

第3章

离散傅里叶变换 (DFT)

离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)是数字信号处理课程两大知识点之一。本章首先介绍周期序列的离散傅里叶级数,从离散傅里叶级数引出离散傅里叶变换,随后介绍离散傅里叶变换的性质。本章还将介绍用于分析窄带信号的线性调频 z 变换(Chirp z -Transform, CZT)算法,以及时域采样定理的对偶定理——频域采样定理。

3.1 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)

200多年前,法国科学家傅里叶(Fourier)在研究热传导方程时提出“任何周期函数都可以表示成正弦函数和余弦函数之和的形式”,这即为傅里叶级数的雏形。傅里叶当时并没有严格证明该结论成立的条件,后面经过柯西(Cauchy)、泊松(Poisson),尤其是狄利克雷(Dirichlet)和黎曼(Riemann)等人的努力,才逐渐给出了傅里叶级数收敛的严格证明,从而开创了数学物理学的新时代。

对于级数的概念我们并不陌生,在高等数学中已经学习过幂级数、泰勒级数和麦克劳林级数等。本章将从离散傅里叶级数(Discrete Fourier Series, DFS)出发,引出离散傅里叶变换的概念。

3.1.1 离散傅里叶级数的定义

在“信号与系统”课程中已经学习过周期信号的傅里叶级数,即连续时间傅里叶级数(Continuous Time Fourier Series, CTFS),在此简要回顾。如果周期信号 $x(t)$ 满足狄利克雷条件,那么该周期信号就能分解为三角形式的傅里叶级数,即

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega_0 t + b_k \sin k\Omega_0 t) \quad (3.1.1)$$

其中, $k=1,2,3,\dots$, $\Omega_0=2\pi/T$ 表示基波频率,简称基频; T 为信号周期; a_0 、 a_k 、 b_k 分别表示信号 $x(t)$ 的直流分量、余弦分量和正弦分量的幅度,可由三角函数信号集的正交性计算:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (3.1.2)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\Omega_0 t dt \quad (3.1.3)$$

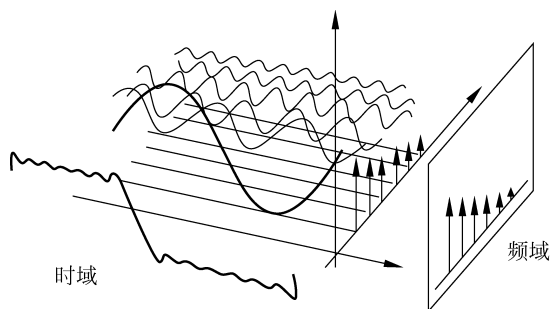
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\Omega_0 t dt \quad (3.1.4)$$

其中, (t_0, t_0+T) 表示时长为 T 的任意区间。

图3.1.1给出了周期矩形信号的CTFS示意图。从时域的视角来观察,周期矩形信号是由无穷多余弦信号叠加而成的;从频域的视角来观察,周期信号映射成了无穷多的线段,这些线段的位置表示余弦信号的频率,线段的长度表示余弦信号的幅度。

根据欧拉公式,也可以将 $x(t)$ 分解为指数形式的傅里叶级数,即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (3.1.5)$$



二维码

图 3.1.1 从时域和频域同时观察信号(CTFS)

其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, X_k 表示傅里叶复系数,

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3.1.6)$$

设 $\tilde{x}(n)$ 表示周期为 N 的周期序列, 即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN) \quad (3.1.7)$$

其中, r 为任意整数, 周期 N 为使等式成立的最小正整数。

采用类似的方法, 也可以将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 表示为离散傅里叶级数的形式, 即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\omega_0 kn} \quad (3.1.8)$$

其中, $\omega_0 = 2\pi/N$ 表示基频, $\tilde{X}(k)$ 表示第 k 次谐波的系数。

为便于学习和比较, 表 3.1 将连续时间周期信号和离散时间周期信号的傅里叶级数进行了归纳。

表 3.1 CTFS 和 DTFS

连续/离散时间 傅里叶级数	周期	基频	基频序 列/信号	k 次 谐波	备 注
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$	T	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	$e^{j\Omega_0 t}$	$e^{jk\Omega_0 t}$	无穷多个谐波分量
$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\omega_0 kn}$	N	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{j\omega_0 n}$	$e^{jk\omega_0 n}$	N 个独立谐波分量

接下来计算 k 次谐波的系数 $\tilde{X}(k)$, 这需要用下面的关系式

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } r \end{cases} \quad (3.1.9)$$

将式 (3.1.8) 两端同时乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ 后在 $n=0 \sim n=N-1$ 的周期内求和, 代入式 (3.1.9) 的结论可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rN} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] \\
&= \tilde{X}(r)
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

将变量 r 替换为 k , 可得 k 次谐波的系数 $\tilde{X}(k)$ 的计算公式如下

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{3.1.11}$$

式(3.1.11)表示时域到频域的变换,称为离散傅里叶级数的正变换,用 $\text{DFS}[\cdot]$ 表示;式(3.1.8)表示频域到时域的变换,称为离散傅里叶级数的反变换,用 $\text{IDFS}[\cdot]$ 表示。DFS 和 IDFS 的关系如下:

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.12}$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.13}$$

$\tilde{X}(k)$ 也是一个以 N 为周期的周期序列,即

$$\tilde{X}(k+rN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k) \tag{3.1.14}$$

因为 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 都是离散周期序列,只需要 N 个样本即可代表 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的形状,其余部分均是这 N 个样本的重复出现,故只需要研究它们一个完整周期的样本值即可。

3.1.2 离散傅里叶级数的性质

DFS 的性质与 CTFT、DTFT 的性质有许多相似之处,可以对照参考,但最大的不同点在于:DFS 的时域序列 $\tilde{x}(n)$ 和频域序列 $\tilde{X}(k)$ 都是周期的,在 DFS 性质的证明和使用中要格外注意其周期特性,故 DFS 的性质中加以“周期”二字来强调,如“周期移位”“周期卷积”。

1. 线性

$$\text{DFS}[a\tilde{x}(n) + b\tilde{y}(n)] = a\tilde{X}(k) + b\tilde{Y}(k) \tag{3.1.15}$$

其中, $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$ 都是周期为 N 的周期序列,它们各自的 DFS 分别为 $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{Y}(k)$, a 和 b 为任意常数。

2. 周期时频翻转

$$\text{DFS}[\tilde{x}(-n)] = \tilde{X}(-k) \tag{3.1.16}$$

证明:

$$\text{DFS}[\tilde{x}(-n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=0}^{-(N-1)} \tilde{x}(m) e^{j\frac{2\pi}{N}km}$$

因为 $\tilde{x}(m)$ 与 $e^{j\frac{2\pi}{N}km}$ 都是以 N 为周期的, 即

$$\sum_{m=0}^{-(N-1)} \tilde{x}(m) e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \tilde{X}(-k)$$

因此

$$\text{DFS}[\tilde{x}(-n)] = \tilde{X}(-k)$$

3. 周期时移特性

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = e^{j\frac{2\pi}{N}km} \tilde{X}(k) \quad (3.1.17)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}km} \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} \end{aligned}$$

因为 $\tilde{x}(i)$ 与 $e^{-j\frac{2\pi}{N}ki}$ 都是以 N 为周期的, 即

$$\sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} = \tilde{X}(k)$$

因此

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = e^{j\frac{2\pi}{N}km} \tilde{X}(k)$$

4. 周期频移特性

$$\text{DFS}[e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} \tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+r) \quad (3.1.18)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFS}[e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} \tilde{x}(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+r)n} \\ &= \tilde{X}(k+r) \end{aligned}$$

5. 对偶性

$$\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N\tilde{x}(-k) \quad (3.1.19)$$

证明: 根据 IDFS 变换公式可得

$$N\tilde{x}(-n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

上式等号右边与 DFS 变换公式相同, 故将变量 n 和 k 互换,

$$N\tilde{x}(-k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

把上式与 DFS 变换关系结合起来对照, 可以看出周期序列 $\tilde{X}(n)$ 的 k 次谐波系数为 $N\tilde{x}(-k)$, 也就是说 $\tilde{X}(n)$ 和 $N\tilde{x}(-k)$ 为 DFS 变换关系对, 即 $\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N\tilde{x}(-k)$ 。

6. 周期共轭对称特性

$$\text{DFS}[\tilde{x}^*(n)] = \tilde{X}^*(-k) \quad (3.1.20)$$

证明: 对于复序列 $\tilde{x}(n)$, 其共轭序列 $\tilde{x}^*(n)$ 的 DFS 为

$$\text{DFS}[\tilde{x}^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right]^* = \tilde{X}^*(-k)$$

同理可以证明

$$\text{DFS}[\tilde{x}^*(-n)] = \tilde{X}^*(k)$$

进一步可证

$$\text{DFS}[\text{Re}(\tilde{x}(n))] = \text{DFS}\left[\frac{1}{2}(\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(n))\right] = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)] = \tilde{X}_e(k)$$

其中把 $\tilde{X}_e(k)$ 称作 $\tilde{X}(k)$ 的共轭偶对称分量(下标 e 表示 even)。

同理可证,

$$\text{DFS}[\text{Im}(\tilde{x}(n))] = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)] = \tilde{X}_o(k)$$

其中把 $\tilde{X}_o(k)$ 称作 $\tilde{X}(k)$ 的共轭奇对称分量(下标 o 表示 odd)。

式(3.1.21)归纳了周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的实(虚)部与其 DFS 系数共轭偶(奇)对称分量的对偶关系。

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{x}(n) & = & \text{Re}[\tilde{x}(n)] & + & j\text{Im}[\tilde{x}(n)] & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \tilde{X}(k) & = & \tilde{X}_e(k) & + & \tilde{X}_o(k) & & \end{array} \quad (3.1.21)$$

式(3.1.22)归纳了周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的共轭偶(奇)对称分量与其 DFS 系数实(虚)部的对偶关系。

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{x}(n) & = & \tilde{x}_e(n) & + & \tilde{x}_o(n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \quad (3.1.22)$$

$$\tilde{X}(k) = \operatorname{Re}[\tilde{X}(k)] + j\operatorname{Im}[\tilde{X}(k)]$$

其中 $\tilde{x}(n)$ 的共轭偶对称分量为 $\tilde{x}_e(n)$, 共轭奇对称分量为 $\tilde{x}_o(n)$, 定义如下

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2} [\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2} [\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)]$$

7. 时域周期卷积定理

若 $\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)$, 则

$$\tilde{y}(n) = \operatorname{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \quad (3.1.23)$$

证明:

$$\tilde{y}(n) = \operatorname{IDFS}[\tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

代入 $\tilde{X}_1(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$ 可得

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \cdot \tilde{X}_2(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{X}_2(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \end{aligned}$$

上式为两个周期序列的卷积, 故卷积结果也为周期的, 且求和只在一个周期上进行 ($m=0$ 到 $m=N-1$), 故把这种卷积称作周期卷积, 这与非周期序列的线性卷积不同。

8. 频域周期卷积定理

若 $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n)$, 则

$$\tilde{Y}(k) = \operatorname{DFS}[\tilde{y}(n)] = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}_1(r) \tilde{X}_2(k-r) \quad (3.1.24)$$

例 3.1 试计算周期序列 $x(n) = 4\cos(2.4\pi n) + 2\sin(3.2\pi n)$ 的 DTFS, 并画出一个周期内的幅度谱和相位谱。

解: 设余弦序列 $\cos(2.4\pi n)$ 的周期为 N_1 , 则

$$\cos[2.4\pi(n + N_1)] = \cos(2.4\pi n) = \cos(2.4\pi n + 2m\pi)$$

可得

$$N_1 = \frac{2\pi}{2.4\pi} m = \frac{5}{6} m$$

取 $m=6$ 可使 $\frac{5}{6}m$ 成为最小正整数,故余弦序列的周期为 $N_1=5$ 。

同理可得,正弦序列 $\sin(3.2\pi n)$ 的周期 $N_2=5$,取 N_1 和 N_2 的最小公倍数,可知整个序列 $x(n)$ 的周期为 $N=5$,基波频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = 0.4\pi$,周期序列的 $x(n)$ 的 DTFS 表达式为

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\omega_0 kn} \\ &= 0.2\tilde{X}(0) + 0.2\tilde{X}(1)e^{j0.4\pi n} + 0.2\tilde{X}(2)e^{j0.8\pi n} + 0.2\tilde{X}(3)e^{j1.2\pi n} + 0.2\tilde{X}(4)e^{j1.6\pi n} \end{aligned}$$

根据欧拉公式,序列 $x(n)$ 可以展开为

$$\begin{aligned} x(n) &= 4 \left[\frac{1}{2} (e^{j2.4\pi n} + e^{-j2.4\pi n}) \right] + 2 \left[\frac{1}{2j} (e^{j3.2\pi n} - e^{-j3.2\pi n}) \right] \\ &= 2e^{j2.4\pi n} + 2e^{-j2.4\pi n} - je^{j3.2\pi n} + je^{-j3.2\pi n} \end{aligned}$$

根据周期关系,如 $e^{j2.4\pi n} = e^{j(2.4\pi n - 2\pi n)} = e^{j0.4\pi n}$,可将上式改写如下

$$\begin{aligned} x(n) &= 2e^{j0.4\pi n} + 2e^{j1.6\pi n} - je^{j1.2\pi n} + je^{j0.8\pi n} \\ &= 2e^{j0.4\pi n} + je^{j0.8\pi n} - je^{j1.2\pi n} + 2e^{j1.6\pi n} \end{aligned}$$

将上式与 DTFS 表达式逐项对比可知,

$$\begin{cases} 0.2\tilde{X}(0) = 0 \\ 0.2\tilde{X}(1) = 2 \\ 0.2\tilde{X}(2) = j \\ 0.2\tilde{X}(3) = -j \\ 0.2\tilde{X}(4) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{X}(0) = 0 \\ \tilde{X}(1) = 10 \\ \tilde{X}(2) = 5j \\ \tilde{X}(3) = -5j \\ \tilde{X}(4) = 10 \end{cases}$$

图 3.1.2 给出了周期序列 DTFS 在一个周期内的幅度谱和相位谱。

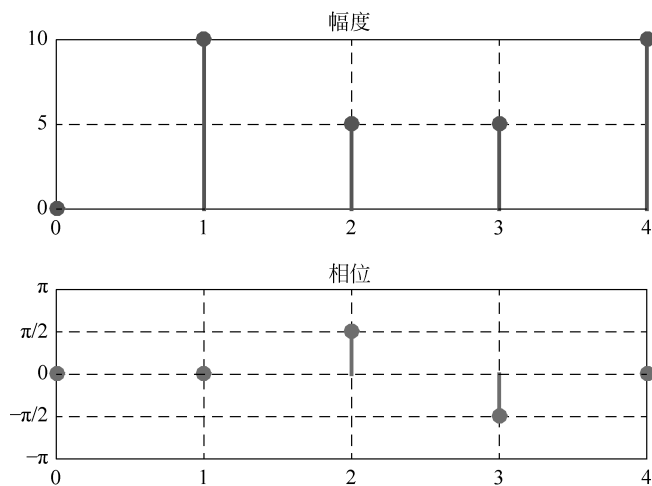


图 3.1.2 周期序列 DTFS 的幅度谱和相位谱(一个周期内)

为便于学习,表 3.2 归纳了离散傅里叶级数的性质。

表 3.2 离散傅里叶级数的性质

周期序列(周期 N)	DFT 系数(周期 N)	备 注
$a\tilde{x}(n)+b\tilde{y}(n)$	$a\tilde{X}(k)+b\tilde{Y}(k)$	线性
$\tilde{x}(-n)$	$\tilde{X}(-k)$	周期时频翻转
$\tilde{x}(n+m)$	$e^{j\frac{2\pi}{N}km}\tilde{X}(k)$	周期时移特性
$e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}\tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k+r)$	周期频移特性
$\tilde{X}(n)$	$N\tilde{x}(-k)$	对偶性
$\tilde{x}^*(n)$	$\tilde{X}^*(-k)$	周期共轭对称特性
$\tilde{x}^*(-n)$	$\tilde{X}^*(k)$	
$\tilde{x}_e(n)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)]$	$\text{Re}[\tilde{X}(k)]$	
$\tilde{x}_o(n)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)]$	$j\text{Im}[\tilde{X}(k)]$	
$\text{Re}[\tilde{x}(n)]$	$\tilde{X}_e(k)=\frac{1}{2}[\tilde{X}(k)+\tilde{X}^*(-k)]$	
$j\text{Im}[\tilde{x}(n)]$	$\tilde{X}_o(k)=\frac{1}{2}[\tilde{X}(k)-\tilde{X}^*(-k)]$	
$\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$	$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$	时域周期卷积定理
$\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{X}_1(r)\tilde{X}_2(k-r)$	频域周期卷积定理

3.2 有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)

3.2.1 离散傅里叶变换的定义

3.1 节学习了用离散傅里叶级数表示周期序列的方法,这一方法同样适用于有限长序列。对于一个长度为 N 的有限长序列 $x(n)$,可以把它看作是周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期,即

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & 0\leq n\leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n\end{cases}\quad (3.2.1)$$

如果引入矩形序列 $R_N(n)$,式(3.2.1)还可以写为

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)\quad (3.2.2)$$

也可以把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 的周期延拓,即

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+kN) \quad (3.2.3)$$

为方便起见,把第一个周期($n=0 \sim n=N-1$)称作 $\tilde{x}(n)$ 的“主值区间”,或者称 $x(n)$ 为 $\tilde{x}(n)$ 的“主值序列”,即主值区间上的序列。

此时引入符号 $((n))_N$ 表示 n 对 N 求余数,令 $n=n_1+n_2N$, 其中 $0 \leq n_1 \leq N-1$, 则 n_1 为 n 对 N 的余数,记作 $n_1 = ((n))_N$ 。这样,式(3.2.3)又可以写为

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \quad (3.2.4)$$

同理,有限长序列 $X(k)$ 也可以看作是周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列,即

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3.2.5)$$

从式(3.1.12)和式(3.1.13)可以看出,DFS 和 IDFS 的求和只限定在主值区间,故变换关系也完全适用于主值序列 $x(n)$ 和 $X(k)$ 。因此,可得到有限长序列离散傅里叶变换(DFT)及其反变换(IDFT)的定义如下

$$\text{正变换} \quad X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (3.2.6)$$

$$\text{反变换} \quad x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (3.2.7)$$

式(3.2.6)和式(3.2.7)构成了离散傅里叶变换对关系,已知 $x(n)$ 就能唯一地确定 $X(k)$, 同样,已知 $X(k)$ 也就唯一地确定了 $x(n)$ 。但是应该记住:在 DFT 关系中,有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的,即 DFT 具有隐含的周期特性。

也可以在 DFT 运算中引入矩形序列来代替对 k (或 n) 取值范围的声明,即

$$\text{正变换} \quad X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \quad (3.2.8)$$

$$\text{反变换} \quad x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(n) \quad (3.2.9)$$

3.2.2 离散傅里叶变换与其他变换的关系

1. DFT 与 DFS: 主值序列与周期延拓

DFT 具有隐含的周期特性,也就是在 DFT 的讨论中,有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的。对于 DFT 的任何处理,都是先把有限长序列进行周期延拓,再做相应的处理,然后取主值序列后得到处理结果。

换句话说,在频域,DFT 结果是 DFS 的主值序列,DFS 是 DFT 的周期延拓;在时域,IDFT 结果是 IDFS 的主值序列,IDFS 是 IDFT 的周期延拓,具体关系如图 3.2.1 所示。

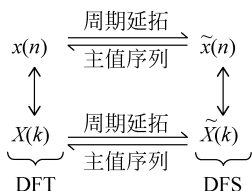


图 3.2.1 DFT 与 DFS 的关系

2. DFT 与 DTFT: 频域均匀采样

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列为 $x(n)$, 根据式(2.3.1)可知 $x(n)$ 的 DTFT 结果为

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.2.10)$$

将上式与式(3.2.6)对比可知, 当 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 时, DFT 与 DTFT 结果相同, 即

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2.11)$$

$X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的周期函数, 式(3.2.11)的结论表明: $X(k)$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 在频域上的一个周期内的均匀采样, 采样间隔为 $2\pi/N$ 。这个关系意味着信号在频域也成为了有限长的离散序列, 这就为计算机分析信号频谱打开了通道。

3. DFT 与 z 变换: 单位圆上均匀采样

$X(e^{j\omega})$ 是单位圆上的 z 变换, 结合式(3.2.10)可知, DFT 是 z 变换在单位圆上的均匀采样, 即

$$X(k) = X(z) \Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2.12)$$

需要注意的是, 在学习和应用 DFT 与其他变换的关系时, 都不要忘记了 DFT 隐含的周期特性, 即强调 k 的取值范围为 $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。如果 k 的取值为所有整数, 那么 DFT 的结果就会周期性出现(即周期延拓): 对于 DTFT 而言, 相当于在若干个 2π 周期内均匀采样, 得到的结果为 DFS; 对于 z 变换而言, 相当于在单位圆上一圈又一圈地逆时针均匀采样, 得到的结果仍然是 DFS。

图 3.2.2 给出了有限长序列 DFT 与其他变换关系的示意图, 可从“三横两纵”来理解有限长序列 DFT 的推导过程。

“三横”指三种变换关系, 即 DTFT、DFS 和 DFT。仍然可用 2.3.2 节的两句话来深刻理解这三种变换关系, 即“傅里叶变换是时域到频域的桥梁”以及“一个域的离散对应另外一个域的周期延拓”。对于 N 点的 DFT 变换关系对, 在时域和频域都是 N 点长的样本序列, 其周期特性被取主值操作给“隐含”了。

“两纵”指在时、频两个域同时进行的操作。在时域经过了“均匀采样→周期延拓→取主值序列”操作, 对应于在频域进行的“周期延拓→均匀采样→取主值序列”操作。通过 DFT 变换, 从时域的 N 点样本序列出发, 得到频域的 N 点样本序列。

例 3.2 试计算 N 点长矩形序列的 DTFT 和 DFT 结果, 并画出它们的幅度谱。

解: 根据定义, N 点长矩形序列的 DTFT 结果为

$$W_N(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[R_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}}$$

令 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$, 即可得 DFT 结果为

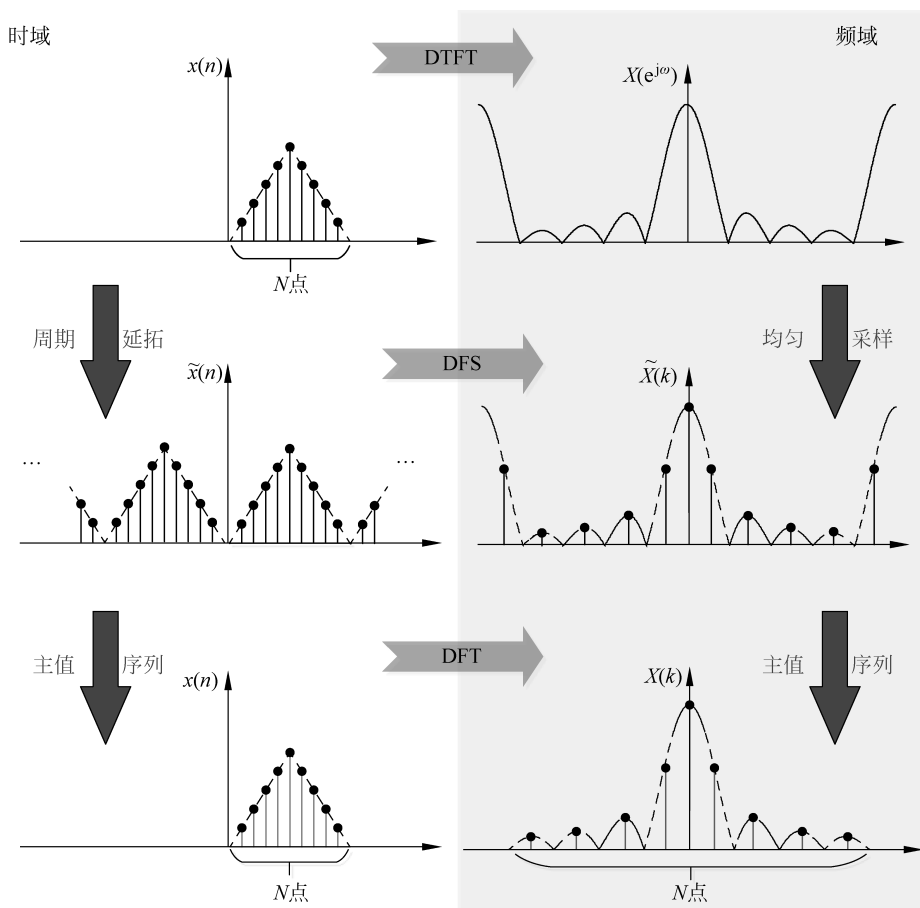


图 3.2.2 DFT 与其他变换关系示意图(“三横两纵”)



二维码

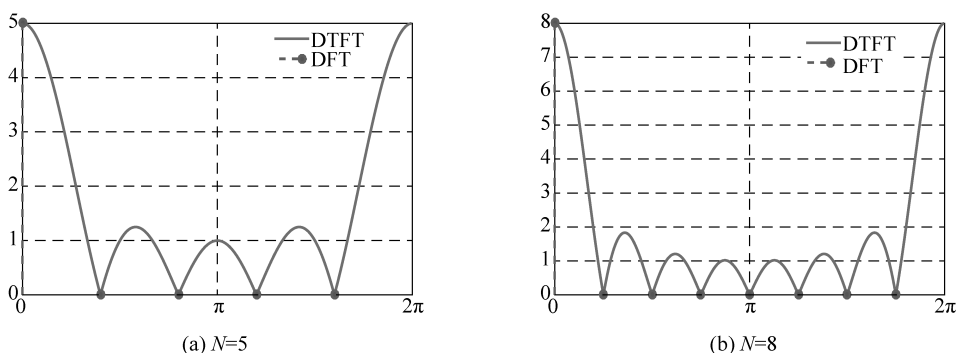
$$W_N(k) = W_N(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = \frac{1 - e^{-j\omega 2k\pi}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases}$$

N 点矩形序列的 DTFT 和 DFT 幅度谱如图 3.2.3 所示,从图中可以形象地看出, DFT 是 DTFT 在 $[0, 2\pi)$ 区间上的均匀采样。DTFT 的包络形状与长度 N 是密切相关的: N 取值越大,幅度谱中的“小山包”(旁瓣)数量越多,宽度越窄;如果 N 值确定了, DTFT 的包络形状就确定了。

当 DTFT 的包络形状确定以后, DFT 就只能在这个确定的包络上进行均匀采样。从图 3.2.3 还可以看出,除了 $k=0$ 这点, DFT 在其他采样点上都很不幸地采到了零值,这个结果与理论分析也是吻合的。这些零值都是有意义的,它们如实反映了 DTFT 包络的变化规律。

如果想让 DFT 在其他非零值的时刻进行采样,需要提高频域采样的密集程度,可以通过在数据后面补零的方式来实现,下一个例题将进行简要介绍。

例 3.3 在 N 点长矩形序列后面补 M 个零,再计算补零后序列的 DTFT 和 DFT 结果,并画出它们的幅度谱。

图 3.2.3 N 点矩形序列的 DTFT 和 DFT 幅度谱

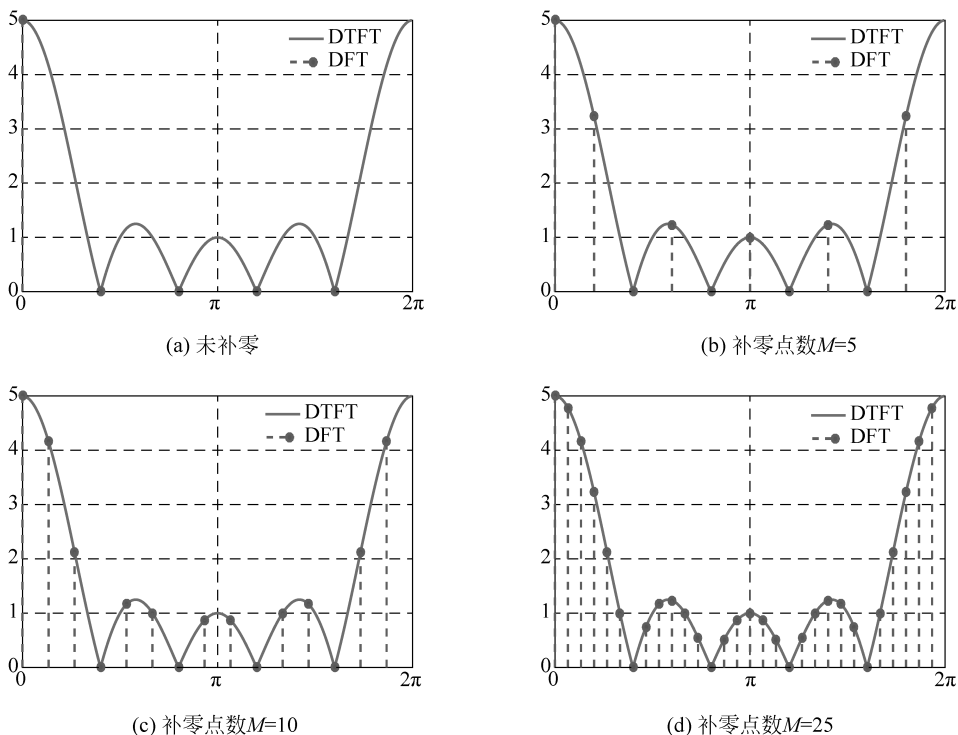
解: 在 N 点矩形序列后面补 M 个零, 得到 $N+M$ 点的数据序列, 根据 DTFT 的定义可得

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N+M-1} R_N(n) e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = W_N(e^{j\omega})$$

与例 3.2 的结果相比较可以看出, 补零前后 DTFT 的表达式是相同的。此时令 $\omega = \frac{2\pi}{M+N}k$, 即可得补零后序列的 DFT 结果

$$X(k) = W_N(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{M+N}k}, \quad k=0, 1, \dots, M+N-1$$

为便于比较, 设 $N=5$, 图 3.2.4 给出了不同补零点数的 DTFT 和 DFT 幅度谱。

图 3.2.4 $N=5$ 点矩形序列补零后的 DTFT 和 DFT 幅度谱

从图 3.2.4 看出,数据长度 N 决定了 DTFT 包络形状,而 DFT 变换点数 $N+M$ 决定了采样密集程度。也就是说,只要矩形序列长度确定以后($N=5$),DTFT 的包络随即固定下来,此时在序列后面补零,只会增加采样的密集程度,但并不能改变 DTFT 的包络形状。

3.2.3 圆周移位与圆周卷积

DFT 中的运算与 CTFT、DTFT 和 DFS 中的运算有所不同,根本原因就在于 DFT 具有隐含的周期特性,在此介绍 DFT 的两个典型运算,即圆周移位和圆周卷积。

1. 圆周移位

圆周移位在有的教材上也称作“循环移位”,可以用“先周期延拓,再线性移位,最后取主值序列”来概括圆周移位。

N 点长序列 $x(n)$ 的 m 点圆周移位 $x_m(n)$ 是指:以 N 为周期对 $x(n)$ 进行周期延拓,得到周期序列 $\tilde{x}(n)$,将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 进行 m 点线性移位,然后取主值区间($n=0$ 到 $n=N-1$)上的序列值,其定义如下

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (3.2.13)$$

式中得到的 $x_m(n)$ 仍然是一个 N 点长的序列。 $x((n+m))_N$ 表示周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的 m 点线性移位, m 为正表示左移, m 为负表示右移,即

$$x((n+m))_N = \tilde{x}(n+m) \quad (3.2.14)$$

线性移位、周期移位和圆周移位这三种“移位”是有区别的。线性移位可以在时间轴上任意移动;周期移位移动的对象是周期序列 $\tilde{x}(n)$,也可以在时间轴上任意移动;圆周移位移动的对象是有限长序列 $x(n)$,最终受到主值区间的“约束”。

例 3.4 计算有限长序列 $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}_0$ 的圆周移位结果 $x_3(n)$ 。

解: 用图示法来分析圆周移位会更加方便。

图 3.2.5 给出了序列圆周移位的 3 个过程,即“周期延拓→线性移位→取主值序列”,可以看出, $x_3(n)$ 表示将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 左移 3 位后的主值序列,即

$$x_3(n) = \{4, 5, 1, 2, 3\}_0$$

从图 3.2.5 还可以看出,当对周期序列线性移位时,从主值区间一端移出一段序列值,同时也从主值区间的另外一端移进来相同的一段序列值。借用数据结构中“先进先出”的概念,可以用“左进右出,右进左出”来描述圆周移位的过程,还可以把这个过程想象成在圆周上旋转的过程,这也就是圆周移位中“圆周”二字的缘由,如图 3.2.6 所示。

2. 圆周卷积

设 $x_1(n)$ 为 N_1 点长序列($0 \leq n \leq N_1-1$), $x_2(n)$ 为 N_2 点长序列($0 \leq n \leq N_2-1$),则 $y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n)$ 表示 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 L 点圆周卷积,定义如下

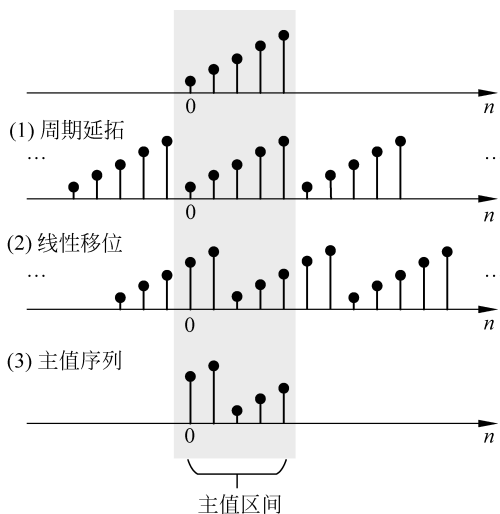


图 3.2.5 序列的圆周移位过程



二维码

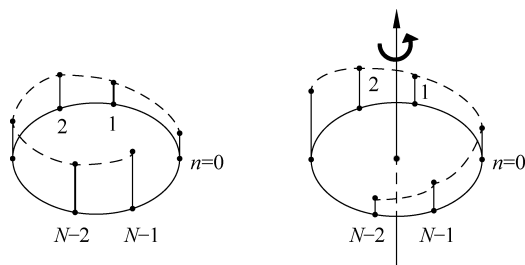


图 3.2.6 圆周移位示意图

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \\
 &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_2(m) x_1((n-m))_L \right] R_L(n)
 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

其中要求圆周卷积点数 $L \geq \max(N_1, N_2)$ 。一般用符号 $\textcircled{L}$ 表示 L 点圆周卷积,有的教材也把圆周卷积称作“循环卷积”。

式(3.2.15)中的 $x_2((n-m))_L$ 或 $x_1((n-m))_L$ 只在主值区间取值,表明 L 点圆周卷积是以 L 为周期的周期卷积的主值序列。 L 的取值不同,则延拓的周期就不同,取主值序列得到的圆周卷积结果也就不同。

圆周卷积运算中是圆周移位,线性卷积运算中是线性移位,满足一定条件时,可以用圆周卷积来计算线性卷积,这部分内容将在第4章进行讲解。

例 3.5 计算序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4\}_0$ 和 $x_2(n) = \{3, 2, 1\}_0$ 的 L 点圆周卷积,分别取为 $L=4$ 和 $L=6$ 。

解: 可以按照“周期延拓→周期卷积→取主值序列”的步骤,根据定义来计算圆周卷积,结果如下

$$x_1(n) \textcircled{4} x_2(n) = \{14, 12, 20, 14\}_0$$

$$x_1(n) \textcircled{6} x_2(n) = \{3, 8, 14, 20, 11, 4\}_0$$

也可以利用 MATLAB 函数 `cconv` 计算两个序列的圆周卷积。如图 3.2.7 所示, 从 $L=4$ 开始, 随着 L 取值的不同, 圆周卷积结果也随之改变, 从 $L=6$ 之后, 圆周卷积结果在后面简单补零即可, 具体原因将在第 4 章进行讲解。

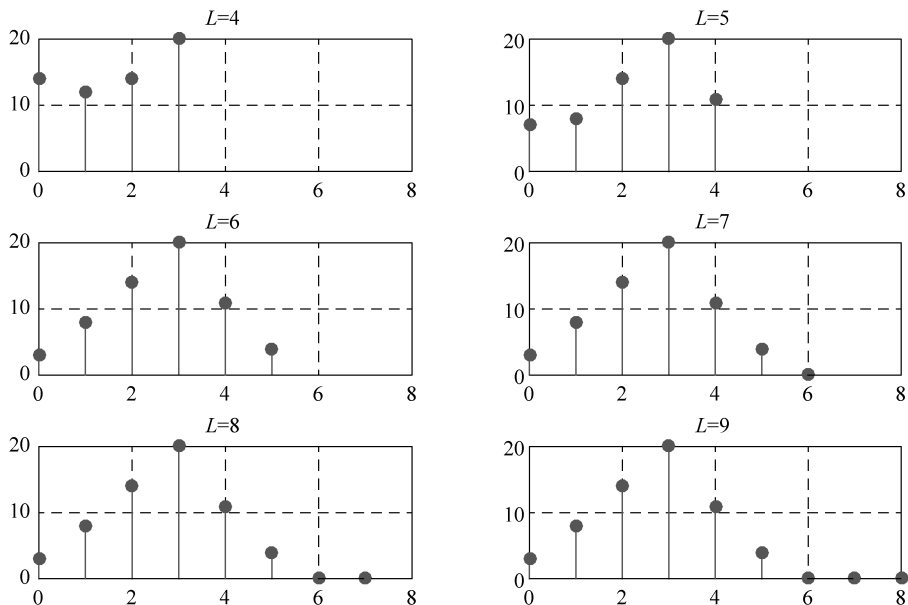


图 3.2.7 L 点圆周卷积

3.3 离散傅里叶变换的性质

DFT 在时域和频域都是周期的, 其性质一般加以“周期”二字强调, 如“周期移位”“周期卷积”; DFT 在时域和频域都是有限长的, 通过对 DFS 取主值序列获得, 具有隐含的周期特性, 其性质一般加以“圆周”二字强调, 如“圆周移位”“圆周卷积”等。除此之外, DFT 和 DFS 的性质是非常相似的, 可以对照参考。

1. 线性

$$\text{DFT}[ax(n) + by(n)] = aX(k) + bY(k) \quad (3.3.1)$$

其中, $x(n)$ 和 $y(n)$ 都是 N 点长序列, 各自的 DFT 分别为 $X(k)$ 和 $Y(k)$, a 和 b 为任意常数。

如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的点数不相等, 设 $x(n)$ 为 N_1 点 ($0 \leq n \leq N_1$), $y(n)$ 为 N_2 点 ($0 \leq n \leq N_2$), 如果对 $ax(n) + by(n)$ 进行 DFT, 则需要分别对 $x(n)$ 和 $y(n)$ 进行补零, 补到都是 N 点长序列, 且 $N \geq \max(N_1, N_2)$ 。

2. 圆周时频翻转

$$\text{DFT}[x((-n))_N R_N(n)] = X((-k))_N R_N(k) \quad (3.3.2)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x((-n))_N R_N(n)] &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \\ &= \left[\sum_{n=-(N-1)}^0 x((n))_N e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \\ &= X((-k))_N R_N(k) \end{aligned}$$

该性质表明,有限长序列在时域的圆周翻转,对应着频域的圆周翻转。圆周时域翻转是指:有限长序列由圆周对称中心在时域进行翻转后取主值序列,对称中心为 $n=0$ 或 $n=N/2$,根据定义可知, $x(n)$ 的圆周时域翻转序列为 $x((-n))_N R_N(n)$ 。

根据圆周时域翻转的定义,表达式 $x((-n))_N R_N(n)$ 和 $x(N-n)$ 是相同的(注意:两种表达式都是在主值区间上取值),故圆周时频翻转性质还可写成

$$\text{DFT}[x(N-n)] = X(N-k) \quad (3.3.3)$$

为便于大家理解,表 3.3 给出了有限长序列 $x(n)$ 圆周时域翻转前后对照表。

表 3.3 圆周时频翻转对照表

n	0	1	2	...	$N-2$	$N-1$
$x(n)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	...	$x(N-2)$	$x(N-1)$
$x((-n))_N R_N(n)$ 或 $x(N-n)$	$x(0)$	$x(N-1)$	$x(N-2)$	...	$x(2)$	$x(1)$

圆周时域翻转后的序列不能写成 $x(-n)$,这是因为 DFT 中的“移位”“翻转”等操作都是在圆周上进行的,观测/取值区间必须在主值区间上, $x(-n)$ 显然不在主值区间范围内。

3. 圆周时移特性

$$\text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} X(k) R_N(k) \quad (3.3.4)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{p=m}^{N+m-1} x((p))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}k(p-m)} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \sum_{p=m}^{N+m-1} x((p))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \sum_{p=0}^{N-1} x((p))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kp} \\
&= e^{j\frac{2\pi}{N}mk} X(k) R_N(k)
\end{aligned}$$

圆周时移特性表明,序列在时域上的圆周移位,在频域中只引入了一个与频率 $\left(\omega_k = \frac{2\pi}{N}k\right)$ 呈正比的线性相移因子,对幅度是没有影响的。

4. 圆周频移特性

$$\text{DFT}[e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}x(n)] = X((k+r))_N R_N(k) \quad (3.3.5)$$

证明:

$$\begin{aligned}
\text{DFT}[e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}x(n)] &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \\
&= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+r)n} \right] R_N(k) \\
&= X((k+r))_N R_N(k)
\end{aligned}$$

序列的圆周频移特性和圆周时移特性是对偶的。圆周频移特性表明,序列在频域上的圆周移位,等效于在时域的调制(相乘),因此该特性也称作“调制特性”。

5. 对偶性

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k) \quad (3.3.6)$$

证明: 根据 IDFT 公式可得

$$Nx(N-n) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}k(N-n)} \right] R_N(n) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(n)$$

上式等号右边与 DFT 变换公式相同,故将变量 n 和 k 互换,

$$Nx(N-k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k)$$

把上式与 DFT 变换关系结合起来对照,可以看出有限长序列 $X(n)$ 的 k 次谐波系数为 $Nx(N-k)$,即 $X(n)$ 和 $Nx(N-k)$ 为 DFT 变换关系对,故 $\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k)$ 。

要形成对偶关系,时频变量必须都是离散的或者都是连续的才行。故在 CTFT、DFS 和 DFT 中都存在对偶关系,在 DTFT 中无对偶关系,这是因为 DTFT 中时域变量是离散的,频域变量是连续的,无法交换变量,当然就不可能存在对偶关系。

6. 圆周共轭对称特性

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k) \quad (3.3.7)$$

证明:

$$\begin{aligned}
 \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} R_N(k) \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right]^* R_N(k) \\
 &= X^*((-k))_N R_N(k) \\
 &= X^*((N-k))_N R_N(k) \\
 &= X^*(N-k)
 \end{aligned}$$

结合圆周时频翻转特性,亦可证明

$$\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k)$$

进一步可证

$$\text{DFT}[\text{Re}(x(n))] = \text{DFT}\left[\frac{1}{2}(x(n) + x^*(N-n))\right] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{\text{ep}}(k)$$

其中把 $X_{\text{ep}}(k)$ 称作 $X(k)$ 的圆周共轭偶对称分量,与 DFS 中的共轭偶对称分量 $\tilde{X}_e(k)$ 相比,多了一个下标 p(p 表示周期 periodic)。

同理可证,

$$\text{DFT}[\text{jIm}(x(n))] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{\text{op}}(k)$$

其中把 $X_{\text{op}}(k)$ 称作 $X(k)$ 的圆周共轭奇对称分量。

式(3.3.8)归纳了有限长序列 $x(n)$ 实(虚)部与其 DFT 的圆周共轭偶(奇)对称分量的对偶关系。

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \text{Re}[x(n)] + \text{jIm}[x(n)] \\
 \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 X(k) &= X_{\text{ep}}(k) + X_{\text{op}}(k)
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

式(3.3.9)归纳了有限长序列 $x(n)$ 圆周共轭偶(奇)对称分量与其 DFT 实(虚)部的对偶关系。

$$\begin{aligned}
 x(n) &= x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n) \\
 \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 X(k) &= \text{Re}[X(k)] + \text{jIm}[X(k)]
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

其中, $x(n)$ 的圆周共轭偶对称分量为 $x_{\text{ep}}(n)$, 圆周共轭奇对称分量为 $x_{\text{op}}(n)$, 定义如下

$$\begin{aligned}
 x_{\text{ep}}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \\
 x_{\text{op}}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]
 \end{aligned}$$

7. 时域圆周卷积定理

设 $x_1(n)$ 为 N_1 点长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$), $x_2(n)$ 为 N_2 点长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$),

取 $L \geq \max(N_1, N_2)$, 将序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别补零到 L 点长序列, 再分别做 L 点的 DFT, 结果分别为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 。若

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) \quad (3.3.10)$$

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = X_1(k)X_2(k) \quad (3.3.11)$$

证明:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{L-1} \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L R_L(n) \right] e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{L-1} x_2((n-m))_L e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) e^{-j\frac{2\pi}{L}km} X_2(k) \\ &= X_1(k)X_2(k) \end{aligned}$$

证明的倒数第 2 步用到了圆周时移特性。该定理表明, 两个有限长序列在时域的圆周卷积, 等价于在频域的相乘运算。

8. 频域圆周卷积定理

有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的定义同上, 将它们分别补零到 L 点长序列, 再分别做 L 点的 DFT, 结果分别为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 。若

$$y(n) = x_1(n)x_2(n) \quad (3.3.12)$$

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{L} X_1(k) \textcircled{L} X_2(k) \quad (3.3.13)$$

该定理表明, 两个有限长序列在时域的相乘运算, 等价于在频域的圆周卷积(提醒: 乘法运算中有一个比例因子)。

9. DFT 形式下的帕塞瓦尔定理

对长度 N 的有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$, N 点 DFT 结果分别为 $X(k)$ 和 $Y(k)$, 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad (3.3.14)$$

若 $x(n)=y(n)$, 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3.3.15)$$

若 $x(n)=y(n)$ 且都是实序列, 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^2(k) \quad (3.3.16)$$

DFT 形式下的帕塞瓦尔定理与其他形式的帕塞瓦尔定理类似, 都是表明信号能量在

时域计算的结果与频域计算的结果是相等的,只不过 DFT 形式下的帕塞瓦尔定理,时域和频域都是离散且有限长的。

例 3.6 设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是 N 点长的实序列,试只用一次 N 点的 DFT 运算就给出各自的 DFT 结果。

解: 可利用 DFT 的圆周共轭对称特性,仅用一次 N 点的 DFT 运算计算出两个 N 点实序列的 DFT 结果,从而减少运算量。在此设 $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$, $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$ 。

首先,将 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 组合为一个 N 点的复序列,即

$$y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

故

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \text{DFT}[x_1(n) + jx_2(n)] \\ &= \text{DFT}[x_1(n)] + j\text{DFT}[x_2(n)] \\ &= X_1(k) + jX_2(k) \end{aligned}$$

根据式(3.3.8)可知,

$$X_1(k) = Y_{\text{ep}}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$$

同理

$$X_2(k) = \frac{1}{j}Y_{\text{op}}(k) = \frac{1}{2j}[Y(k) - Y^*(N-k)]$$

也就是说,利用一次 DFT 运算求出 N 点复序列的 DFT 结果,再按照上式即可求出两个 N 点长实序列的 DFT 结果。

例 3.7 设 $x(n)$ 为 $N=8$ 点的有限长实序列, $x(n) = \{1, 2, 3, -2, 4, 0, 1, 3\}_0$, $X(k)$ 为 N 点 DFT 结果,试计算以下表达式的值。

$$(1) X(0) \quad (2) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \quad (3) \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

解: (1) 根据 DFT 的公式可得

$$X(0) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \Big|_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$\text{故 } X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 1 + 2 + 3 - 2 + 4 + 0 + 1 + 3 = 12。$$

$$(2) \text{ 根据 IDFT 公式 } x(n) = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(n), \text{ 令 } n=0 \text{ 可得}$$

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

$$\text{故 } \sum_{k=0}^{N-1} X(k) = Nx(0) = 8 \times 1 = 8。$$

(3) 根据 DFT 形式下的帕塞瓦尔定理可知,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 &= N \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \\ &= 8 \times [1^2 + 2^2 + 3^2 + (-2)^2 + 4^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2] \\ &= 352\end{aligned}$$

为便于学习,表 3.4 归纳了离散傅里叶变换的性质。

表 3.4 离散傅里叶变换的性质

N 点序列	N 点 DFT	备 注
$ax(n) + by(n)$	$aX(k) + bY(k)$	线性
$x((-n))_N R_N(n)$ 或 $x(N-n)$	$X((-k))_N R_N(k)$ 或 $X(N-k)$	圆周时频翻转
$x((n+m))_N R_N(n)$	$e^{j\frac{2\pi}{N}mk} X(k)$	圆周时移特性
$e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} x(n)$	$X((k+r))_N R_N(k)$	圆周频移特性
$X(n)$	$Nx(N-k)$	对偶性
$x^*(n)$	$X^*(N-k)$	圆周共轭对称特性
$x^*(N-n)$	$X^*(k)$	
$x_{\text{ep}}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)]$	$\text{Re}[X(k)]$	
$x_{\text{op}}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)]$	$j\text{Im}[\tilde{X}(k)]$	
$\text{Re}[x(n)]$	$X_{\text{ep}}(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)]$	
$j\text{Im}[x(n)]$	$X_{\text{op}}(k) = \frac{1}{2} [X(k) - X^*(N-k)]$	
$x_1(n) \textcircled{\text{L}} x_2(n)$	$X_1(k) X_2(k)$	时域圆周卷积定理
$x_1(n) x_2(n)$	$\frac{1}{L} X_1(k) \textcircled{\text{L}} X_2(k)$	频域圆周卷积定理
$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$		DFT 形式下的帕塞瓦尔定理

3.4 频域采样定理

一个域的离散,对应另外一个域的周期延拓,这个关系是对偶的。在时域采样,频域会产生周期延拓,延拓的周期就是采样率;在频域采样,时域也会产生周期延拓,延拓的周期就是频域采样点数。

2.1 节介绍了时域采样定理与插值重构,本节将学习频域采样定理与插值重构。

3.4.1 频域采样

频域采样定理：设 M 点有限长序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 上作 N 点均匀采样，得到频域样本 $X_N(k)$ 。只有当 $N \geq M$ 时，才能由频域样本值无失真地恢复原时域序列 $x(n)$ 。

可以根据 DFT 与其他变换的关系来理解频域采样定理，图 3.4.1 给出了“频域采样，时域周期延拓”的示意图。

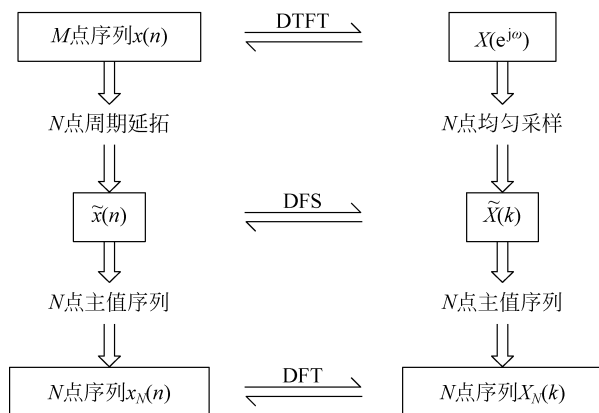


图 3.4.1 频域采样，时域周期延拓

对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 上作 N 点均匀采样，对应着时域的周期延拓，延拓周期为 N ，得到周期序列 $\tilde{x}(n)$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + kN) \quad (3.4.1)$$

在主值区间 $n=0 \sim n=N-1$ 取值，可得时域序列 $x_N(n)$ 为

$$x_N(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + kN) R_N(n) \quad (3.4.2)$$

很显然，并不能保证 N 点的 $x_N(n)$ 与 M 点的原始序列 $x(n)$ 完全相同。只有当采样点数 $N \geq M$ 时，在时域周期延拓的过程中才不会发生混叠现象，此时才能用 N 点的 $x_N(n)$ 去完全（无失真）恢复出 M 点的 $x(n)$ 。

图 3.4.2 所示为时域周期延拓过程中未发生混叠的情况，此时频域采样点数大于原始序列长度。与原始序列 $x(n)$ 相比， $x_N(n)$ 在后端多出来 $(N-M)$ 个零。

图 3.4.3 所示为时域周期延拓过程中发生混叠的情况，此时频域采样点数小于原始序列长度。只有在 $M-N \leq n \leq N-1$ 范围内未发生混叠，在这个区间内，才有 $x_N(n) = x(n)$ 。

例 3.8 设 $x(n)$ 为 $M=11$ 点的三角形序列，即

$$x(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 5 \\ -n + 10, & 6 \leq n \leq 10 \end{cases}$$



二维码

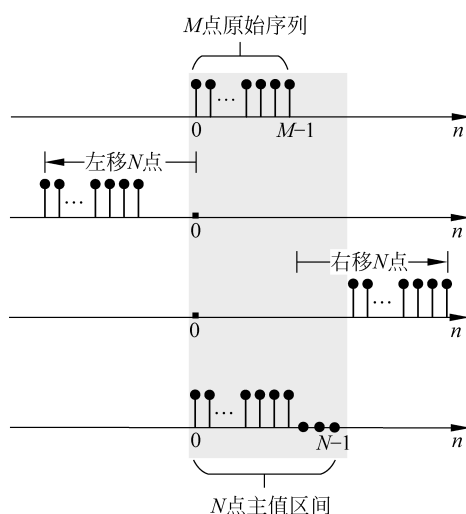


图 3.4.2 时域周期延拓(未混叠)



二维码

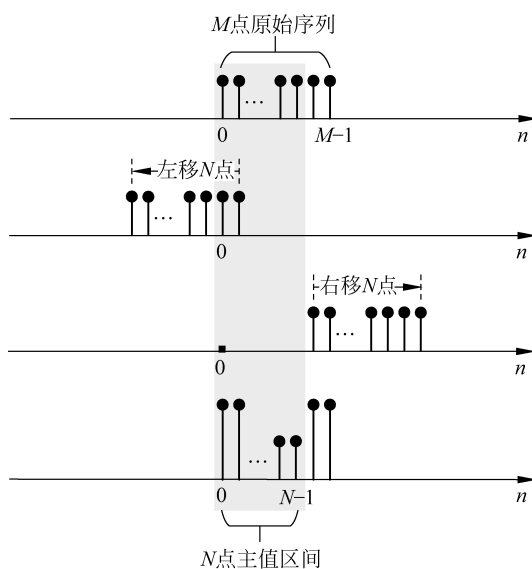


图 3.4.3 时域周期延拓(发生混叠)

若对 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换结果 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 上作 N 点均匀采样, 得到频域采样值 $X_N(k)$, 试计算序列 $x_N(n) = \text{IDFT}[X_N(k)]$, 分别选 $N=15$ 和 $N=8$ 。

解: 可根据图 3.4.2 和图 3.4.3 的过程来直接计算序列 $x_N(n)$ 。

$N=15$, 频域采样点数大于原始序列长度, 此时时域周期延拓的过程无混叠, 在 $x(n)$ 后面直接补 $N-M=4$ 个零即可。

$$x_{15}(n) = \underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}}_{\text{原始序列}} \underbrace{\{0, 0, 0, 0\}}_{\text{补零}}$$

$N=8$, 频域采样点数小于原始序列长度, 在时域周期延拓时会发生混叠, 且恢复出

来的序列长度为8。

$$x_8(n) = \underbrace{\{2, 2, 2, 3\}}_{\text{混叠部分}} \underbrace{\{4, 5, 4, 3\}}_{\text{未混叠部分}}_0$$

如果严格按照题目要求,即首先计算 $X(e^{j\omega})$,再对 $X(e^{j\omega})$ 进行 N 点均匀采样得到频域样本值 $X_N(k)$,最后计算 $x_N(n) = \text{IDFT}[X_N(k)]$,但这个过程过于烦琐,其实可以利用 MATLAB 来编程求解本题。MATLAB 中无 DTFT 函数(计算机不可能给出连续结果),只能借助 DFT 函数来实现。在编程实现中,需要先对 M 点序列 $x(n)$ 进行补零操作,然后对补零序列进行 DFT 运算,从 DFT 的离散输出中均匀抽取 N 个样本值,具体实验流程如图 3.4.4 所示,序列恢复结果如图 3.4.5 所示。

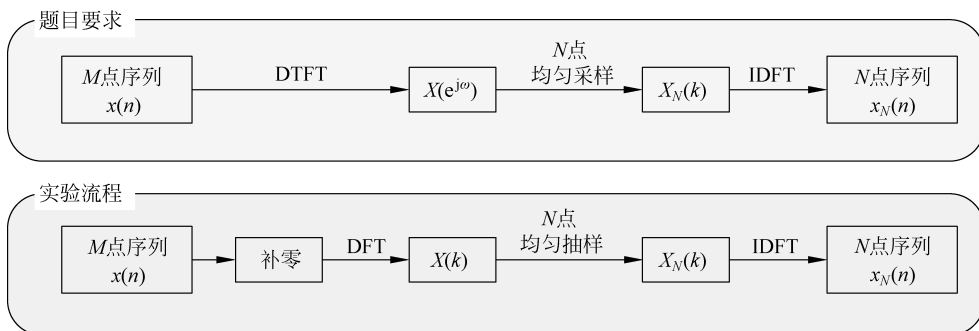


图 3.4.4 例 3.8 实验流程

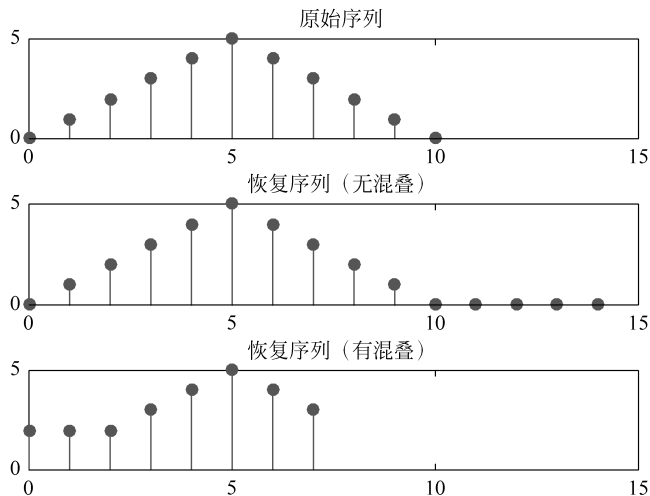


图 3.4.5 序列恢复结果

3.4.2 频域插值重构

频域插值重构与时域插值重构的基本思路是一致的,都是利用有限个采样值来恢复之前的连续函数。所谓频域插值重构,就是通过采样插值公式,由 N 个频域采样值 $X_N(k)$

来恢复出连续频率函数,如果频域采样过程满足频域采样定理要求,就可以无失真地恢复出采样前的 $X(e^{j\omega})$ 或 $X(z)$ 。

可由 z 变换的计算过程推导频域样本值 $X_N(k)$ 与 $X(z)$ 的关系。

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

将上式整理可得,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \Phi_k(z) \quad (3.4.4)$$

其中,把 $\Phi_k(z)$ 称为插值函数,

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \quad (3.4.5)$$

代入 $z = e^{j\omega}$, 可得 $X_N(k)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的关系

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \Phi_k(e^{j\omega}) \quad (3.4.6)$$

此时插值函数为 $\Phi_k(e^{j\omega})$

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}}$$

根据欧拉公式可得

$$\begin{aligned} \Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{-j[\omega(N-1)/2 + k\pi/N]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin[N(\omega/2 - k\pi/N)]}{\sin(\omega/2 - k\pi/N)} e^{jk\pi(N-1)/N} e^{-j(N-1)\omega/2} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

令 $\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$, 可以进一步化简插值函数为

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.4.9)$$

故由频域样本值 $X_N(k)$ 插值重构 $X(e^{j\omega})$ 的公式为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.4.10)$$

可以看出,频域插值重构的过程与时域插值重构的过程非常相似,如图 3.4.6 所示(可对照图 2.1.6 时域插值重构过程)。 $X(e^{j\omega})$ 是由频域样本值 $X_N(k)$ 对各个频率采样点的插值函数 $\Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$ 加权后求和得到。在每个频率采样点 $\omega = 2\pi k/N$ 上,

插值函数取值为 1, 保证了输出结果在各个频率采样点取值与采样值完全相等, 即 $X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = X_N(k)$ 。在频率采样点之间, 输出结果的波形由各插值函数波形叠加而成。

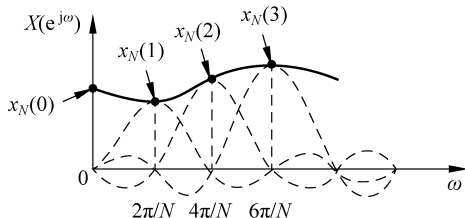


图 3.4.6 频域插值重构示意图

3.5 线性调频 z 变换(CZT)

从 3.2 节可知, DFT 是 DTFT 在 $[0, 2\pi)$ 区间上的均匀采样, 也是 z 变换在单位圆上的均匀采样, 但在许多实际应用中, 对整个 $[0, 2\pi)$ 区间(单位圆)进行均匀采样是没必要的。比如窄带信号, 其信号特征集中在某一频段, 如果采用 DFT 算法, 对整个 $[0, 2\pi)$ 区间均匀采样后只有短短一截数据有价值, 而且为了提高计算分辨率, 必须提高窄带内的采样点数, 但 DFT 的运算方式决定了它必须以“撒胡椒面”的方式对整个 $[0, 2\pi)$ 区间均匀采样, 因此用 DFT 分析窄带信号是非常“不划算”的。此外, 有时也对 z 平面上非单位圆上的采样值感兴趣, 比如语音信号处理中常常需要知道极点所在处的复频率, 如果极点距单位圆较远, 此时 DFT 就很难计算这种极点所在处的复频率。

本节将要介绍的线性调频 z 变换(Chirp z -Transform, CZT)算法就可以克服 DFT 的上述局限性, 可以在一个更一般的周线上求 z 变换, 在 z 平面上更加灵活地采样, 可以不必均匀采样, 也可以不必在单位圆上采样。

对于一个 N 点长的序列 $x(n)$, z_k 表示 z 平面上任意位置,

$$z_k = AW^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.5.1)$$

这里的 M 可以是任意整数(不必和 N 相等)。

参数 A 表示起始点位置, 其中 A_0 和 θ_0 分别表示采样起始点处的矢量半径和相角,

$$A = A_0 e^{j\theta_0} \quad (3.5.2)$$

参数 W 可以表示为

$$W = W_0 e^{j\phi_0} \quad (3.5.3)$$

式中, W_0 表示螺旋线的伸展率。随着 k 的增加, $W_0 > 1$ 表示螺旋线内旋, $W_0 < 1$ 表示螺旋线外旋, $W_0 = 1$ 表示是半径为 A_0 的一段圆弧。 ϕ_0 表示相邻样本点之间的角度差, $\phi_0 > 0$ 表示螺旋线是逆时针旋转, $\phi_0 < 0$ 表示螺旋线是顺时针旋转。

采样点 z_k 的轨迹如图 3.5.1 所示。如果 $M = N$, $A = A_0 e^{j\theta_0} = 1$, $W = W_0 e^{j\phi_0} =$

$e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, z_k 均匀分布在单位圆上, 此时的 CZT 算法就简化为 DFT 算法。

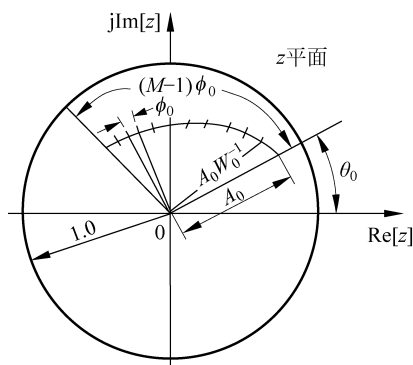


图 3.5.1 CZT 在 z 平面上采样的螺旋线轨迹

更一般地, $X(z)$ 在 z_k 处的采样值为

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.5.4)$$

代入 $z_k = A W^{-k}$ 可得

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.5.5)$$

根据布鲁斯坦等式

$$nk = \frac{1}{2} [n^2 + k^2 - (k-n)^2] \quad (3.5.6)$$

可知 $X(z_k)$ 可以通过求 $g(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积, 再乘以 $W^{\frac{k^2}{2}}$ 得到

$$\begin{aligned} X(z_k) &= W^{\frac{k^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \\ &= W^{\frac{k^2}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

其中

$$g(n) = x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \quad (3.5.8)$$

$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}} \quad (3.5.9)$$

CZT 算法的流程如图 3.5.2 所示, 输入的是 N 点有限长序列 $x(n)$, 输出的是 z 平面上的 M 个采样值 $X(z_k)$ 。由于 $h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}}$ 是一个频率随时间 n 线性增长的复指数序列, 在雷达系统中这种信号称为线性调频信号 (这种信号听起来像鸟叫声, 英文是 Chirp Signal), 故这种变换称作线性调频 z 变换, 常用于雷达和声呐信号的脉冲压缩处理。

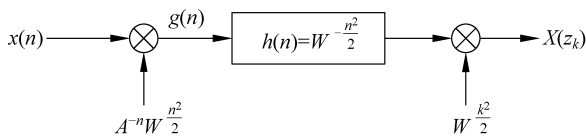


图 3.5.2 CZT 算法流程图

在图 3.5.2 中, $g(n)$ 与 $h(n)$ 线性卷积的过程可由圆周卷积实现, 而圆周卷积的过程可由 DFT 算法来解决(第 4 章内容), 而 DFT 算法还可由 FFT 算法来快速实现(第 5 章内容), 因此整个 CZT 算法流程完全可以由 FFT 算法快速实现。

习题

1. 图 T3.1 中所示的序列周期为 4, 请确定该序列的 DFS 系数。

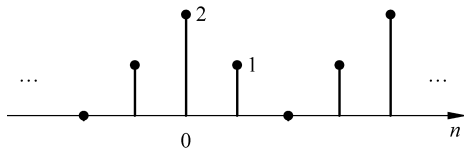


图 T3.1

2. 如果 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的周期序列, 则它也是周期为 $2N$ 的周期序列。将 $\tilde{x}(n)$ 看作周期为 N 的周期序列, 用 $\tilde{X}_1(k)$ 表示其 DFS 系数, 再将 $\tilde{x}(n)$ 看作周期为 $2N$ 的周期序列, 用 $\tilde{X}_2(k)$ 表示其 DFS 系数, 试用 $\tilde{X}_1(k)$ 来表示 $\tilde{X}_2(k)$ 。

3. 周期序列 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$ 的周期分别为 N 和 M , 且

$$\tilde{w}(n) \cdot \tilde{x}(n) = \tilde{y}(n)$$

- (1) 试证明 $\tilde{w}(n)$ 也是周期序列, 且周期为 MN 。
- (2) 设周期序列 $\tilde{x}(n)$ 、 $\tilde{y}(n)$ 和 $\tilde{w}(n)$ 的 DFS 系数分别为 $\tilde{X}(k)$ 、 $\tilde{Y}(k)$ 和 $\tilde{W}(k)$, 试用 $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{Y}(k)$ 来表示 $\tilde{W}(k)$ 。

4. 计算以下序列的 DFT。

- (1) $\{1, 1, -1, -1\}_0$
- (2) $\{1, j, -1, -j\}_0$
- (3) $x(n) = c^n R_N(n)$
- (4) $x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) R_N(n)$

5. 请给出以下序列的 DFT 闭合表达式。

- (1) $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$
- (2) $x(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$
- (3) $x(n) = \sin(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$
- (4) $x(n) = n R_N(n)$

6. 已知序列 $x(n)$ 如下所示, 请计算其 10 点和 20 点的 DFT 结果。

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 6 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

7. 已知序列 $x(n)$ 的 DFT 结果如下, 求其 IDFT 结果, 其中 m 为正整数, 且 $0 < m < N/2$ 。

$$(1) X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\theta}, & k = m \\ \frac{N}{2} e^{-j\theta}, & k = N - m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases} \quad (2) X(k) = \begin{cases} -\frac{N}{2} j e^{j\theta}, & k = m \\ \frac{N}{2} j e^{-j\theta}, & k = N - m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases}$$

8. 已知序列 $x(n)$ 的 DFT 为 $X(k)$, 请用 $X(k)$ 表示下面序列的 DFT 结果, 其中 $0 < m < N$ 。

$$(1) x(n) \cos\left(\frac{2\pi m}{N} n\right) \quad (2) x(n) \sin\left(\frac{2\pi m}{N} n\right)$$

9. 已知 $N=7$ 点的实序列的 DFT 在偶数时刻的取值如下所示, 求该序列在奇数时刻的取值。

$$X(0) = 4.8, X(2) = 3.1 + j2.5, X(4) = 2.4 + j4.2, X(6) = 5.2 + j3.7$$

10. 已知序列 $x(n)$ 的长度为 N , 其 N 点 DFT 结果为 $X(k)$, 试证明:

(1) 若 $x(n)$ 为奇对称, 即 $x(n) = -x(N-1-n)$, 则 $X(0) = 0$;

(2) 若 $x(n)$ 为偶对称, 即 $x(n) = x(N-1-n)$, 设 N 为偶数, 则 $X(N/2) = 0$ 。

11. 已知序列 $x(n) = 0.5^n u(n)$, 该序列的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 。另外有一序列 $y(n)$, 在 $0 \leq n \leq 9$ 之外均有 $y(n) = 0$, 且 $y(n)$ 的 10 点 DFT 等于 $X(e^{j\omega})$ 在其主值区间内等间隔取 10 个采样点, 请计算 $y(n)$ 。

12. 已知序列 $x(n)$ 的长度为 N , 其 N 点 DFT 为 $X(k)$ 。现将 $x(n)$ 的长度扩大 r 倍, 得到长度为 rN 的有限长序列 $y(n)$, 其 DFT 为 $Y(k)$,

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

请用 $X(k)$ 来表示 $Y(k)$ 。

13. 已知序列 $x(n)$ 的长度为 N , 其 N 点 DFT 为 $X(k)$ 。现将 $x(n)$ 的每两点之间补 $r-1$ 个零值, 得到长度为 rN 的有限长序列 $y(n)$, 设 $y(n)$ 的 DFT 为 $Y(k)$

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = kr, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

请用 $X(k)$ 来表示 $Y(k)$ 。

14. 设 $x(n) = \{1, 2, 4, 3, 0, 5\}_0$, 其 $N=6$ 点的 DFT 为 $X(k)$, 试确定以下表达式的值。

$$(1) X(0) \quad (2) X(3) \quad (3) \sum_{k=0}^5 X(k) \quad (4) \sum_{k=0}^5 |X(k)|^2$$

15. 已知 $X(k)$ 为实序列 $x(n)$ 的 8 点 DFT, 且已知 $X(0)=6, X(1)=4+j3, X(2)=-3-j2, X(3)=2-j, X(4)=4$, 试确定以下表达式的值。

$$(1) x(0) \quad (2) x(4) \quad (3) \sum_{n=0}^7 x(n) \quad (4) \sum_{n=0}^7 |x(n)|^2$$

16. 已知 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X(k)$, 即 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$ 。 $X(k)$ 本身也是一个 N 点长序列, 如果对 $X(k)$ 继续进行 DFT 运算, 得到序列 $Y(k)=\text{DFT}[X(k)]$, 请给出 $x(n)$ 与 $Y(k)$ 的关系。

17. 已知 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X(k)$, 新序列 $x_1(n)$ 是由 $x(n)$ 重复出现 M 次得到, 即对 $x(n)$ 作 M 个周期延拓, $x_1(n)$ 的 DFT 为 $X_1(k)$, 请用 $X(k)$ 来表示 $X_1(k)$ 。

18. 已知 N 点序列 $x(n)$, N 点 DFT 为 $X(k)$, 请给出下列序列的 DFT。

$$(1) x(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$(2) (-1)^n x(n), \quad 0 \leq n \leq N-1, N \text{ 为偶数}$$

$$(3) x(2n), \quad 0 \leq n < N/2, N \text{ 为偶数}$$

$$(4) g(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq 2N-1$$

$$(5) g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq 2N-1$$

$$(6) g(n) = \begin{cases} x(n) + x(n+N/2), & 0 \leq n < N/2, n \text{ 为偶数} \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

19. 已知序列 $x(n)=a^n u(n), 0 < a < 1$, 其 z 变换为 $X(z)$, 对 $X(z)$ 在单位圆上进行 N 等分采样, 采样值为 $X(k)=X(z)|_{z=W_N^{-k}}$, 请给出有限长序列 $\text{IDFT}[X(k)]$ 的表达式。

20. 请用 MATLAB 编程复现例 3.3 中图 3.2.4 的结果(提示: MATLAB 中无 DTFT 函数, 可通过补零用 DFT/FFT 函数来近似)。

21. 请用 MATLAB 编程复现例 3.5 中图 3.2.7 的结果(提示: 可用函数 `cconv` 计算圆周卷积)。

22. 请用 MATLAB 编程复现例 3.8 中图 3.4.5 的结果(提示: 可用函数 `ifft` 计算 IDFT)。

23. 设线性调频信号 $x(t)$ 的模型如下

$$x(t) = \cos \left[2\pi \left(\frac{1000-10}{5} t + 10 \right) t \right], \quad 0 \leq t \leq 5$$

(1) 请绘制该信号的时域波形。

(2) 请绘制该信号频率特性随着时间变化的关系(提示: 可用函数 `chirp` 产生线性调频信号, 用函数 `spectrogram` 来演示频率与时间的变化关系, 即短时傅里叶变换)。

24. 设信号 $x(t) = 3\cos(2\pi f_1 t) + 5\cos(2\pi f_2 t)$, 其中 $f_1 = 431.1\text{Hz}$, $f_2 = 433.3\text{Hz}$, $f_s = 2048\text{Hz}$, 试分别用 DFT 算法和 CZT 算法分析该信号的频谱, 其中 DFT 点数取 4096, CZT 点数取 1024, $A = \exp(j2\pi \cdot 428/f_s)$, $W = \exp(-j2\pi \cdot 0.01/f_s)$ (提示: 可用函数 `czt` 计算线性调频 z 变换)。

25. 已知信号 $x(n)$ 为

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试用 CZT 算法计算该信号前 30 点的频谱, 假设 $A_0 = 0.8$, $W_0 = 1.2$, $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, $\phi_0 = \frac{2\pi}{20}$ 。