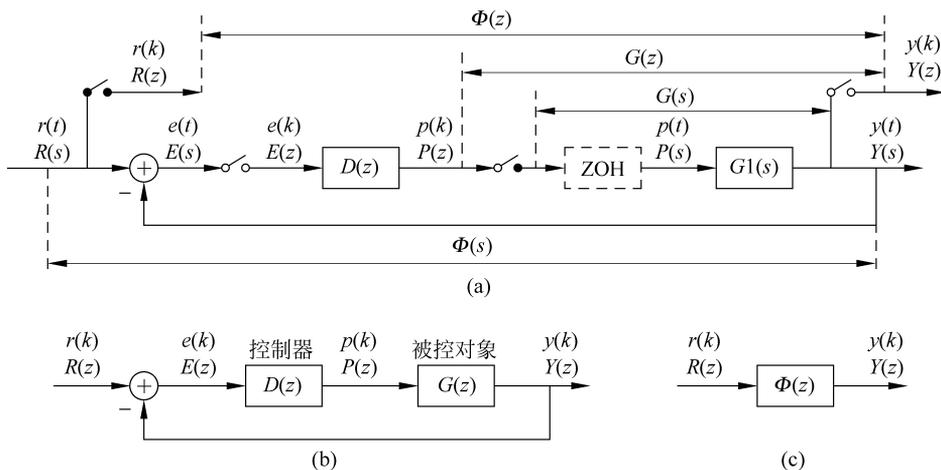


图 3-1 离散采样控制系统框图

近似设计法是建立在连续系统的  $D(s)$  基础上的,因此也称模拟设计法、间接设计法。控制器  $D(z)$  的近似设计过程如下:

(1) 选择合适的采样频率,考虑 ZOH 的相位滞后,根据系统的性能指标和连续域设计方法,设计控制器的传递函数  $D(s)$ 。

(2) 选择合适的离散化方法,将  $D(s)$  离散化,获得控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ ,使两者性能尽量等效。

(3) 检验计算机控制系统的闭环性能。若不满意,可进行优化,选择更合适的离散化方法或提高采样频率。必要时,可增加稳定裕度(相对稳定程度的参数)等参数,重新修正连续域的  $D(s)$  后,再离散化。

(4) 对  $D(z)$  满意后,将其变为数字算法,在计算机上编程实现。

### 3.1.2 解析设计法

设离散系统结构如图 3-1(b)所示,则与连续系统中  $\Phi(z)$  与  $G(z)$  关系式(2-21)和式(2-22)类似,有表达式

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z) \cdot G(z)}{1 + D(z) \cdot G(z)} \quad (3-1)$$

① 由于阐述角度的不同,控制器  $D(z)$  也称为控制器的脉冲传递函数。

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{\Phi(z)}{G(z) \cdot [1 - \Phi(z)]} \quad (3-2)$$

解析设计法与连续系统的  $D(s)$  没有直接联系,它是根据系统的  $G(z)$ 、 $\Phi(z)$  以及输入  $R(z)$  直接确定  $D(z)$ ,因此也称精确设计法、直接设计法。数字控制器  $D(z)$  的解析设计过程如下:

- (1) 根据系统的  $G(z)$ 、输入  $R(z)$  及主要性能指标,选择合适的采样频率;
- (2) 根据  $D(z)$  的可行性,确定闭环传递函数  $\Phi(z)$ ;
- (3) 由  $\Phi(z)$ 、 $G(z)$ ,根据式(3-2)确定  $D(z)$ ;
- (4) 分析各点波形,检验计算机控制系统的闭环性能,若不满意,重新修正  $\Phi(z)$ ;
- (5) 对  $D(z)$  满意后,将其变为数字算法,在计算机上编程实现。

最后需要说明:上述两种方法都是基于离散采样控制系统对连续信号对象的控制,而对顺序控制、数值控制、模糊控制等,其控制器的设计需要采用其他的设计方法,如基于有限自动机模型的顺序控制器设计、基于连续路径直线圆弧插值的数值控制器设计、基于模糊集合和模糊运算的模糊控制器的设计等。

## 3.2 离散化方法

如果已知一个连续系统控制器的传递函数  $D(s)$ ,根据采样定理,只要有足够小的采样周期,总可找到一个近似的离散控制器  $D(z)$  代替  $D(s)$ 。对一个连续系统中的被控对象  $G(s)$ ,也可用一个近似的  $G(z)$  仿真  $G(s)$  的特性。

有许多成熟的方法,可根据系统的  $G(s)$ 、 $\Phi(s)$  等要求设计出  $D(s)$ ,由此求出近似的  $D(z)$ ,就可由计算机实现  $D(z)$ 。

由  $D(s)$  求出  $D(z)$  的方法有多种,如积分变换法、零极点匹配法和等效变换法,下面分别介绍这些方法,并以数值积分法为重点。

### 3.2.1 积分变换法

积分变换法是基于数值积分的原理,因此也称数值积分法。积分变换法又分为矩形变换法和梯形变换法,矩形变换法又分为向后差分法或后向差分法、向前差分法或前向差分法。

#### 1. 向后差分法

设某控制器的输出  $p(t)$  是输入  $e(t)$  对时间的积分,即有如下关系式:

$$p(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad \text{或} \quad \frac{dp(t)}{dt} = e(t), \quad dp(t) = e(t) dt$$

$e(t)$  的波形如图 3-2 所示。假定在  $(k-1)T$ 、 $kT$  时刻的输入  $e(t)$  分别记为  $e(k-1)$ 、 $e(k)$ ,输出  $p(t)$  分别记为  $p(k-1)$ 、 $p(k)$ ,则有

$$p(k) = \int_0^{kT} e(t) dt = \int_0^{(k-1)T} e(t) dt + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt = p(k-1) + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

如用矩形面积近似增量的积分面积  $d(p(k))$ ,则有

$$d(p(k)) = \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt = p(k) - p(k-1) \approx e(k-1) \cdot T \quad (\text{采用向前差分})$$

或

$$d(p(k)) = \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt = p(k) - p(k-1) \approx e(k) \cdot T \quad (\text{采用向后差分})$$

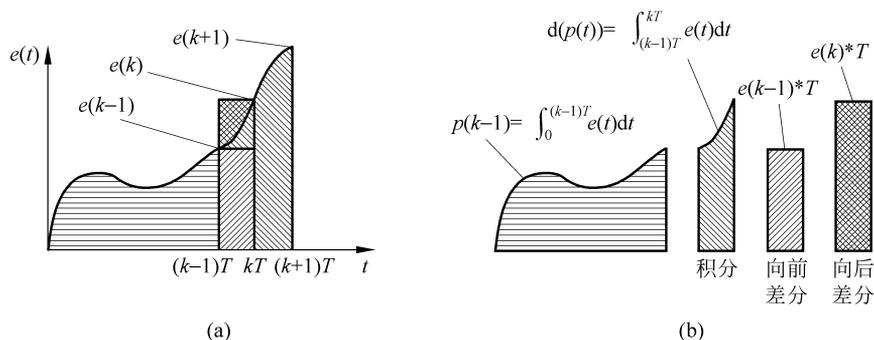


图 3-2 矩形变换法示意图

考虑到向前差分性能较差,实际常采用向后差分, $p(k)$ 的向后差分关系式为

$$p(k) - p(k-1) \approx e(k) \cdot T$$

经  $z$  变换后,有

$$P(z) - z^{-1}P(z) = E(z) \cdot T$$

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

对照相应连续系统的传递函数  $D(s)$  有

$$D(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}$$

可得变换式

$$s \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

由此可根据  $D(s)$  求出  $D(z)$

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (3-3)$$

式(3-3)就是向后差分法的变换公式。

**例 3-1** 已知  $D(s) = \frac{1/2}{s(s+1/2)}$ , 试用向后差分法求  $D(z)$ 。

解

$$\begin{aligned} D(z) &= D(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{1/2}{\frac{(1-z^{-1})}{T} \left[ \frac{(1-z^{-1})}{T} + 1/2 \right]} = \frac{T^2}{2(1-z^{-1})^2 + (1-z^{-1})T} \\ &= \frac{T^2}{2(1-z^{-1})^2 + (1-z^{-1})T} = \frac{T^2}{2 - 4z^{-1} + 2z^{-2} + T - Tz^{-1}} \\ &= \frac{T^2}{2 + T - (4+T)z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{T^2/(2+T)}{1 - \frac{4+T}{2+T}z^{-1} + \frac{2}{4+T}z^{-2}} \end{aligned}$$

向后差分法的特点有:

(1) 若  $D(s)$  稳定, 则  $D(z)$  一定稳定,  $s$  平面与  $z$  平面对应的映射如图 3-3 所示, 但向前

差分法不具有这一特点；

(2) 变换前后, 稳态增益不变；

(3) 与  $D(s)$  相比, 离散后控制器  $D(z)$  的时间响应与频率响应有相当大的畸变, 只有  $T$  足够小,  $D(z)$  才与  $D(s)$  的性能接近。

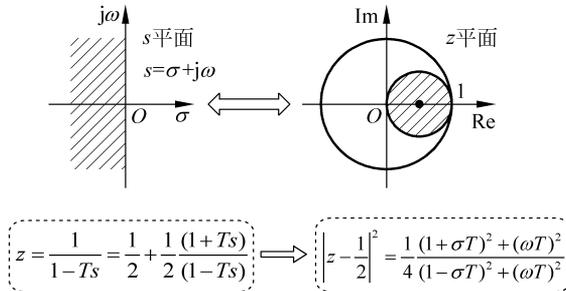


图 3-3 向后差分法  $s$  平面与  $z$  平面对应的映射

## 2. 梯形变换法

从向后差分法可看出, 积分面积是用矩形近似的, 如能用梯形近似, 效果则更好, 如图 3-4 所示。

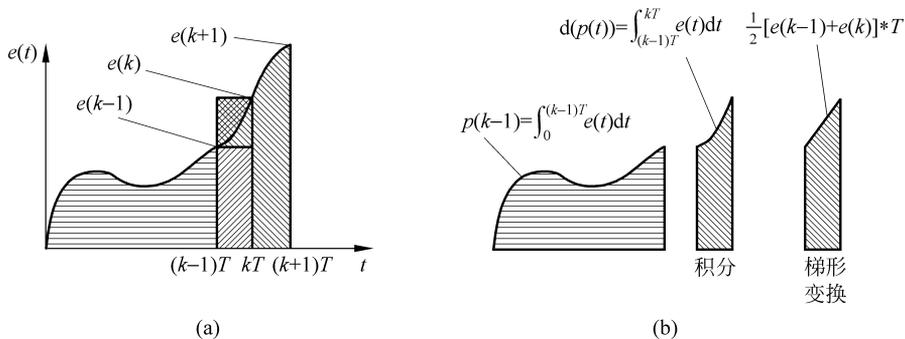


图 3-4 梯形变换法示意图

如用梯形面积近似增量的积分面积  $d(p(k))$ , 则有

$$p(k) - p(k-1) \approx \frac{1}{2} [e(k-1) + e(k)] \cdot T$$

经  $z$  变换后, 有

$$P(z) - z^{-1}P(z) = \frac{T}{2}(1 + z^{-1})E(z)$$

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

对照相应连续系统的传递函数  $D(s)$ , 可得变换式

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3-4)$$

由此可根据  $D(s)$  求出  $D(z)$

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \quad (3-5)$$

式(3-5)就是梯形变换法[双线性变换法、突斯汀(Tustin)变换法]的变换公式。

**例 3-2** 已知  $D(s) = \frac{1/2}{s(s+1/2)}$ , 试用梯形变换法求  $D(z)$ 。

**解**

$$\begin{aligned} D(z) &= D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{1/2}{\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \left( \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1/2 \right)} = \frac{T^2(1+z^{-1})^2}{8(1-z^{-1})^2 + 2(1-z^{-1})T(1+z^{-1})} \\ &= \frac{T^2(1+z^{-1})^2}{2(1-z^{-1})(4(1-z^{-1}) + T(1+z^{-1}))} = \frac{T^2(1+z^{-1})^2}{2(1-z^{-1})(4+T+(T-4)z^{-1})} \\ &= \frac{T^2 + 2T^2z^{-1} + T^2z^{-2}}{8 + 2T - 16z^{-1} + (8-2T)z^{-2}} \end{aligned}$$

梯形变换法的特点有:

(1) 若  $D(s)$  稳定, 则  $D(z)$  一定稳定,  $s$  平面与  $z$  平面对应的映射如图 3-5 所示;

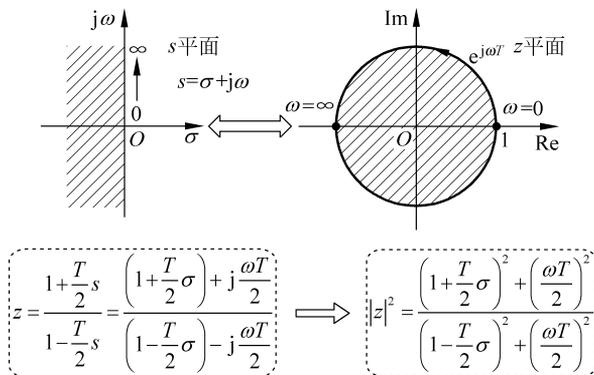


图 3-5 梯形变换法  $s$  平面与  $z$  平面对应的映射

(2) 变换前后, 稳态增益不变;

(3) 梯形变换的一对一映射, 保证了离散频率特性不产生频率混叠现象; 与  $D(s)$  相比, 离散后控制器  $D(z)$  的频率响应在高频段有一定的畸变, 但可采用预校正办法弥补;

(4)  $D(z)$  性能与  $D(s)$  较接近, 但变换公式较复杂。

为保证在角频率  $\omega 1$  处,  $D(z)$  与  $D(s)$  有相同的增益, 即  $D(e^{j\omega 1 T}) = D(j\omega 1)$ , 可采用频率预修正公式, 即用式(3-6)取代变换式(3-4):

$$s \rightarrow \frac{\omega 1}{\tan\left(\omega 1 \frac{T}{2}\right)} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (3-6)$$

### 3.2.2 零极点匹配法

零极点匹配法的原理就是使  $D(z)$  与  $D(s)$  有相似的零极点分布, 从而获得近似的系统特性。设  $D(s)$  有如下的形式:

$$D(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}, \quad n \geq m$$

按下面变换式转换零点和极点：

$$(s + z_i) \rightarrow (z - e^{-z_i T}) \quad \text{或} \quad (1 - e^{-z_i T} z^{-1})$$

$$(s + p_j) \rightarrow (z - e^{-p_j T}) \quad \text{或} \quad (1 - e^{-p_j T} z^{-1})$$

若分子阶次  $m$  小于分母阶次  $n$ ，离散变换时，在  $D(z)$  分子上加  $(z+1)^{n-m}$  因子，得到的  $D(z)$  表达式为

$$D(z) = K1 \frac{\prod_{i=1}^m (z - e^{-z_i T})}{\prod_{j=1}^n (z - e^{-p_j T})} (z+1)^{n-m} \quad (3-7)$$

式(3-7)是零极点匹配法的主要变换公式。为保证在特定的频率处有相同的增益，需要匹配  $D(z)$  中的  $K1$ ，为保证  $D(z)$  与  $D(s)$  在低频段有相同的增益，确定  $D(z)$  中增益  $K1$  的匹配公式为

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1}$$

高频段的匹配公式( $D(s)$ 分子有  $s$  因子时)为

$$D(s)|_{s=\infty} = D(z)|_{z=-1}$$

选择某关键频率  $\omega_1$  处的幅频相等，即

$$D(s)|_{s=j\omega_1} = D(z)|_{z=e^{j\omega_1 T}}$$

零极点匹配法的特点如下：

- (1) 若  $D(s)$  稳定，则  $D(z)$  一定稳定；
- (2) 有近似的系统特性，能保证某处频率的增益相同；
- (3) 可防止频率混叠；
- (4) 需要将  $D(s)$  分解为零极点形式，有时分解不太方便。

### 3.2.3 等效变换法

等效变换法的原理是使  $D(z)$  与  $D(s)$  对系统的某种时域响应在每个  $kT$  采样时刻有相同的值，具体变换方法有脉冲响应不变法( $z$  变换法)和阶跃响应不变法(带保持器的等效保持法)。

#### 1. 脉冲响应不变法

脉冲响应不变法能保证离散系统的脉冲响应在  $kT$  时刻与连续系统的输出保持一致。在变换前，将  $D(s)$  写成

$$D(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + a_i}$$

则  $D(z)$  对  $D(s)$  的  $z$  变换公式为

$$D(z) = Z[D(s)] = Z\left[\sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + a_i}\right] = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - e^{-a_i T} \cdot z^{-1}} \quad (3-8)$$

式(3-8)是脉冲响应不变法的主要变换公式。

**例 3-3** 设某传递函数  $D(s)$  如下所示, 试用脉冲响应不变法求  $D(z)$  (设采样周期  $T = 0.5\text{s}$ )。

$$D(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+10)}$$

**解** 根据式(3-8)可得

$$\begin{aligned} D(z) &= Z \left[ \frac{100}{s(s+1)(s+10)} \right] = Z \left[ \left( \frac{10}{s} - \frac{100/9}{s+1} + \frac{10/9}{s+10} \right) \right] \\ &= \frac{10}{1-z^{-1}} - \frac{100/9}{1-e^{-T}z^{-1}} + \frac{10/9}{1-e^{-10T}z^{-1}} \\ &\approx \frac{10}{1-z^{-1}} - \frac{11.11}{1-0.6065z^{-1}} + \frac{1.11}{1-0.0067z^{-1}} \\ &\approx \frac{22.22(1-0.8161z^{-1})(1-0.0435z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.6065z^{-1})(1-0.0067z^{-1})} \\ &\approx \frac{22.22 - 19.1z^{-1} + 0.7883z^{-2}}{1 - 1.613z^{-1} + 0.6173z^{-2} - 0.0041z^{-3}} \end{aligned}$$

## 2. 阶跃响应不变法

阶跃响应不变法能保证离散系统带保持器后的阶跃响应在  $kT$  时刻与连续系统的输出保持一致。假定在  $D(s)$  之前有零阶保持器, 所以在进行  $z$  变换时需要考虑零阶保持器的传递函数(见式(2-23)), 变换公式为

$$D(z) = Z \left[ \frac{1-e^{-sT}}{s} D(s) \right] = (1-z^{-1}) Z \left[ \frac{D(s)}{s} \right] \quad (3-9)$$

式(3-9)是阶跃响应不变法(带零阶保持器的等效保持法)的主要变换公式。

**例 3-4** 设某传递函数  $D(s)$  如下所示, 试用阶跃响应不变法(带零阶保持器的等效保持法)求  $D(z)$  (设采样周期  $T = 0.5\text{s}$ )。

$$D(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+10)}$$

**解** 根据式(3-9), 有

$$\begin{aligned} D(z) &= Z \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{100}{s(s+1)(s+10)} \right] = (1-z^{-1}) Z \left[ \left( \frac{10}{s^2} - \frac{11}{s} + \frac{100/9}{1+s} - \frac{1/9}{10+s} \right) \right] \\ &= \frac{1-z^{-1}}{9} \left[ \frac{90Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{99}{1-z^{-1}} + \frac{100}{1-e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-10T}z^{-1}} \right] \\ &\approx \frac{0.7381z^{-1}(1+1.517z^{-1})(1+0.05171z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.6065z^{-1})(1-0.0067z^{-1})} \end{aligned}$$

## 3.2.4 离散化方法比较

积分变换法、零极点匹配法和等效变换法都可保证  $D(s)$  稳定时,  $D(z)$  也稳定, 但积分变换法中的前向差分法除外。

积分变换法中的后向差分法变换简单易用; 梯形变换法(特别是有预校正的)得到  $D(z)$  的频率特性与  $D(s)$  接近; 零极点匹配有较好的增益特性; 等效变换法得到的  $D(z)$

能保证脉冲响应或阶跃响应的采样点值与  $D(s)$  一致,但增益和频率特性与  $D(s)$  相差较大。

当采样周期  $T$  足够小时,或采样频率  $f_s$  远高于信号中最高频率分量  $f_{\max}$  (如  $f_s > 100f_{\max}$ ),以上各种方法无明显差别。

### 3.3 PID 控制

#### 3.3.1 PID 控制的原理

PID 控制是适用面较广、历史较长、目前仍得到广泛应用的控制规律,主要用于连续变化的物理量,如温度、流量、压力、水位、速度等的控制。

PID 控制是一种基于给定值与输出值之间的偏差进行比例、积分、微分运算的反馈控制,其控制框图与一般的反馈控制系统类似,如图 3-6(a)所示。其中被控对象的传递函数为  $G(s)$ ,它同时包含了执行器的特性;控制器(也称调节器)的传递函数  $D(s)$  由三个环节构成,分别是比例、积分和微分。由于工业上许多被控对象很难得到精确的传递函数  $G(s)$ ,因此控制器的传递函数  $D(s)$  也很难根据  $G(s)$  求出。通过实际经验和理论分析,人们发现基于偏差的 PID 控制器对相当多的工业对象进行控制时能得到较满意的结果。

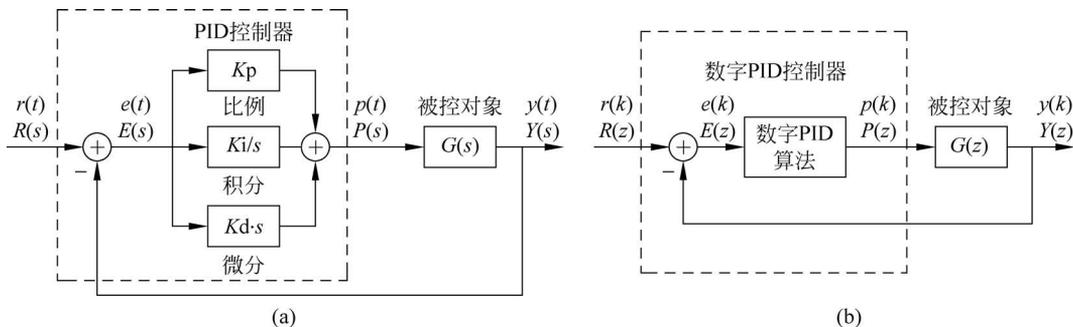


图 3-6 PID 控制框图

PID 控制器的微分方程描述为

$$p(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (3-10)$$

其中  $K_p$  为比例系数,  $T_i$  为积分时间,  $T_d$  为微分时间。

对式(3-10)进行拉普拉斯变换可得 PID 控制器的传递函数  $D(s)$ , 即

$$D(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right] = \left[ K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \right] \quad (3-11)$$

其中,当采样周期  $T=1s$  时,  $K_i = K_p/T_i$  为积分系数,  $K_d = K_p \cdot T_d$  为微分系数。当  $K_i$  和  $K_d$  均为 0 时,称为 P 控制;  $K_d$  为 0 时,称为 PI 控制;  $K_i$  为 0 时,称为 PD 控制。

PID 控制器的参数主要是  $K_p$ 、 $T_i$  和  $T_d$  或  $K_p$ 、 $K_i$  和  $K_d$ ,调整这些参数的取值可适应不同的控制系统,为此需要了解这些参数对控制性能的影响。

比例系数  $K_p$  是控制器的主要参数,增大  $K_p$  可提高控制的灵敏度、加快调节速度、减小稳态误差。但  $K_p$  过大时,系统容易引起振荡,趋于不稳定状态;若  $K_p$  太小,则系统反应迟钝,稳态误差增大。另外,单靠增大  $K_p$  不能消除稳态误差。通常  $K_p$  的取值范围较



微课视频

大,在实际应用过程中,常用比例度  $\delta$  表示。当采用统一的标准信号时,比例度  $\delta$  是比例系数  $K_p$  的倒数,即  $\delta=1/K_p$ 。

积分时间  $T_i$  是消除系统稳态误差的关键,  $T_i$  要与对象的时间常数相匹配。  $T_i$  太小,容易诱发系统振荡,使系统不稳定;  $T_i$  太大,则减小稳态误差的能力将被削弱,系统的过渡过程会延长。

微分时间  $T_d$  的主要作用是加快系统的动态响应,既可以减少超调量,又可减小调节时间。若  $T_d$  过大,则会引起系统的不稳定。另外,引入  $T_d$  后,系统受干扰的影响会增加。

PID 参数对控制性能的影响如表 3-1 所示,注意,其中积分系数  $K_i=K_p/T_i$ ,  $K_i$  与  $T_i$  成反比关系。由于 P 控制和 PD 控制不能消除稳态误差,工业上最常用的是 PI 控制和 PID 控制。

表 3-1 PID 参数对控制性能的影响

参 数	利	弊
$K_p$ (P 参数)	提高灵敏度、调节速度、稳态精度	引起振荡、不稳定
$K_i$ (I 参数)	消除系统稳态误差	诱发系统振荡、过渡过程会延长
$K_d$ (D 参数)	加快响应、减少超调量	引起系统的不稳定、易受干扰

### 3.3.2 数字 PID 控制算法

#### 1. 数字 PID 控制器的基本算式

数字 PID 控制器是在模拟 PID 控制器上,通过数据采样、数字运算实现的控制器,控制框图如图 3-6(b)所示。其中数字 PID 算法可以通过由模拟 PID 控制器的传递函数  $D(s)$  经离散化而得到脉冲传递函数  $D(z)$  实现,也可以在此基础上,采用多种改进的综合 PID 算法。

由模拟 PID 的  $D(s)$  通过离散化方法可方便地得到  $D(z)$ 。若采用积分变换法中的后向差分法,即对 PID 的传递函数式(3-11)按向后差分法的变换式(3-3)代入可得

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{P(z)}{E(z)} = K_p \left[ 1 + \frac{T}{T_i(1-z^{-1})} + \frac{T_d}{T}(1-z^{-1}) \right] \\ &= K_p + K_i \frac{1}{1-z^{-1}} + K_d(1-z^{-1}) \\ &= K_p \frac{(1-z^{-1}) + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}(1-z^{-1})^2}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

式中,  $K_i=K_p \cdot T/T_i$ ,  $K_d=K_p \cdot T_d/T$ , 与前面模拟 PID 的  $D(s)$  稍有不同,它们含有了采样周期  $T$ 。根据  $D(z)$  容易得到相应的差分方程表示的算式,具体有位置式和增量式之分。

位置式算式为

$$\begin{aligned} p(k) &= p(k-1) + K_p[e(k) - e(k-1)] + K_i \cdot e(k) + \\ &K_d[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \end{aligned} \quad (3-12)$$

增量式算式为

$$\begin{aligned} \nabla p(k) &= p(k) - p(k-1) \\ &= K_p[e(k) - e(k-1)] + K_i \cdot e(k) + K_d[e(k) - \\ &2e(k-1) + e(k-2)] \end{aligned} \quad (3-13)$$

一般认为位置式算式(3-12)适用于有较快响应速度的执行机构,如晶闸管或伺服电机,但容易产生失控现象;增量式算式(3-13)适用于有积分记忆的执行机构,如步进电机或多圈电位器等,误动作影响小,易于实现手动/自动无扰动切换,容易获得较好的调节品质,但响应速度较慢。

利用计算机的逻辑运算能力,可对数字 PID 控制器的算式进行多项改进。

## 2. 数字 PID 控制器算式积分项的改进

积分项的改进算式有积分项分离的 PID 算式、变速积分的 PID 算式、抗饱和积分法的 PID 算式。

由于系统执行机构的线性范围受到限制,会出现偏差  $e(k)$  较大的情况。此时,因积分项作用,将会产生一个很大的超调量,并使系统不停地振荡。这种现象对于变化比较缓慢的对象,如温度、液位调节系统,其影响更为严重。为了消除这一现象,可以对积分项进行改进,在被调量偏离给定值较大时,即偏差  $e(k)$  较大时取消或削弱积分作用;而在被调量接近给定值时,才产生积分作用。此时可采用积分项分离的 PID 算式或变速积分的 PID 算式。

当控制器输出  $p(k)$  达到或接近饱和,而仍有较大偏差  $e(k)$  的情况下,如果继续对偏差进行积分,则控制的过渡过程时间将会大大延长,此时需要采用抗饱和和积分的 PID 算式。

积分项分离的 PID 算式为

$$\nabla p(k) = K_p[e(k) - e(k-1)] + K_{ia} \cdot K_i \cdot e(k) + K_d[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

其中,  $K_{ia}$  为开关型积分项分离系数,当  $|e(k)| > A$  时,取  $K_{ia} = 0$ ; 否则取  $K_{ia} = 1$ 。其中  $A$  为输入的某一阈值。  $K_{ia}$  与  $|e(k)|$  的关系如图 3-7(a) 所示。

变速积分的 PID 算式为

$$\nabla p(k) = K_p[e(k) - e(k-1)] + K_{ib} \cdot K_i \cdot e(k) + K_d[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

其中,  $K_{ib}$  为变速积分因子,  $A$ 、 $B$  为两个阈值点 ( $A < B$ )。当  $|e(k)| > B$  时,  $K_{ib} = 0$ ; 当  $|e(k)| < A$  时,  $K_{ib} = 1$ ; 当  $|e(k)|$  在  $A$  与  $B$  之间时,  $K_{ib}$  取值范围为  $0 \sim 1$ 。  $K_{ib}$  与  $|e(k)|$  关系如图 3-7(b) 所示。

变速积分的 PID 算法与积分项分离的 PID 算法很类似,前者的算法稍复杂,但调节更精细。当  $A = B$  时,即为积分项分离的 PID。积分项分离和变速积分的 PID 控制效果如图 3-7(c) 所示,其中实线是改进后的响应曲线。

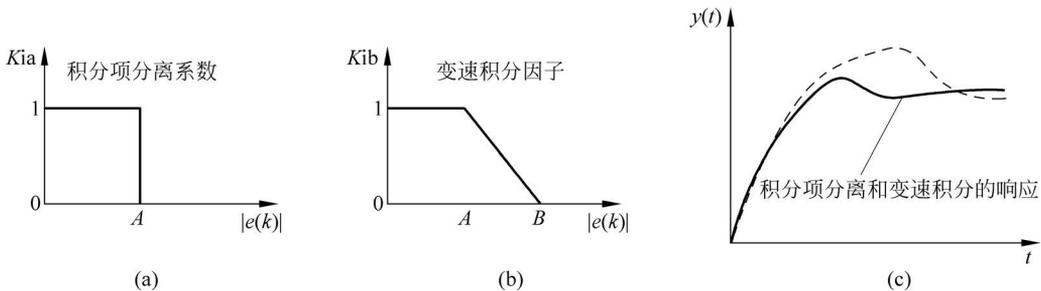


图 3-7 积分项分离和变速积分的 PID 控制效果

抗饱和积分法的 PID 算式为

$$\nabla p(k) = K_p[e(k) - e(k-1)] + K_{ic} \cdot K_i \cdot e(k) + K_d[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

其中,  $K_{ic}$  为开关型饱和停止积分系数, 当  $|p(k-1)| > B$  时, 取  $K_{ic}=0$ ; 否则取  $K_{ic}=1$ ,  $B$  为输出的某一饱和值。与  $K_{ia}$ 、 $K_{ib}$  不同的是  $K_{ic}$  与  $|p(k-1)|$  有关, 而与  $|e(k)|$  无关。

抗饱和积分法的 PID 控制效果如图 3-8 所示, 其中图 3-8(a) 是小信号控制下, 积分器没有饱和时的  $y(k)$  及  $e(k)$ 、 $p(k)$  曲线; 图 3-8(b) 是控制输出  $p(k)$  出现饱和时的响应曲线; 图 3-8(c) 是抗饱和积分法起作用时的响应曲线。

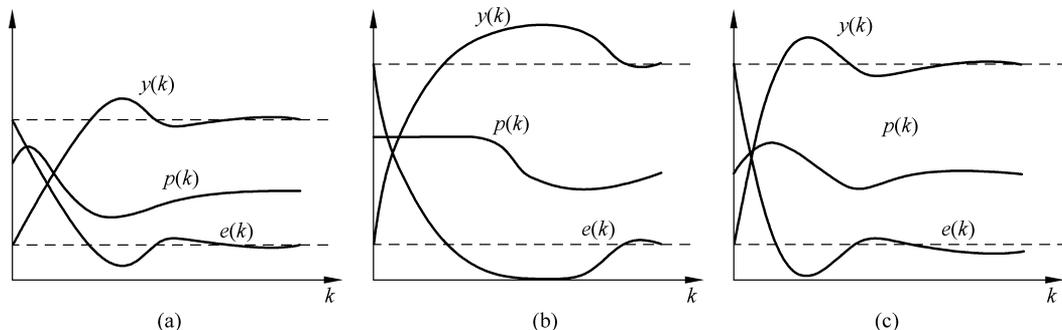


图 3-8 抗饱和积分法的 PID 控制效果

### 3. 数字 PID 控制器算式微分项的改进

引入微分可改善系统的动态特性, 但由于微分有放大噪声的作用, 故也极易引进高频干扰。微分项的改进措施有不完全微分的 PID 算式和微分先行 PID 算式。

不完全微分的 PID 算式(采用带惯性环节的实际微分器)主要作用是减弱微分项可能会引起的振荡。在标准 PID 算式中, 微分项的作用是当输入信号有突变时(如阶跃信号), 能快速地进行大幅度调节, 以尽快消除偏差。但是, 微分项输出的急剧增加, 容易引起过程的振荡, 导致调节品质下降。为了解决这一问题, 可以仿照模拟调节器的方法, 采用不完全微分的 PID 算式。不完全微分的 PID 算式的传递函数为

$$D(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right] \Rightarrow D(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + \frac{T_d \cdot s}{1 + T_f \cdot s} \right]$$

即

$$T_d \cdot s \Rightarrow \frac{T_d \cdot s}{1 + T_f \cdot s} = \frac{T_d \cdot s}{1 + \beta \cdot T_d \cdot s}$$

完全微分项对于输入阶跃信号只是在采样的第一个周期产生很大的微分输出信号, 不能按照偏差的变化趋势在整个调节过程中起作用, 而是急剧下降为零, 因而很容易引起系统振荡。另外, 完全微分在第一个采样周期里作用很强, 容易产生溢出, 而在不完全微分系统中, 其微分作用是逐渐下降的, 因而使系统变化比较缓慢, 故不易引起振荡。

微分先行 PID 算式用于两种情况: 一是只对被控量  $y(k)$  进行微分; 二是只对给定值  $r(k)$  进行微分。前者的主要作用是避免给定值  $r(k)$  的突变给系统带来的冲击, 微分项只对被控量  $y(k)$  起作用, 适用于给定值频繁升降的场合, 可以避免因输入变动而在输出上产生跃变; 后者的主要作用是避免被控量  $y(k)$  的干扰给系统带来的影响, 微分项只对被控量给定值  $r(k)$  起作用, 适用于被控量的检测过程中含有脉冲干扰的场合, 可以避免这些干扰对微分项的影响。两种微分先行 PID 结构分别如图 3-9(a) 和图 3-9(b) 所示, 前者只对  $r(k)$  进行不完全微分, 后者只对  $y(k)$  进行不完全微分。

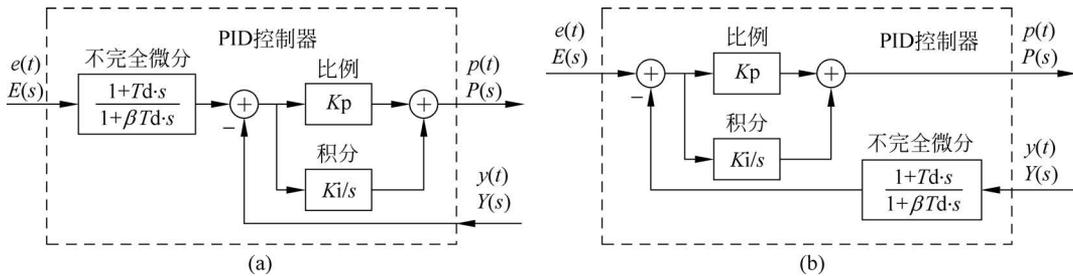


图 3-9 两种微分先行 PID 结构

#### 4. 数字 PID 控制器串接滤波单元

在 PID 控制器的输入和输出端都可串接滤波单元以改善性能,由于数字 PID 的算式由计算机实现,所以除了可串接针对模拟信号的数字滤波器外,还可通过简单的逻辑判断实现滤波。

有时需要降低对输入信号的灵敏度,可采用带非灵敏区的 PID 控制,其框图如图 3-10 所示。其中  $e_1(k)$  的算式为

$$e_1(k) = \begin{cases} e(k), & |e(k)| > \epsilon \\ 0, & |e(k)| \leq \epsilon \end{cases}$$

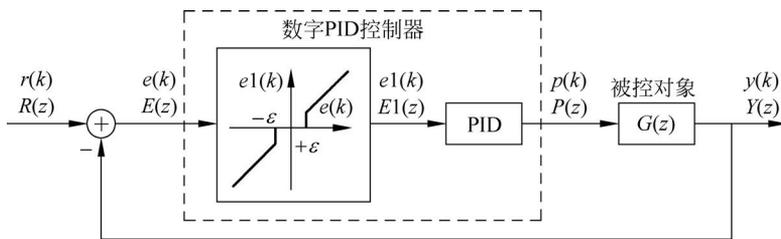


图 3-10 带非灵敏区的 PID 控制框图

为避免控制器动作过于频繁,可采用带死区的 PID 控制,其控制算式为

$$p(k) = \begin{cases} p(k), & |e(k)| > B, p(k) \text{ 保持不变} \\ K \cdot p(k), & |e(k)| \leq B, p(k) \text{ 乘上系数 } K \end{cases}$$

式中,  $K$  为死区增益,取  $0 \sim 1$  的数值;  $B$  是死区范围,是一个可调参数。

另外,为减小输入信号受干扰的影响,还可加入数字滤波环节。

#### 5. PID 控制算法的几个实际问题

##### 1) 正作用与反作用

调节一般都是通过偏差进行的。偏差的极性与调节器输出的极性有关,对不同的系统有着不同的要求。例如,在煤气加热炉温度调节系统中,被测温度高于给定值时,煤气进给阀门应该关小,以降低炉膛温度;而在炉膛压力调节系统中,当被测压力值高于给定值时,需将烟道阀门开大,以减小炉膛压力。在调节器中,前者称作反作用,后者称为正作用。模拟系统中调节器的正、反作用是靠改变模拟调节器中的正、反作用开关的位置实现的;在数字 PID 调节器中,可用两种方法来实现正、反作用。一种方法是改变偏差  $e(k)$  的表达式,对正作用,使  $e(k) = y(k) - r(k)$ ; 对反作用,使  $e(k) = r(k) - y(k)$ ,程序的其他部分均可不变。另一种方法是,计算式不变,只是在需要反作用时,在完成 PID 运算之后,先将其结果

求补,而后再送到 D/A 转换器进行转换输出。

#### 2) 限位与报警

在某些控制系统中,为了安全生产,往往不希望调节阀“全开”或“全关”,而有上下限限位  $P_{\max}$  和  $P_{\min}$ ,即限制调节器输出  $P$ 。在具体系统中,上、下限位不一定都需要,可能只有一个下限或上限限位。例如,在加热炉控制系统中为防止加热炉熄灭,不希望加热炉的燃料(重油、煤气或者天然气)管道上的阀门完全关闭,这就需要设置一个下限限位。

#### 3) 手动/自动切换

有许多控制系统需要根据工艺要求在不同的时刻进入或退出 PID 自动控制,退出 PID 自动控制时,控制器的输出部分可以由操作人员直接手动控制。这就需要 PID 手动/自动切换。

为避免执行机构承受较大的冲击,这就要求在进行 PID 自动/手动切换时,保持控制输出的稳定,实现无扰动切换。

PID 控制处于手动方式时,控制器不再自动按 PID 控制,此时控制回路的输出由操作人员手动控制、调整。由手动切换到自动时,必须实现自动跟踪,使 PID 输出能保持切换时刻的执行器状态,然后按采样周期进行自动调节。为此系统必须能采样两种信号:自动/手动状态,手动时执行器状态。而当系统由自动切换到手动时,要能够输出手动控制信号。例如,对一些电动执行机构,手动控制信号为  $4\sim 20\text{mA}$  的输出电流。能够完成这一功能的设备,称为手动后援。在计算机调节系统中,手动/自动跟踪及手动后援是系统安全可靠运行的重要保障。

#### 4) 信号的归一处理

实际应用过程中,数字 PID 控制器的输入  $e(k)$ 、 $r(k)$ 、 $y(k)$  取值范围往往经过归一处理,如取  $0\sim 1$ ,与传感器的标准信号(如标准电流信号  $4\sim 20\text{mA}$ )相对应。输出  $p(k)$  的信号也要与执行器的标准信号相匹配。

### 3.3.3 数字 PID 控制的参数整定

PID 控制虽然能适用于许多场合,但必须调整好其参数,才能达到较好的控制效果。PID 控制的参数整定就是根据被控对象,确定合适的比例度  $\delta$  ( $\delta=1/K_p$ )、积分时间  $T_i$ 、微分时间  $T_d$ ,对数字 PID 控制还包括采样周期  $T$ 。数字 PID 控制的参数整定方法常见的有扩充临界比例度法、衰减曲线法、扩充响应曲线法、归一参数法和经验整定法等。

#### 1. 扩充临界比例度法

扩充临界比例度法是在模拟 PID 的临界比例度法基础上进行扩充而来的,具体的整定过程如下:

(1) 选择一个足够短的采样周期  $T$ ,通常可选择采样周期为被控对象纯滞后时间的  $1/10$ 。

(2) 采用纯比例反馈控制( $P$  控制),逐渐减小比例度  $\delta$ ,直到系统发生持续的等幅振荡。记下此时的临界比例度  $\delta_u$  及系统的临界振荡周期  $T_u$ (即振荡波形的两个波峰之间的时间)。

(3) 查表 3-2 求得数字控制器的  $K_p$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  及采样周期  $T$  的推荐值。该表以典型二阶系统为背景,取控制度为 1.05 计算出的经验数据。控制度是一种采用误差平方积分作为

控制器效果的评价函数,用于评价数字 PID 控制器相对模拟 PID 控制器的近似程度。

(4) 按查得的推荐参数投入在线运行,观察效果,如果性能不满意,可根据经验和对 P、I、D 各控制项作用的理解,进一步调整参数  $K_p$ 、 $T_i$ 、 $T_d$ ,直到满意为止。

扩充临界比例度法不需要事先知道对象的动态特性,直接在闭环系统中进行,在实验过程中允许出现振荡。

表 3-2 扩充临界比例度法整定参数表

控制规律	$T$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
PI	$0.03 T_u$	$0.53/\delta u$	$0.88 T_u$	—
PID	$0.014 T_u$	$0.63/\delta u$	$0.49 T_u$	$0.14 T_u$

例如,某控制系统在纯比例反馈控制(P控制)情况下,逐渐增大比例系数  $K_p$ (即减小比例度  $\delta$ ),得到的输出响应波形如图 3-11 所示(给定值为一系列的脉冲波形)。

## 2. 衰减曲线法

为避免持续等幅振荡的临界状态出现,可采用衰减曲线法来整定参数。具体的整定过程如下:

(1) 选择一个足够短的采样周期  $T$ 。

(2) 输入阶跃激励信号,采用纯比例反馈控制,调整比例度  $\delta$ ,使系统输出  $y(t)$  发生衰减振荡。在衰减振荡中,两个相邻同方向幅值之比称为衰减比(前一幅值为分子,后一幅值为分母)。通常减小比例度  $\delta$  会增大衰减比;增大比例度  $\delta$  会减小衰减比。调整比例度  $\delta$  使输出振荡的衰减比达到 4:1,记下此时的比例度  $\delta_s$  及振荡周期  $T_s$ ,如图 3-12 所示(其中衰减比为  $\sigma_1 : \sigma_2 = 4 : 1$ ,此时的  $\delta = \delta_s$ )。

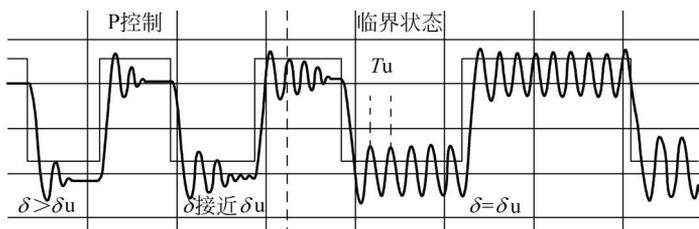


图 3-11 扩充临界比例度法整定参数时的响应波形

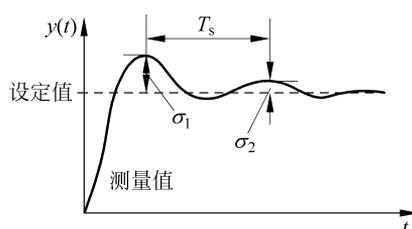


图 3-12 衰减曲线法整定参数时的输出曲线

(3) 查表 3-3 求得数字控制器的  $K_p$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  及采样周期  $T$ 。

表 3-3 衰减曲线法整定参数表

控制规律	$T$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
PI	$0.02 T_s$	$0.83/\delta s$	$0.5 T_s$	—
PID	$0.01 T_s$	$1.25/\delta s$	$0.3 T_s$	$0.1 T_s$

(4) 按查得的参数投入在线运行,观察效果,如果性能不满意,可根据经验进一步调整参数  $K_p$ 、 $T_i$ 、 $T_d$ ,直到满意为止。

衰减曲线法不需要事先知道对象的动态特性,在闭环系统中进行,在实验过程中允许出现一定的振荡。

## 3. 扩充响应曲线法

扩充响应曲线法是在模拟 PID 的响应曲线法基础上进行扩充而来,具体的整定过程

如下：

(1) 断开数字调节器,使系统处于开环状态,输入阶跃信号。记录响应曲线(即飞升特性曲线)。

(2) 在记录的响应曲线上,求出纯滞后时间  $\theta$  和时间常数  $\tau$  以及它们的比值  $\tau/\theta$ ,如图 3-13 所示。

(3) 查表 3-4 求得数字控制器的  $K_p$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  及采样周期  $T$  的推荐值。该表以典型二阶系统为背景,取控制度为 1.05 计算出的经验数据。

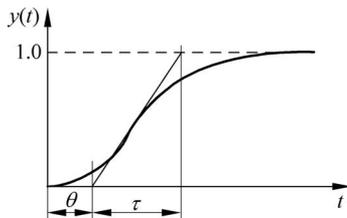


图 3-13 扩充响应曲线法记录的响应曲线

表 3-4 扩充响应曲线法整定参数表

控制规律	$T$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
PI	$0.1\theta$	$0.84\tau/\theta$	$3.4\theta$	—
PID	$0.05\theta$	$1.15\tau/\theta$	$2.0\theta$	$0.45\theta$

(4) 按查得的参数投入在线运行,观察效果,如果性能不满意,可根据经验进一步调整参数  $K_p$ 、 $T_i$ 、 $T_d$ ,直到满意为止。

扩充响应曲线法是通过开环实验获得对象的动态特性,通常在开环实验过程中不会出现振荡。

#### 4. 归一参数法

归一参数法的基本思想是,根据经验数据,对多变量、相互耦合较强的系统,人为地设定“约束条件”,以减少变量的个数,继而减少待整定参数的个数为一个,故称其为归一参数法。

已知 PID 增量式为

$$\nabla p(k) = K_p[e(k) - e(k-1)] + K_i \cdot e(k) + K_d[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

根据 Ziegler-Nichols 条件,设定“约束条件”,令  $T = 0.1T_k$ ,  $T_i = 0.5T_k$ ,  $T_d = 0.125T_k$ ,式中  $T_k$  为纯比例反馈控制作用下的临界振荡周期,则有

$$\nabla p(k) = K_p[2.45e(k) - 3.5e(k-1) + 1.25e(k-2)] \quad (3-14)$$

这样,整个问题便“归一化”为只要整定一个参数  $K_p$ 。改变  $K_p$ ,观察控制效果,直到满意为止。

#### 5. 经验整定法

经验整定法主要根据各参数的作用进行整定,具体的过程如下：

(1) 首先只整定比例部分。比例系数  $K_p$  由小变大,观察相应的系统响应,直到得到反应快,超调量小的响应曲线。系统若无静差或静差已小到允许范围内,并且响应效果良好,那么只需用比例调节器即可。

(2) 若稳态误差不能满足设计要求,则需加入积分控制。整定时先置积分时间  $T_i$  为一较大值,并将经第(1)步整定得到的  $K_p$  减小些,然后减小  $T_i$ ,并使系统在保持良好动态响应的情况下,消除稳态误差。这种调整可根据响应曲线的状态,反复改变  $K_p$  及  $T_i$ ,以期得到满意的控制过程。

(3) 若使用 PI 调节器消除了稳态误差,但动态过程仍不能满意,则可加入微分环节。在第(2)步整定的基础上,逐步增大  $T_d$ ,同时相应地改变  $K_p$  和  $T_i$ ,逐步试凑以获得满意的调节效果。

### 3.4 最少拍随动系统

#### 3.4.1 最少拍随动系统的原理

##### 1. 最少拍随动系统的结构及基本关系式

最少拍随动系统的结构与基于偏差的负反馈控制系统一样,如图 3-14(a)所示,等效闭环传递函数如图 3-14(b)所示。当系统存在偏差时,人们总是希望能尽快地消除偏差,即在有限的几个采样周期内系统输出跟踪输入的给定值。习惯上把一个采样周期称为一拍,最少拍控制实际上是一种时间最优控制。

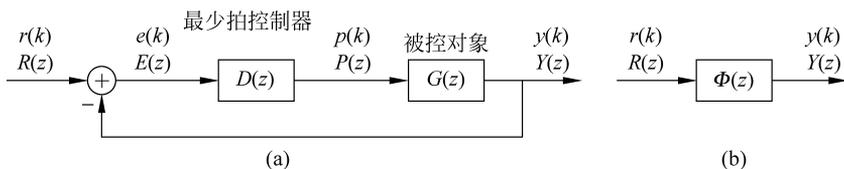


图 3-14 最少拍随动系统的结构

最少拍随动系统的设计任务就是设计一个数字调节器,使系统到达稳定所需要的采样周期最少,而且在采样点的输出值能准确地跟踪输入信号,不存在偏差。对任何两个采样周期中间的过程则不作要求。最少拍随动系统,也称为最小调整时间系统或最快响应系统。

为了分析最少拍随动系统的误差,根据式(3-1)和式(3-2),即

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z) \cdot G(z)}{1 + D(z) \cdot G(z)}, \quad D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{\Phi(z)}{G(z) \cdot [1 - \Phi(z)]}$$

可写出误差脉冲传递函数  $Ge(z)$ , 即

$$Ge(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = 1 - \Phi(z), \quad \text{或} \quad \Phi(z) = 1 - Ge(z) \quad (3-15)$$

控制器的  $D(z)$  与  $Ge(z)$  的关系如下:

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z) \cdot Ge(z)} = \frac{1 - Ge(z)}{G(z) \cdot Ge(z)} \quad (3-16)$$

##### 2. 最少拍随动系统的误差分析

根据式(3-15)和式(3-16)可知,为求出  $D(z)$ , 需要知道  $G(z)$ 、 $\Phi(z)$  和  $Ge(z)$ , 而  $\Phi(z)$  和  $Ge(z)$  与偏差  $E(z)$  有关。显然,最少拍随动系统的调节时间,就是系统误差  $e(k)$  达到恒定值或趋于零点的时间。根据  $z$  变换的定义可知

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)z^{-k} = e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + e(3)z^{-3} + \cdots + e(k) \cdot z^{-k} + \cdots$$

由此可求出  $e(0), e(1), e(2), e(3), \cdots, e(k)$  各值。而  $E(z)$  又与给定的输入  $R(z)$  有关,为此先要分析一下  $R(z)$ 。

典型的输入信号有单位阶跃输入、单位速度输入(单位斜坡信号)、单位加速度输入(单位抛物线信号),它们的离散域序列和  $z$  表达式如下。

(1) 单位阶跃输入为

$$r(k) = u(k) \Leftrightarrow R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

(2) 单位速度输入(单位斜坡信号)为

$$r(k) = kT \Leftrightarrow R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

(3) 单位加速度输入(单位抛物线信号)为

$$r(k) = \frac{1}{2}(kT)^2 \Leftrightarrow R(z) = \frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

由此可见,典型输入的  $z$  变换具有以下形式:

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \quad (3-17)$$

式中,  $m$  为正整数,即  $m=1,2,3,\dots$ ,  $A(z)$  是不包括  $1-z^{-1}$  因式的  $z^{-1}$  的多项式。因此,对于不同的输入,只是  $m$  不同而已。当  $m=1,2,3$  时,分别对应 3 种典型的输入。

最少拍随动系统在典型信号作用下,当  $k \geq N$ ,  $e(k)$  为恒定值或  $e(k)$  等于零时,  $N$  必定是尽可能小的正整数,有

$$E(z) = R(z) \cdot Ge(z) = \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \cdot Ge(z) \quad (3-18)$$

### 3.4.2 最少拍随动系统的设计

要满足最少拍的要求,应使误差函数成为尽可能少的有限项,为此必须合理地选择  $Ge(z)$ 。考虑到最少拍随动系统的误差表达式(3-15)和式(3-18),可取误差脉冲传递函数

$$Ge(z) = (1-z^{-1})^M \cdot F(z), \quad M \geq m \quad (3-19)$$

式中  $F(z)$  是不含  $1-z^{-1}$  因式的  $z^{-1}$  多项式。

当选择  $M=m$ , 且  $F(z)=1$  时,不仅可以简化数字控制器的结构,而且还可以使  $E(z)$  的项数最少,因而调节时间  $t_s$  最短。对应 3 种典型输入信号,最少拍随动系统的参量如表 3-5 所示。

表 3-5 3 种典型输入时最少拍随动系统的参量

输入函数 $r(k)$	$u(k)$	$kT$	$\frac{1}{2}(kT)^2$
输入函数 $R(z)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$
误差脉冲传递函数 $Ge(z) = (1-z^{-1})^M \cdot F(z)$	$(1-z^{-1}) \cdot F(z)$	$(1-z^{-1})^2 \cdot F(z)$	$(1-z^{-1})^3 \cdot F(z)$
闭环脉冲传递函数 $\Phi(z) = 1 - Ge(z)$	$1 - (1-z^{-1}) \cdot F(z)$	$1 - (1-z^{-1})^2 \cdot F(z)$	$1 - (1-z^{-1})^3 \cdot F(z)$
最少拍数字控制器 $D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z) \cdot Ge(z)}$	$\frac{1 - (1-z^{-1}) \cdot F(z)}{G(z) \cdot Ge(z)}$	$\frac{1 - (1-z^{-1})^2 \cdot F(z)}{G(z) \cdot Ge(z)}$	$\frac{1 - (1-z^{-1})^3 \cdot F(z)}{G(z) \cdot Ge(z)}$

#### 1. 设计过程

最少拍随动系统的设计过程如下:

- (1) 根据被控对象的数学模型,由  $z$  变换公式求出广义对象的脉冲传递函数  $G(z)$ ;
- (2) 根据输入信号  $R(z)$  的类型,确定误差脉冲传递函数  $Ge(z)$  和闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$ ;

(3) 由  $\Phi(z)$ 、 $G(z)$ 、 $Ge(z)$  求得最少拍数字控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ ;

(4) 分析控制效果, 求出输出序列并画出响应曲线, 如有问题可调整  $Ge(z)$  和  $\Phi(z)$ , 重新设计  $D(z)$ 。

另外, 最少拍随动系统的设计还有一些其他限制:

(1)  $\Phi(z)$  的极点应全部在单位圆内, 否则闭环系统将是不稳定的;

(2)  $\Phi(z)$  应包含  $G(z)$  中在单位圆上或圆外的零点, 且  $\Phi(z) = 1 - Ge(z)$  应为  $z^{-1}$  的展开式, 且其幂次应与  $G(z)$  分子中的  $z^{-1}$  因子的幂次相等;

(3)  $G(z)$  所有不稳定的极点, 应由  $Ge(z)$  零点抵消;

(4) 数字控制器  $D(z)$  在物理上应是可实现的有理多项式, 即

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}$$

式中,  $b_i (i=1, 2, 3, 4, \dots, n)$  和  $a_i (i=0, 1, 2, \dots, m)$  为常系数, 且  $n > m$ 。

最少拍随动系统设计过程中各因素关系示意图如图 3-15 所示。

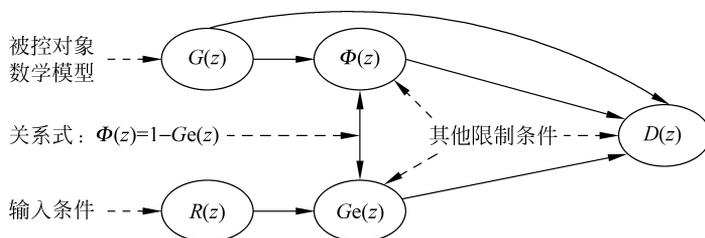


图 3-15 最少拍随动系统设计过程中各因素关系示意图

## 2. 设计举例

**例 3-5** 已知被控对象的传递函数如下:

$$G(s) = \frac{1/2}{s(s+1/2)}$$

采用阶跃响应不变法, 将  $G(s)$  离散化可得广义对象的脉冲传递函数  $G(z)$  (设  $T=1$ ), 即

$$\begin{aligned} G(z) &= Z[G(s)] = Z\left[(1 - e^{-Ts}) \frac{1/2}{s^2(s+1/2)}\right] = (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1/2}\right] \\ &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{2}{1 - z^{-1}} + \frac{2}{1 - e^{-1/2} z^{-1}}\right] \\ &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{z^{-1}(1 - e^{-1/2} z^{-1}) - 2(1 - z^{-1})(1 - e^{-1/2} z^{-1}) + 2(1 - z^{-1})^{-2}}{(1 - z^{-1})^2(1 - e^{-1/2} z^{-1})}\right] \\ &= \frac{z^{-1}[1 - 2(-1 - e^{-1/2}) - 4] + z^{-2}(-e^{-1/2} - 2e^{-1/2} + 2)}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-1/2} z^{-1})} \\ &\approx \frac{z^{-1}(0.213 + 0.1805z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T/2} z^{-1})} = \frac{0.213z^{-1}(1 + 0.847z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})} \end{aligned}$$

试设计  $R(z)$  为单位阶跃输入时的最少拍数字控制器  $D(z)$ 。

**解** 因为  $G(z)$  具有因子  $z^{-1}$ , 无单位圆外的零点, 则  $\Phi(z)$  应包括  $z^{-1}$  因子;  $G(z)$  分母和  $R(z)$  均有  $(1 - z^{-1})$  因子, 则  $Ge(z)$  应包含  $(1 - z^{-1})$ ; 又因为  $\Phi(z) = 1 - Ge(z)$ ,  $\Phi(z)$  和  $Ge(z)$  应该是  $z^{-1}$  同阶次的多项式, 所以有

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - Ge(z) = az^{-1} \\ Ge(z) = (1 - z^{-1})b = b - bz^{-1} \end{cases}$$

两式中的  $a, b$  为待定系数。将上两式联立,得

$$1 - b + bz^{-1} = az^{-1}$$

比较等式两侧,得到解

$$\begin{cases} a = b \\ b = 1 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - Ge(z) = z^{-1} \\ Ge(z) = (1 - z^{-1}) \end{cases}$$

将上面两式代入,可求出数字控制器的脉冲传递函数

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{\Phi(z)}{G(z) \cdot Ge(z)} = \frac{z^{-1}}{\frac{0.213z^{-1}(1 + 0.847z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})} \cdot (1 - z^{-1})} \\ &= \frac{(1 - 0.6065z^{-1})}{0.213(1 + 0.847z^{-1})} = \frac{4.69(1 - 0.6065z^{-1})}{1 + 0.847z^{-1}} \end{aligned}$$

系统中各点的  $z$  表达式为

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$E(z) = R(z)Ge(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}} = 1$$

$$\begin{aligned} P(z) &= E(z)D(z) = \frac{4.69(1 - 0.6065z^{-1})}{1 + 0.847z^{-1}} \\ &= 4.69 - 7.05z^{-1} + 5.97z^{-2} - 5.05z^{-3} + \dots \end{aligned}$$

$$Y(z) = R(z) \cdot \Phi(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

相应的  $r(k)$ 、 $e(k)$ 、 $p(k)$  和  $y(k)$  各点波形如图 3-16 所示,从图中可看出,经过 1 个采样周期后,系统误差为 0,输出值跟踪了输入信号。

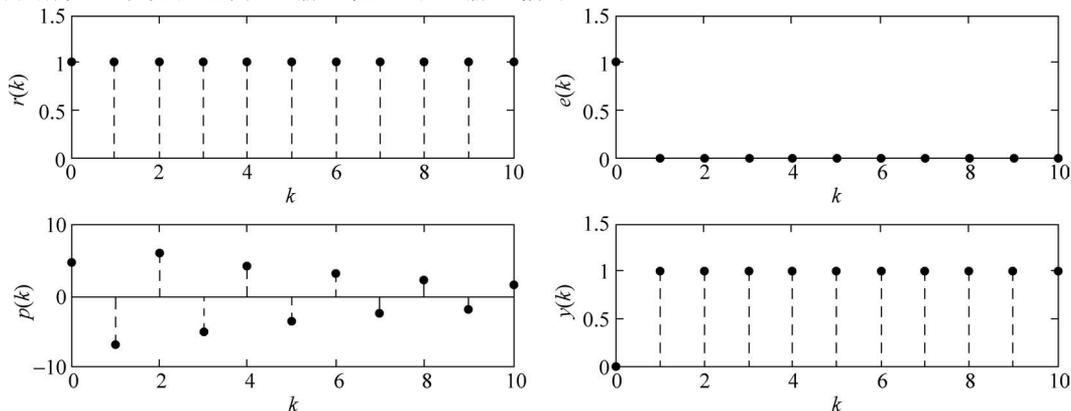


图 3-16 最少拍随动系统设计例 3-5 的各点波形

**例 3-6** 已知被控对象的脉冲传递函数  $G(z)$  为

$$G(z) = \frac{0.7385z^{-1}(1+1.4815z^{-1})(1+0.5355z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.6065z^{-1})(1-0.0067z^{-1})}$$

试设计  $R(z)$  为单位速度输入时的最少拍数字控制器  $D(z)$ 。

**解** 因为  $G(z)$  含有因子  $z^{-1}$  和单位圆外零点  $z = -1.4815$ , 则  $\Phi(z)$  分子应包括  $z^{-1}$  和  $(1+1.4815z^{-1})$  因子;  $G(z)$  分母有  $(1-z^{-1})$  因子,  $R(z)$  分母有  $(1-z^{-1})^2$  因子,  $Ge(z)$  应包含  $(1-z^{-1})^2$ ; 又因为  $\Phi(z) = 1 - Ge(z)$ ,  $\Phi(z)$  和  $Ge(z)$  应该是  $z^{-1}$  同阶次的多项式, 所以有

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - Ge(z) = az^{-1}(1+1.4815z^{-1})(1+bz^{-1}) \\ Ge(z) = (1-z^{-1})^2(1+cz^{-1}) \end{cases}$$

式中  $a, b, c$  为待定系数, 求解上述方程组, 可得  $a = 1.0466, b = -0.6149, c = 0.9534$ 。所以有

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 1.0466z^{-1}(1+1.4815z^{-1})(1-0.6149z^{-1}) \\ Ge(z) &= (1-z^{-1})^2(1+0.9534z^{-1}) \end{aligned}$$

由此可求出最少拍数字控制器的脉冲传递函数

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{\Phi(z)}{Ge(z) \cdot G(z)} \\ &= \frac{1.0466z^{-1}(1+1.4815z^{-1})(1-0.6149z^{-1})}{(1-z^{-1})^2(1+0.9534z^{-1}) \frac{0.7385z^{-1}(1+1.4815z^{-1})(1+0.5355z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.6065z^{-1})(1-0.0067z^{-1})}} \\ &= \frac{1.4172z^{-1}(1-0.6149z^{-1})(1-0.6065z^{-1})(1-0.0067z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.9534z^{-1})(1+0.5355z^{-1})} \end{aligned}$$

系统中各点的  $z$  表达式为

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots \\ E(z) &= R(z) \cdot Ge(z) = z^{-1} \cdot (1+0.9534z^{-1}) \\ P(z) &= E(z) \cdot D(z) = \frac{1.4172z^{-2}(1-0.6149z^{-1})(1-0.6065z^{-1})(1-0.0067z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.5355z^{-1})} \\ &= 1.417z^{-1} - 1.082z^{-2} + 0.796z^{-3} - 0.213z^{-4} + 0.327z^{-4} + \dots \\ Y(z) &= R(z) \cdot \Phi(z) = \frac{1.0466z^{-2}(1+1.4815z^{-1})(1-0.6149z^{-1})}{(1-z^{-1})^2} \\ &= 1.0466z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots \end{aligned}$$

相应的  $r(k), e(k), p(k)$  和  $y(k)$  各点波形如图 3-17 所示。从图中可看出, 经过 2 个采样周期后, 系统误差为 0, 输出值跟踪了输入信号。

在上述最少拍随动系统  $D(z)$  设计过程中, 对被控对象  $G(s)$  并未提出具体限制。实际上, 只有当广义对象的脉冲传递函数  $G(z)$  是稳定的, 即在单位圆上或圆外没有零、极点, 而且不含有纯滞后环节  $z^{-1}$  时, 所设计的最少拍随动系统才是理想的。

### 3.4.3 最少拍无纹波随动系统的设计

上述最少拍随动系统还存在一个问题, 即控制器的输出  $P(z)$  有纹波, 这意味着即使系

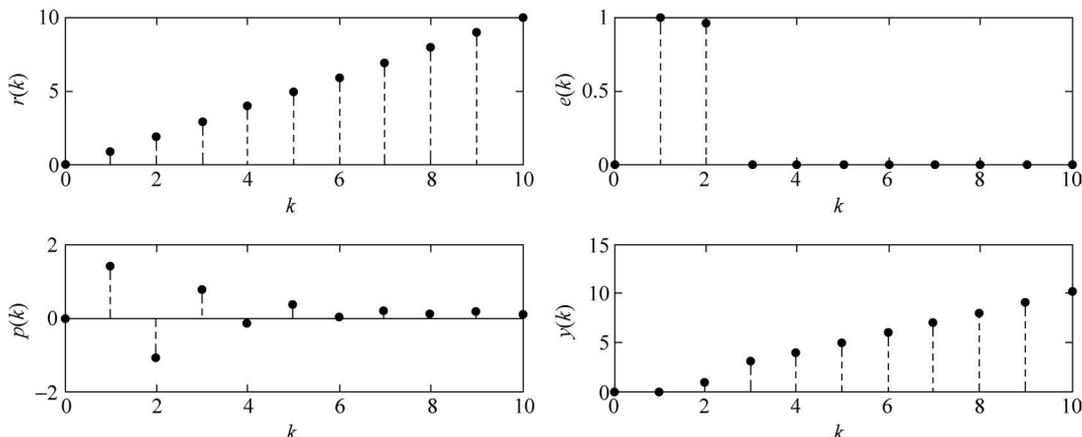


图 3-17 最少拍随动系统设计例 3-6 的各点波形

统的误差达到了零,但控制器的输出仍没有处于某个恒定的值,对应的执行器仍在不断动作,这势必会对执行器造成磨损,这是不希望发生的。最少拍无纹波随动系统的设计可避免这一缺陷。

### 1. 设计原理

根据控制系统的结构,可得控制器的输出  $P(z)$  的表达式,即

$$P(z) = D(z) \cdot E(z) = D(z) \cdot Ge(z) \cdot R(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)} \cdot R(z)$$

由此可以看出,  $G(z)$  的极点不会影响到  $Ge(z)D(z)$  成为  $z^{-1}$  的有限多项式,而  $G(z)$  的零点倒是有可能使  $D(z)Ge(z)$  成为  $z^{-1}$  的无限多项式。

因此,让  $\Phi(z)$  的零点包含  $G(z)$  的全部零点就能使  $P(z)$  中不出现  $z^{-1}$  的无限多项式,从而消除了纹波。而在最少拍随动系统中,则只要求  $\Phi(z)$  包括  $G(z)$  的单位圆上 ( $z_i = 1$  除外) 和单位圆外的零点,这是最少拍无纹波随动系统设计与最少拍随动设计之间的根本区别。

最少拍无纹波随动系统的设计过程与最少拍随动系统基本一样,只是确定  $\Phi(z)$  有所区别。

### 2. 设计举例

例 3-7 已知被控对象的脉冲传递函数  $G(z)$  如下:

$$G(z) = \frac{0.213z^{-1}(1+0.847z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.6065z^{-1})}$$

试设计  $R(z)$  为单位阶跃输入时的最少拍无纹波随动系统的数字控制器  $D(z)$ 。

解 因为  $G(z)$  具有因子  $z^{-1}$ , 单位圆内的零点  $z = -0.847$ , 则  $\Phi(z)$  应包括  $z^{-1}$  和  $(1+0.847z^{-1})$  因子;  $G(z)$  分母和  $R(z)$  均有  $(1-z^{-1})$  因子, 则  $Ge(z)$  应包含  $(1-z^{-1})$  因子; 又因为  $\Phi(z) = 1 - Ge(z)$ ,  $\Phi(z)$  和  $Ge(z)$  应该是  $z^{-1}$  同阶次的多项式, 所以有

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - Ge(z) = az^{-1}(1+0.847z^{-1}) \\ Ge(z) = (1-z^{-1})(1+bz^{-1}) = 1 - (1-b)z^{-1} - bz^{-2} \end{cases}$$

两式中的  $a, b$  为待定系数。将上两式联立, 可求得:  $a = 0.541, b = 0.459$ 。所以有

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - Ge(z) = 0.541z^{-1}(1 + 0.847z^{-1}) \\ Ge(z) = (1 - z^{-1})(1 + 0.459z^{-1}) \end{cases}$$

将上面两式代入式(3-16),可求出数字控制器的脉冲传递函数

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{\Phi(z)}{G(z) \cdot Ge(z)} = \frac{0.541z^{-1}(1 + 0.847z^{-1})}{\frac{0.213z^{-1}(1 + 0.847z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})} \cdot (1 - z^{-1})(1 + 0.459z^{-1})} \\ &= \frac{0.541(1 - 0.6065z^{-1})}{0.213(1 + 0.459z^{-1})} = \frac{2.54(1 - 0.6065z^{-1})}{1 + 0.459z^{-1}} \end{aligned}$$

系统中各点的  $z$  表达式为

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$E(z) = R(z) \cdot Ge(z) = 1 + 0.459z^{-1}$$

$$P(z) = E(z)D(z) = 2.54(1 - 0.6065z^{-1}) = 2.54 - 1.54z^{-1}$$

$$Y(z) = R(z) \cdot \Phi(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} 0.541z^{-1}(1 + 0.847z^{-1}) = 0.541z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

相应的  $r(k)$ 、 $e(k)$ 、 $p(k)$  和  $y(k)$  各点波形如图 3-18 所示,从图中可看出,经过 2 个采样周期后,系统误差为 0,输出跟踪输入虽然比最少拍随动系统延长了 1 个采样周期,但控制器的输出已经没有纹波了。

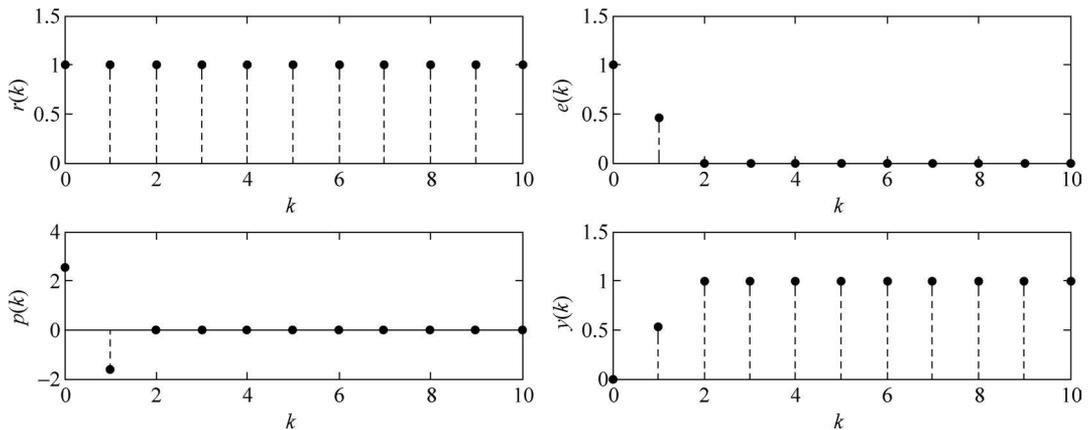


图 3-18 最少拍无纹波随动系统设计例 3-7 的各点波形

**例 3-8** 已知被控对象的脉冲传递函数  $G(z)$  如下:

$$G(z) = \frac{0.7385z^{-1}(1 + 1.4815z^{-1})(1 + 0.5355z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})(1 - 0.0067z^{-1})}$$

试设计  $R(z)$  为单位速度输入时的最少拍无纹波数字控制器  $D(z)$ 。

**解** 因为  $G(z)$  含有因子  $z^{-1}$  和零点  $z = -1.4815$ 、 $z = -0.5355$ , 因此,  $\Phi(z)$  中应含有  $z^{-1}$ 、 $(1 + 1.4815z^{-1})$  和  $(1 + 0.5355z^{-1})$  项;  $G(z)$  分母有  $(1 - z^{-1})$  因子和  $R(z)$  有  $(1 - z^{-1})^2$  因子, 则  $Ge(z)$  应包含  $(1 - z^{-1})^2$ ; 又因为  $\Phi(z) = 1 - Ge(z)$ ,  $\Phi(z)$  和  $Ge(z)$  应该是  $z^{-1}$  同阶次的多项式, 所以有

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - Ge(z) = az^{-1}(1 + 1.4815z^{-1})(1 + 0.5355z^{-1})(1 + bz^{-1}) \\ Ge(z) = (1 + z^{-1})^2(1 + cz^{-1} + dz^{-2}) \end{cases}$$

式中  $a, b, c$  为待定系数, 经整理可得

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - Ge(z) = az^{-1} + (2.017a + ab)z^{-2} + (0.7933a + 2.017ab)z^{-3} + 0.7933abz^{-4} \\ Ge(z) = 1 + (c - 2)z^{-1} + (1 - 2c + d)z^{-2} + (c - 2d)z^{-3} + dz^{-4} \end{cases}$$

由此得方程组

$$\begin{cases} a = -(c - 2) \\ (2.017a + ab) = -(1 - 2c + d) \\ (0.7933a + 2.017ab) = -(c - 2d) \\ 0.7933ab = -d \end{cases}$$

求解上述方程组可得  $a = 0.7731$ ;  $b = 0.6605$ ;  $c = 1.2269$ ;  $d = 0.4051$ 。提示: 可利用 MATLAB 工具求解该方程组, 参考命令:

```
[a,b,c,d] = solve('a = -(c - 2)', '(2.017 * a + a * b) = -(1 - 2 * c + d)', '(0.7933 * a + 2.017 * a * b) = -(c - 2 * d)', '0.7933 * a * b = -d');
```

所以有

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - Ge(z) = 0.7731z^{-1}(1 + 1.4815z^{-1})(1 + 0.5355z^{-1})(1 - 0.6605z^{-1}) \\ Ge(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + 1.2269z^{-1} + 0.4051z^{-2}) \end{cases}$$

将上面两式代入式(3-16), 可求出数字控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ , 即

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{\Phi(z)}{G(z) \cdot Ge(z)} \\ &= \frac{0.7731z^{-1}(1 + 1.4815z^{-1})(1 + 0.5355z^{-1})(1 - 0.6605z^{-1})}{0.7385z^{-1}(1 + 1.4815z^{-1})(1 + 0.5355z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})(1 - 0.0067z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})^2(1 + 1.2269z^{-1} + 0.4051z^{-2})} \\ &= \frac{1.047(1 - 0.6605z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})(1 - 0.0067z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 1.2269z^{-1} + 0.4051z^{-2})} \end{aligned}$$

系统中各点的  $z$  表达式为

$$R(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots$$

$$E(z) = R(z) \cdot Ge(z) = z^{-1} \cdot (1 + 1.2269z^{-1} + 0.4051z^{-2}) \approx z^{-1} + 1.23z^{-2} + 0.41z^{-3}$$

$$P(z) = E(z) \cdot D(z)$$

$$= \frac{1.047z^{-1}(1 - 0.6605z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})(1 - 0.0067z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

$$\approx 1.05z^{-1} - 0.29z^{-2} + 0.14z^{-3} + 0.14z^{-4} + 0.14z^{-5} + 0.14z^{-6} + 0.14z^{-7} + \dots$$

$$Y(z) = R(z) \cdot \Phi(z)$$

$$= \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} 0.7731z^{-1}(1 + 1.4815z^{-1})(1 + 0.5355z^{-1})(1 - 0.6605z^{-1})$$

$$\approx 0.77z^{-2} + 2.59z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + 6z^{-6} + \dots$$

相应的  $r(k)$ 、 $e(k)$ 、 $p(k)$  和  $y(k)$  各点波形如图 3-19 所示, 从图中可看出, 经过 3 个采

样周期后,系统误差为 0,控制器的输出最终没有纹波。

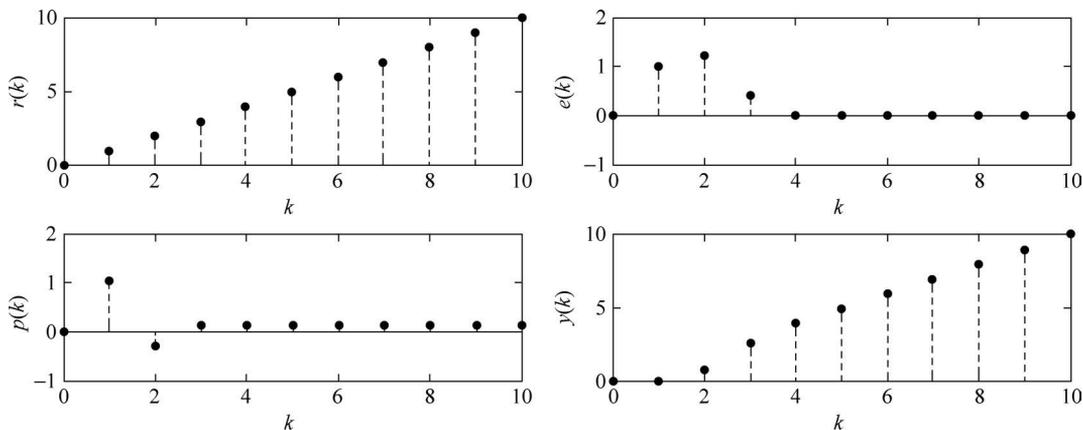


图 3-19 最少拍无纹波随动系统设计例 3-8 的各点波形

### 3.5 控制算法的实现

在获得数字控制器的  $D(z)$  后,可以采用硬件电路或计算机软件实现  $D(z)$ 。由于计算机的软件实现非常灵活和方便,除了对速度有特殊要求的场合,目前绝大部分情况都是采用计算机软件实现控制器  $D(z)$  的控制算法。

根据控制器  $D(z)$  可以方便地得到相应的实现框图,由实现框图可得到控制器的硬件电路和相应的算式,同一个  $D(z)$  又可有多多种的实现框图,它们有各自的特点。

#### 3.5.1 实现框图与算法

##### 1. 实现框图

数字控制器的实现框图可用 3 种基本符号表示,它们分别是乘法器、延迟器和加法器,分别如图 3-20(a)、图 3-20(b)、图 3-20(c) 所示。它们也可与硬件部件相对应,其中乘法器、加法器完成数字的乘法和加法运算,延迟器可由一组 D 触发器或寄存器构成,延迟 1 个采样周期。

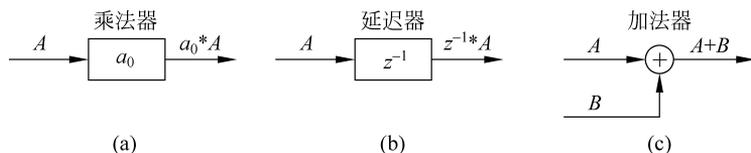


图 3-20 数字控制器的实现框图中的符号含义

数字控制器的  $D(z)$  通常可写成如下分式:

$$\begin{aligned}
 D(z) &= \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^n b_j z^{-j}} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n b_j z^{-j}} \cdot \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} \quad (n \geq m)
 \end{aligned}$$



对应的差分方程为

$$p(k) + b_1 p(k-1) + b_2 p(k-2) + \dots + b_n p(k-n) = a_0 e(k) + a_1 e(k-1) + a_2 e(k-2) + \dots + a_m e(k-m)$$

用计算机程序来求解上述差分方程的效率不高,它需要 $(1+n)+(1+m)$ 个存储单元来存放  $p(k) \sim p(k-n)$ 和  $e(k) \sim e(k-m)$ 个变量。

也可采用状态空间的形式实现  $D(z)$ 。具体的实现框图有直接式 1 和直接式 2 之分,分别如图 3-21(a)和图 3-21(b)所示。图中有  $x_1 \sim x_n$  个状态变量,直接式 1 的状态变量可从输出端观察到,这种实现方法也称可观型实现方法;直接式 2 的状态变量可从输入端控制,这种实现方法也称可控型实现方法。

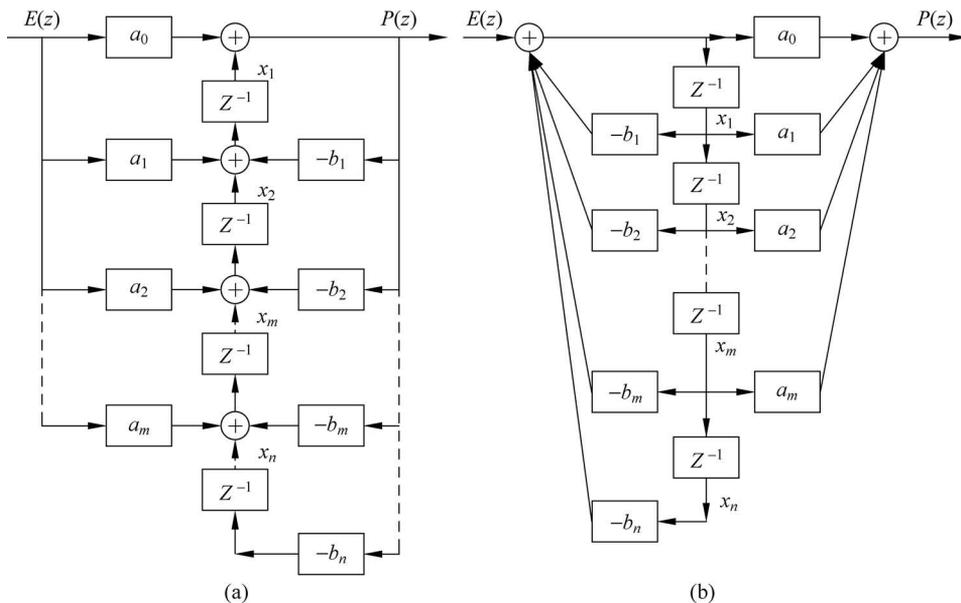


图 3-21  $D(z)$ 的实现框图(用状态空间形式)

### 2. 实现算法

有了  $D(z)$ 的实现框图,数字控制器既可用硬件实现,也可用软件实现。根据实现框图,可以列出相应的状态方程和输出方程,然后利用迭代法求解差分方程实现相应的控制算法。下面举例说明。

**例 3-9** 已知某数字控制器的  $D(z)$ 如下:

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{5 + 4z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

采用直接式 1 和直接式 2 的  $D(z)$ 实现框图分别如图 3-22(a)和图 3-22(b)所示,请列出相应的状态方程和输出方程。

**解** 根据实现框图可得相应的状态方程和输出方程,对应直接式 1 实现框图有状态方程

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -1.3x_1(k) + x_2(k) + [4 + 5 \times (-1.3)] \cdot e(k) \\ \quad \quad \quad = -1.3x_1(k) + x_2(k) - 2.5e(k) \\ x_2(k+1) = -0.4x_1(k) + [0.6 + 5 \times (-0.4)] \cdot e(k) \\ \quad \quad \quad = -0.4x_1(k) - 1.4e(k) \end{cases}$$

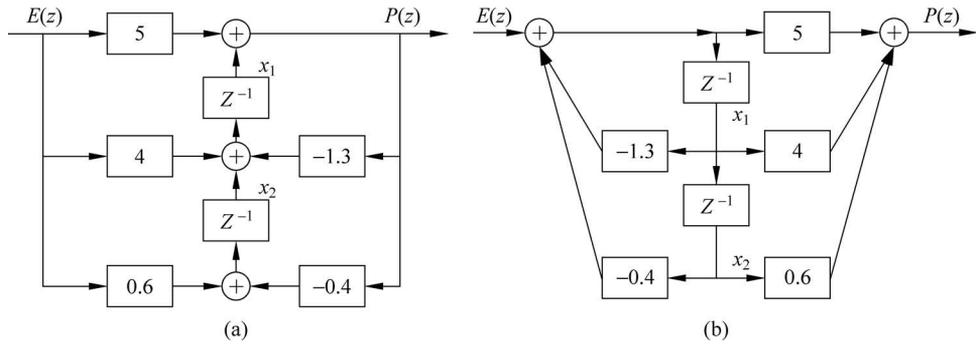


图 3-22 例 3-9 的直接式 1 和直接式 2 实现框图

输出方程为

$$p(k) = x_1(k) + 5e(k)$$

对应直接式 2 实现框图有状态方程

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -1.3x_1(k) - 0.4x_2(k) + e(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \end{cases}$$

输出方程为

$$\begin{aligned} p(k) &= [4 + (-1.3) \times 5]x_1(k) + [0.6 + (-0.4) \times 5]x_2(k) + 5e(k) \\ &= -2.5x_1(k) - 1.4x_2(k) + 5e(k) \end{aligned}$$

根据给定的输入序列  $e(k)$ , 利用迭代法可求出系统状态变量  $x_1(k)$ 、 $x_2(k)$  和输出  $p(k)$  的序列。根据因果系统的特征, 初始化时可将状态变量  $x_1(k)$ 、 $x_2(k)$  置为 0, 每次定时采样开始, 先读取当前输入  $e(k)$ , 随后根据输出方程求出  $p(k)$ , 并输出给执行器, 之后, 根据状态方程求出新的状态变量  $x_1(k+1)$ 、 $x_2(k+1)$ , 更新状态变量, 即将计算出的  $x_1(k+1)$ 、 $x_2(k+1)$  传送给  $x_1(k)$ 、 $x_2(k)$ , 为下次定时采样做准备, 定时采样算法的流程图如图 3-23 所示。

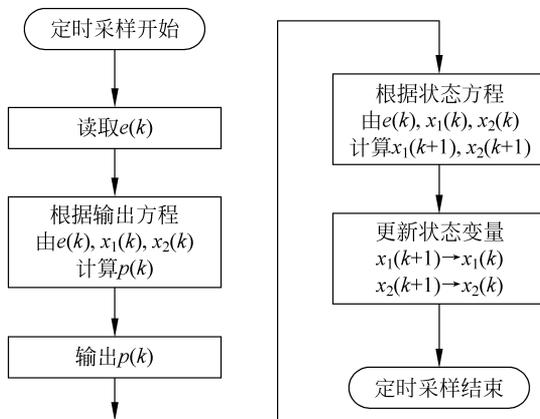


图 3-23 定时采样算法的流程图

对于例 3-9, 假定输入  $e(k)$  是单位阶跃序列, 则求解过程如表 3-6 和表 3-7 所示。

通过上面的例子可发现, 对同一  $D(z)$  分别用直接式 1 和直接式 2 实现, 对应的状态方程和输出方程也不一样, 迭代求解过程中的状态变量取值也不一样, 但在输入相同的  $e(k)$  情况下, 计算出的最终输出  $p(k)$  是一致的。

表 3-6 直接式 1 的迭代法求解过程

$k$	$<0$	0	1	2	3	4	...
$e(k)$	0	1	1	1	1	1	1
$x_1(k)$	0	0	-2.5	-0.65	-2.055	-0.9685	...
$x_2(k)$	0	0	-1.4	-0.4	-1.14	-0.578	...
$p(k)$	0	5	2.5	4.35	2.945	4.0315	...

表 3-7 直接式 2 的迭代法求解过程

$k$	$<0$	0	1	2	3	4	...
$e(k)$	0	1	1	1	1	1	1
$x_1(k)$	0	0	1	-0.3	0.99	-0.167	...
$x_2(k)$	0	0	0	1	-0.3	0.99	...
$p(k)$	0	5	2.5	4.35	2.945	4.0315	...

### 3.5.2 串行实现与并行实现

当控制器的  $z$  阶较高时,采用直接式 1 或直接式 2 都会存在这样的问题:若控制器中某一系数存在误差,则有可能使控制器的多个或所有零极点产生较大偏差。为此,对  $z$  阶较高的控制器,可采用串行实现或并行实现,即将高阶的  $D(z)$  分解为低阶的  $D(z)$ ,分解后,低阶控制器中任一系数有误差,通常不会使控制器中所有的零极点产生变化。另外,采用串行实现或并行实现,有时还可使算式各系数的含义更易理解。

#### 1. 串行实现

串行实现也称串联实现,其原理是将控制器的  $D(z)$  分解为若干低阶的  $D_1(z)$ 、 $D_2(z)$ 、 $D_3(z)$ 、...,然后将它们串联起来,取代原来高阶的  $D(z)$ ,表达式为

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}$$

$$= a_0 D_1(z) D_2(z) \dots D_l(z) = a_0 \prod_{i=1}^l D_i(z)$$

其中,

$$D_i = \frac{1 + \alpha_{i1} z^{-1}}{1 + \beta_{i1} z^{-1}} \quad \text{或} \quad D_i = \frac{1 + \alpha_{i1} z^{-1} + \alpha_{i2} z^{-2}}{1 + \beta_{i1} z^{-1} + \beta_{i2} z^{-2}}$$

例 3-10 已知某数字控制器的  $D(z)$  如下:

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{5 + 4z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

对  $D(z)$  进行因式分解,可得

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{5 + 4z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} = 5 \cdot \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \cdot \frac{1 + 0.6z^{-2}}{1 + 0.8z^{-2}}$$

因此,  $D(z)$  可看成三个环节串联而成,即  $D(z) = a_0 \cdot D_1(z) \cdot D_2(z)$ , 其中

$$a_0 = 5, D_1(z) = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}, D_2(z) = \frac{1 + 0.6z^{-2}}{1 + 0.8z^{-2}}$$

控制器的实现框图如图 3-24 所示。

#### 2. 并行实现

并行实现也称并联实现,其原理是将控制器的  $D(z)$  分解为若干低阶的  $D_1(z)$ 、

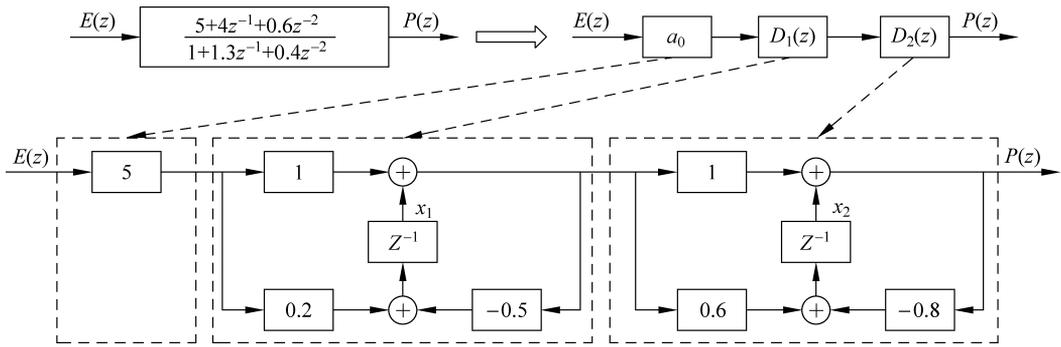


图 3-24 串行实现框图

$D_2(z)$ 、 $D_3(z)$ 、 $\dots$ ，然后将它们并联起来，取代原来高阶的  $D(z)$ ，表达式如下：

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}$$

$$= \gamma_0 + D_1(z) + D_2(z) + \dots + D_l(z) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^l D_i(z)$$

其中，

$$D_i = \frac{\gamma_{i1}}{1 + \beta_{i1} z^{-1}} \quad \text{或} \quad D_i = \frac{\gamma_{i0} + \gamma_{i1} z^{-1}}{1 + \beta_{i1} z^{-1} + \beta_{i2} z^{-2}}$$

例 3-11 已知某数字控制器的  $D(z)$  如下：

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{5 + 4z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

对  $D(z)$  进行分式分解，可得

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{5 + 4z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} = 1.5 + \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} + \frac{2.5}{1 + 0.8z^{-1}}$$

因此， $D(z)$  可看成三个环节并联而成，即  $D(z) = \gamma_0 + D_1(z) + D_2(z)$ 。其中，

$$\gamma_0 = 1.5, \quad D_1(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}, \quad D_2(z) = \frac{2.5}{1 + 0.8z^{-1}}$$

控制器的实现框图如图 3-25 所示。

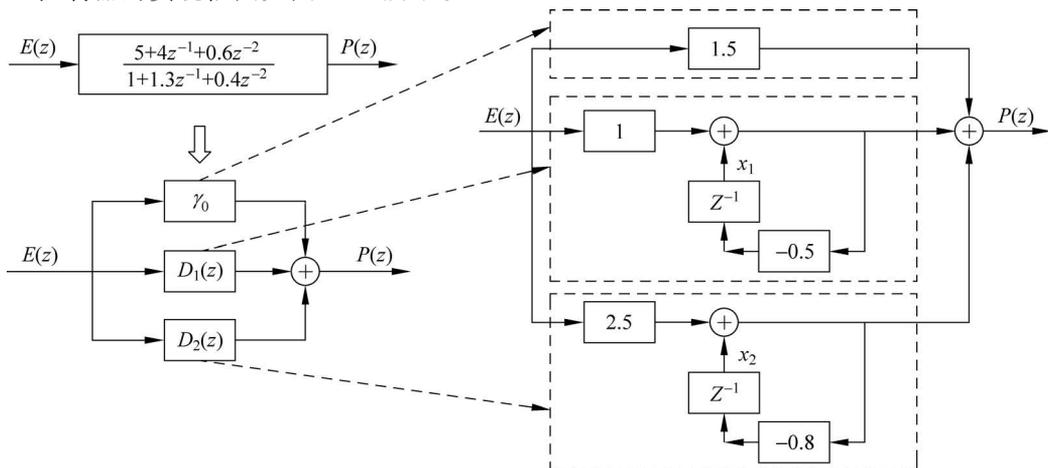


图 3-25 并行实现框图

## 本章知识点

### 知识点 3-1 数字控制器的离散化方法

数字控制器的离散化方法是一种近似设计方法,即根据已知的连续系统的传递函数  $D(s)$ ,求出近似的脉冲传递函数  $D(z)$ 。离散化方法有积分变换法、零极点匹配法和等效变换法之分,不同方法有各自的特点,但都能保持当  $D(s)$  稳定时, $D(z)$  也能稳定。当采样周期足够小时,各种方法已无多少区别。

### 知识点 3-2 数字 PID 控制算法及参数整定方法

PID 控制是一种基于给定值与输出值之间偏差进行比例、积分、微分运算的反馈控制。PID 控制适用性强、应用广泛。由计算机实现的数字 PID 控制器就是在连续系统 PID 控制器基础上发展而来的。数字 PID 控制器的  $D(z)$  可通过离散化方法由连续系统 PID 控制器的  $D(s)$  求得。结合计算机的逻辑运算功能,可对数字 PID 进行多种优化,以满足不同系统的需求。

PID 的  $K_p$ 、 $K_i$ (或  $T_i$ )、 $K_d$ (或  $T_d$ ) 参数各有不同的作用。数字 PID 控制的参数整定就是根据被控对象和控制要求,确定合适的采样周期  $T$  以及比例度  $\delta$ (比例系数  $K_p$  的倒数)、积分时间  $T_i$ 、微分时间  $T_d$ 。常见的参数整定方法有扩充临界比例度法、衰减曲线法、扩充响应曲线法、归一参数法和经验整定法等。

### 知识点 3-3 最少拍随动系统的原理及设计

最少拍随动系统也称为最小调整时间系统或最快响应系统。其设计目标就是根据静态误差的要求,设计出使系统的输出在最少的采样周期内跟踪输入的变化,使系统到达稳定所需要的采样周期最少,而且在采样点的输出值能准确地跟踪输入信号,不存在静差。最少拍无纹波随动系统的设计消除了控制器输出  $P(z)$  的纹波,使系统总体性能更加改善。

最少拍随动系统的设计就是根据被控对象的数学模型,由  $z$  变换公式求出广义对象的脉冲传递函数  $G(z)$ ,根据输入信号  $R(z)$  的类型,确定误差脉冲传递函数  $G_e(z)$  和闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$ ,由  $\Phi(z)$ 、 $G(z)$ 、 $G_e(z)$  求得数字控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ 。根据分析控制效果,再次求出输出序列并画出响应曲线,如有问题可调整  $G_e(z)$  和  $\Phi(z)$ ,重新设计  $D(z)$ 。

### 知识点 3-4 控制算法的实现

由控制器的  $D(z)$  可得到相应的控制方框图和差分方程,根据状态空间描述方法原理可得到相应的输出方程和状态方程。控制器的  $D(z)$  既可通过硬件实现,也可通过计算机利用迭代法求解差分方程实现,为减少由于系数误差对系统性能造成的影响,以及使算式各系数的含义更易理解,可采用串行实现或并行实现分解高阶的  $D(z)$ 。

## 思考题与习题

1. 简述数字控制器近似设计法与解析设计法的设计过程。
2. 已知某对象的传递函数如下,分别用向后矩形法和梯形变换法求出相应的脉冲传递函数,设采样周期  $T = 1\text{s}$ 。

$$G1(s) = \frac{2}{4s+3}, \quad G2(s) = \frac{0.1}{(0.1s+1)(0.5s+1)}, \quad G3(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

3. 已知某对象的传递函数如下,分别用脉冲响应不变法和带保持器的阶跃响应不变法求出相应的脉冲传递函数,设采样周期  $T=1s$ 。

$$D(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

4. 写出 PID 的传递函数  $D(s)$ ,并分别用向后矩形法和梯形变换法求出相应的  $D(z)$ ,要求将表达式整理成规范的分式,设采样周期  $T=1s$ 。

5. PID 的  $K_p, K_i, K_d$  参数各有什么作用?

6. 数字 PID 控制的参数整定方法有哪些? 各有什么特点?

7. 数字 PID 控制算法有哪些改进的方法?

8. 已知某控制系统的  $G(z)$  如下,假定分别在阶跃信号、单位速度信号激励下,按最少拍随动系统设计方法,求出  $D(z)$ ,并画出各点波形。

$$G(z) = \frac{0.5z^{-1}(1+0.6z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.4z^{-1})}$$

9. 已知某控制系统的  $G(z)$  如下,假定分别在阶跃信号、单位速度信号激励下,按最少拍随动系统设计方法,求出  $D(z)$ ,并画出各点波形。

$$G(z) = \frac{2z^{-1}(1+1.5z^{-1})(1+0.1z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.6z^{-1})(1-0.2z^{-1})}$$

10. 按最少拍无纹波随动系统设计方法,求出前面习题 8 和习题 9 的  $D(z)$ ,并画出各点波形。

11. 根据下列控制器的  $D(z)$ ,分别画出直接式、串行实现法和并行实现法的实现框图、相应的输出方程和状态方程。

$$D_1(z) = \frac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}, \quad D_2(z) = \frac{0.2+0.1z^{-1}-z^{-2}}{1-2z^{-1}-3z^{-2}}$$