第5章 定积分

第 4 章介绍了不定积分的概念及求解方式，本章将介绍定积分的定义、定积分的近似计算求解、反常积分的有关计算等内容。本章内容侧重理论与计算，第 6 章将会对定积分在几何与物理上的应用做更详尽的介绍说明。

5.1 本章目标

本章将尝试用 MATLAB 编写有关计算函数来加深对定义的理解，并解决如下问题：

(1) 运用定积分的几何意义编写求解函数；
(2) 定积分的近似计算与数值积分；
(3) 定积分的符号求解；
(4) 积分上限函数及其求导；
(5) 两种反常积分的符号求解与近似求解——Γ 函数与 B 函数；
(6) 定积分方法的综合运用；
(7) 积分的数值求解。

5.2 相关命令

下面介绍涉及定积分的 MATLAB 命令。

(1) int：定积分求解函数。用法如下：

- int(expr,var,a,b)：计算出区间[a,b]上关于 var 的表达式 expr 的定积分，如果未指定变量，int 将使用 symvar 确定的默认变量。如果 expr 是常量，则默认变量为 x。
- int(____,Name,Value)：使用一个或多个 Name,Value 对参数指定选项。例如，'IgnoreAnalyticConstraints',true 指定 int 对积分器应用额外的简化。

(2) trapz：梯形法求定积分。用法如下：

- trapz(Y)：通过梯形法计算 Y 的近似积分(采用单位间距)，Y 的大小确定求积分所沿用的维度。如果 Y 为向量，则 trapz(Y)是 Y 的近似积分；如果 Y 为矩阵，则 trapz(Y)对每列求积分并返回积分值的行向量；如果 Y 为多维数组，则 trapz(Y)对其大小不等于 1 的第一个维度求积分。
- trapz(X,Y)：根据 X 指定的坐标或标量间距对 Y 进行积分。
- trapz(____,dim)：使用以前的任何语法沿维度 dim 求积分，必须指定 Y，也可以指定 X。如果指定 X，则它可以是长度等 size(Y,dim)的标量或向量。例如，如果 Y 为矩阵，则 trapz(X,Y,2)对 Y 的每行求积分。

(3) quad：抛物线(simpson)法求定积分。用法如下：

- quad(fun,a,b,tol)：使用递归自适应 simpson 积分法求取函数 fun 从 a 到 b 的近似积分，误差为 tol，默认为 1e－6。

(4) integral：计算数值积分。用法如下：

- integral(fun,xmin,xmax)：使用全局自适应积分和默认误差容限在 xmin 至 xmax 间以数值形式为函数 fun 求积分。
- integral(fun,xmin,xmax,Name,Value)：指定具有一个或多个 Name,Value 对组参数的其他选项。例如，指定 'WayPoints'，后跟实数或复数向量，为要使用的积分器指示特定点。

(5) gamma：求 gamma 积分。用法如下：

- gamma(x)：其中 x 为实数参数。

(6) beta：求 beta 积分。用法如下：

- beta(p,q)：求 beta 积分，其中 p,q 为实数参数。

(7) feval：将变量数值代入符号函数。用法如下：

- feval(fun,x1,…,xm)：将 x1,…,xm 分别代入 fun 方程求解。

(8) vpasolve：求方程数值解。用法如下：

- vpasolve(fun,var)：用数值方法求解变量为 var 的方程 fun 的根。

5.3 定积分的几何意义与近似计算

先回顾一下定积分的定义。

定义 5-1 设函数 $f(x)$在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

各个小区间长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\quad \Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$，并求和

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 的极限总存在，且与闭区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关，那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分(简称积分)，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中，$f(x)$ 叫作被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫作被积表达式，x 叫作积分变量，a 叫作积分下限，b 叫作积分上限，$[a,b]$ 叫作积分区间。

下面再讨论定积分的几何意义。在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积；在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$ 时，表示由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示上述曲边梯形面积的负值；在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时，即函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴的上方，而其他部分在 x 轴下方，此时定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 x 轴上方图形面积减去 x 轴下方图形面积所得之差(如图 5-1 所示)。

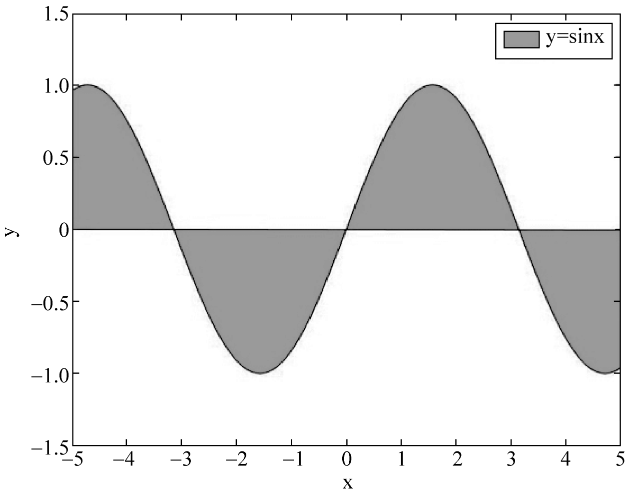

图 5-1　定积分几何意义示意图

例 5-1　利用定积分的几何意义计算 $\int_0^3(x^2-3x+1)\mathrm{d}x$。

解：先利用零点存在定理找到所有零点存在的区间，所用函数为 root_int，函数代码

如下：

```
function r = root_int(fun,a,b,h)
% ROOT_INT 寻找函数的所有的零点所在长度为 h 的区间
% 输入参数:
%   ——fun:被搜索函数
%   ——a:搜索区间下界
%   ——b:搜索区间上界
%   ——h:区间长度,缺省为(b-a)/100
% 输出参数:
%   ——r:所有的零点所在的长度为 h 的区间
% 调用说明:
% r = root_int(fun,a,b,h):求函数 fun 在[a,b]区间内所有的零点所在的长度为 h 的区间

if nargin == 3
    h = (b-a)/100;
end
a1 = a;b1 = a1 + h;
r = [];
fun = matlabFunction(fun);
while b1 < b
    if feval(fun,a1) * feval(fun,b1)< 0
        % 应用零点存在定理,搜索零点存在区间
        r = [r;[a1,b1]];
        a1 = b1;b1 = a1 + h;
    else
        a1 = b1;b1 = a1 + h;
        continue
    end
end
```

然后利用零点存在的小区间以及内置函数 fzero 找出函数 fun 在被积区间内所有零点，并找出 x 轴上方部分及 x 轴下方部分，分别求面积作差，所用函数为 defInt，实现代码如下：

```
function I = defInt(fun,a,b,n)
% DEFINNT 应用定积分的几何性质求解定积分
% 输入参数:
%    ——fun:被积函数
%   ——a:搜索区间下界
%   ——b:搜索区间上界
%   ——n:区间等分数
% 输出参数:
%   ——I:应用定积分几何性质求解得出结果
% 调用说明:
%   I = defint(fun,a,b,n):求函数 fun 在[a,b]区间内的几何性质求解
```

```
fun = matlabFunction(fun);
r = root_int(fun,a,b);
if ~isempty(r)
    N = size(r,1);
    solution = zeros(1,N + 2);
    solution(1) = a;
    solution(end) = b;
    for i = 1:N
        solution(i + 1) = fzero(fun,r(1,i));
    end
    Interval = zeros(N + 1,0);
    for j = 1:N + 1
        Interval(j,1) = solution(j);
        Interval(j,2) = solution(j + 1);
    end
```

这样，利用上述两个函数，可以求得：

```
syms x
fun = x^2 - 3 * x + 1;
defInt(fun,0,3,100)
```

ans = −1.874728644728536

从上述方法可以看到，对于任一确定的正整数 n，积分和为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

都是定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，当 n 取不同值时，可得到定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 精度不同的近似解。定义中，将窄条矩形的面积作为窄条曲边梯形面积的近似值。整体上用台阶形的面积作为曲边梯形面积的近似值。事实上，常用的求定积分近似值的方法都采用把区间 $[a,b]$ 等分的分法，即用分点 $a=x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n=b$ 将 $[a,b]$ 分成 n 个长度相等的小区间，每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$，记 $f(x_i)=y_i\,(i=0,1,2,\cdots,n)$，然后再利用几种可求面积的方法进行求解。

1. 矩形法

矩形左上角与曲线刚好相交时(如图 5-2 所示)，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}) \quad (取\ \xi_i=x_{i-1})$$

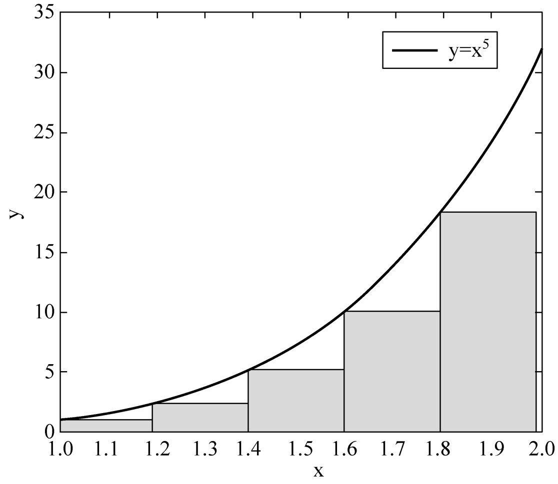

图 5-2　矩形法求定积分示意图(矩形左上角与曲线刚好相交)

矩形右上角与曲线刚好相交时(如图 5-3 所示),有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n) \quad (\text{取 } \xi_i = x_i)$$

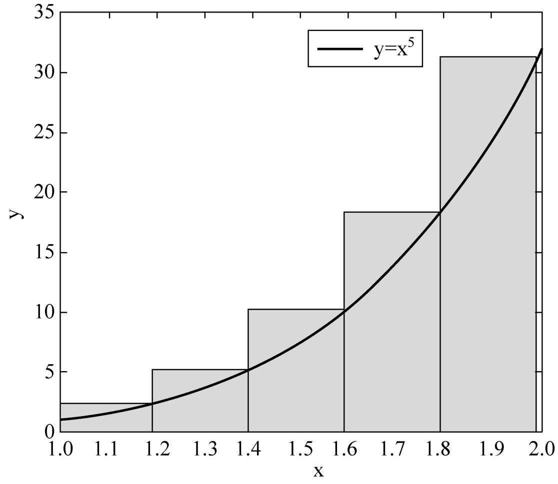

图 5-3　矩形法求定积分示意图(矩形右上角与曲线刚好相交)

2. 梯形法

根据梯形面积公式,有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$$

梯形法求定积分示意图如图 5-4 所示。

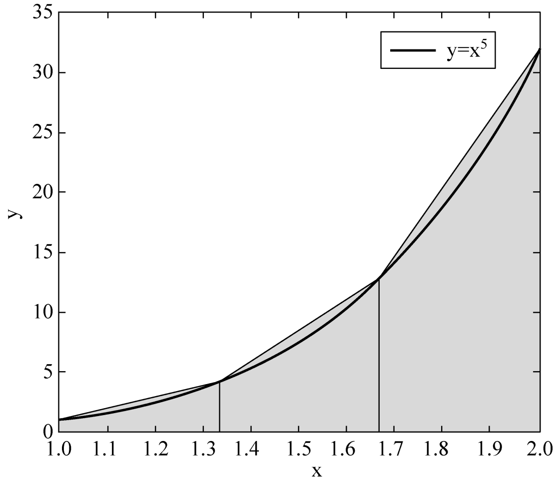

图 5-4　梯形法求定积分示意图

3. 抛物线法(simpson 法)

取 n 为偶数,有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})]$$

抛物线法求定积分示意图如图 5-5 所示。

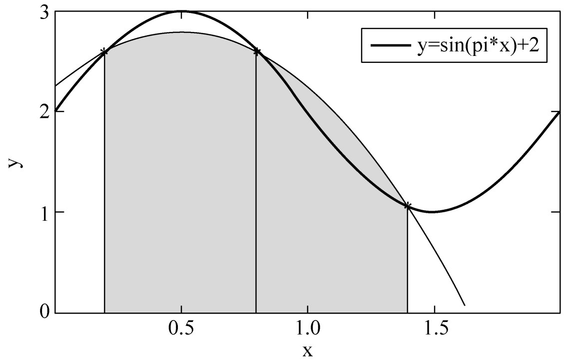

图 5-5　抛物线法求定积分示意图

数值积分的必要性是由于计算函数的原函数比较困难。原函数可由初等函数表示的为数不多,大部分可积函数的积分无法用初等函数表示,有些甚至无法用解析表达式表示。同时,在实际应用中,只能知道某些积分函数在特定点的取值,此时无法用求原函数方法计算定积分。数值积分为我们提供了不依赖原函数求得函数积分的方法,在数学应用中十分重

要，MATLAB 提供了几种计算数值积分的方法：trapz 函数基于梯形法设计；quad 函数基于 simpson 法编写设计；integral 法则可以自动选择最佳的算法进行数值积分。

下面通过几个例子介绍相关函数的用法及具体应用过程。

例 5-2　应用矩形法、梯形法及 simpson 法分别求定积分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ 的近似值。

解：对于矩形法，以左取法（矩形左上角与曲线刚好相交，见图 5-2）为例，可以编写如下函数：

```
function Q = rectangular_left(fun,a,b,n)
% RECTANGULAR_LEFT 根据矩形法求定积分近似值
% 输入参数:
%   ——fun:函数的 MATLAB 表述;
%   ——a,b:积分的下限与上限;
%   ——n:区间等分数;
% 输出参数:
%   ——Q:矩形法定积分近似值
% 调用说明:
%   Q = rectangular_left(fun,a,b,n):根据矩形法求定积分近似值,等分数为 n

if nargin < 4
    n = 100;
end
X = linspace(a,b,n + 1)
x = a
y = eval(fun);
s = 0;
for i = 1:n
    s = s + (b - a)/n * y;
    x = X(i);
    y = eval(fun);
end
Q = s;
```

利用该函数以及 quad、trapz，取 $n=100$，有：

```
syms x
f = 4/(1 + x^2);
x = [0:1/100:1];
y = 4 * (1 + x.^2).^( - 1);
format long
%用矩形法求出积分近似值,等分长度为 1/100
Q_rec = rectangular_left(f,0,1,100)
```

Q_rec = 3.171374986973629

```
%用抛物线法求出积分近似值
Q_quad = quad(matlabFunction(f),0,1)
```

Q_quad = 3.141592653589793

```
%用梯形法求出积分近似值
Q_trapz = trapz(x,y)
```

Q_trapz = 3.141575986923129

与本例函数积分的精确值 pi 相比较可知，精确度排序为：simpson 法＞梯形法＞矩形法。

计算定积分近似值的方法还有很多，如：Newton-Cotes 公式法、Gauss 法、复化梯形法、复化 simpson 法等，它们精确度更高，依赖的函数更为复杂，被更多地应用于追求高精度数值解的情形，这部分内容将在本章末尾做简要说明。

5.4 定积分的符号计算

通常用求原函数的方式计算定积分的值，这依赖于一个重要公式，即：

定理 5-1 （牛顿-莱布尼茨公式）如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

在 MATLAB 中，与不定积分的求解相同，仍然使用 int 函数求解符号函数的定积分，调用方式为：

Q = int(fun,x,a,b):fun 为待积分符号函数表达式(可为单个方程或矩阵),x 为符号变量,当 fun 为单一变量时,可以默认.a、b 分别为定积分的下限与上限.

例 5-3 计算下列表达式：

(1) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$；

(2) $\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$；

(3) $\int_0^{\pi} \begin{bmatrix} x & \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}} \\ x\cos kx & \frac{3+\sin x}{2+\cos x} \end{bmatrix} \mathrm{d}x$ 。

解：

```
syms x k
f1 = 1/(1 + x^2);
f2 = 1/x;
f3 = [x,cos(x)/((x^2 + 1)^0.5); x * cos(k * x),(3 + sin(x))/(2 + cos(x))];
int(f1,3^0.5, - 1)
```

$$\text{ans} = -\frac{7\pi}{12}$$

```
int(f2, - 2, - 1)
```

ans = −log(2)

```
int(f3,0,pi)
```

$$\text{ans} = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{2} & \int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \\ -\frac{2\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 - \pi k\sin(\pi k)}{k^2} & \log(3)+\pi\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

题(3)中出现了不可积的定积分。对于该类情况，可以使用 vpa 函数，得到其任意精度的数值解：

```
F = int(cos(x)/(x^2 + 1)^(1/2), x, 0, pi);
vpa(F,5)
```

ans = 0.48827

5.5 积分上限函数及其性质

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

定理 5-2 如果函数 $f(x)$在积分区间$[a,b]$上连续，那么积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上可导，并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

定理 5-3 如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，那么函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

例 5-4 计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$ 的导数。

解：

```
syms t x
F1 = cos(pi * t^2);
F11 = int(F1,sin(x),cos(x))
```

$$F11=\frac{\sqrt{2}\,(\mathrm{C}(\sqrt{2}\cos(x))-\mathrm{C}(\sqrt{2}\sin(x)))}{2}$$

```
diff(F11)
```

$$\mathrm{ans}=-\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}\cos(\pi\cos(x)^2)\sin(x)+\sqrt{2}\cos(\pi\sin(x)^2)\cos(x))}{2}$$

5.6 无穷限区间的反常积分

定义 5-2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，任取 $t>a$，作定积分 $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$，再求极限：

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5-1}$$

若极限存在，则上式称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

此时也称反常积分收敛；若上述极限不存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 无意义，称为反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，任取 $t<b$，作定积分 $\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$，再求极限：

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

若极限存在，则上式称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分，记为 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

此时也称反常积分收敛；若上述极限不存在，则 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 无意义，称为反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

上述反常积分统称为无穷限区间的反常积分。由定义及牛顿-莱布尼茨公式可得：

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一原函数，若 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$$

若 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ 不存在，则反常积分发散。类似地，在区间 $(-\infty,b]$ 同理。

由上述可知，对于收敛的无穷限反常积分，依然可以使用 int 函数求其值。

例 5-5 计算下列无穷限反常积分值：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (2) $\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\ (p>0)$

解：

```
syms x t
f1 = 1/(1 + x^2);
int(f1, - inf, inf)
```

ans $= \pi$

```
syms a p positive
% 输入变量及变量范围
f2 = t * exp( - p * t);
int(f2,t,0,inf)
```

ans $= \frac{1}{p^2}$

5.7 无界函数的反常积分

定义 5-3 若函数 $f(x)$ 在点 a 的任意邻域无界，则称点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，该类积分又称为瑕积分。

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，任取 $t>a$，作定积分 $\int_t^b f(x)\,dx$，再求极限：

$$\lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx \tag{5-3}$$

若极限存在，则上式称为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分，记为 $\int_a^b f(x)\,dx$，即

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx$$

此时也称反常积分收敛；若上述极限不存在，则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 无意义，称为反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散。

当 b 为瑕点时亦然，这里不再过多陈述。

例 5-6 证明下列无界反常积分，当 $0<q<1$ 时收敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散。

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$$

证明：

```
syms x a b
int(1/(x-a)^(p+1),x,a,b)
```

ans $=\infty$

```
syms p positive
int(1/(x-a)^(1-p),x,a,b)
```

ans $=\dfrac{(b-a)^p}{p}$

5.8 反常积分的近似计算

5.8.1 无界函数的反常积分

无界函数的反常积分的近似计算比较简单，只需去掉相应的瑕点即可用定积分近似计算时的方法计算。

例 5-7 计算无界函数 $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$。

解：

```
syms x
f1 = x/sqrt(1 - x^2);
% 用抛物线法近似计算反常积分
integral(matlabFunction(f1),0,1)
```

```
ans = 1.000000000000077
```

5.8.2 无穷限区间的反常积分

对于无穷限区间的反常积分，由于区间长度无穷，不能直接采用等间分割的方法。下面介绍无穷区间逼近的方法，以方程 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的求解为例。

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b_n \to +\infty} \int_0^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

取单调递增数列 $\{b_n\}$，且 $b_n \to +\infty (n \to +\infty)$，则有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{b_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_0}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots$$

将无穷限函数分为无数个小积分区间，使上面的每个小区间的积分都是正常积分，可用正常方法计算，当 $\left|\int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$ 时，停止迭代。

根据上述步骤，利用定积分中 quad 函数，编写如下求解程序 quadInf，解决上述问题。

```
function Q = quadInf(fun,a,b,tol,range)
% QUANINF 无穷限函数的反常积分的近似计算
% 输入参数：
%     ——fun:被积函数
%     ——a,b:积分下限与上限,可为 inf
%     ——tol:容差值,默认为 1e - 6
%     ——range:精度要求,迭代终止准则,默认为 1e - 5
% 输出参数：
%     ——Q:所求近似积分值
% 调用说明：
%     Q = quadInf(fun,a,b):求函数 fun 在[a,b]上的积分近似计算,a 与 b 可为无穷,下同
%     Q = quadInf(fun,a,b,tol):求函数 fun 在[a,b]上的积分近似计算,容差为 tol
%     Q = quadInf(fun,a,b,tol,range):求函数 fun 在[a,b]上的积分近似计算,容差为 tol,精度
% 为 range

if nargin < 5
   range = 1e - 5;
end
if nargin < 4
```

```
    tol = 1e - 6;
end
if isinf(a) && isinf(b)
    Q = quadInf(fun, - inf,0) + quadInf(fun,0,inf);
% 表示若积分范围两端都为无穷,则分两部分递归调用该函数.

elseif isinf(b)
    Q = 0;I = 1;
    while I > range
        b = a + 1;
        I = quad(fun,a,b,tol);
        Q = Q + I;
        a = b;
    end
elseif isinf(a)
    Q = 0;I = 1;
    while I > range
        a = b - 1;
        I = quad(fun,a,b,tol);
        Q = Q + I;
        b = a;
    end
else
    Q = quad(fun,a,b,tol);
end
```

5.9 Γ 函数与 B 函数

下面介绍在理论和实际应用中都非常重要的反常积分 Γ 函数,并对与它联系紧密同样重要的反常积分 B 函数做课本的补充说明。

定义 5-4 Γ 函数的定义为

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

为查看其定义域,将 Γ 函数写为

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

可见,该函数既为无穷限区间的反常积分,当 $s-1<0$ 时,又为无界函数的反常积分。

$s\leqslant 0$ 时,等式右边第一个反常积分发散;$s>0$ 时,等式右边两个反常积分都收敛,因此该函数定义域为$(0,+\infty)$。

定义 5-5 B 函数的定义为

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$$

为查看其定义域，将 B 函数写为

$$B(p,q)=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

$p>0$ 时等式右边第一个反常积分收敛，$q>0$ 时等式右边第二个反常积分收敛，因此该函数的定义域为 $(p,q)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$。

MATLAB 提供了求 Γ 函数与 B 函数函数值的内置函数 gamma，beta，其调用形式为

```
Y1 = gamma(x); Y2 = beta(p,q)
```

参数说明：x，p，q 为参数，它必须为实数，Y1，Y2 分别为对应积分值。

利用 MATLAB 绘制 Γ 函数与简单的 B 函数的图形（如图 5-6、图 5-7 所示）：

```
fplot(@gamma)
%运用内置 fplot 函数直接画出 gamma 函数的一种情况
legend('Gamma(x)')
%用内置 legend 函数做图例标注
grid on
xlabel('x'); ylabel('y');
p = linspace(0,5);q = linspace(0,5);
Y2 = beta(p,q);
%画出 beta 函数的一种情况
plot(Y2)
legend('Beta(p,q)')
grid on
xlabel('x'); ylabel('y');
```

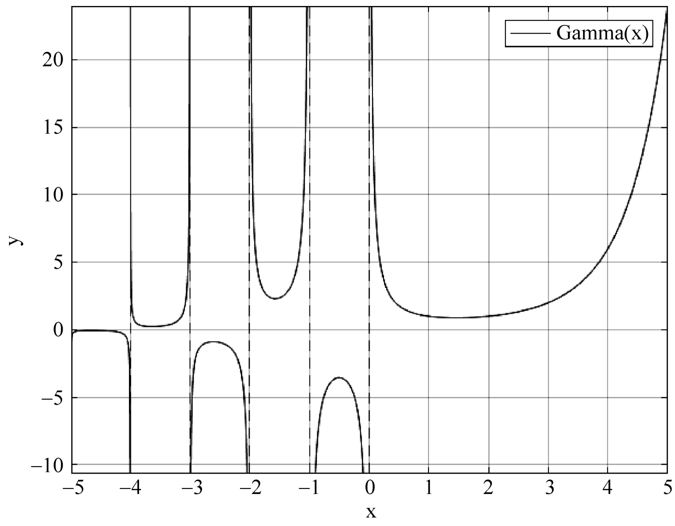

图 5-6 Γ 函数图形

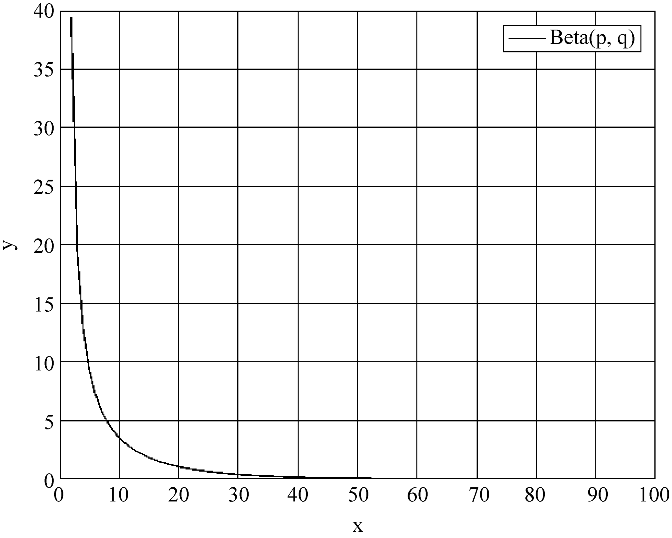

图 5-7　B 函数图形

由于函数 gamma 的特殊性，也有自己的性质。对于整数 n：

(1) gamma(n+1)=factorial(n)=prod(1：n)。

(2) gamma 函数的域通过解析延拓延伸到负实数，在负整数处有简单的极点。这种扩展源于以下递归关系的重复应用：

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$$

Γ 函数与 B 函数的关系：

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p>0,q>0)$$

5.10　拓展实例

下面将综合运用以上方法，在具体实例中体会 MATLAB 在处理定积分问题上提供的便利条件。

例 5-8　求函数 $F(a)=\int_{-a}^{a}\sin(ax)\sin\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x\,(a>0)$的最大值。

解：

```
syms a x;
assume(a >= 0);            %设置参数范围(a >= 0)
%a = 1 与 a~ = 1 时分别有两种情况
F = int(sin(a * x) * sin(x/a),x, - a,a)
```

$$F = \begin{cases} 1-\dfrac{\sin(2)}{2} & a=1 \\ \dfrac{2a(\sin(a^2)\cos(1)-a^2\cos(a^2)\sin(1))}{a^4-1} & a\neq 1 \end{cases}$$

```
F1 = piecewise(a == 1, 1 - sin(2)/2, a ~= 1, (2*a*(sin(a^2)*cos(1) - a^2*cos(a^2)*
sin(1)))/(a^4 - 1))
```

$$F1 = \begin{cases} \dfrac{4912087702119901}{9007199254740992} & a=1 \\ \dfrac{2a\left(\dfrac{1216652631687587\sin(a^2)}{2251799813685248}-\dfrac{3789648413623927a^2\cos(a^2)}{4503599627370496}\right)}{a^4-1} & a\neq 1 \end{cases}$$

```
%为了后续计算便利,先只考虑 a~=1 的情况
assumeAlso(a ~= 1);
F = int(sin(a*x)*sin(x/a),x,-a,a)
```

$$F = \frac{2a(\sin(a^2)\cos(1)-a^2\cos(a^2)\sin(1))}{a^4-1}$$

```
fplot(F,[0,10], 'linewidth',3)
xlabel('x'); ylabel('y');
hold on
Fa = diff(F,a)
```

$$Fa = \frac{2\sigma_1}{a^4-1}+\frac{2a(2a\cos(a^2)\cos(1)-2a\cos(a^2)\sin(1)+2a^3\sin(a^2)\sin(1))}{a^4-1}-\frac{8\sigma^4\sigma_1}{(a^4-1)^2}$$

where

$\sigma_1=\sin(a^2)\cos(1)-a^2\cos(a^2)\sin(1)$

本节程序还可以得到 F 的图形(如图 5-8 所示),根据 F 的图形,可以很清晰地看到 F 的最值分布情况及收敛情况,该函数的最大值点为区间[1,2]的极大值点。为了便于进一步确定,在该图上还可以绘制 F 一阶导数 Fa 的图形:

```
fplot(Fa,[0,10], '--','linewidth',2)
legend('F','Fa')
grid on
hold off
```

可以看出,F 的极值点恰为 Fa 的零点,这样在区间[1,2]内求 Fa 的根,即为区间[1,2] F 函数取极大值时 a 的取值:

```
a_max = vpasolve(Fa,a,[1,2])
```

$a\_max = 1.5782881585233198075558845180583$

```
%将a的取值代入F函数,可得最大值点
F_max = vpa(subs(F,a,a_max))
```

$F\_max = 1.2099496860938456039155811226054$

```
vpa(int(sin(x) * sin(x),x, - 1,1))
```

ans = 0.54535128658715915230199006704413

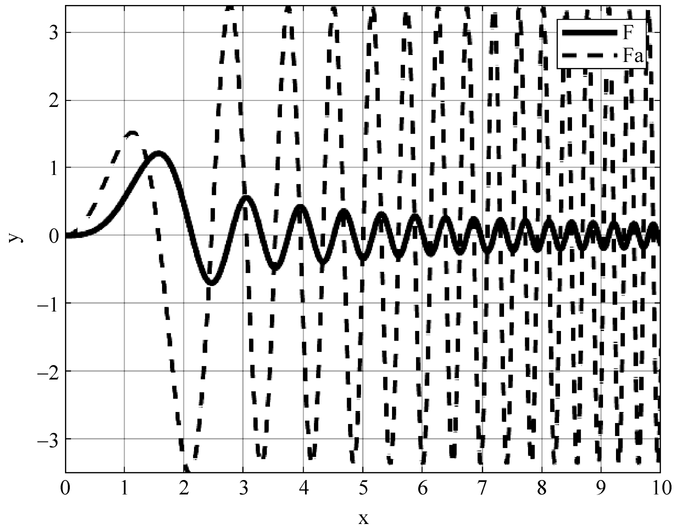

图 5-8　函数 F 与 Fa 的图形

最后对 $a=1$ 的情况进行验证,结果表明 $F(1)$不是最大值,从而确定在区间[1,2]内的最大值就是函数在整个定义域内的最大值。

5.11　定积分的数值求解的补充说明

除了在正文部分提到的定积分的近似计算的方法,还有很多方法对定积分进行数值求解。下面介绍依赖 Lagrange 插值多项式的插值法求解定积分的数值解。

定义 5-6　设函数 $f(x)$在 $[a,b]$上的 $m+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 上的函数值和若干阶导数值 $f^{(j)}(x_i)(i=0,1,2,\cdots,m;\ j=0,1,\cdots,n_i-1)$是已知的,这里

$$\sum_{i=0}^{m} n_i = n+1$$

若存在一个 n 次多项式 $p_n(x)$，满足如下插值条件

$$p_n^{(j)}(x_n)=f^{(j)}(x_i)\quad (i=0,1,2,\cdots,m;\ j=0,1,2,\cdots,n_i-1)$$

则称 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于插值节点（一般简称节点）$x_0,x_1,\cdots,x_m$ 的 n 次插值多项式，而

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)$$

称为插值余项。

根据以上定义，介绍 Lagrange 插值法。

$$n_0=n_1=\cdots=n_m=1,\quad m=n$$

这时 $n+1$ 个插值条件均为函数值而不包括导数值，即 $p_n(x)$ 满足

$$p_n(x_i)=f(x_i),\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

如果能找到一组 n 次多项式 $q_k(x)$，$k=0,1,2,\cdots,n$，满足

$$q_k(x_i)=\sigma_{ik}$$

这里

$$\sigma_{ik}=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases}$$

取

$$q_k(x)=\frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x-x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)},\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

于是就得到了 $f(x)$ 的 n 次插值多项式

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

这就是 Lagrange 插值多项式。

则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\int_a^b\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}\mathrm{d}x$$

取等分步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$，则

$$x_k=x_0+kh\quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

作变换

$$t=\frac{x-x_0}{h}$$

则

$$\int_a^b \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}\mathrm{d}x = h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-k}h}{(n-k)!\,k!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

这种方法通常称为 Newton-Cotes 公式。

根据上述公式,可编写函数程序 interpoly,用插值法求解定积分的数值解:

```
function I = interpoly(fun,a,b,n)
% INTERPOLY 插值法求解定积分的数值解
% 输入参数:
%    ——fun:被积函数
%    ——a:积分下限
%    ——b:积分上限
%    ——h:等分步长
% 输出参数:
%    ——I:求解定积分的数值解
% 调用说明:
% I = interpoly(fun,a,b,h):插值法求解定积分的数值解,待积分函数为 fun,积分区间为[a,b],等
% 分步长为 h

fun = matlabFunction(fun);
X = linspace(a,b,n + 1);
Y = feval(fun,X);
I = 0;
for k = 1:n
   A = ( - 1)^(n - k) * h/(factorial(n - k) * factorial(k));
   T = 1;
   syms t
   for j = 0:n
       T = T * (t - j);
   end
   T = T/(t - k);
   Ak = A * int(T,0,n);
   I = I + eval(Ak * Y(k));
end
```

例 5-9　用插值法求定积分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值。

解:

```
syms s x
fun = 4/(1 + x^2)
```

$$\mathrm{fun} = \frac{4}{x^2+1}$$

```
format long
I = interpoly(fun,0,1,1/50)
```

$I = 3.165111293937786$

5.12　动手实践

请用 MATLAB 求解下列问题。

1. 依据右取法(矩形右上角与曲线刚好相交)编写矩形法求积分函数。

2. 计算下面函数的导数：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$。

3. 计算无穷限区间的反常积分值 $\int_{a}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0)$。

4. 求解函数 $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$。

5. 对函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ 进行拉格朗日插值,观察插值函数是否收敛于原函数。