

结构动力学仿真

结构动力学是力学的一个分支,是研究结构在动态荷载作用下的结构内力和位移的计 算理论及方法。动态载荷可以是周期变化荷载、冲击荷载、随机荷载。在动态载荷作用下, 结构的响应(如位移、应力、应变等)往往也是随时间变化的。在动力学问题求解时必须考虑 惯性力,有时还要考虑阻尼的作用,并且运动方程中的参数是时间的函数。求解动力学的基 础是如下运动微分方程组:

$$[M]\ddot{x}(t) + [C]\dot{x}(t) + [K]x(t) = f(t)$$
(5.1)

当可以忽略惯性力和阻尼的作用时,微分方程组可简化为代数方程组:

$$[K]x(t) = f(t)$$
(5.2)

若参数不随时间变化,则方程组进一步简化为:

$$[K]x = f \tag{5.3}$$

显然,静力学问题是动力学问题的特例,动力学分析比静力学分析更复杂,并且更消耗 计算资源,故对于运动非常缓慢,以至于可以忽略惯性力和阻尼影响的准静态问题,工程中 经常采用静力学分析代替动力学分析。

动力学分析研究的是结构的动态性能,它包含激励(输入)、系统(传递特性)和响应(输 出)三要素。激励可以是力、力矩、位移等;系统要求是线性的,满足叠加原理且保证经过系 统后输出频率等于输入频率;系统响应包括系统的位移、速度、加速度、应力、应变等。从这 三要素来分类,结构动力学问题可以分为3类:

(1) 已知激励和系统传递特性,求响应,称为响应预测。

(2) 已知输入和输出,求系统传递特性,称为系统辨识。

(3)已知系统传递特性和响应,求激励,称为载荷识别。

系统的传递特性取决于结构的质量和刚度分布,是结构本身的特性,也称为固有属性。 固有属性包括固有频率、模态振型、模态阻尼、模态质量、模态刚度等。当外部激励对系统质 量和刚度分布影响可以忽略时,系统的传递特性与输入、输出无关,但当外部激励使质量和 刚度分布发生变化时,结构的固有属性也会发生变化。由此可见,固有属性的分析是动力学 分析的基础,可以通过模态分析得到这些固有属性,这也是为什么做动力学分析前往往先进 行模态分析。

5.1 模态分析

模态分析的传统定义为将线性常系数振动微分方程组中的物理坐标,经过线性变换,转换为模态坐标,使方程组解耦。原坐标空间称为物理空间,新的解耦坐标空间称为模态空间,其中坐标变换矩阵称为模态矩阵,每列称为模态振型。

对于一个真实的结构件,当它由密度均匀的(质量矩阵为对称矩阵)各项同性材料(刚度 矩阵为对称矩阵)构成时,微分方程组(5.1)中x(t)的各个分量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是 耦合的,将该方程组两边均左乘一个正交矩阵P(x),将原M、C、K 矩阵由对称矩阵变为对 角矩阵(仅对角线元素为非零,其余均为零)时,方程组中x(t)的各个分量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 解耦,这在数学上实际是一个广义特征值问题。特征值为固有频率的平方,特征向量 为模态振型。从特征值定义 $Ax = \lambda x$ (当广义矩阵为单位矩阵时)定性分析其物理意义:向 量x 左乘一矩阵相当于对x进行旋转和拉伸,若想将x 长度拉伸 λ 倍,显然当x沿着自身 方向拉伸时,所需驱动力最小。现实问题中这其实就是共振现象,x 代表共振时的变形模 式, λ 代表拉伸系数,即振动频率。

如图 5.1 所示,物理模型分解为模态振型的直观解释:一根静止的悬臂梁,由 3 个关键

节点组成,该悬臂梁可以假想为由3个弯曲梁叠加 后构成的。当梁的自由度增加时,可以想象它由更 多弯曲梁叠加而成;当梁由连续质点构成时,为无 穷多自由度构成,截取前n个自由度代替无穷自由 度称为模态截取,各自由度称为阶次,用n阶模态 叠加后的结果代替实际模型的分析方法称为模态 叠加法。因为各阶模态彼此正交,相互独立,既不 受其他模态影响,也不能被其他模态线性表示,显 然所取的阶次越多,精度越高。



图 5.1 模态振型直观解释

5.2 ANSYS 中模态分析模块的用法

模态叠加法采用的是线性叠加原理,所以分析时不考虑任何非线性行为,当设置了非线性行为时,如接触非线性,系统在实际求解时也会按最初始状态,取其刚度和阻尼矩阵所构成的线性系统进行求解,在 ANSYS 中不同接触类型在进行模态分析时对应的实际接触行为如表 5.1 所示。

控轴米刑	热力兴力和		模态分析			
按應失望	靜力子力勿	Initially Touching	Inside Pinball Region	Outside Pinball Region		
Bonded	Bonded	Bonded	Bonded	Free		
No Separation	No Separation	No Separation	No Separation	Free		

表 5.1 接触在模态分析时对应的实际接触类型

控轴米刑	盐 力受公析		模态分析	
按應天空	时力子力加	Initially Touching	Inside Pinball Region	Outside Pinball Region
Rough	Rough	Bonded	Free	Free
Frictionless	Frictionless	No Separation	Free	Free
Frictional	Frictional	$\eta = 0$, No Separation;	Free	Free
		$\eta > 0$, Bonded		

5.2.1 自由模态分析

当对结构本身动力学特性进行研究时,不对结构施加载荷。当结构处于不同的约束状态时,结构的刚度也不同。当结构的6个自由度均自由时,所对应的模态称为自由模态,自 由模态的前6阶的固有频率为0,表明结构存在刚性运动,针对自由模态,我们要通过非0 的固有频率来研究结构的各阶模态振型。

【例 5.1】 阶梯轴的自由模态分析



(1) 打开 Workbench, 在左侧 Toolbox 中双击 Modal 模块, 右击 Geometry, 选择 Import Geometry, 选择创建好的 shaft. x_t 模型, 双击进入 Mechanical 模块, 如图 5.2 所示。模态分析的界面与静力学很相似, 大部分操作也相同。

Eigenvalue Buckling	-		A					
@ Electric	1	35	Model		l			
Explicit Dynamics	2	4	Engineering Dat	a 🗸 .				
S Fluid Flow - Blow Molding (Polyflow)	3	ŭ	Carmahru	-	1			
Fluid Flow-Extrusion(Polyflow)		-	deonieu y	100	New SpaceClaim Geometry		ì –	
Fluid Flow (CFX)	4	W	Model	63	New DesignModeler Geometry		I .	
Fluid Flow (Fluent)	5	6	Setup			190	100	
Fluid Flow (Polyflow)	6	-	Solution	-	Import Geometry	•	1.00	Browse
Harmonic Acoustics	7	a	Results	124	Duplicate			shaft.SLDPRT
Marmonic Response	460			- 15	Transfer Data From New		-	allow providence
M Hydrodynamic Diffraction			Modal				P	shaft.x_t
Hydrodynamic Response					Transfer Data To New	•		shaft.SLDPRT
1C Engine (Fluent)				7	Update		-	
IC Engine (Forte)					Lindate Linctream Components		I .	
(F) Magnetostatic				100	opoate opsitieam components		I .	
NM Modal				1	Refresh		I .	
ET Model Acoustics					Reset		1	

图 5.2 将模型导入 Workbench

(2)将单位修改为 mm、kg、N、s制,材料保持默认的 Structural Steel。如图 5.3 所示,将网格的 Resolution 改为 7,其他选项保持默认值,进行网格划分。

Coordinate C	rtur a steel 5 ystem 5) 1/ress (Vone) sei Settings tion (A6) Solution Information	9
Display Style	Use Geometry Setting	-
Defaults		
Physics Preference	Mechanical	- 1
Element Order	Program Controlled	
Element Size	Default	
Sizing		
Use Adaptive Sizing	Yes	
Resolution	7	
Mesh Defeaturing	Ves	
Defeature Size	Default	
Transition	Fast	
Enon Annia Contor	Control	



图 5.3 网格划分

(3)如图 5.4 所示,在 Analysis Settings 中,将 Max Modes to Find 由默认的 6 修改为 20。若仅关心某一频率范围,可以将 Limit Search to Range 选项修改为 Yes 并设置频率范围,则消息窗仅输出设定范围内的固有频率。在 Output Controls 中可以设置 Stress、 Strain、Nodal Forces 等选项,如图 5.4 所示。单击 Solve 进行求解,求解完成后单击左侧 Solution,消息窗显示如图 5.5 所示。

D	etails of "Analysis Set	tings*	ņ
Ξ	Options		^
	Max Modes to Find	20	
	Limit Search to Range	No	
Ξ	Solver Controls		
	Damped	No	
	Solver Type	Program Controlled	
Ξ	Rotordynamics Contr	ols	
	Coriolis Effect	Off	
	Campbell Diagram	Off	
Ξ	Output Controls		
	Stress	No	
	Strain	No	
	Nodal Forces	No	
	Calculate Reactions	No	1
	General Miscellaneous	No	1
Ξ	Analysis Data Manage	ment	1
	Solver Files Directory	E:\ansystemp\WB_LIDAYONG_liday	1
	Future Analysis	None	¥

图 5.4 Analysis Settings



图 5.5 模态分析

(4)观察图 5.5 中前 6 阶频率可以看出,自由状态下,轴的前 6 阶频率接近于 0,表明存在 3 个平动和 3 个转动共 6 种刚性运动。右击 Select All,然后右击并选择 Create Mode Shape Results。再右击左侧 Solution,选择 Evaluate All Results,查看各阶模态振型,如

图 5.6 所示。



图 5.6 查看模态振型

第7阶模态振型如图 5.7 所示,可以选择图中红色箭头以便查看变形的动画。



图 5.7 第7阶模态振型

通过模态频率和模态振型,我们可以观察到6阶、7阶、8阶模态频率相同,振型均为单侧弯曲;9阶、10阶模态频率相同,振型均为S形弯曲,这表明轴具有对称的形状。第11阶模态振型为径向缩放,如图5.8所示。从依次升高的频率可以推断出对于该轴,弯曲刚度低于扭转刚度。

(5) 单击 Solution,可以在工具栏中选择添加形变、应力、应变等云图。注意云图左侧 图例中的数值没有意义,因为模态分析是经过坐标变换的,变换后的模态空间各基底向量是



图 5.8 第 11 阶模态

物理空间基底向量的旋转与拉伸,所以绝对数值没有意义,仅可以通过数值比较各量之间的 相对大小。

【例 5.2】 阶梯轴在支撑约束下的模态分析

(1) 对上述模型继续添加 Cylindrical Support(圆柱支撑)约束,选择如图 5.9 所示的高 亮显示的两个圆柱支撑面,并将 Tangential 选项设置为 Free,此时切向可以自由运动,以此 来模拟轴架在轴承上,并且轴承处于预紧状态下的工况,单击 Solve 进行求解。



🛱 4min





图 5.9 设置 Cylindrical Support

(2)大家可以对比一下自由状态和有约束情况下的固有频率和模态振型的变化,因为部分自由度做了约束,所以仅第1阶频率为0,它表明该轴可以沿着轴向方向自由转动。2 阶、3 阶弯曲模态频率大小不变,均为 3759Hz(因数值计算迭代误差等原因,忽略 0.2Hz 的误差),表明对于这根轴,轴承并不能增加弯曲刚度,这是因为 2 阶、3 阶模态振型是轴端最

Tal	bular Dat	a	10	10.	
	Mode	Frequency [Hz]	11	11.	
1	1.	0.	12	12.	
2	2.	3758.8	13	13.	
3	3.	3759.	14	14.	
4	4	10610	15	15.	
5	5.	10613	16	16.	
6	6	11775	17	17.	
7	7	18357	18	18.	
8	8	18759	19	19.	
0	0	18759	20	20.	

图 5.10 轴的各阶共振频率

细长段的弯曲,与是否存在轴承无关。4 阶、5 阶弯曲模态频率增加代表了轴承对弯曲刚度的 影响。对于该轴,当轴承刚度高于1 阶弯曲刚 度时,转子的共振频率取决于轴的1 阶频率,如 图 5.10 所示,该轴的2 阶频率为3758.8Hz,换 算成转速为225.528r/min,远超出转子的最高 工作转速,可以认为该转子为刚性转子。

5.2.2 模态参与因子及模态有效质量

对于低频响应,高阶模态影响很小,所以在处理实际问题时往往仅对前几阶模态进行分析,忽略更高阶模态的影响,对于一个实际问题我们应该取多少阶模态,一般有以下3个原则。

(1) 模态参与因子:模态参与因子计算公式如式(5.4)所示。

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \{\boldsymbol{\phi}_i^T\} \left[\boldsymbol{M} \right] \{ \boldsymbol{D} \} \tag{5.4}$$

其中 D 为某一方向的单位位移谱。如果某一方向计算出的 γ_i 值较大,表明该方向的模态 振型容易被该方向的激励激发。软件中我们一般通过查看某一模态参与因子与最大参与因 子的比来直观地评估某一模态的贡献。

(2) 模态有效质量:模态有效质量的表达式如式(5.5)所示。

$$M_{\text{eff},i} = \frac{\gamma_i^2}{\{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_i} = \gamma_i^2$$
(5.5)

在 ANSYS 中模态空间对质量进行归一化处理,故{\$\u03c9\)}^T[M]{\$\u03c9\)}_i=1。模态有效质量越大,与总质量的比值就越接近于1,与真实情况就越接近,我们可以通过该比值判断是否截取了足够多的阶次,一般建议该比值不小于0.8。

(3)关注的频率范围:当前两个条件都满足时,如果截取的阶次对应的频率仍未完全 覆盖感兴趣的频率范围,则需进一步扩大搜索范围。

模态参与因子及比值、模态有效质量及比值可以单击 Solution Information 获取,在信息列表中找到如图 5.11 所示的两种列表,第一种分别列出了 3 个平动、3 个转动的相关信息,只需感兴趣的方向满足模态参与系数和模态有效质量大于 0.8,第二种则是各方向模态 有效质量信息的汇总,两种是等效的。

5.2.3 预应力模态

固有频率和模态振型是结构的固有属性,仅取决于质量和刚度的分布,与输入/输出无

	THULL	Carrieron, Indion		Ditte		CUMULATIVE	RATTO EFF. MAS
MODE	FREQUENCY	PERIOD	PARTIC.FACTOR	RATIO	EFFECTIVE MASS	MASS FRACTION	TO TOTAL MASS
1	0.00000	0.0000	0.0000	0.000000	0.00000	0.00000	0.00000
2	3758.79	0.26604E-03	0.35509E-06	0.000017	0.126086E-12	0.208397E-09	0.166887E-09
3	3758.98	0.26603E-03	0.20125E-06	0.000009	0.404999E-13	0.275336E-09	0.536055E-10
4	10610.5	0.94246E-04	0.70767E-05	0.000333	0.500799E-10	0.830481E-07	0.662855E-07
5	10613.4	0.94220E-04	-0.69431E-05	0.000326	0.482061E-10	0.162724E-06	0.638054E-07
6	11774.5	0.84929E-04	0.13162E-06	0.000006	0.173249E-13	0.162753E-06	0.229311E-10
7	18356.6	0.54476E-04	-0.66378E-08	0.000000	0.440603E-16	0.162753E-06	0.583180E-13
8	18758.6	0.53309E-04	-0.62481E-05	0.000294	0.390386E-10	0.227276E-06	0.516713E-07
9	18759.0	0.53308E-04	-0.23373E-05	0.000110	0.546277E-11	0.236305E-06	0.723050E-08
10	20761.4	0.48166E-04	0.12351E-01	0.580606	0.152535E-03	0.252112	0.201895
11	23881.7	0.41873E-04	-0.72205E-04	0.003394	0.521353E-08	0.252121	0.690060E-05
12	23893.7	0.41852E-04	-0.96162E-05	0.000452	0.924705E-10	0.252121	0.122394E-06
13	24749.9	0.40404E-04	0.21272E-01	1.000000	0.452488E-03	1.00000	0.598911
14	30227.7	0.33082E-04	0.47203E-07	0.000002	0.222811E-14	1.00000	0.294912E-11
15	36300.8	0.27548E-04	0.32673E-06	0.000015	0.106755E-12	1.00000	0.141300E-09
16	38370.2	0.26062E-04	0.43502E-06	0.000020	0.189239E-12	1.00000	0.250476E-09
17	38401.5	0.26041E-04	-0.91061E-05	0.000428	0.829215E-10	1.00000	0.109754E-06
18	42219.9	0.23686E-04	-0.10243E-06	0.000005	0.104923E-13	1.00000	0.138876E-10
19	42220.0	0.23685E-04	0.56914E-07	0.000003	0.323915E-14	1.00000	0.428733E-11
20	42237.8	0.23675E-04	0.11837E-06	0.000006	0.140105E-13	1.00000	0.185443E-10
					0.605028F-03		0.800813

(a) 3个平动和3个转动的相关信息

							EFFECTIV	E MASS		
ODE	FREQUENCY	MODAL MASS	KENE	1	X-DIR	RATIO [®]	Y-DIR	RATIO _{\$}	Z-DIR	RATIC
1	0.000	0.3064E-03	0.000	1	0.000	0.00	0.1056E-17	0.00	0.1385E-17	0.0
2	3759.	0.3512E-04	9794.	1	0.1261E-12	0.00	0.1864E-05	0.25	0.7544E-04	9.9
3	3759.	0.3512E-04	9794.	1	0.4050E-13	0.00	0.7544E-04	9.99	0.1864E-05	0.2
4	0.1061E+05	0.2572E-03	0.5716E+06	1	0.5008E-10	0.00	0.1507E-04	1.99	0.4030E-03	53.34
5	0.1061E+05	0.2573E-03	0.5720E+06	1	0.4821E-10	0.00	0.4030E-03	53.34	0.1506E-04	1.9
6	0.1177E+05	0.4650E-04	0.1273E+06	1	0.1732E-13	0.00	0.2134E-12	0.00	0.3217E-12	0.0
7	0.1836E+05	0.1562E-03	0.1039E+07	1	0.4406E-16	0.00	0.1699E-14	0.00	0.1096E-11	0.0
8	0.1876E+05	0.4717E-04	0.3277E+06	1	0.3904E-10	0.00	0.7343E-06	0.10	0.2664E-04	3.5
9	0.1876E+05	0.4717E-04	0.3277E+06	1	0.5463E-11	0.00	0.2665E-04	3.53	0.7343E-06	0.1
10	0.2076E+05	0.6768E-04	0.5758E+06	1	0.1525E-03	20.19	0.1161E-12	0.00	0.1547E-10	0.0
11	0.2388E+05	0.4222E-03	0.4753E+07	1	0.5214E-08	0.00	0.9812E-07	0.01	0.1417E-06	0.0
12	0.2389E+05	0.4221E-03	0.4757E+07	1	0.9247E-10	0.00	0.1468E-06	0.02	0.1048E-06	0.0
13	0.2475E+05	0.3053E-03	0.3692E+07	1	0.4525E-03	59.89	0.7194E-10	0.00	0.1585E-09	0.0
14	0.3023E+05	0.8924E-04	0.1610E+07	1	0.2228E-14	0.00	0.4315E-13	0.00	0.2329E-13	0.0
15	0.3630E+05	0.3090E-04	0.8039E+06	1	0.1068E-12	0.00	0.2565E-11	0.00	0.9645E-13	0.0
16	0.3837E+05	0.2502E-03	0.7270E+07	1	0.1892E-12	0.00	0.3594E-04	4.76	0.4329E-04	5.7
17	0.3840E+05	0.2518E-03	0.7328E+07	1	0.8292E-10	0.00	0.4327E-04	5.73	0.3592E-04	4.7
18	0.4222E+05	0.5205E-04	0.1831E+07	1	0.1049E-13	0.00	0.2209E-07	0.00	0.1131E-04	1.5
19	0.4222E+05	0.5195E-04	0.1828E+07	Τ.	0.3239E-14	0.00	0.1132E-04	1.50	0.2247E-07	0.0
20	0.4224E+05	0.4813E-04	0.1695E+07	1	0.1401E-13	0.00	0.2333E-09	0.00	0.3263E-08	0.0
rum				1	0.6050E-03	80.08	0.6135E-03	81.21	0.6136E-03	81.2

(b) 各方向模态有效质量信息的汇总

图 5.11 Solution Information

关,但是输入有时会通过改变质量和刚度的分布而影响模态分析结果,这时要先计算出输入 产生的应力及应变,将它作为模态分析的边界条件,考虑它对质量和刚度分布的影响,这种 分析称为预应力模态分析。

生活中有很多这类现象,吉他调弦就是这种原理,通过调整琴头旋钮改变对应琴弦的张 力,张力增加,发声的频率就会变高,反之就会变低,而按压对应的品丝时,则是在改变琴弦 结构的支撑边界条件,同一根琴弦长度越短,则音调越高,代表发声频率越高。

【例 5.3】 预应力模态分析

我们以"民谣标准弦"012 为例,演示预应力模态分析流程,其第5 弦直径为0.042in 🚆 7min



(注:1in≈2.54cm),对应大字组A音,频率为110Hz,41寸(注:1寸≈3.33cm)D型民谣吉他有效琴弦长度约为650mm,琴弦材料这里以软件中的结构钢来代替。

(1)因为预应力分析是一种比较常用的标准分析流程,所以在 Custom Systems 中可以 直接找到。双击 Pre-Stress Modal 模块建立预应力分析,如图 5.12(a)所示。也可以用标准 模块来自己搭建,如图 5.12(b)所示,从此流程框图可以看出,静力分析的结果被当作边界 条件传递给了模态分析模块,而材料、几何模型及网格二者公用。



图 5.12 建立预应力分析流程

(2) 在 Geometry 上右击并选择 DesignModeler,我们使用概念建模绘制圆形截面梁来 模拟琴弦,在 XY 平面草绘一条长度为 650mm 的直线,如图 5.13 所示,选择 Concept→ Lines From Sketches,再设置 Cross Section→Circular,在 R 中输入半径为 5.334mm,在模 型树中选择 Line Body,将其截面设置为刚创建的圆形截面,如图 5.14 所示。



图 5.13 绘制草图

(3)关闭建模界面,回到主界面,双击 Model 单元格,进入 Mechanical 界面。将网格单元尺寸设置为 5.0mm,切换到点选择模式,选择直线的一端并设置为固定约束,选择另一端并设置为位移约束,沿着轴向方向拉伸 0.491mm,另外两个方向设置为 0mm,转动角度均设置为 0°,如图 5.15 所示。注意在分析设置中打开 Large Deflection 选项。

A: Static Structu	ral - DesignModeler	File Create	Concent Tools Units View	Help		Tree Outline		ģ.	Graphi
File Create Co.	troept Tools Units View He Lines From Points Lines From Sketches Lines From Edges 3D Curve Split Edges Surfaces From Edges Surfaces From Edges Surfaces From Sketches Surfaces From Faces Detach Cross Section Ine ts, 0 Bodies	te 2	Lines From Points Lines From Rotes Lines From Edges J D Curve Split Edges Surfaces From Edges Surfaces From Edges Lines Cross Section ZXPlane Line2 S Sketch1 I Cross Section Cross Addition Cross Section Cross Section Constant D Part, 1 Body	ett 12 3 4 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10	Graphi	A Static Structur A Static Structur	al boon 1 dy dy dy Une Body 0 1 2		
Sketching Modeli		Datails Man	lodeling			Shared Topology Method	Edge Joints		
		Details view	and and			Geometry Type	DesignModeler		
Details View		Sketch	Circular1						
E Details of Sketch	let i te	Show Constr	raints? No						
Sketch	Sketch1	B Dimensions	:1						
Sketch Visibility	Show Sketch	8	5.334 mm						
Show Constraints	No	Edges: 1			2.2020				
Dimensions: 1	Long to the second seco	Full Circle	Cr10						
H1	650 mm	- Physical Pro	perties: 10	1					
Edges: 1	IN PRIME	A	89.383 mm ²						Model
Line	Ln7	box	626.54 mm^4		1				
		1000 March 1000	20224 22		1	C Ready			

图 5.14 创建截面



图 5.15 网格及边界条件设置

(4)因为模型为梁单元模型,所以无法访问常规的应力、应变选项,需要通过 Beam Tool 查看相应的应力选项,如图 5.16 所示。由于我们仅关注第1 阶固有频率,所以这里可 以考虑模态质量和参与因子的大小,模态设置选项保持默认,计算前 6 阶模态。

(5)如图 5.17 所示,可以看到,受到预拉伸的模型其第1阶的频率为110Hz,大家也可以通过添加力载荷的方式实现同样效果,注意力的方向应沿着轴线,同时要通过位移约束另外两个方向的位移。模态结果显示的变形仅用来表示相对变形的分布,绝对数值没有意义。



图 5.16 结果后处理



图 5.17 查看结果

5.3 阻尼

在动力学系统中,共振频率和模态是系统的固有属性,它们对系统动力特性起着决定性 作用,对于一个运动着的系统,阻尼也是对系统运动特性起关键作用的重要因素,现实世界 中的运动均含阻尼,没有阻尼处于共振的结构将出现无限大振幅,阻尼将系统的能量耗散 掉,阻尼的大小和属性决定了系统运动是否稳定及是否存在振荡。

阻尼的作用机理比较复杂,我们在分析中将其分为黏滞阻尼、材料阻尼(内摩擦阻尼)、 库伦摩擦阻尼(滑动摩擦阻尼)、数值阻尼。

对解耦后的单自由度运动方程 mü+cu+ku=f 整理为如下的自由振动微分方程

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \tag{5.6}$$

其中:

 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 为无阻尼自然圆频率;

 $c_c = 2\sqrt{k/m}$ 为临界阻尼;

 $\xi = c/c_c$ 为阻尼比。

在 ANSYS 中,当对应的单元为弹簧单元时,可以直接输入阻尼 c。当进行完全瞬态分析及含阻尼的模态分析时,阻尼可以表示为如下阻尼矩阵:

$$[C] = \alpha[M] + \sum_{i=1}^{N_{ma}} \alpha_i^m [M_i] + \beta[K] + \sum_{j=1}^{N_{mb}} \beta_j^m [K_j] + \sum_{k=1}^{N_e} [C_k] + \sum_{l=1}^{N_g} [G_l] \quad (5.7)$$

其中前两项为质量阻尼,中间两项为结构阻尼,最后两项分别为单元阻尼和陀螺阻尼。

在实际应用中,我们又常用 Rayleigh 阻尼系统 α 和 β 来表示系统的阻尼,即

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K], \quad \xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2}$$

在很多真实结构中,质量阻尼 α 很小,往 往可以忽略,β 阻尼则可以通过实验的方式, 测出不同频率 ω_i下的阻尼比 ξ_i,从而得到 β。 如图 5.18 所示,当 α、β 均不可以忽略时,可 以取 ω₁~ω₂ 的一段频率范围,当该范围内的 阻尼比 ξ 的变化值很小,以至于可以认为它在 该范围内为常数时,可以通过计算 ξ_i = $\frac{\alpha}{2\omega_i}$ + $\beta\omega_{i,T}$

在 ANSYS 中可以在材料定义中设置 α

 $\frac{\beta\omega_i}{2}$ 取 *i*=1,2 联立方程计算出 α 和 β 。



图 5.18 系统的阻尼

和β阻尼,也可以在分析设置中输入α和β阻尼。二者的区别在于:前者与具体材料有关,

不同材料可以设置不同值,而后者为一全局值。在该分析中, α 和 β 均保持该值不变,如图 5.19 所示。

Propert	ies of Outline Row 3: Structural Steel		Details of "Analysis Settings"
	A	В	Options Solver Controls
1	Property	Value	Damped Yes 💌
2	🔁 Density	7850	Solver Type No Rotordynamics Controls
3	Damping Factor (a)		Output Controls
4	Mass-Matrix Damping Multiplier	12.56	Damping Controls Stiffness Coefficient Define By Direct Input
5	E 2 Damping Factor (B)		Stiffness Coefficient 3.e-003
6	k-Matrix Damping Multiplier	0.003	Mass Coefficient 12.56 Analysis Data Management
7	🗉 🚰 Isotropic Elasticity		

图 5.19 材料阻尼及全局阻尼

5.4 谐响应分析

动力学系统的运动方程为由一组微分方程构成的矩阵,求解比较困难,可以通过拉普拉 斯变换将微分方程转换为代数方程,得到系统的传递函数矩阵,通过求解零极点得到系统的 固有属性,这是一种频域分析方法,它可以深刻地揭示系统的动态特性。频域分析中通过输 入不同频率的正弦激励,测量系统的稳态输出响应,绘制出频响曲线。通过频响曲线的幅频 特性和相频特性可以对系统进行辨识并获取影响动态系统特性的关键参数,如共振频率、阻 尼比、稳定性、稳定裕度等。这些载荷在 ANSYS 中的谐响应分析都采用同样的原理。它的 输入可以是已知幅值和频率的各种载荷,如力、压力、力矩、位移等,也可以是相同频率的各 种载荷的组合,相角可以相同也可以不同,注意当在 ANSYS 中要求载荷为体载荷类型时, 相角必须为 0°。在真实工业应用场合中,结构经常承受周期性载荷,如旋转机械的偏心等 引起的离心力,这些周期性载荷可以分解为一系列不同频率的正弦载荷,谐响应分析就是用 来对这些谐性载荷激励下的线性结构的稳态响应规律进行分析的一种技术。它可以预测结 构的持续动力学特性,如何避开共振及发生共振时计算出最大幅值响应,从而判断结构是否 可以克服共振、疲劳或其他有害载荷的作用。

5.4.1 控制方程

对于单自由度系统,当系统受到正弦形式的激振力时,系统的运动方程为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f\sin\Omega t \tag{5.8}$$

求解该运动方程得到位移输出的幅值和相角如下:

$$u = \frac{f/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}$$
(5.9)

$$\phi = \arctan \frac{2\xi \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$
(5.10)

根据式(5.9)及式(5.10),若将 Ω/ω 作为自变量,将 uk/f 作为因变量,可得到如图 5.20 所示的幅频特性和相频特性曲线。



图 5.20 幅频特性和相频特性曲线

当系统为多自由系统时,运动方程为

 $[M]{\ddot{u}} + [C]{\dot{u}} + [K]u = {F}$ (5.11)

对于线性系统,当输入为频率稳定的正弦信号时,输出也为同频率正弦信号。实际系统 虽然存在诸多非线性因素,但对于正常运行的系统,系统的运动往往是平衡位置处的小幅振 荡,所以线性系统假设能够满足绝大多数工程应用的精度要求,因此,输入和输出在复频域 可表示为

$$\{u\} = (\{u_1\} + i\{u_2\})e^{i\Omega t}$$

$$\{\dot{u}\} = -i\Omega(\{u_1\} + i\{u_2\})e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{u}\} = -\Omega^2(\{u_1\} + i\{u_2\})e^{i\Omega t}$$

$$\{F\} = (\{F_1\} + i\{F_2\})e^{i\Omega t}$$

$$(5.12)$$

代入运动方程可得

 $-\Omega^{2}[M] + i\Omega[C] + [K](\{u_{1}\} + i\{u_{2}\}) = (\{F_{1}\} + i\{F_{2}\})$ (5.13)

1. 完全谐响应分析法

上式改写为 $[K_c]$ + $\{u_c\}$ = $\{F_c\}$,直接求解该复数域内的代数方程的谐响应分析方法称为完全谐响应分析法。

2. 模态叠加谐响应分析法

式(5.13)也可改写为各阶模态振型的线性组合: $(-\Omega^2 + i2\omega_j\Omega\zeta_j[C] + \omega_j^2)y_{jc} = f_{jc}$, 其中, $j = 1, 2, 3, \cdots$,通过取前 n 阶模态做线性叠加,利用这种方法的谐响应分析称为模态 叠加谐响应分析。

5.4.2 谐响应分析的阻尼

对于受谐性载荷的动力学系统,阻尼表达式中需要增加一项和速度成正比并与频率成 反比的结构阻尼项和黏弹性阻尼项:

$$\begin{bmatrix} C \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{N_{ma}} \alpha_i^m \begin{bmatrix} M_i \end{bmatrix} + \left(\beta + \frac{1}{\Omega}g\right) \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{N_{mb}} \left(\beta_j^m + \frac{1}{\Omega}g_j\right) \begin{bmatrix} K_j \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{N_e} \begin{bmatrix} C_k \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{N_g} \begin{bmatrix} G_l \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^{N_v} \frac{1}{\Omega} \begin{bmatrix} C_m \end{bmatrix}$$
(5.14)

Ð	Options		
Đ	Output Controls		
Ξ	Damping Controls		
	Constant Damping Ratio	0.	
	Stiffness Coefficient Define By	Direct Input	
	Stiffness Coefficient	0.	5
	Mass Coefficient	0.	

图 5.21 全局阻尼

实际应用时,通常只取 $\alpha[M],\beta+\frac{1}{\Omega}g,$ $\sum_{i=1}^{N_{ma}} \alpha_i^m [M_i], \sum_{j=1}^{N_{mb}} \left(\beta_j^m + \frac{1}{\Omega}g_j\right) [K_j]$ 等几项,前 者可以在如下界面设置为全局选项,如图 5.21 所示。

后者可以在材料设置界面对每种材料单 独设置阻尼,如图 5.22 所示。最终计算时根

据各材料阻尼及全局阻尼按式(5.14)求和。

	A	В
1	Property	Value
2	🔀 Constant Damping Coefficient	0.01
3	Damping Factor (a)	
4	Mass-Matrix Damping Multiplier	12.56
;	E Damping Factor (β)	
5	k-Matrix Damping Multiplier	0.003

图 5.22 材料阻尼

5.4.3 载荷及边界条件的限制

谐响应分析支持大部分结构载荷和约束,但有以下例外:

- (1) 不支持重力。
- (2) 不支持热负荷。
- (3) 不支持转速。
- (4) 不支持螺栓预紧力。
- (5) 不支持 Compression Only Support。

所有载荷要求频率相同,可以是不同相位的,因为是频率响应,所以不考虑瞬态效应,但 加速度、轴承载荷、转矩载荷只能以0°相位输入。当输入仅为单一载荷时,不需要输入相位 信息。所有载荷既可以是常数,也可以是频率的函数。

5.4.4 模态叠加法谐响应分析实例

仍然使用模态分析中轴的例子,通过该例子加深对共振频率、模态分析、谐响应分析的 理解。在该例子中会重点讲解求解器选项及结果后处理。

【例 5.4】 模态叠加法分析实例

(1) 双击工具箱中的 Harmonic Response,右击 Geometry 以便通过 Import Geometry 添加几何模型,随后再双击 Model 便可进入 Mechanical 界面。将单位修改为 mm、kg、N、s 制,材料保持默认结构钢,为方便对比,仍将网格的 Resolution 修改为 7,其他选项为默认 值,进行网格划分,如图 5.23 所示。



🛾 8min



图 5.23 添加几何模型及设置网格参数

(2)设置边界条件,仍然选择两个轴承的轴径做圆柱支撑,将切向设置为 Free。在最粗段设置 4. e-003N • mm 的转矩,该转矩则会以幅值为 4. e-003N • mm,并按接下来所设置的频率范围中的各个频率以正弦波形式施加给轴,如图 5. 24 所示。

(3) 接下来,重点讲解 Analysis Settings 中的选项。在频率范围中一般需要设置最小、 最大频率,设置原则取决于实际工作频率范围或我们关心的频率范围,这里设置为 12 000Hz。Solution Intervals 代表频率范围内频率分割数,默认为 10,代表在最小/最大范 围内分割成 10 份,频率可以按线性、对数及各种常用频程划分。在这里我们设置为 50 份, 让绘制出的曲线更平滑,如图 5.25 所示。Solution Method 中则可以设置模态叠加法或完 全求解法。本例采用模态叠加法,大家可以自己切换到完全求解法对比一下求解时间、占用 内存及求解结果的区别。

(4) 如图 5.26 所示,在 Output Controls 中可以根据需要设置是否保留应力、应变、节点力等。Damping Ratio 为阻尼控制选项,可以在这里设置全局阻尼,一般结构的阻尼均比较小,这里我们设置为 0.02。

	monic Response (A5) Pre-Stress/Modal (None) Analysis Settings Cylindrical Support Cylindrical Support 2 Moment Solution (A6) Solution Information		THE STATE TO A DESCRIPTION OF THE STATE	
etails of *Mome	nt"	7	TARTA ANALA ANA	
Scope			Security and the second and the second secon	
Scoping Method	Geometry Selection		CONTRACT AND A CONTRACT OF A C	
Geometry	1 Face	XXXXX		
Definition		200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200 - 200		
Туре	Moment		0.00	
Define By	Vector		21	00
Magnitude	4.e-003 N-mm			
Phase Angle	0.*	Geome	try (Print Preview) Report Preview/	
Direction	Click to Change	International Contraction		
Suppressed	No	Messag	es	
Behavior	Deformable		Text	Association
Advanced		Warnin	The license manager is delayed in its response. The latest requests were answ	Document1.d

图 5.24 设置边界条件

S	tep Controls					
M	lultiple RPMs	No				
0	Options					
Fr	equency Spacing	Linear				
	Range Minimum	0. Hz				
	Range Maximum	12000 Hz				
	Solution Intervals	50				
U	ser Defined Frequencies	Off				
So	olution Method	Mode Superposition				
In	clude Residual Vector	No				
C	uster Results	No				
M	lodal Frequency Range	Program Controlled				
St	ore Results At All Frequencies	Yes				
R	Rotordynamics Controls					
E O	Output Controls					

图 5.25 Analysis Settings 选项设置

=	Output Controls					
	Stress	Yes				
	Strain	Yes				
	Nodal Forces	No				
	Calculate Reactions	Yes				
	Expand Results From	Program Controlled				
	Expansion	Harmonic Solution				
	General Miscellaneous	No				
-	Damping Controls					
	Eqv. Damping Ratio From Mo	No				
	Damping Ratio	0.02				
	Stiffness Coefficient Define By	Direct Input				
	Stiffness Coefficient	0.				
	Mass Coefficient	0.				
+	Analysis Data Management					

图 5.26 阻尼设置

(5)结果后处理:谐响应分析的后处理选项和静力学分析的大多数选项设置方法及含义相同,这里就不赘述了。我们重点关注频响曲线。在工具栏上可以选择不同类型的幅频和相频曲线。以变形为例,如图 5.27 所示,在 Frequency Response 菜单中选择 Deformation,在 Details 界面中将空间分辨率设置为 Use Maximum,将方向设置为 Y 轴,其余选项先保持默认值。此时主界面会弹出幅频响应和相频响应图,右侧有个小的缩略图,便于观察全局曲线形状及分布。因为共振频率附近曲线斜率会急剧变化,所以需要更多的点去捕捉形状的变化。由于这里的频率按等间距分布,所以没有很好地反映出共振处的峰值,想解决该问题,一种方法是减小频率间距,增加点数,但会消耗更多的系统资源,另一种方法是仅加密共振频率附近的频率间距。

(6) 采用局部加密方法观察共振频率:在 Analysis Settings 中将 Cluster Results 修改为 Yes,此时会对共振点附近做局部加密处理,将 Cluster Number 修改为最大值 20,最大程



图 5.27 结果后处理

度地增加局部加密点数,注意仅模态叠加法支持局部加密。此时可以在频响曲线中看到某些位置的点已经做了局部加密,在 Results 中可以看到对应的最大幅值、频率、相角等相关信息,如图 5.28 所示。因为频率范围较大,此时仍然不能很好地观察共振频率附近曲线的形状,如图 5.29 所示。

(7)修改观察频率的范围:在 Options 中,将频率范围修改为用户指定方式,将范围修改为10000~12000Hz。如图 5.30 所示,此时的频响曲线可以很好地观察到沿着 Y 轴方向





(a)局部加密点数







图 5.29 加密的频响曲线

最大变形响应的峰值频率为 11 764Hz,该频率略低于模态分析中的第 11 阶扭转频率,因为 这里考虑了阻尼,所以频率会略低于无阻尼共振频率。由于这里施加的是扭转信号,所以更 容易激发扭转共振,但有些情况下也会出现明显的弯曲共振,这取决于结构的刚度分布,故 应该针对具体情况具体分析。

(8) 拓展: 大家可以自行修改阻尼比大小,观察一下阻尼比对共振频率及共振峰值的 影响,也可以将频率响应修改为应力、应变等其他类型,以便观察共振频率及共振峰值的分

D	etails of "Frequency	Response"	ģ		
-	Scope				
	Scoping Method	Geometry Selection			
	Geometry	15 Faces			
	Spatial Resolution	Use Maximum			
	Definition				
	Туре	Directional Deformation			
	Orientation	Y Axis			
	Coordinate System	Global Coordinate System			
	Suppressed	No			
Ξ	Options				
	Frequency Range	Specified	-		
	Minimum Frequency	10000 Hz			
	Maximum Frequency	12000 Hz			
	Display	Bode			
	Chart Viewing Style	Log Y			
ŧ	Results	1			



图 5.30 查看指定频率范围的频响曲线

布,此外还可以将模态叠加法修改为 Full 方法,以便对比结果及计算时间的差别。

5.5 响应谱分析

当结构受随机载荷或时变载荷作用时,可以通过时间历程分析得到系统随时间变化的 精确响应,理论上在 ANSYS 中可以通过瞬态动力学模块完成该分析,但由于实际工程问题 中复杂结构为多自由度并经受长时间载荷激励,大多数问题若使用瞬态动力学方法,则将会 占用过多计算时间和硬件资源。针对这种多自由度、长时间激励的问题,迫切需要一种快速 计算方法对结构的最大响应进行估算。针对多自由度,可以采用模态分析思想提取结构的 模态,对于瞬态输入载荷,可以提取载荷的频谱,与直接求解瞬态模型不同的是,模态和频谱 的提取是单独进行的,最终将频谱作为激励施加给提取的各阶模态计算位移和应力响应,具体过程如图 5.31 所示。



图 5.31 响应谱提取具体过程

响应谱方法广泛应用于地震、风载荷、海浪、喷气式飞机、火箭发射等带有随机性及冲击 属性载荷的计算问题中,一种典型的加速度载荷如图 5.32 所示。



5.5.1 如何获得响应谱

响应谱的横坐标为频率,纵坐标为最大响应值,可以是位移、速度或加速度。具体的生成过程可以描述如下。

单自由度质量-弹簧-阻尼系统,收到左侧随机载荷的作用,得到输出影响,如图 5.33 所示,可以看出最大加速度输出响应值为 95m/s²。

对不同频率按同样过程运行,得到不同频率下的最大响应值,以横坐标作为频率,纵坐标为最大输出响应便可绘制如图 5.34 所示折线图。当采用更多阻尼器时,绘制出的响应谱曲线更平滑。当阻尼比不同时,会得到一组响应谱。实际应用时往往采用对数坐标。

可以通过如下方式,很方便地在位移谱、速度谱和加速度谱之间转换,如图 5.35 所示。

5.5.2 各阶模态的单独响应

接下来考虑一下,在给定响应谱后如何计算系统的最大响应。通过模态分析可以得到



图 5.33 单自由度质量-弹簧-阻尼系统的输出影响



图 5.34 单自由度质量-弹簧-阻尼系统的输出影响折线图



图 5.35 单自由度质量-弹簧-阻尼系统的输出影响位移谱、速度谱和加速度谱转换图

解耦的各阶模态,当结构受到某一方向的外部载荷时,系统的响应是各阶模态的组合,其中 第 *i* 阶模态的实际位移为

$$R\}_{i} = A_{i} \{\phi\}_{i} \tag{5.15}$$

其中, A_i 称为模态系数,通过该系数对某阶单位模态响应进行比例放大便可得到该阶次的 实际位移。 $A_i = S_i \gamma_i$,其中 S_i 为某一频率下的谱值,它可以通过查询响应谱得到,在 ANSYS中要查询的频率在响应谱频率范围内则通过插值可以得到 S_i ,若要查询的频率超 出响应谱频率范围,则取响应谱中最近的端点值作为 S_i , γ_i 为模态参与因子,表示该阶模态 在特定方向变形或应力的贡献程度,根据位移、速度、加速度响应之间的关系,可以分别得到 速度模态系数为

$$A_i = \frac{S_i \gamma_i}{\omega_i} \tag{5.16}$$

加速度模态系数为

$$A_i = \frac{S_i \gamma_i}{\omega_i^2} \tag{5.17}$$

对应的实际速度和实际加速度响应分别为

$$\{\boldsymbol{R}\}_{i} = \boldsymbol{\omega}_{i} \boldsymbol{A}_{i} \{\boldsymbol{\phi}\}_{i} \tag{5.18}$$

$$\{\boldsymbol{R}\}_{i} = \boldsymbol{\omega}_{i}^{2} \boldsymbol{A}_{i} \{\boldsymbol{\phi}\}_{i}$$
(5.19)

5.5.3 各阶模态响应的组合

实际响应并不是各阶模态单独响应的简单相加,因为各阶模态输出响应的相位不同,各阶模态不可能同时达到最大值。由于在模态分析过程中丢失了相位信息,所以无法得知各阶模态如何组合得到实际的总响应,因此采用不同的模态组合方式就会达到不同的总响应值,在 ANSYS 中提供了 3 种组合方法,分别是 SRSS、CQC 和 ROSE 方法。

1. SRSS 方法

SRSS(均方根法)的计算方法如下:

$$R\} = \sqrt{\{R\}_{1}^{2} + \{R\}_{2}^{2} + \dots + \{R\}_{N}^{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \{R\}_{i}^{2}}$$
(5.20)

它适用于各阶模态互相关性比较小的场合,根据随机过程理论,彼此独立随机变量的均 方根值就是响应组合的最大值。模态频率之间距离越远,模态间的相关性就越小,这种计算 方法就越合理。如何判断模态间的相关性呢?其实在工程应用过程中可以根据阻尼比来判 断相关性,认为相关性是阻尼比的分段函数。

(1) 临界阻尼比小于或等于 2%时,若相邻频率之间距离的相对值小于 10%,即 $f_i \leq 1.1f_i$,则认为二者相关,SRSS 方法不适用。

(2) 临界阻尼比大于 2%时,若相邻频率之间距离的相对值小于阻尼比的 5 倍,即 $f_i \leq (1+5\gamma)f_i$,则认为二者相关,SRSS 方法不适用。

此外,当存在刚体或部分刚体处于运动模态时,SRSS方法不适用;当考虑高阶模态效 应却没有抽取足够多高阶模态时,该方法也不适用。

当用 ϵ 表示模态之间相关性时, $0 \le \epsilon \le 1$, $\epsilon = 0$ 时为完全不相关; $\epsilon = 1$ 时为完全相关; $0 < \epsilon < 1$ 时为部分相关,对于部分相关的情况,则需要使用 CQC 和 ROSE 方法。

2. CQC 方法

计算表达式为

$$\{R\} = \left(\left| \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} k \varepsilon_{ij} \{R\}_{i} \{R\}_{j} \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$
(5.21)

3. ROSE 方法

计算表达式为

$$\{R\} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{ij} \{R\}_{i} \{R\}_{j}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(5.22)

5.5.4 考虑刚性效应

如图 5.36 所示,可按频率将模态划分为低频、中频和高频 3 个区域。峰值频率左侧区域为低频区域,也称为周期区域,通常可以认为低频区域各阶模态不相关。f_{ZPA} 右侧区域称为高频区域或刚性区域(以相同相位运动),该区域完全自相关,计算表达式为

$$\{R\} = \sum_{i=1}^{N} \{R_r\}_i$$
 (5.23)

此时响应组合为各阶次的代数和。中间区域称为中频区域或过渡区域,过渡区域是周期分量和刚性分量的线性组合。过渡区域的计算若做详细讲解需要较大篇幅,大家感兴趣可以查阅相关资料。简单来讲有线性算法和对数算法,分别称为 Lindly-Yow 法和 Gupta 法。可以在参数设置对话框中选择,它们决定了组合系数所采用的具体算法。



这两种算法应如何选择呢?如图 5.37 所示,从图 5.37(a)和图 5.37(b)可以看出, Lindly-Yow 法影响的是加速度响应在刚性频率对应响应以上的频率段,而 Gupta 法影响的 是 *f*_{sp} 右侧的中频区域。从算法上分类可以分为线性算法和对数算法。





由于模态提取时不会提取全部模态,所以当频率远高于 f_{ZPA} 时,对应的模态会被丢弃, 此时这些频率对应的有效模态质量及模态参与系数也会被舍弃,若需要考虑这些更高阶模态,则需要在分析参数中打开 Missing Mass Effect 选项,该选项将这些模态打包成一个集 总参数形式的额外响应项作为刚性响应的附加项,此时刚性响应为

$$\{R\} = \sum_{i=1}^{N} \{R_r\}_i + \{R_M\}$$
(5.24)

总响应为

$$\{R\} = \sqrt{\{R_p\}^2 + \{R_r\}^2}$$
(5.25)

5.5.5 单点与多点响应谱

单点响应谱指的是设置激励的支撑点使用的是同样的响应谱同时作用。多点响应谱指 的是不同约束点可以施加不同响应谱,最多可达 100 种不同激励。两种情况均只能应用在 线性结构问题中,由于单点响应谱是多点响应谱的特殊情况,这里重点讲解多点响应谱。多 点响应谱仍然需要先按单点响应谱计算各自的响应,合成后的多点响应谱求解表达式为

$$\{R_{\rm MPRS}\} = \sqrt{\{R_{\rm SPRS}\}_{1}^{2} + \{R_{\rm SPRS}\}_{2}^{2} + \cdots}$$
(5.26)

其中,

 ${R_{MPRS}}$ 为多点响应谱的总响应;

 $\{R_{\text{SPRS}}\}_1$ 为单点响应谱1的总响应;

 $\{R_{SPRS}\}_2$ 为单点响应谱2的总响应。

5.5.6 分析设置

如何设置参数是初学者在仿真时最头疼的事,这里有一个简单的原则供大家参考:如果仅关注低频区域的模态,则可以使用 SRSS 方法,不考虑刚性和丢失的质量效应。如果仅关注中高频段,则也可以使用 SRSS 方法,同时要考虑刚性响应(Gupta 或 Lindley)和丢失

质量效应。若关注全频率段,则可以设置 SRSS 方法、刚性响应使用 Gupta 方法,考虑丢失 质量效应的影响,当频率间隔较小且 SRSS 方法不再适用时,需使用 CQC 方法或 ROSE 方法。

5.5.7 响应谱应用举例

响应谱广泛应用在核电站、高层楼宇等耐震设计中,相关行业有具体规范可供查询,例 如 ASCE 7-16 和 Eurocode 8 等建筑规范,这里以一个桥梁遭受地震时的典型响应为例,来 演示响应谱的分析过程,如图 5.38 所示。其实最早的响应谱应用就是因为抗震设计而提出 的,典型的地震波信号如下: 左侧为南北方向地震波,右侧为东西方向地震波。



图 5.38 桥梁遭受地震时的地震波

将其按响应谱提取方法可以制作出加速度响应谱: 左侧为南北方向加速度响应谱, 右侧为东西方向加速度响应谱, 如图 5.39 所示。



图 5.39 桥梁遭受地震时的加速度响应谱

【例 5.5】 响应谱分析实例

打开 Workbench 主界面,因为要进行分析的桥梁存在预应力,所以应先进行预应力模态分析,再进行响应谱分析。

(1) 首先打开 Workbench,创建如图 5.40 所示的工作流框图。右击 Geometry 单元格, 选择创建好的 bridge 几何文件,导入该几何文件后双击该单元格,查看几何文件。该文件 是由点、线、面等概念建模创建的几何模型,如图 5.41 所示。很多桥梁、楼宇等有桁架、钢架 结构模型,均可以用类似方法实现。



图 5.40 创建工作流框图



图 5.41 bridge 几何模型

(2) 双击后打开 Mechanical 界面,将所有单位均修改为国际单位,将网格的 Element Size 修改为 1000.0mm,其余选项保持默认值。切换到点选模式,选择 4 个支柱端点并设置 为 Fixed Support,如图 5.42 所示。



图 5.42 bridge 约束设置(一)

为了便于选择边线,单击 Show Mesh 按钮,先将网格显示关闭,分别单击左侧及右侧的三条边线,将 displacement 中的 Y 及 Z 方向设置为 0,让 X 方向保持自由,结果如图 5.43 所示。



图 5.43 bridge 约束设置(二)

单击最左侧和最右侧支撑缆绳的四根立柱,右击将其 supress,便于随后在缆绳两端进 行预拉伸,结果如图 5.44 所示。



图 5.44 bridge 约束设置(三)

选择左侧两根缆绳端点,对其设置位移约束,将 X 值设置为-0.993m,将 Z 值设置为-0.122m。类似地,在右侧两根缆绳端点设置位移约束,将 X 值设置为 0.993m,将 Z 值设 置为-0.122m,结果如图 5.45 所示。



图 5.45 bridge 约束设置(四)

最后,添加重力加速度,并确保 Z 的负方向为重力加速度方向,在 Analysis Settings 中将 Large Deflection 选项设置为 On,结果后处理中插入总变形,单击 Solve,变形结果如 图 5.46 所示。



图 5.46 变形结果云图

大家可以对比一下,若将 Large Deflection 选项设置为 Off,结果会有怎样的变化,由此可见若参数设置得不合适会对后续的结论造成怎样的影响。

(3) 接下来将模态分析的最大阶次修改为 10,进行求解并查看 Solution Information, 从图 5.47 Modal Masses 汇总表中可以看到各阶次的频率和 3 个方向的有效质量,从各阶 频率可以看出,频率较低,频率间隔很小,所以在选择计算法时应避免使用 SRSS 方法。



							EFFECTIV	E MASS		
IODE	FREQUENCY	MODAL MASS	KENE	1	X-DIR	RATIO [®]	Y-DIR	RATIO\$	Z-DIR	RATIC
1	0.1475	0.4035E+07	0.1733E+07	1	0.1046E-05	0.00	0.7342E+07	65.70	0.7535E-05	0.00
2	0.2016	0.2386E+07	0.1915E+07	1	0.1180E-04	0.00	0.1590E-05	0.00	0.1551E+07	13.88
3	0.2175	0.2974E+07	0.2777E+07	1	0.8130E+06	7.28	0.9659E-03	0.00	0.3578E-03	0.00
4	0.3068	0.3326E+07	0.6177E+07	1	0.1671	0.00	0.7227E-05	0.00	0.1056E+05	0.09
5	0.3092	0.1970E+07	0.3718E+07	1	0.7081E+06	6.34	0.2751E-02	0.00	0.5082E-03	0.00
6	0.3560	0.1062E+06	0.2656E+06	1	0.9583E-01	0.00	0.1581	0.00	9.476	0.00
7	0.3698	0.2592E+07	0.6994E+07	1	0.3398E-02	0.00	0.3148E-02	0.00	0.6283E+07	56.22
8	0.3786	2349.	6646.	1	1552.	0.01	1030.	0.01	343.4	0.00
9	0.3816	2355.	6770.	1	866.8	0.01	617.7	0.01	315.8	0.00
10	0.4078	2314.	7596.	1	2058.	0.02	3894.	0.03	6.174	0.00
sum				1	0.1526E+07	13.65	0.7348E+07	65.75	0.7845E+07	70.20

图 5.47 Modal Masses 汇总表

(4) 在响应谱分析中将谱类型修改为 ROSE,在工具栏中插入加速度响应谱,这里对所 有支撑设置统一的谱,所以为单点支撑类型,如图 5.48 所示。

D	etails of "Analysis Setting	s*	ą
-	Options		^
	Number Of Modes To Use	All	
	Spectrum Type	Single Point	
	Modes Combination Type	ROSE 💌	
-	Output Controls		1
	Calculate Velocity	No	
	Calculate Acceleration	No	
-	Damping Controls		
	Damping Ratio	0.	
	Stiffness Coefficient Defi	Direct Input	1
	Stiffness Coefficient	0.	1
	Mass Coefficient	0.	1
Ξ	Analysis Data Managemen	nt	1

(a) 谱类型选择



(b) 加速度响应谱选项

图 5.48 参数设置

打开加速度响应谱表格,将数据复制并粘贴在右侧表格中,将边界条件类型设置为 All Supports,方向为Y轴,如图 5.49(a)所示,结果如图 5.49(b)所示。细心的读者可能注意到 了,提供的加速度谱的单位为g,而按 ANSYS 中复制进来的数据的单位为m/s²,二者之间 的换算系数约为9.81,所以需要在 Analysis Settings 中将 Scale Factor 设置为9.81,注意当 前所有单位均为国际单位,这也是仿真一开始就应先将单位设置为国际单位的原因。





(a) 加速度响应谱表格数据处理



⁽b) 变形云图

图 5.49 参数设置和变形结果显示

(5)观察导入的谱的峰值,当频率为4.00Hz时,加速度谱值最大,我们提取的前10阶 频率均小于该频率,故当前模型更关注低频响应,所以不需要考虑刚性及质量丢失效应。后 处理和静力分析选项相似,大家可以自己查看感兴趣的结果。

5.6 随机振动分析

结构经常受到随机振动类型的载荷,这种类型载荷在实际问题中非常普遍,例如正在加 工的工件、道路上运动的车辆、飞机起飞、飞机着陆、火箭发射等,这些载荷总是同时包含各 种频率信号,幅值随时间随机变化,故这类载荷无法在时域上进行精确描述,但通过一段时 间的统计,在这类过程中幅值的均值呈现出一定的统计平均特性。

ANSYS 中的随机振动分析本质上也是一种谱分析,与响应谱不同之处在于它不是用 位移、速度、加速度谱,而是用功率谱密度 PSD,因此二者纵坐标的量纲不同。随机振动分 析的目的是分析结构在承受随机振动载荷情况下结构响应所呈现出的统计特征,通常考察 10 标准差范围内的位移、力、应力等统计信息,这些信息是进行疲劳寿命分析的重要参考。 关于功率谱密度更详细的内容可以查阅随机过程等资料,在具体应用时,不同行业有相应的 规范可供参考,例如道路试验中的路谱、振动试验中的冲击谱等。



实际上功率谱密度是通过带通滤波器提取不同带宽的信号,并通过计算单位带宽的自相关函数得到的,因此位移、速度、加速度、力功率谱密度的单位为 mm²/Hz、(mm/s)²/Hz、(mm/s²)²/Hz、N²/Hz,有些时候加速度功率谱密度也使用 G²/Hz。

对于随机振动仿真,我们要求结构为线性、非时变系统,并且随机信号是平稳各态历经的,故它满足高斯分布, 此时的输出也满足高斯分布,如图 5.50 所示。

对于线性系统,其频率特性可以用幅频特性和相频特性描述,也可以用复频响函数 H(ω)描述,即

$$H(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$$
(5.27)

显然幅频特性和相频特性分别为

$$|H(\omega)| = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}$$
(5.28)

$$\tan\phi = \frac{B}{A} = \frac{\operatorname{Im}[H(\omega)]}{\operatorname{Re}[H(\omega)]}$$
(5.29)

根据功率谱密度的定义可以得出

$$S_{out}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{in}(\omega)$$
(5.30)

由于随机过程不关注具体时刻的响应而更关注一个过程或一个时间段内的平均响应, 所以均方根是我们更关心的指标。

$$RMS = \sqrt{\int_{0}^{\infty} S(\omega) d\omega}$$
 (5.31)

对于高斯分布,均方根值就是它的标准差 σ ,实际应用时可以根据行业规则选择 σ 、2 σ 、3 σ ,分别代表占总响应概率的 68.27%、95.951%和 99.737%。

当输入为多个随机振动信号时,要求各信号之间不相关,总响应此时可以使用 SRSS 法获得。

【例 5.6】 随机振动分析

(1) 在 Custom Systems 中双击 Random Vibration, 右击 Geometry, 选择 Import Geometry, 通过 Browse 选择 eg5. 6. stp 素材文件, 如图 5. 51 所示。



图 5.51 模型导入

(2)双击 Model 单元格,打开 Mechanical 界面。由于本例提供的加速度谱的单位为英制,因此在 Units 菜单中选择 US Customary,如图 5.52 所示,将当前仿真环境设置为英制。
(3)将网格的 Resolution 选项设置为 7,其余选项保持默认值,如图 5.53 所示。

Un	nits Tools Help 🛛 🗔 🥥 ன 🍕	9				
	Metric (m, kg, N, s, V, A)	1				
	Metric (cm, g, dyne, s, V, A)					
	Metric (mm, kg, N, s, mV, mA)					
	Metric (mm, t, N, s, mV, mA)					
	Metric (mm, dat, N, s, mV, mA) Metric (μm, kg, μN, s, V, mA)					
	U.S. Customary (ft, Ibm, Ibf, °F, s, V, A					
~	U.S. Customary (in, Ibm, Ibf, °F, s, V, A)				
~	Degrees					
	Radians					
	rad/s					
	RPM					

图 5.52 设置单位

	→ 🏘 Mesh ⊕ → 👚 Modal (A	5)			
D	etails of "Mesh"				
=	Sizing				
	Use Adaptive Sizing	Yes			
	Resolution	7			
	Mesh Defeaturing	Yes			
	Defeature Size	Default			

图 5.53 设置网格参数

(4) 选择左侧目录树中的 Modal 节点,此时工具栏变为 Environment。选中轴的两个 端面,选择 Supports 中的 Fixed Support,为两个端面添加固定支撑,如图 5.54 所示。

(5)选中左侧目录树中的 Random Vibration 节点,选择 PSD Acceleration 选项,添加 PSD 加速度谱,如图 5.55 所示。在 Boundary Condition 中选择 Fixed Support,将 Direction 修改为 *X* 方向。在 Tabular Data 中添加如图 5.56 所示的数据。系统将根据添加的数据生成对应的曲线,如图 5.57 所示。







(6) 单击工具栏中的 Solution,求解完成后,在左侧目录树中选择 Modal 节点下的 Solution。在 Graph 中右击,选择 Select All,再次右击,选择 Create Mode Shape Results,如 图 5.58 所示。右击 Solution,选择 Evaluate All Results,在生成的选项中单击可以查看各 阶模态振型。第2阶和第6阶模型振型如图 5.59 所示。



图 5.58 PSD 加速度谱曲线(二)



图 5.59 第 2 阶和第 6 阶模态振型

(7) 在左侧 Random Vibration 节点中选择 Solution,右击,选择 Insert,通过这种方式 可以添加变形 Deformation、应变 Strain、应力 Stress 及疲劳 Fatigue 等结果选项,如图 5.60 所示。选择 Deformation 下的 Directional,在图 5.61 所示的选项中,可以选择查看变形的方向 Orientation 及发生的概率 Probability,以同样的方式我们可以添加 Strain、Stress 等结果。



Deformation	Þ	💁 Directional
Strain	•	Directional Velocity
Stress	•	🗣 Directional Acceleratio
Fatigue	•	

图 5.60 添加随机振动结果

Ξ	Scope		-
	Scoping Method	Geometry Selection	
	Geometry	All Bodies	Н
8	Definition		
	Туре	Directional Deforma	
	Orientation	X Axis	
	Reference	Relative to base mo	
	Scale Factor	1 Sigma 💌	
	Probability	68.269 %	
	Coordinate System	Solution Coordinate	
	Identifier		
	Suppressed	No	
Ξ	Results		
	🗌 Minimum	0. in	
	Maximum	1.3789e-007 in	
	Average	7.3348e-008 in	-



图 5.61 设置结果选项