

5.1 谓词逻辑的基本概念

命题逻辑的基本研究单位是简单命题,所研究的是命题之间的逻辑关系和推理。换言之,命题逻辑对自然语言的事实陈述及其推理只解析到简单命题为止,而无法研究简单命题的内部结构及命题间的内在关系。由此,导致一些简单而又常见的推理过程往往无法处理。例如,著名的苏格拉底三段论:

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 所以,苏格拉底是要死的。

显然,这个推理是正确的推理。从命题逻辑的观点看,上述推理过程含有 3 个简单命题,若分别用符号 p 、 q 、 r 表示“所有的人都是要死的”“苏格拉底是人”和“苏格拉底是要死的”,则 r 应该是 p 和 q 的有效结论,即 $p, q \vdash r$ 。根据命题逻辑公式的解释,在 p 取 1、 q 取 1 和 r 取 0 下,命题公式 $p \wedge q \rightarrow r$ 的真值为 0。所以,命题公式 $p \wedge q \rightarrow r$ 不是永真公式,即 r 不是 p 和 q 的有效结论。因此,命题逻辑无法正确表述这一推理过程。

产生上述问题的原因在于:这类推理中,各命题之间的逻辑关系不仅体现在简单命题之间,而且体现在简单命题的内部成分之间。命题逻辑无法对简单命题的内部成分及其之间的逻辑结构进行描述和推理,这是命题逻辑的局限性。因此,有必要对简单命题作进一步的解析,分析其中更细节的要素,即分解出其中的个体词(individual)、谓词(predicate)、量词(quantifier)和函词(function),研究它们的形式结构及逻辑关系。这就是一阶谓词逻辑(first order predicate logic)所研究的内容。一阶谓词逻辑简称为谓词逻辑(predicate logic)或一阶逻辑(first order logic)。

5.1.1 个体词

命题是具有真假意义的陈述句。从自然语言的语法角度,一个陈述句的主要结构形式为“主语+谓语”或“主语+谓语+宾语”。可以把陈述句所含有的各个句子成分作为基本单元,进行简单命题的进一步解析。

例如,陈述句“离散数学是计算机科学与技术专业本科生的必修课程”属于“主语+谓语”的句子结构,其中,主语为“离散数学”,谓语为“是计算机科学与技术专业本科生的必修课程”;陈述句“ x 大于 5”属于“主语+谓语+宾语”的句子结构,其中,主语为“ x ”,谓语为

“大于”,宾语为“5”。

定义 5.1 在陈述句中,可以独立存在的具体的或抽象的客体(句子中的主语、宾语等),称为**个体词**(individual)。表示具体或特定的客体的个体词称为**个体常量**或**个体常元**(individual constant)。没有赋予具体内容或泛指个体词称为**个体变元**或**个体变量**(individual variable)。个体变元的所有可能取值组成的集合称为**个体域**(individual field)。

一般地,个体常量用小写英文字母 a, b, c 等表示,个体变元用小写英文字母 x, y, z 等表示,个体域用 D 表示。个体域可以是有限集合,也可以是无限集合。当个体词遍及宇宙中的一切客体时,个体域特称为**全总个体域**(universal individual field)。

例如,在陈述句“3 是质数”中,“3”和“质数”是个体词,“3”是个体常量,“质数”是个体变元,其个体域是所有质数的集合;在陈述句“所有人都需要呼吸氧气”中,“人”和“氧气”是个体词,“氧气”是个体常量,“人”是个体变元,其个体域是所有人的集合;在陈述句“ $x < y + 1, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{N}$ 且 $y < 6$ ”中,“1”“ x ”和“ y ”都是个体词,“1”是个体常量,“ x ”和“ y ”都是个体变元,个体变元 x 的个体域为整数集合 $\mathbf{Z}$,个体变元 y 的个体域为有限集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

5.1.2 谓词

谓词是构成一个句子必有成分单元,在这里用下述定义对其进行形式化描述。

定义 5.2 在陈述句中,用来刻画个体词性质以及个体词之间相互关系的词(句子中的谓词),称为**谓词**。表示具体或特定的性质或关系的谓词称为**谓词常量**或**谓词常元**(predicate constant)。没有赋予具体内容或泛指的谓词称为**谓词变量**或**谓词变元**(predicate variable)。表示一个个体词性质的谓词称为**一元谓词**,表示 n 个个体词之间关系的谓词称为 **n 元谓词**(n -ary predicate)。

无论是谓词变元还是谓词常量都用大写英文字母 P, Q, R, G, B 等表示。含有 n 个个体变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 元谓词用 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示。一元谓词 $P(x)$ 表示 x 具有性质 P ; 二元谓词 $P(x, y)$ 表示 x 和 y 具有关系 P ; 三元谓词 $P(x, y, z)$ 表示 x, y 和 z 具有关系 P 。实质上, n 元谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可看成以个体域的笛卡儿积 $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ (D_i 为 x_i 的个体域)为定义域、以 $\{0, 1\}$ 为值域的 n 元函数。不含个体变元的谓词称为**0 元谓词**。0 元谓词实际上就是一般的命题。

对于 n 元谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$,如果个体变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 没有赋予确切的个体词,那么,该 n 元谓词就没有确切的真值,即并非一个命题。只有当个体变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 被赋予确定的个体词后,才能确定 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的真假值,此时, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 才是一个命题。

例 5.1 用谓词表示下列命题:

- ① “离散数学”是一门重要的计算机课程;
- ② 张兰和王强是同班同学;
- ③ 桂林位于北京和南宁之间;
- ④ 老李是小李的父亲。

解 ① 用一元谓词 $S(x)$ 表示“ x 是一门重要的计算机课程”,用个体常量 a 表示“离散数学”,那么命题①可用谓词 $S(a)$ 表示。

② 用二元谓词 $P(x, y)$ 表示“ x 和 y 是同班同学”,用个体常量 a 和 b 分别表示“张兰”和“王强”,那么命题②可用谓词 $P(a, b)$ 表示。

③ 用三元谓词 $Q(x, y, z)$ 表示“ x 位于 y 和 z 之间”, 用个体常量 a, b 和 c 分别表示“桂林”“北京”和“南宁”, 那么命题③可用谓词 $Q(a, b, c)$ 表示。

④ 用二元谓词 $H(x, y)$ 表示“ x 是 y 的父亲”, 用个体常量 a 和 b 分别表示“老李”和“小李”, 那么命题④可用谓词 $H(a, b)$ 表示。

注意: 谓词中个体词的顺序是十分重要的, 不能随意变更。例如, 对于例 5.1 中命题④, $H(b, a)$ 表示的是“小李是老李的父亲”, 显然, 不同于 $H(a, b)$ 的含义。再如, 例 5.1 中命题③, $Q(b, a, c)$ 表示的是“北京位于桂林和南宁之间”, $Q(c, a, b)$ 表示的是“南宁位于桂林和北京之间”, 显然, 它们都不同于 $Q(a, b, c)$ 的含义。

5.1.3 函词

在许多陈述句中, 含有类似于“集合的幂集”“张山的父亲”“键盘的字符”等形式的句子成分。这些句子成分是个体词到个体词的映射, 可以通过下述函词(function)来描述。

定义 5.3 个体词到个体词的映射称为函词(function), 用小写字母 f, g, h 等表示。以个体域的笛卡儿积 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ (D_i 为 x_i 的个体域) 为定义域, 以个体域 D 为值域的 n 元函数, 称为 n 元函词(n -ary function), 含有 n 个个体变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元函词用 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示。

实质上, 函词就是一般意义上的函数, n 元函词就是 n 元函数。只不过, 函词的定义域为个体域的笛卡儿积, 函词的值域是个体域。因此, 函词也就具有了函数的一些特征。对应于函数中的复合函数, 函词也有复合函词。

例 5.2 用谓词和函词表示下列命题:

- ① 大连的海滩和北海的海滩一样漂亮;
- ② 桂林的漓江是 5A 级旅游风景区;
- ③ 周宏的“离散数学”任课老师是教授;
- ④ 刘芳的妹妹喜欢唱歌;
- ⑤ 唐钢和李红的女儿在弹琵琶。

解 ① 用一元函词 $g(x)$ 表示“ x 的海滩”, 用二元谓词 $H(x, y)$ 表示“ x 和 y 一样漂亮”, 用个体常量 a 和 b 分别表示“大连”和“北海”。那么, 命题①的谓词和函词表示为 $H(g(a), g(b))$ 。

② 用一元函词 $f(x)$ 表示“ x 的漓江”, 用一元谓词 $Q(x)$ 表示“ x 是 5A 级旅游风景区”, 用个体常量 a 表示“桂林”。那么, 命题②的谓词和函词表示为 $Q(f(a))$ 。

③ 用一元函词 $f(x)$ 表示“ x 的‘离散数学’任课老师”, 用一元谓词 $R(x)$ 表示“ x 是教授”, 用个体常量 a 表示“周宏”。那么, 命题③的谓词和函词表示为 $R(f(a))$ 。

④ 用一元函词 $g(x)$ 表示“ x 的妹妹”, 用二元谓词 $R(x, y)$ 表示“ x 喜欢 y ”, 用个体常量 a 和 b 分别表示“刘芳”和“唱歌”。那么, 命题④的谓词和函词表示为 $R(g(a), b)$ 。

⑤ 用二元函词 $f(x, y)$ 表示“ x 和 y 的女儿”, 用二元谓词 $R(x, y)$ 表示“ x 在弹 y ”, 用个体常量 a, b 和 c 分别表示“唐钢”“李红”和“琵琶”。那么, 命题⑤的谓词和函词表示为 $R(f(a, b), c)$ 。

注意: n 元谓词也是一个 n 元函数。 n 元谓词和 n 元函词的区别在于前者的值域为 $\{0, 1\}$, 而后者的值域为某一个体域。不要引起混淆。

5.1.4 量词

在 n 元谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中, 对所有个体变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都赋予确定的个体词, 就可以得到一个命题。将 n 元谓词转换为一个命题的另一种方式是对个体变元进行量化。

定义 5.4 将谓词中个体变元的取值限定为其个体域的每一个元素, 称为个体变元的**全称量化**(universal quantification), 所用的量词称为**全称量词**(universal quantifier), 用符号 $\forall$ 表示。并用 $\forall x, \forall y, \forall z$ 等表示所有个体, 而用 $(\forall x)P(x), (\forall y)P(y), (\forall z)P(z)$ 等表示个体域中的所有个体具有性质 P 。

全称量词对应于自然语言或数学中的“一切”“所有”“每一个”“任意”“凡”“都”等词。

定义 5.5 将谓词中个体变元的取值限定为其个体域的某一个或多个元素, 称为个体变元的**存在量化**(existential quantification), 所用的量词称为**存在量词**(existential quantifier), 用符号 $\exists$ 表示, 并用 $\exists x, \exists y, \exists z$ 等表示个体域中有的个体, 而用 $(\exists x)P(x), (\exists y)P(y), (\exists z)P(z)$ 等表示个体域中有的个体具有性质 P 。

存在量词对应于自然语言或数学中的“存在”“有的”“有一个”“至少有一个”“某一个”“某些”等词。全称量词和存在量词统称为**量词**。

在命题的谓词逻辑表示中, 明确地给出个体变元的个体域是非常重要的事情。例如, 对于命题“所有人都是要呼吸的”, 设谓词 $B(x)$: x 是要呼吸的, 命题表示为 $(\forall x)B(x)$ 。如果个体域为所有人的集合时, $(\forall x)B(x)$ 的真值为真。但当个体域为自然数集合时, $(\forall x)B(x)$ 的真值为假。为此, 在讨论带有量词的命题时, 必须确定其个体域。为了方便, 在没有给定个体变元的个体域的情况下, 将所有命题的个体域全部统一, 使用全总个体域。用了这个全总个体域后, 对每一个个体变元的变化范围, 通过定义**特性谓词**(particular predicate)来实现对个体域的规范和表示。

例 5.3 用谓词和量词符号表示下列命题:

- ① 任何人都是要死的;
- ② 空集包含于任意集合;
- ③ 所有自然数非负;
- ④ 每一个计算机专业学生都要修离散数学;
- ⑤ 所有鸟都会飞;
- ⑥ 每一个大学生都要熟练使用计算机。

解 ① 用一元谓词 $D(x)$ 表示“ x 是要死的”, 用特性谓词 $M(x)$ 表示“ x 是人”。那么, 命题①可符号化地表示为 $(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x))$ 。

② 用二元谓词 $P(x, y)$ 表示“ x 包含于 y ”, 用特性谓词 $S(x)$ 表示“ x 是集合”, 用个体常量 a 表示“空集”。那么, 命题②可符号化地表示为 $(\forall x)(S(x) \rightarrow P(a, x))$ 。

③ 用一元谓词 $Q(x)$ 表示“ x 是负数”, 用特性谓词 $N(x)$ 表示“ x 是自然数”。那么, 命题③可符号化地表示为 $(\forall x)(N(x) \rightarrow \neg Q(x))$ 。

④ 用二元谓词 $R(x, y)$ 表示“ x 要修 y ”, 用特性谓词 $C(x)$ 表示“ x 是计算机专业学生”, 用个体常量 b 表示“离散数学”。那么, 命题④可符号化地表示为 $(\forall x)(C(x) \rightarrow R(x, b))$ 。

⑤ 用一元谓词 $P(x)$ 表示“ x 会飞”, 用特性谓词 $B(x)$ 表示“ x 是鸟”。那么, 命题⑤可

符号化地表示为 $(\forall x)(B(x) \rightarrow P(x))$ 。

⑥ 用二元谓词 $H(x, y)$ 表示“ x 熟练使用 y ”，用特性谓词 $S(x)$ 表示“ x 是大学生”，用个体常量 a 表示“计算机”。那么，命题⑥可符号化地表示为 $(\forall x)(S(x) \rightarrow H(x, a))$ 。

例 5.4 用谓词和量词符号表示下列命题：

- ① 有的人活百岁以上；
- ② 有些人登上过月球；
- ③ 有的自然数是素数；
- ④ 有些学生没有认真完成离散数学作业；
- ⑤ 某些人用左手写字；
- ⑥ 至少完成一次综合实验；
- ⑦ 某一个星球存在生命。

解 ① 用一元谓词 $L(x)$ 表示“ x 活百岁以上”，用特性谓词 $M(x)$ 表示“ x 是人”。那么，命题①可符号化地表示为 $(\exists x)(M(x) \wedge L(x))$ 。

② 用二元谓词 $P(x, y)$ 表示“ x 登上过 y ”，用特性谓词 $M(x)$ 表示“ x 是人”，用个体常量 a 表示“月球”。那么，命题②可符号化地表示为 $(\exists x)(M(x) \wedge P(x, a))$ 。

③ 用一元谓词 $Q(x)$ 表示“ x 是素数”，用特性谓词 $N(x)$ 表示“ x 是自然数”。那么，命题③可符号化地表示为 $(\exists x)(N(x) \wedge Q(x))$ 。

④ 用二元谓词 $R(x, y)$ 表示“ x 认真完成 y ”，用特性谓词 $S(x)$ 表示“ x 是学生”，用个体常量 b 表示“离散数学作业”。那么，命题④可符号化地表示为 $(\exists x)(S(x) \wedge \neg R(x, b))$ 。

⑤ 用二元谓词 $Q(x, y)$ 表示“ x 用 y 写字”，用特性谓词 $M(x)$ 表示“ x 是人”，用个体常量 a 表示“左手”。那么，命题⑤可符号化地表示为 $(\exists x)(M(x) \wedge Q(x, a))$ 。

⑥ 用一元谓词 $Q(x)$ 表示“完成 x ”，用特性谓词 $E(x)$ 表示“ x 是综合实验”。那么，命题⑥可符号化地表示为 $(\exists x)(E(x) \wedge Q(x))$ 。

⑦ 用二元谓词 $H(x, y)$ 表示“ x 存在 y ”，用特性谓词 $S(x)$ 表示“ x 是星球”，用特性谓词 $L(x)$ 表示“ x 是生命”。那么，命题⑦可符号化地表示为 $(\exists x)(\exists y)(S(x) \wedge L(y) \wedge H(x, y))$ 。

5.1.5 命题的谓词逻辑符号化

在命题的谓词逻辑符号化中，对每个语句中个体变元的个体域统一为全总个体域，而对各语句中的个体变元的变化范围则用一元特性谓词刻画，特性谓词在添加到谓词逻辑符号化中时必须遵循以下原则：

- ① 对于全称量词 $(\forall x)$ ，刻画其对应个体域的特性谓词作为蕴含式的前件加入；
- ② 对于存在量词 $(\exists x)$ ，刻画其对应个体域的特性谓词通过合取加入。

例 5.5 用谓词逻辑符号化下列命题：

- ① 每一个苹果都是红色的；
- ② 任意一个整数都是正整数或负整数；
- ③ 有一些实数是有理数；
- ④ 有一些人很聪明；
- ⑤ 有一些实数，使得 $x+5=3$ ；

⑥ 所有实验设备都要放在工作台 D_1 上。

解 ① 用一元谓词 $R(x)$ 表示“ x 是红色的”, 用特性谓词 $A(x)$ 表示“ x 是苹果”。那么, 命题①可谓词逻辑符号化为 $(\forall x)(A(x) \rightarrow R(x))$ 。

② 用一元谓词 $P(x)$ 表示“ x 是正数”, 一元谓词 $N(x)$ 表示“ x 是负数”, 用特性谓词 $Z(x)$ 表示“ x 是整数”。那么, 命题②可谓词逻辑符号化为 $(\forall x)(Z(x) \rightarrow (P(x) \vee N(x)))$ 。

③ 用一元谓词 $Q(x)$ 表示“ x 是有理数”, 用特性谓词 $R(x)$ 表示“ x 是实数”。那么, 命题③可谓词逻辑符号化为 $(\exists x)(R(x) \wedge Q(x))$ 。

④ 用一元谓词 $C(x)$ 表示“ x 很聪明”, 用特性谓词 $M(x)$ 表示“ x 是人”。那么, 命题④可谓词逻辑符号化为 $(\exists x)(M(x) \wedge C(x))$ 。

⑤ 用一元谓词 $E(x)$ 表示“ $x+5=3$ ”, 用特性谓词 $R(x)$ 表示“ x 是实数”。那么, 命题⑤可谓词逻辑符号化为 $(\exists x)(R(x) \wedge E(x))$ 。

⑥ 用二元谓词 $F(x, y)$ 表示“ x 要放到 y 上”, 用特性谓词 $D(x)$ 表示“ x 是实验设备”。个体常量 a 表示“工作台 D_1 ”, 那么, 命题⑥可谓词逻辑符号化为 $(\forall x)(D(x) \rightarrow F(x, a))$ 。

自然语言的谓词逻辑符号化表示, 较之于命题逻辑符号化表示要复杂得多。在自然语言的谓词逻辑符号表示中, 不仅需要考虑语句之间的关联词, 而且要将语句拆开分析其句子成分, 考虑谓词、量词、函词、个体词等。这些工作的开展关键在于词性翻译, 以下给出一些常用规则。

(1) **代词**: 对应于个体常量。例如, 人称代词“你”“我”“他”, 指示代词“这个”“那个”等。

(2) **专有名词**: 对应于个体常量。例如, 人名“钱学森”, 地名“北京”等。

(3) **普通名词**: 一般对应于特性谓词, 表示为“ x 是……”; 没有任何修饰词时, 一般还需要引入量词, 如“人需要呼吸氧气”中的“人”就要引入全称量词; 如果被名词所有格或物主代词限制或修饰时, 相当于专有名词, 则对应于函词, 如“他的书”就要引入函词; 名词的所有格或物主代词, 一般对应于函词的个体变元。

(4) **动词**: 对应于谓词, 如“我喜欢书”中的动词“喜欢”。

(5) **形容词**: 对应于特性谓词, 表示为“ x 是……的”。

(6) **数量词**: 对应于量词, 如“所有的植物”中的“所有”和“有些动物”中的“有些”。

(7) **副词**: 与其所修饰的词合并, 不进行单独分析。

(8) **前置词**: 与其所修饰的词合并, 不进行单独分析。

例 5.6 给出下列语句的谓词逻辑符号化表示:

- ① 沃尔玛超市供应一切简易办公用品;
- ② 没有以 0 为后继的自然数;
- ③ 有会说话的机器人;
- ④ 每个实数都存在比它大的另外的实数;
- ⑤ 每个人都有某些专长;
- ⑥ 尽管有人很聪明, 但未必一切人都聪明。

解 ① 分析语句①的成分如下:

沃尔玛超市	供应	一切	简易	办公用品
专用名词	动词	数量词	形容词	普通名词

用个体常量 a 表示“沃尔玛超市”；用二元谓词 $S(x, y)$ 表示“ x 供应 y ”；用特性谓词 $N(x)$ 表示“ x 是简易的”；用特性谓词 $W(x)$ 表示“ x 是办公用品”。那么，语句①可谓词逻辑符号化为 $(\forall x)(N(x) \wedge W(x) \rightarrow S(a, x))$ 。

② 分析语句②的成分如下：

没	有	以	0	为后继的	自然数
关联词	数量词		专有名词	动词	普通名词

用个体常量 a 表示“0”；用二元谓词 $A(x, y)$ 表示“ x 以 y 为后继”；用特性谓词 $N(x)$ 表示“ x 是自然数”。那么，语句②可谓词逻辑符号化为 $\neg(\exists x)(N(x) \wedge A(x, a))$ 。

③ 分析语句③的成分如下：

有	会说话的	机器人
数量词	动词	普通名词

用一元谓词 $S(x)$ 表示“ x 会说话”；用特性谓词 $R(x)$ 表示“ x 是机器人”。那么，语句③可谓词逻辑符号化为 $(\exists x)(R(x) \wedge S(x))$ 。

④ 分析语句④的成分如下：

每个	实数	都存在	比	它	大的	另外的	实数
数量词	普通名词	数量词		代词	动词		普通名词

用二元谓词 $L(x, y)$ 表示“ x 比 y 大”；用特性谓词 $R(x)$ 表示“ x 是实数”。那么，语句④可谓词逻辑符号化为 $(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge L(y, x)))$ 。

⑤ 分析语句⑤的成分如下：

每个	人	都有	某些	专长
数量词	普通名词	动词	数量词	普通名词

用二元谓词 $H(x, y)$ 表示“ x 有 y ”；用特性谓词 $P(x)$ 表示“ x 是人”；用特性谓词 $S(x)$ 表示“ x 是专长”。那么，语句⑤可谓词逻辑符号化为 $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(S(y) \wedge H(x, y)))$ 。

⑥ 分析语句⑥的成分如下：

尽管	有	人	很聪明，	但未必	一切	人	都聪明
联结词	数量词	普通名词	动词	关联词	数量词	普通名词	动词

用一元谓词 $C(x)$ 表示“ x 很聪明”；用特性谓词 $P(x)$ 表示“ x 是人”。那么，语句⑥可谓词逻辑符号化为 $(\exists x)(P(x) \wedge C(x)) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow C(x))$ 。

5.2 谓词逻辑公式

5.2.1 谓词公式的定义

自然语言形式表示的任何可判断真假的陈述句都可以分解为简单陈述句和关联词的连接形式，而简单陈述句又可以依据语句的结构和成分进一步解析为个体词、谓词、函词、量词等。这样自然语言的表示和推理，就可以转化为基于联结词、个体词、谓词、函词、量词等符

号的形式表示和推理。由联结词、个体变元、个体常量、谓词、函词、量词等组成的用以表示复杂命题的符号串,称为**一阶谓词逻辑公式**(first order predicate logic formula),简称为**谓词逻辑公式**(predicate logic formula)或**一阶逻辑公式**(first order logic formula)。下面给出谓词逻辑公式的严格数学定义。

定义 5.6 个体变元、个体常量和函词按照一定规则组成的符号串,称为谓词逻辑的项(term)。项按以下规则生成:

- ① 个体变元或个体常量是项;
- ② 如果 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 元函词, $t_1, t_2, \dots, t_n$ 为项,那么 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项;
- ③ 有限次使用①和②后所得到的符号串才是项。

项的定义使得可以用函词来表示具有某些特定性质或某些特定形式的个体。例如,个体常量 a 和 b 是项;个体变元 x 和 y 是项;函词 $f(x, y) = x + y$ 和 $g(x, y) = x - y$ 是项;函词 $f(a, f(x, y)) = a + (x + y)$ 和 $g(x, f(a, b)) = x - (a + b)$ 也是项。

定义 5.7 设 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 元谓词, $t_1, t_2, \dots, t_n$ 为项,则称 $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 为**原子谓词逻辑公式**(atomic predicate logic formula),简称为**原子谓词公式**或**原子公式**(atomic formula)。

例如,用二元谓词 $H(x, y)$ 表示“ x 在 y 的北方”,用个体常量 a 和 b 分别表示“北京”和“上海”。那么, $H(a, b)$ 表示“北京在上海的北方”, $H(a, b)$ 是一个原子公式。

再如,用二元函词 $f(x, y)$ 表示“ x 和 y 的老乡”,用一元谓词 $R(x)$ 表示“ x 是学习委员”,用个体常量 a 和 c 分别表示“周强”和“江川”。那么, $R(f(a, c))$ 表示“周强和江川的老乡是学习委员”, $R(f(a, c))$ 是一个原子公式。

定义 5.8 原子公式、量词和联结词按照一定规则组成的符号串,称为**谓词逻辑合适公式**(well-formed predicate logic formula),简称为**谓词逻辑公式**或**谓词公式**(predicate formula)。谓词公式按以下规则生成:

- ① 原子公式是谓词公式;
- ② 如果 A 是谓词公式,则 $(\neg A)$ 是谓词公式;
- ③ 如果 A 和 B 是谓词公式,则 $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 是谓词公式;
- ④ 如果 A 是谓词公式,则 $(\forall x)A$ 、 $(\exists x)A$ 是谓词公式;
- ⑤ 有限次使用①~④后所得到的符号串才是谓词公式。

例如,字符串 $\neg H(x, y)$ 、 $H(x, y) \vee G(x)$ 、 $(\exists y)(H(x, y) \vee G(x))$ 、 $(\exists y)H(x, y) \vee G(x)$ 、 $(\exists y)(\forall x)H(x, y)$ 、 $(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow H(x)$ 、 $\neg(\exists y)H(x, y)$ 、 $(\forall x)\neg H(x, y)$ 都满足谓词公式定义中的规则,所以,它们都是谓词公式;字符串 $\neg H(x, \exists y, \neg(H \rightarrow \wedge \exists y, H(\forall y) \vee G(\forall x))$ 、 $(\exists)(H(x, y) \vee G(\forall x))$ 、 $(y)H(x, y) \vee$ 、 $(\forall x)(\forall)(A(x, y))$ 、 $\neg(\exists y)(x, A(y))$ 、 $(\forall x)\neg H(x \rightarrow y)$ 都不满足谓词公式定义中的规则,所以,这些符号串都不是谓词公式。

定义 5.9 在形如 $(\forall x)A(x)$ 或 $(\exists x)A(x)$ 的谓词公式中,称 $A(x)$ 为量词的**辖域**(scope)或**作用域**(function field),或者个体变元 x 的**约束域**(bound field),并称 x 为量词 $\forall$ 或 $\exists$ 的**作用变元**(function variable)或**指导变元**(directed variable)。在辖域中,指导变元 x 的一切出现称为 x 在公式中的**约束出现**(bound occurrence),并称该个体变元为**约束变元**(bound variable)。在谓词公式中,除约束变元外出现的个体变元称为**自由变元**(free

variable), 或者个体变元的自由出现 (free occurrence)。

例 5.7 判断下列谓词公式中的约束变元和自由变元, 并指出约束变元的约束域;

- ① $(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow H(x)$;
- ② $(\forall x)(\exists y)(A(x, y) \wedge B(x) \rightarrow H(x))$;
- ③ $(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x) \rightarrow H(x))$;
- ④ $(\exists x)(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(x) \wedge G(z))$;
- ⑤ $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(x) \wedge G(z))$;
- ⑥ $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(u) \wedge G(z))$ 。

解 ① 个体变元 y 是约束变元, 其约束域为 $A(x, y) \wedge B(x)$; 个体变元 x 既有约束出现, 又有自由出现, 其约束域为 $(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x))$ 。

② 个体变元 x 是约束变元, 其约束域为 $(\exists y)(A(x, y) \wedge B(x) \rightarrow H(x))$; 个体变元 y 是约束变元, 其约束域为 $A(x, y) \wedge B(x) \rightarrow H(x)$ 。

③ 个体变元 x 是自由变元; 个体变元 y 是约束变元, 其约束域为 $A(x, y) \wedge B(x) \rightarrow H(x)$ 。

④ 个体变元 x 和 y 是约束变元, 它们的约束域分别为 $(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(x) \wedge G(z))$ 和 $A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(x) \wedge G(z)$; 个体变元 z 是自由变元。

⑤ 个体变元 x, y 和 z 是约束变元, 它们的约束域分别为 $(\forall y)(\forall z)(A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(x) \wedge G(z))$ 和 $(\forall z)(A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(x) \wedge G(z))$ 及 $A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(x) \wedge G(z)$ 。

⑥ 个体变元 x, y 和 z 是约束变元, 它们的约束域分别为 $(\forall y)(\forall z)(A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(u) \wedge G(z))$ 和 $(\forall z)(A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(u) \wedge G(z))$ 及 $A(x, y) \wedge B(x) \leftrightarrow H(u) \wedge G(z)$; 个体变元 u 是自由变元。

从例 5.7 可知, 在一个谓词公式中, 某一个个体变元的出现既可以是自由的又可以是约束的。例如, 谓词公式 $(\forall x)A(x) \wedge B(x)$ 中的个体变元 x ; 谓词公式 $(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow H(x)$ 中的个体变元 x ; 谓词公式 $(\exists x)(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x)) \leftrightarrow (\exists u)(H(y) \wedge G(u))$ 中的个体变元 y 。

为了使表示和推理过程中不致引起混淆, 我们希望一个个体变元在同一个谓词公式中只以自由或约束中的一种形式出现, 即不同含义的个体变元总是以不同的变元符号来表示。为此, 引入以下两个规则。

规则 1 (约束变元的换名规则):

- ① 在量词的辖域中, 对该量词的作用变元及其约束出现用一个新的个体变元替换;
- ② 新的个体变元一定要有别于换名辖域中的其他所有个体变元。

规则 2 (自由变元的代替规则):

- ① 在谓词公式中, 对某自由变元的所有自由出现都用未曾出现过的个体变元替换;
- ② 新的个体变元在原谓词公式中不能有任何形式的约束出现。

例 5.8 对下列谓词公式进行个体变元替换, 使每一个个体变元有唯一的出现形式:

- ① $(\forall x)A(x) \wedge B(x)$;
- ② $(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow H(x)$;
- ③ $(\exists x)(\forall y)A(x, y) \leftrightarrow (\exists u)(H(y) \wedge G(u))$;

$$④ (\forall x)(A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow (\forall y)H(x, y);$$

$$⑤ (\exists x)(\forall y)(A(x, z) \wedge B(y)) \leftrightarrow (\exists y)(H(y) \wedge G(x));$$

$$⑥ (\forall x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \wedge (\forall x)C(x) \wedge G(x)。$$

解 ① 在谓词公式①中,个体变元 x 既有约束出现又有自由出现。利用规则 2,对 $B(x)$ 中自由出现的个体变元 x 用个体变元 y 替换。所以,谓词公式①进行个体变元替换后的形式为 $(\forall x)A(x) \wedge B(y)$ 。

② 在谓词公式②中,个体变元 x 既有约束出现又有自由出现。利用规则 2,对 $H(x)$ 中自由出现的个体变元 x 用个体变元 z 替换。所以,谓词公式②进行个体变元替换后的形式为 $(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow H(z)$ 。

③ 在谓词公式③中,个体变元 y 既有约束出现又有自由出现。利用规则 2,对 $H(y)$ 中自由出现的个体变元 y 用个体变元 z 替换。所以,谓词公式③进行个体变元替换后的形式为 $(\exists x)(\forall y)A(x, y) \leftrightarrow (\exists u)(H(z) \wedge G(u))$ 。

④ 在谓词公式④中,个体变元 x 和个体变元 y 都既有约束出现,又有自由出现。利用规则 2,对 $A(x, y)$ 中自由出现的个体变元 y 用个体变元 z 替换,对 $H(x, y)$ 中自由出现的个体变元 x 用个体变元 u 替换。所以,谓词公式④进行个体变元替换后的形式为 $(\forall x)(A(x, z) \wedge B(x)) \rightarrow (\forall y)H(u, y)$ 。

⑤ 在谓词公式⑤中,个体变元 x 既有约束出现,又有自由出现;个体变元 y 出现在不同的辖域。利用规则 2,对 $G(x)$ 中自由出现的个体变元 x 用个体变元 w 替换;利用规则 1,对 $(\exists y)(H(y) \wedge G(x))$ 中约束出现的个体变元 y 用个体变元 u 替换。所以,谓词公式⑤进行个体变元替换后的形式为 $(\exists x)(\forall y)(A(x, z) \wedge B(y)) \leftrightarrow (\exists u)(H(u) \wedge G(w))$ 。

⑥ 在谓词公式⑥中,个体变元 x 既有约束出现,又有自由出现,且约束出现在不同的辖域。利用规则 2,对 $G(x)$ 中自由出现的个体变元 x 用个体变元 w 替换;利用规则 1,对 $(\exists x)B(x)$ 中约束出现的个体变元 x 用个体变元 y 替换;对 $(\forall x)C(x)$ 中约束出现的个体变元 x 用个体变元 z 替换。所以,谓词公式⑥进行个体变元替换后的形式为 $(\forall x)A(x) \wedge (\exists y)B(y) \wedge (\forall z)C(z) \wedge G(w)$ 。

5.2.2 谓词公式的解释

谓词公式是自然语言中事实的符号表示,当然谓词公式的表示也有正确与否的区分。谓词公式所表示的事实为真,则称谓词公式的取值为真;谓词公式所表示的事实为假,则称谓词公式的取值为假。谓词公式的真或假的取值称谓词公式的**真值**(value)。谓词公式是由原子公式、逻辑联结词、量词等组成的符号串,只有对它们给予确切或具体的解释后,才能对谓词公式的真值进行分析。

定义 5.10 对谓词公式 G 中一些符号表示的含义进行明确的规定,称谓词公式的一个**赋值**(evaluation)或者**解释**(explanation),记为 I 。谓词公式 G 的一个解释通常由以下 4 部分组成:

- ① 非空的个体域集合 D ;
- ② 对谓词公式 G 中的个体常量,指定 D 中的某个特定的元素;
- ③ 对谓词公式 G 中的 n 元函词,指定 D^n 到 D 中的某个特定的函词;

④ 对谓词公式 G 中的 n 元谓词, 指定 D^n 到 $\{0, 1\}$ 的某个特定的谓词。

定义 5.11 对谓词公式 G 和解释 I , 如果在解释 I 下谓词公式 G 的真值为真, 则称 I 为 G 的**成真解释**(true explanation)或**成真赋值**(true evaluation); 如果在解释 I 下谓词公式 G 的真值为假, 则称 I 为 G 的**成假解释**(false explanation)或**成假赋值**(false evaluation)。

例 5.9 对于谓词公式 $(\forall x)(\forall y) \neg (\forall z)(\neg A(f(x, z), y))$, 说明它在以下解释中的具体含义。

解释 I_1 :

个体域 $D_1 = \{0, 1, 2, \dots\}$;

函词 $f(x, y) = x + y$;

谓词 $A(x, y): x = y$ 。

解释 I_2 :

个体域 D_2 为正有理数集合;

函词 $f(x, y) = x \cdot y$;

谓词 $A(x, y): x = y$ 。

解 在解释 I_1 下, 谓词公式的含义为: 对于 D_1 中所有的 x 和 y , 并非对 D_1 中的每个 z , 都有 $x + z \neq y$ 。换言之, 对于 D_1 中所有的 x 和 y , 存在 D_1 中的 z , 使得 $x + z = y$ 。显然, 当 x 取 3 和 y 取 1 时, 不存在 D_1 中的 z , 使得 $3 + z = 1$ 。所以, 谓词公式在解释 I_1 下的取值为假, 即解释 I_1 是该谓词公式的一个成假解释。

在解释 I_2 下, 谓词公式的含义为: 对于 D_2 中所有的 x 和 y , 存在 D_2 中的 z , 使得 $x \cdot z = y$ 。显然, 谓词公式在解释 I_2 下的取值为真, 即解释 I_2 是该谓词公式的一个成真赋值。

例 5.10 对于谓词公式 $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$, 给出它在以下解释 I 下的真值。

解释 I :

个体域 $D = \{\alpha, \beta\}$;

个体常量 a 指定为 α ;

函词指定为: $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$;

谓词 $P(x)$ 指定为: $P(\alpha) = 1, P(\beta) = 0$;

谓词 $Q(x, y)$ 指定为: $Q(\alpha, \alpha) = 0, Q(\alpha, \beta) = 1, Q(\beta, \alpha) = 1, Q(\beta, \beta) = 1$ 。

解 由于谓词公式是由存在量词加以限制, 根据存在量词的定义, 只要个体域中有一个 x 使得 $P(f(x)) \wedge Q(x, f(a))$ 为真, 则原谓词公式为真; 否则, 只有当个体域中全部的 x 都使得 $P(f(x)) \wedge Q(x, f(a))$ 为假, 则原谓词公式为假。为此, 分别考察 $x = \beta$ 和 $x = \alpha$ 时的真值情况。

当 $x = \beta$ 时, 有

$$f(\beta) = \alpha$$

$$P(f(x)) = P(f(\beta)) = P(\alpha) = 1$$

$$f(a) = f(\alpha) = \beta$$

$$Q(x, f(a)) = Q(\beta, f(\alpha)) = Q(\beta, \beta) = 1$$

$$P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)) = P(f(\beta)) \wedge Q(\beta, f(\alpha)) = 1 \wedge 1 = 1$$

即存在 $x = \beta$, 使得 $P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)) = 1$ 。所以, 谓词公式 $(\exists x)(P(f(x)) \wedge$

$Q(x, f(a))$ 的真值为 1。

例 5.11 给定解释 I ：

个体域 D 为非负整数集合；

个体常量 a 指定为 2；

函词指定为： $f(x, y) = x + y, g(x, y) = x \cdot y$ ；

谓词 $Q(x, y)$ 指定为： $x = y$ 。

给出下列谓词公式的含义：

- ① $(\forall x)Q(g(x, y), x)$ ；
- ② $(\forall x)(\forall y)(Q(f(x, a), y) \rightarrow Q(f(y, a), x))$ ；
- ③ $(\forall x)(\forall y)(\exists z)Q(f(x, y), z)$ ；
- ④ $(\exists x)Q(f(x, x), g(x, x))$ 。

解 ① 谓词公式①的含义为：对于任意非负整数 x ，都有 $x \cdot y = x$ 。由于 $x \cdot y = x$ 是否成立，取决于 y 的取值。如果 y 的取值为 1，则 $x \cdot y = x$ 为真；否则， $x \cdot y = x$ 为假。所以，无法确定谓词公式①的真值，即谓词公式①不是一个命题。

② 谓词公式②的含义为：对于任意非负整数 x 和 y ，如果 $x + 2 = y$ ，则有 $y + 2 = x$ 。显然，当 x 和 y 的取值分别为 0 和 2 时， $x + 2 = y$ 成立，但 $y + 2 = x$ 不成立。所以，谓词公式②的真值为假。

③ 谓词公式③的含义为：对于任意非负整数 x 和 y ，都存在非负整数 z ，使得 $x + y = z$ 。显然，谓词公式③的真值为真。

④ 谓词公式④的含义为：存在非负整数 x ，使得 $x + x = x \cdot x$ 。显然， x 的取值为 0 或 2 时， $x + x = x \cdot x$ 成立。所以，谓词公式④的真值为真。

从上述例子可以看出，谓词公式在不同的解释下可能有不同的真值。同时，并不是所有的解释下都可以得到谓词公式的真值，换言之，在某些解释下，谓词公式不一定是一个命题，如例 5.11 中谓词公式 $(\forall x)Q(g(x, y), x)$ 在解释 I 下就不是一个命题。

5.2.3 谓词公式的分类

在谓词逻辑中，有的谓词公式在任何解释下真值都为真，有些谓词公式在任何解释下真值都为假，而又有有些谓词公式既存在成真解释，又存在成假解释。

定义 5.12 如果谓词公式 A 在所有解释下的真值都为真，则称 A 为**永真谓词公式**，或者 A 是**永真的**，简称为**永真公式**(always true formula)或**重言式**(tautology)，用 1 表示。

例 5.12 判断下列谓词公式是否为重言式：

- ① $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x, y)$ ；
- ② $(\exists x)(\forall y)Q(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)Q(x, y)$ ；
- ③ $((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ ；
- ④ $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$ 。

解 ① 定义解释 I ：个体域 D 为整数集合， $P(x, y)$ 指定为“ $x + y = 0$ ”。在解释 I 下 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 成立。但是， $(\exists y)(\forall x)P(x, y)$ 并不成立。所以，谓词公式①不是重言式。

② 如果 $(\exists x)(\forall y)Q(x, y)$ 成立，那么，存在 a 使得 $(\forall y)Q(a, y)$ 成立，即对于 y 的

任意取值, $Q(a, y)$ 都成立。从而, $(\forall y)(\exists x)Q(x, y)$ 成立。所以, 谓词公式②是重言式。

③ 如果 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 为假, 则存在 a 使得 $\neg(P(a) \vee Q(a))$ 成立, 而 $\neg(P(a) \vee Q(a)) \Leftrightarrow \neg P(a) \wedge \neg Q(a)$, 从而, $(\forall x)P(x)$ 为假且 $(\forall x)Q(x)$ 为假, 即 $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ 为假。所以, 谓词公式③是重言式。

④ 定义解释 **I**: 个体域 D 为自然数集合, $P(x)$ 指定为“ x 是奇数”, $Q(x)$ 指定为“ x 是偶数”。在解释 **I** 下, $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 成立, 但是, $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ 并不成立。所以, 谓词公式④不是重言式。

定义 5.13 如果至少存在一组解释使谓词公式 A 的真值为真, 则称 A 为可满足谓词公式, 或者 A 是可满足的, 简称为可满足公式(satisfiable formula)。

例 5.13 判断下列谓词公式哪些是可满足公式:

- ① $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$;
- ② $(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$;
- ③ $(\exists x)(F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$;
- ④ $(\exists x)(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow (\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x)$ 。

解 ① 定义解释 **I**: 个体域 D 为实数集合, $P(x)$ 指定为“ x 是整数”, $Q(x)$ 指定为“ x 是有理数”。在解释 **I** 下, $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 成立。所以, 谓词公式①是可满足公式。

② 定义解释 **I**: 个体域 D 为自然数集合, $F(x)$ 指定为“ x 是自然数”, $G(x)$ 指定为“ x 是整数”。在解释 **I** 下, $(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$ 成立。所以, 谓词公式②是可满足公式。

③ 如果 $(\exists x)(F(x) \vee G(x))$ 为真, 则存在 a 使得 $F(a) \vee G(a)$ 成立, 即 $F(a)$ 为真或者 $G(a)$ 为真, 从而 $(\exists x)F(x)$ 成立或者 $(\exists x)G(x)$ 成立, 即 $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$ 为真。所以, 谓词公式③是可满足公式, 也是重言式。

④ 如果 $(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$ 为真, 则存在 a 使得 $F(a) \wedge G(a)$ 成立, 即 $F(a)$ 为真且 $G(a)$ 为真, 从而 $(\exists x)F(x)$ 成立且 $(\exists x)G(x)$ 成立, 即 $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x)$ 为真。所以, 谓词公式④是可满足公式, 也是重言式。

定义 5.14 如果谓词公式 A 在所有解释下的真值都为假, 则称 A 为永假谓词公式, 或者 A 是永假的, 简称为永假公式或矛盾式(contradiction)或不可满足公式(unsatisfiable formula), 用 0 表示。

例 5.14 判断下列谓词公式哪些是不可满足公式。

- ① $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$;
- ② $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)\neg P(x)$;
- ③ $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x) \rightarrow (\exists x)(F(x) \wedge G(x))$ 。

解 ① 如果 $(\exists x)\neg P(x)$ 成立, 那么存在 a 使得 $\neg P(a)$ 为真, 即存在 a 使得 $P(a)$ 为假。从而, $(\forall x)P(x)$ 不成立。如果 $(\forall x)P(x)$ 成立, 那么不存在 a 使得 $P(a)$ 为假, 即不存在 a 使得 $\neg P(a)$ 为真。从而, $(\exists x)\neg P(x)$ 不成立。所以, 谓词公式①是不可满足公式。

② 如果 $(\forall x)\neg P(x)$ 成立, 则不存在 a 使得 $\neg P(a)$ 为假, 即不存在 a 使得 $P(a)$ 为真。从而, $(\exists x)P(x)$ 不成立。如果 $(\exists x)P(x)$ 成立, 那么存在 a 使得 $P(a)$ 为真, 即存在 a 使得 $\neg P(a)$ 为假。从而, $(\forall x)\neg P(x)$ 不成立。所以, 谓词公式②是不可满足公式。

③ 定义解释 **I**: 个体域 D 为实数集合, $F(x)$ 指定为“ x 是整数”, $G(x)$ 指定为“ x 是自然数”。在 x 取值为 3 时, $F(3)$ 为真且 $G(3)$ 为真, 从而 $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x)$ 成立且

$(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$ 成立,即 $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x) \rightarrow (\exists x)(F(x) \wedge G(x))$ 为真。所以,谓词公式③是可满足公式,不是矛盾式。

从上述3个例子可以看出,判定一个谓词公式是否为重言式或矛盾式,都要求判断所有的解释满足或不满足该谓词公式。而解释依赖于个体域,个体域可以是有限集合,也可以是无限集合。这样解释的“所有”含义实际上是无法考虑的,这使得判断谓词公式是永真的或者永假的实际上异常困难。

5.2.4 谓词公式的等值式

不同的谓词公式,在相同解释下的真值不一定相同。如果在所有可能的解释下,两个谓词公式的真值都相同,那么,从逻辑解释角度,它们所表述的含义是相同的,或者说是逻辑等价的。

定义 5.15 如果谓词公式 A 和 B 的等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式,则称谓词公式 A 与 B 是逻辑等值的(equivalent),或者是谓词公式的等值式,简称为等值式(equivalent formula),记为 $A \Leftrightarrow B$ 。

例 5.15 判断下列谓词公式是否逻辑等值:

- ① $\neg(\forall x)F(x)$ 和 $(\exists x)\neg F(x)$;
- ② $\neg(\exists x)F(x)$ 和 $(\forall x)\neg F(x)$ 。

解 ① 判断 $\neg(\forall x)F(x)$ 和 $(\exists x)\neg F(x)$ 是否为等值式,就是判断 $\neg(\forall x)F(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg F(x)$ 是否为重言式,也就是判断是否 $\neg(\forall x)F(x) \rightarrow (\exists x)\neg F(x)$ 为重言式且 $(\exists x)\neg F(x) \rightarrow \neg(\forall x)F(x)$ 为重言式。

如果 $\neg(\forall x)F(x)$ 为真,则存在 a 使得 $F(a)$ 为假,即存在 a 使得 $\neg F(a)$ 为真,从而 $(\exists x)\neg F(x)$ 为真;如果 $(\exists x)\neg F(x)$ 为真,则存在 a 使得 $\neg F(a)$ 为真,即存在 a 使得 $F(a)$ 为假,从而 $\neg(\forall x)F(x)$ 为真。所以, $\neg(\forall x)F(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg F(x)$ 。

② 判断 $\neg(\exists x)F(x)$ 和 $(\forall x)\neg F(x)$ 是否为等值式,就是判断 $\neg(\exists x)F(x) \leftrightarrow (\forall x)\neg F(x)$ 是否为重言式,也就是判断是否 $\neg(\exists x)F(x) \rightarrow (\forall x)\neg F(x)$ 为重言式且 $(\forall x)\neg F(x) \rightarrow \neg(\exists x)F(x)$ 为重言式。

如果 $\neg(\exists x)F(x)$ 为真,则不存在 a 使得 $F(a)$ 为真,即所有 x 使得 $F(x)$ 为假,从而 $(\forall x)\neg F(x)$ 为真;如果 $(\forall x)\neg F(x)$ 为真,则所有 x 使得 $F(x)$ 为假,即不存在 a 使得 $F(a)$ 为真,从而 $\neg(\exists x)F(x)$ 为真。所以, $\neg(\exists x)F(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg F(x)$ 。

定义 5.16 设 P 是含有命题变元 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 的命题公式, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 是 n 个谓词公式,用谓词公式 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 替换 P 中命题变元 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的所有出现,所得到的谓词公式称为 P 的代换实例(substitute instance)。

例如, $(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)$, $F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)$ 和 $(\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x)$ 都是 $p \rightarrow q$ 的代换实例。但是, $(\forall x)(F(x) \rightarrow (\forall x)G(x))$, $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$ 和 $(\exists x)(F(x) \rightarrow G(x))$ 则不是 $p \rightarrow q$ 的代换实例。

定理 5.1 重言式的代换实例是重言式,矛盾式的代换实例是矛盾式。

定理 5.1 的证明从略。

例 5.16 判断下列谓词公式是否逻辑等值:

- ① $(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)$ 和 $\neg(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$;

② $(\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)$ 和 $\neg(\exists x)F(x) \rightarrow \neg(\exists x)G(x)$;

③ $\neg((\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x))$ 和 $\neg(\forall x)F(x) \wedge \neg(\forall x)G(x)$;

④ $\neg((\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x))$ 和 $\neg(\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)$ 。

解 ① 在命题公式 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ 中, 将 p 替换为 $(\forall x)F(x)$, 将 q 替换为 $(\forall x)G(x)$, 可得代换实例 $((\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)) \leftrightarrow (\neg(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x))$ 。由于, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ 为重言式, 所以, $((\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)) \leftrightarrow (\neg(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x))$ 为重言式, 即 $(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$ 。

② 在命题公式 $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ 中, 将 p 替换为 $(\exists x)F(x)$, 将 q 替换为 $(\exists x)G(x)$, 可得代换实例 $((\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)) \leftrightarrow (\neg(\exists x)F(x) \rightarrow \neg(\exists x)G(x))$ 。由于 $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ 为重言式, 所以, $((\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)) \leftrightarrow (\neg(\exists x)F(x) \rightarrow \neg(\exists x)G(x))$ 为重言式, 即 $(\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)F(x) \rightarrow \neg(\exists x)G(x)$ 。

③ 在命题公式 $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 中, 将 p 替换为 $(\forall x)F(x)$, 将 q 替换为 $(\forall x)G(x)$, 可得代换实例 $\neg((\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)) \leftrightarrow (\neg(\forall x)F(x) \wedge \neg(\forall x)G(x))$ 。由于, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 为重言式, 所以, $\neg((\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)) \leftrightarrow (\neg(\forall x)F(x) \wedge \neg(\forall x)G(x))$ 为重言式, 即 $\neg((\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x)F(x) \wedge \neg(\forall x)G(x)$ 。

④ 在命题公式 $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ 中, 将 p 替换为 $(\exists x)F(x)$, 将 q 替换为 $(\exists x)G(x)$, 可得代换实例 $\neg((\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x)) \leftrightarrow (\neg(\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x))$ 。由于, $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ 为重言式, 所以, $\neg((\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x)) \leftrightarrow (\neg(\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x))$ 为重言式, 即 $\neg((\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)G(x)$ 。

类似于命题逻辑的等值式, 人们已经证明了一些重要的谓词逻辑等值式。利用这些等值式, 就可以推演出更多的等值式, 这一过程称为谓词逻辑的等值演算, 简称为等值演算 (equivalent calculus)。

下面给出一些基本的等值式 (设 $A(x)$ 、 $B(x)$ 是含有个体变元 x 的自由出现的谓词公式, B 中不含有 x 的出现, $P(x, y)$ 是含有个体变元 x 和 y 的自由出现的谓词公式)。

(1) **命题逻辑中等值式的推广**: 命题公式中的重言式的代换实例都是谓词公式的重言式, 因此命题逻辑中的所有基本等值式的代换实例都是谓词公式的等值式。举例如下。

幂等律:

① $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)$;

② $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)$;

③ $(\exists x)A(x) \vee (\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)$;

④ $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)$ 。

排中律:

① $(\forall x)A(x) \vee \neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow 1$;

② $(\exists x)A(x) \vee \neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow 1$ 。

矛盾律:

① $(\forall x)A(x) \wedge \neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow 0$;

② $(\exists x)A(x) \wedge \neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow 0$ 。

(2) 量词消去律(设个体域为有限集 $D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$):

$$\textcircled{1} (\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n);$$

$$\textcircled{2} (\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)。$$

(3) 量词与否定的交换律:

$$\textcircled{1} \neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x);$$

$$\textcircled{2} \neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)。$$

(4) 量词辖域的收缩与扩张律:

$$\textcircled{1} (\forall x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B;$$

$$\textcircled{2} (\forall x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B;$$

$$\textcircled{3} (\exists x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee B;$$

$$\textcircled{4} (\exists x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge B;$$

$$\textcircled{5} (\forall x)(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \rightarrow B;$$

$$\textcircled{6} (\forall x)(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow (\forall x)A(x);$$

$$\textcircled{7} (\exists x)(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow B;$$

$$\textcircled{8} (\exists x)(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow (\exists x)A(x)。$$

(5) 量词分配律:

$$\textcircled{1} (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x));$$

$$\textcircled{2} (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \vee B(x));$$

$$\textcircled{3} (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x) \vee B(y));$$

$$\textcircled{4} (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y));$$

$$\textcircled{5} (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)。$$

(6) 双量词交换律:

$$\textcircled{1} (\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y);$$

$$\textcircled{2} (\exists x)(\exists y)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)。$$

谓词公式的等值演算,除了要使用上述这些基本等值式外,还要用到以下规则。

(1) 置换规则: 在含有谓词公式 A 的谓词公式 $\Phi(A)$ 中,将所有谓词公式 A 的出现用谓词公式 B 来替换,得到新的谓词公式 $\Phi(B)$,如果 $A \Leftrightarrow B$,那么 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ 。

(2) 换名规则: 在谓词公式 A 中,对某量词辖域内的某约束变元的所有约束出现及相应的指导变元用该量词辖域中未曾出现过的个体变元替换,得到谓词公式 B ,则 $A \Leftrightarrow B$ 。

(3) 代替规则: 在谓词公式 A 中,对某自由出现的个体变元的所有自由出现用 A 中未曾出现过的个体变元替换,得到谓词公式 B ,则 $A \Leftrightarrow B$ 。

例 5.17 证明下列谓词公式的等值式:

$$\textcircled{1} (\forall x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B;$$

$$\textcircled{2} (\forall x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B;$$

$$\textcircled{3} (\exists x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge B;$$

$$\textcircled{4} (\forall x)(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \rightarrow B;$$

$$\textcircled{5} (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x));$$

$$\textcircled{6} (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \vee B(x));$$

$$\textcircled{7} (\exists x)(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow (\exists x)A(x);$$

$$\textcircled{8} (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x).$$

证明 ① $(\forall x)A(x) \vee B \Leftrightarrow 0$, 当且仅当 $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow 0$ 且 $B \Leftrightarrow 0$, 当且仅当 $B \Leftrightarrow 0$ 且任意 a 使得 $A(a) \Leftrightarrow 0$, 当且仅当 $(\forall x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow 0$.

所以, $(\forall x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B$.

② $(\forall x)A(x) \wedge B \Leftrightarrow 1$, 当且仅当 $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow 1$ 且 $B \Leftrightarrow 1$, 当且仅当 $B \Leftrightarrow 1$ 且任意 a 使得 $A(a) \Leftrightarrow 1$, 当且仅当 $(\forall x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow 1$.

所以, $(\forall x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B$.

$$\textcircled{3} (\exists x)(A(x) \wedge B)$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg ((\exists x)(A(x) \wedge B))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\neg (\exists x)(A(x) \wedge B))$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\forall x)(\neg A(x) \vee \neg B))$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\forall x) \neg A(x) \vee \neg B)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x) \neg A(x) \wedge \neg \neg B$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg \neg A(x) \wedge B$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge B$$

$$\textcircled{4} (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg A(x) \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) \neg A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg (\exists x)A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)A(x) \rightarrow B$$

⑤ $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow 1$, 当且仅当任意 a 使得 $A(a) \wedge B(a) \Leftrightarrow 1$, 当且仅当任意 a 使得 $A(a) \Leftrightarrow 1$ 且 $B(a) \Leftrightarrow 1$, 当且仅当 $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow 1$ 且 $(\forall x)B(x) \Leftrightarrow 1$, 当且仅当 $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \Leftrightarrow 1$.

所以, $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$.

$$\textcircled{6} (\exists x)(A(x) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg (\exists x)(A(x) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\neg (\exists x)(A(x) \vee B(x)))$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\forall x)(\neg A(x) \wedge \neg B(x)))$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\forall x) \neg A(x) \wedge (\forall x) \neg B(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x) \neg A(x) \vee \neg (\forall x) \neg B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg \neg A(x) \vee (\exists x) \neg \neg B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$$

$$\textcircled{7} (\exists x)(B \rightarrow A(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg B \vee A(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg B \vee (\exists x)A(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg B \vee (\exists x)A(x)$$

$$\Leftrightarrow B \rightarrow (\exists x)A(x)$$

$$\textcircled{8} (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x) \vee (\exists x) B(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x) A(x) \vee (\exists x) B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) A(x) \rightarrow (\exists x) B(x)$$

例 5.18 设个体域为 $D = \{a, b, c\}$, 消去下列谓词公式中的量词:

① $(\exists x) A(x) \rightarrow (\forall x) B(x)$;

② $(\forall x)(A(x) \vee (\exists y) B(y))$;

③ $(\exists x)(\exists y) P(x, y)$;

④ $(\exists x)(\forall y) P(x, y)$;

⑤ $(\forall x)(\exists y)(A(x) \vee B(y))$;

⑥ $(\forall x)(A(x) \rightarrow (\exists x) B(x))$ 。

解 ① $(\exists x) A(x) \rightarrow (\forall x) B(x)$

$$\Leftrightarrow (A(a) \vee A(b) \vee A(c)) \rightarrow (B(a) \wedge B(b) \wedge B(c))$$

② $(\forall x)(A(x) \vee (\exists y) B(y))$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \vee (B(a) \vee B(b) \vee B(c)))$$

$$\Leftrightarrow (A(a) \vee (B(a) \vee B(b) \vee B(c))) \wedge (A(b) \vee (B(a) \vee B(b) \vee B(c))) \wedge (A(c) \vee (B(a) \vee B(b) \vee B(c)))$$

$$\Leftrightarrow (A(a) \wedge A(b) \wedge A(c)) \vee (B(a) \vee B(b) \vee B(c))$$

③ $(\exists x)(\exists y) P(x, y)$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x, a) \vee P(x, b) \vee P(x, c))$$

$$\Leftrightarrow (P(a, a) \vee P(a, b) \vee P(a, c)) \vee (P(b, a) \vee P(b, b) \vee P(b, c)) \vee (P(c, a) \vee P(c, b) \vee P(c, c))$$

④ $(\exists x)(\forall y) P(x, y)$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x, a) \wedge P(x, b) \wedge P(x, c))$$

$$\Leftrightarrow (P(a, a) \wedge P(a, b) \wedge P(a, c)) \vee (P(b, a) \wedge P(b, b) \wedge P(b, c)) \vee (P(c, a) \wedge P(c, b) \wedge P(c, c))$$

⑤ $(\forall x)(\exists y)(A(x) \vee B(y))$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((A(x) \vee B(a)) \vee (A(x) \vee B(b)) \vee (A(x) \vee B(c)))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(a) \vee B(b) \vee B(c))$$

$$\Leftrightarrow (A(a) \vee B(a) \vee B(b) \vee B(c)) \wedge (A(b) \vee B(a) \vee B(b) \vee B(c)) \wedge (A(c) \vee B(a) \vee B(b) \vee B(c))$$

$$\Leftrightarrow (A(a) \wedge A(b) \wedge A(c)) \vee (B(a) \vee B(b) \vee B(c))$$

⑥ $(\forall x)(A(x) \rightarrow (\exists x) B(x))$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow (B(a) \vee B(b) \vee B(c)))$$

$$\Leftrightarrow (A(a) \rightarrow (B(a) \vee B(b) \vee B(c))) \wedge (A(b) \rightarrow (B(a) \vee B(b) \vee B(c))) \wedge (A(c) \rightarrow (B(a) \vee B(b) \vee B(c)))$$

例 5.19 给定解释 **I**:

个体域 $D = \{2, 3\}$;

个体常量 a 指定为 2;

函词 $f(x)$ 指定为 $f(2) = 3, f(3) = 2$;

谓词 $P(x, y)$ 指定为 $P(2, 2) = P(2, 3) = P(3, 2) = 1, P(3, 3) = 0$;

谓词 $Q(x, y)$ 指定为 $Q(2, 2) = Q(3, 3) = 1, Q(2, 3) = Q(3, 2) = 0$;

谓词 $G(x)$ 指定为 $G(2) = 0, G(3) = 1$ 。

求下列各谓词公式的真值:

$$\textcircled{1} (\forall x)(G(x) \vee P(a, x));$$

$$\textcircled{2} (\exists x)(G(f(x)) \vee Q(f(x), x));$$

$$\textcircled{3} (\forall x)(\exists y)Q(x, y);$$

$$\textcircled{4} (\exists y)(\forall x)Q(x, y)。$$

解 $\textcircled{1} (\forall x)(G(x) \vee P(a, x))$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(G(x) \vee P(2, x))$$

$$\Leftrightarrow (G(2) \vee P(2, 2)) \wedge (G(3) \vee P(2, 3))$$

$$\Leftrightarrow (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 1)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

$$\textcircled{2} (\exists x)(G(f(x)) \vee Q(f(x), x))$$

$$\Leftrightarrow (G(f(2)) \vee Q(f(2), 2)) \vee (G(f(3)) \vee Q(f(3), 3))$$

$$\Leftrightarrow (G(3) \vee Q(3, 2)) \vee (G(2) \vee Q(2, 3))$$

$$\Leftrightarrow (1 \vee 0) \vee (0 \vee 0)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

$$\textcircled{3} (\forall x)(\exists y)Q(x, y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(Q(x, 2) \vee Q(x, 3))$$

$$\Leftrightarrow (Q(2, 2) \vee Q(2, 3)) \wedge (Q(3, 2) \vee Q(3, 3))$$

$$\Leftrightarrow (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

$$\textcircled{4} (\exists y)(\forall x)Q(x, y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(Q(2, y) \wedge Q(3, y))$$

$$\Leftrightarrow (Q(2, 2) \wedge Q(3, 2)) \vee (Q(2, 3) \wedge Q(3, 3))$$

$$\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1)$$

$$\Leftrightarrow 0$$

在解释 I 下,谓词公式 $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ 和 $(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$ 的真值不同。由此可以看出,量词的次序并不一定能随意调换。

例 5.20 证明下列谓词公式的等值式:

$$\textcircled{1} \neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x));$$

$$\textcircled{2} \neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x));$$

$$\textcircled{3} \neg(\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y) \rightarrow P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y) \wedge \neg P(x, y));$$

$$\textcircled{4} \neg(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y) \wedge P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y) \rightarrow \neg P(x, y));$$

$$\textcircled{5} (\forall x)A(x) \rightarrow B(x) \Leftrightarrow (\exists y)(A(y) \rightarrow B(x));$$

$$\textcircled{6} \neg(\forall x)(A(x) \vee B(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))。$$

证明 $\textcircled{1} \neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

$$\Leftrightarrow (\forall x) \neg(A(x) \wedge B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg A(x) \vee \neg B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

$$\textcircled{2} \neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg(A(x) \rightarrow B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg(\neg A(x) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg \neg A(x) \wedge \neg B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$$

$$\textcircled{3} \neg(\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y) \rightarrow P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg(\forall y)(A(x) \wedge B(y) \rightarrow P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y) \neg(A(x) \wedge B(y) \rightarrow P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y) \neg(\neg(A(x) \wedge B(y)) \vee P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\neg \neg(A(x) \wedge B(y)) \wedge \neg P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y) \wedge \neg P(x, y))$$

$$\textcircled{4} \neg(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y) \wedge P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) \neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y) \wedge P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \neg(A(x) \wedge B(y) \wedge P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg(A(x) \wedge B(y)) \vee \neg P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y) \rightarrow \neg P(x, y))$$

$$\textcircled{5} (\forall x)A(x) \rightarrow B(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x) \vee B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y) \neg A(y) \vee B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(\neg A(y) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(A(y) \rightarrow B(x))$$

$$\textcircled{6} \neg(\forall x)(A(x) \vee B(x) \rightarrow B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg(\neg(A(x) \vee B(x)) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)((A(x) \vee B(x)) \wedge \neg B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)((A(x) \wedge \neg B(x)) \vee (B(x) \wedge \neg B(x)))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)((A(x) \wedge \neg B(x)) \vee 0)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$$

5.2.5 谓词公式的范式

在命题逻辑中,命题公式都可以转换为与之等值的规范型或范式,范式对于命题公式的研究具有重要的作用。类似地,对于谓词公式来说,也有规范型,即谓词公式的范式(normal form)。

定义 5.17 对于谓词公式 G ,如果 G 中的所有量词都位于表达式的最左端,且量词的辖域都延伸到该公式的末端,即具有形式

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \cdots (Q_n x_n) M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

式中, $Q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为量词 $\forall$ 或 $\exists$; $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中不含有量词, 则称 G 为谓词公式的前束范式, 简称为前束范式 (prenex normal form), 并称 $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 G 的母式 (matrix)。

例如, $(\forall x)(\forall y)(A(x) \vee B(y) \rightarrow \neg P(x, y))$ 和 $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(A(x) \wedge B(y, z) \wedge P(x, y, z))$ 及 $(\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow A(x, y))$ 都是前束范式, 而 $(\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y) \rightarrow \neg (\forall y)P(x, y))$ 和 $(\exists x) \neg (\exists y)P(x, y, z)$ 以及 $(\exists y)(\forall z)(A(x) \wedge B(y, z) \wedge (\exists x)P(x, y, z))$ 和 $(\forall y)(P(y) \rightarrow (\exists x)A(x, y))$ 都不是前束范式。

定理 5.2 任意谓词公式都存在与之等值的前束范式。

证明 对于任意谓词公式 G , 可通过下述步骤将其转化为与之等值的前束范式:

步骤一, 消去谓词公式中的联结词“ $\rightarrow$ ”“ $\leftrightarrow$ ”;

步骤二, 运用德·摩根律, 将“ $\neg$ ”移到原子谓词公式的前端;

步骤三, 通过谓词等值公式将所有量词移到公式的前端。

经过上述步骤, 便可求得谓词公式 G 的前束范式, 由于每一步骤都是采用谓词公式的等值演算, 所以, 得到的前束范式与原谓词公式 G 等值。证毕。

例 5.21 求下列谓词公式的前束范式:

- ① $(\forall x)A(x) \wedge \neg (\exists x)B(x)$;
- ② $(\forall x)(A(x) \vee \neg (\exists y)B(x, y))$;
- ③ $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \rightarrow (\exists x)B(x)$;
- ④ $\neg (\forall x)A(x, y) \rightarrow (\forall y) \neg B(x, y)$;
- ⑤ $(\exists x)A(x) \rightarrow ((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall x)B(x))$;
- ⑥ $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow (\exists y)B(y)) \rightarrow (\forall x)Q(x, y)$ 。

解 ① $(\forall x)A(x) \wedge \neg (\exists x)B(x)$

$$\Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x) \neg B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \wedge \neg B(x))$$

② $(\forall x)(A(x) \vee \neg (\exists y)B(x, y))$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \vee (\forall y) \neg B(x, y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x) \vee \neg B(x, y))$$

③ $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \rightarrow (\exists x)B(x)$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x)(\exists y)A(x, y) \vee (\exists x)B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg (\exists y)A(x, y) \vee (\exists x)B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y) \neg A(x, y) \vee (\exists x)B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)((\forall y) \neg A(x, y) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg A(x, y) \vee B(x))$$

④ $\neg (\forall x)A(x, y) \rightarrow (\forall y) \neg B(x, y)$

$$\Leftrightarrow \neg \neg (\forall x)A(x, y) \vee (\forall y) \neg B(x, y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)A(x, y) \vee (\forall y) \neg B(x, y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)A(x, u) \vee (\forall y) \neg B(v, y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x, u) \vee \neg B(v, y))$$

⑤ $(\exists x)A(x) \rightarrow ((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall x)B(x))$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \neg(\exists x)A(x) \vee (\neg(\exists y)B(y) \vee (\forall x)B(x)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x) \vee (\forall y)\neg B(y) \vee (\forall z)B(z) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg A(x) \vee \neg B(y) \vee B(z)) \\
\textcircled{6} &(\forall x)(P(x,y) \rightarrow (\exists y)B(y)) \rightarrow (\forall x)Q(x,y) \\
&\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x,y) \vee (\exists y)B(y)) \vee (\forall x)Q(x,y) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg P(x,y) \vee (\exists y)B(y)) \vee (\forall x)Q(x,y) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(\neg\neg P(x,y) \wedge \neg(\exists y)B(y)) \vee (\forall x)Q(x,y) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(P(x,y) \wedge (\forall y)\neg B(y)) \vee (\forall x)Q(x,y) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(P(x,z) \wedge (\forall y)\neg B(y)) \vee (\forall u)Q(u,z) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(P(x,z) \wedge \neg B(y)) \vee (\forall u)Q(u,z) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall u)((P(x,z) \wedge \neg B(y)) \vee Q(u,z))
\end{aligned}$$

例 5.22 举例说明谓词公式的前束范式并不唯一。

解 考察谓词公式 $(\exists x)A(x) \vee \neg(\forall x)B(x)$, 进行以下等值演算:

$$\begin{aligned}
&(\exists x)A(x) \vee \neg(\forall x)B(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)\neg B(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists y)\neg B(y) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \vee (\exists y)\neg B(y)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x) \vee \neg B(y)) \\
&(\exists x)A(x) \vee \neg(\forall x)B(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)\neg B(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \vee \neg B(x))
\end{aligned}$$

显然, $(\exists x)(\exists y)(A(x) \vee \neg B(y))$ 和 $(\exists x)(A(x) \vee \neg B(x))$ 都是谓词公式 $(\exists x)A(x) \vee \neg(\forall x)B(x)$ 的前束范式。所以, 谓词公式的前束范式不一定唯一。

定义 5.18 对于谓词公式 G 的前束范式 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 通过下列方式消去 G 中的存在量词, 所得到的不含有存在量词的表达式称为 G 的**斯柯伦标准型**(Skolem standard form)或**斯柯伦范式**(Skolem normal form)。

① 如果 Q_i 是存在量词, 且 Q_i 的左边没有全称量词, 则直接用不同于 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中任何其他个体常量的个体常量 a 来取代 x_i 在 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的一切出现。

② 如果 Q_i 是存在量词, 且 Q_i 的左边有全称量词 $(\forall x_j), (\forall x_k), \cdots, (\forall x_r)$, 则直接用不同于 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中任何其他函词的函词 $f(x_j, x_k, \cdots, x_r)$ 来取代 x_i 在 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的一切出现。

例 5.23 求下列谓词公式的斯柯伦范式:

- ① $(\forall x)(\exists y)(\neg A(x, y) \vee B(x))$;
- ② $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(A(x) \wedge B(y, z) \wedge P(x, y, z))$;
- ③ $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)$ 。

解 ① 由于 $(\exists y)$ 左边有全称量词 $(\forall x)$, 所以用一个函词 $f(x)$ 来代替谓词公式中的 y , 并消去 $(\exists y)$ 。可得谓词公式①的斯柯伦范式为

$$(\forall x)(\neg A(x, f(x)) \vee B(x))$$

② 由于 $(\exists x)$ 左边没有全称量词, 所以直接用一个个体的常量 a 来代替谓词公式中的 x ,

并消去 $(\exists x)$; 由于 $(\exists z)$ 左边有全称量词 $(\forall y)$, 所以用一个函词 $f(y)$ 来代替谓词公式中的 z , 并消去 $(\exists z)$ 。可得谓词公式②的斯柯伦范式为

$$(\forall y)(A(a) \wedge B(y, f(y)) \wedge P(a, y, f(y)))$$

③ 由于 $(\exists x)$ 左边没有全称量词, 所以直接用一个个体常量 a 来代替谓词公式③中的 x , 并消去 $(\exists x)$; 由于 $(\exists u)$ 左边有全称量词 $(\forall y)$ 和 $(\forall z)$, 所以用一个函词 $f(y, z)$ 来代替谓词公式③中的 u , 并消去 $(\exists u)$; 由于 $(\exists w)$ 左边有全称量词 $(\forall y)$ 和 $(\forall z)$ 及 $(\forall v)$, 所以用一个函词 $g(y, z, v)$ 来代替谓词公式③中的 w , 并消去 $(\exists w)$ 。可得谓词公式③所对应的斯柯伦范式为

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$$

值得说明的是, 前束范式并不一定与其斯柯伦范式等值。例如, $(\exists x)A(x)$ 的斯柯伦范式为 $A(a)$, 但 $(\exists x)A(x)$ 和 $A(a)$ 不等值。因为, 对于解释 I : 个体域 $D = \{1, 2\}$, $A(1)=0, A(2)=1$, 显然, 当 a 指定为1时, $A(a)$ 和 $(\exists x)A(x)$ 的真值不同。尽管如此, 斯柯伦范式有定理5.3和定理5.4表述的重要性质。

定理 5.3 设 S 是谓词公式 G 的斯柯伦范式, G 是可满足公式当且仅当 S 是可满足公式。

证明 对于谓词公式 G 的前束范式 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 设 Q_r 是 G 中从最左端开始第一个出现的存在量词, 令

$$G_1 = (\forall x_1)\cdots(\forall x_{r-1})(Q_{r+1}x_{r+1})\cdots(Q_nx_n)M(x_1, \cdots, x_{r-1}, \\ f(x_1, \cdots, x_{r-1}), x_{r+1}, \cdots, x_n)$$

式中, $f(x_1, \cdots, x_{r-1})$ 为替换 x_r 的函词。

设个体域为 D , 取一个使 G_1 为真的解释 I 。那么, 对每一组 $(x'_1, \cdots, x'_{r-1}) \in D^{r-1}$, 都有 $f(x'_1, \cdots, x'_{r-1}) \in D$, 使得 $(Q_{r+1}x_{r+1})\cdots(Q_nx_n)M(x'_1, \cdots, x'_{r-1}, f(x'_1, \cdots, x'_{r-1}), \cdots, x_n)$ 在解释 I 下真值为真。从而, $(\forall x_1)\cdots(\forall x_{r-1})(\exists x_r)(Q_{r+1}x_{r+1})\cdots(Q_nx_n)M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在解释 I 下真值为真。

反之, 取一个使 G 为真的解释 I 。那么, 对每一组 $(x'_1, \cdots, x'_{r-1}) \in D^{r-1}$, 都存在 $x'_r \in D$, 使得 $(Q_{r+1}x_{r+1})\cdots(Q_nx_n)M(x'_1, \cdots, x'_{r-1}, x'_r, \cdots, x_n)$ 在解释 I 下真值为真。现将解释 I 扩展为解释 I' , 使其包含对函词 $f(x_1, \cdots, x_{r-1})$ 的以下指定: 对于每一组 $(x'_1, \cdots, x'_{r-1}) \in D^{r-1}$, $f(x'_1, \cdots, x'_{r-1}) = x'_r$ 。于是, 在解释 I' 下 G_1 的真值为真。

同理, 对 G_1 从左往右找下一个存在量词, 用定义5.18中的方式构造函数词, 进行个体变元代替得到 G_2 , 则 G_1 的可满足性等价于 G_2 的可满足性。以此类推, 可以证明谓词公式 G 的可满足性等价于其斯柯伦范式 S 的可满足性。证毕。

例如, 谓词公式 $G = (\forall x)(\exists y)A(x, y)$ 的斯柯伦范式为 $S = (\forall x)A(x, f(x))$ 。设个体域 $D = \{1, 2\}$, 取解释 I :

函词 $f(x)$ 指定为 $f(1)=2, f(2)=1$;

谓词 $A(x, y)$ 指定为 $A(1, 1)=0, A(1, 2)=1, A(2, 1)=1, A(2, 2)=0$ 。显然, 在解释 I 下, S 的真值为

$$(\forall x)A(x, f(x)) \Leftrightarrow A(1, f(1)) \wedge A(2, f(2)) \Leftrightarrow A(1, 2) \wedge A(2, 1) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$$

在解释 I 下, G 的真值为

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x, 1) \vee A(x, 2)) \Leftrightarrow$$

$$(A(1,1) \vee A(1,2)) \wedge (A(2,1) \vee A(2,2)) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$$

反之,取解释 I :

谓词 $A(x, y)$ 指定为 $A(1,1)=1, A(1,2)=0, A(2,1)=1, A(2,2)=0$ 。

显然,在解释 I 下, G 的真值为

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x,1) \vee A(x,2)) \Leftrightarrow (A(1,1) \vee A(1,2)) \wedge (A(2,1) \vee A(2,2)) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$$

扩展解释 I 为 I' :

函数 $f(x)$ 指定为 $f(1)=1, f(2)=1$;

谓词 $A(x, y)$ 指定为 $A(1,1)=1, A(1,2)=0, A(2,1)=1, A(2,2)=0$ 。

在解释 I 下, S 的真值为

$$(\forall x)A(x, f(x)) \Leftrightarrow A(1, f(1)) \wedge A(2, f(2)) \Leftrightarrow A(1,1) \wedge A(2,1) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1。$$

由上述知,谓词公式 $G=(\forall x)(\exists y)A(x, y)$ 与其斯柯伦范式 $S=(\forall x)A(x, f(x))$ 的可满足性等价。

定理 5.4 设 S 是谓词公式 G 的斯柯伦范式, G 是不可满足的当且仅当 S 是不可满足的。

定理 5.4 的证明从略。

5.3 谓词逻辑推理

谓词逻辑是命题逻辑的进一步发展,因此命题逻辑的推理理论在谓词逻辑中几乎可以完全照搬,只不过谓词逻辑所涉及的是谓词公式。**谓词逻辑推理**(predicate logic reasoning)是由已知的谓词公式为前提推出作为结论的谓词公式的过程。

定义 5.19 对于谓词公式 A 和 B ,如果蕴含式 $A \rightarrow B$ 是永真的,那么称该蕴含式为谓词公式的永真蕴含式或谓词公式的重言蕴含式,简称为**永真蕴含式**(always true implication)或**重言蕴含式**(tautology implication),记为 $A \Rightarrow B$ 。

例 5.24 判断下列谓词公式的蕴含式是否为永真蕴含式:

- ① $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)A(x) \vee B(x, y)$;
- ② $(\forall x)A(x) \wedge (\neg(\forall x)A(x) \vee B(x)) \rightarrow (\forall x)A(x)$;
- ③ $\neg((\forall x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)) \rightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee \neg(\exists y)B(y)$;
- ④ $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$ 。

解 ① $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)A(x) \vee B(x, y)$
 $\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee ((\forall x)A(x) \vee B(x, y))$
 $\Leftrightarrow (\neg(\forall x)A(x) \vee (\forall x)A(x)) \vee B(x, y)$
 $\Leftrightarrow 1 \vee B(x, y)$
 $\Leftrightarrow 1$

所以, $(\forall x)A(x) \Rightarrow (\forall x)A(x) \vee B(x, y)$ 。

② $(\forall x)A(x) \wedge (\neg(\forall x)A(x) \vee B(x)) \rightarrow (\forall x)A(x)$
 $\Leftrightarrow \neg((\forall x)A(x) \wedge (\neg(\forall x)A(x) \vee B(x))) \vee (\forall x)A(x)$
 $\Leftrightarrow (\neg(\forall x)A(x) \vee \neg(\neg(\forall x)A(x) \vee B(x))) \vee (\forall x)A(x)$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (\neg(\forall x)A(x) \vee (\forall x)A(x)) \vee \neg(\neg(\forall x)A(x) \vee B(x)) \\
 &\Leftrightarrow 1 \vee \neg(\neg(\forall x)A(x) \vee B(x)) \\
 &\Leftrightarrow 1
 \end{aligned}$$

所以, $(\forall x)A(x) \wedge (\neg(\forall x)A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x)$ 。

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad &\neg((\forall x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)) \rightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee \neg(\exists y)B(y) \\
 &\Leftrightarrow \neg\neg((\forall x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)) \vee \neg(\forall x)A(x) \vee \neg(\exists y)B(y) \\
 &\Leftrightarrow ((\forall x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)) \vee \neg(\forall x)A(x) \vee \neg(\exists y)B(y) \\
 &\Leftrightarrow (((\forall x)A(x) \vee \neg(\forall x)A(x)) \wedge ((\exists y)B(y) \vee \neg(\exists y)B(y))) \vee \neg(\exists y)B(y) \\
 &\Leftrightarrow (1 \wedge ((\exists y)B(y) \vee \neg(\exists y)B(y))) \vee \neg(\exists y)B(y) \\
 &\Leftrightarrow ((\exists y)B(y) \vee \neg(\exists y)B(y)) \vee \neg(\forall x)A(x) \\
 &\Leftrightarrow 1 \vee \neg(\forall x)A(x) \\
 &\Leftrightarrow 1
 \end{aligned}$$

所以, $\neg((\forall x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)) \Rightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee \neg(\exists y)B(y)$ 。

④ 取解释 **I**: 个体域 D 为自然数集合, 谓词 $A(x)$ 表示“ x 是偶数”, 谓词 $B(x)$ 表示“ x 是奇数”。显然, 在解释 **I** 下, $(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ 为真, $(\forall x)A(x)$ 为假, $(\forall x)B(x)$ 为假。从而, $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$ 为假, 即 $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x))$ 的真值为假。所以, 蕴含式④不是永真蕴含式。

命题逻辑中介绍的重言蕴含式, 在谓词逻辑中的代换实例都是谓词逻辑的永真蕴含式。同时, 由于等价式和蕴含式之间的关系, 每一个等值式均可当作两个永真蕴含式来使用。例如, 下列都是永真蕴含式。

$$\begin{aligned}
 &(\forall x)A(x) \Rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\exists y)B(y) && \text{(附加式)} \\
 &(\forall x)A(x) \wedge ((\forall x)A(x) \rightarrow (\exists y)B(y)) \Rightarrow (\exists y)B(y) && \text{(假言推论)} \\
 &\neg(\exists y)B(y) \wedge ((\forall x)A(x) \rightarrow (\exists y)B(y)) \Rightarrow \neg(\forall x)A(x) && \text{(拒取式)} \\
 &\neg((\forall x)A(x) \wedge (\exists x)B(x, y)) \Rightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee \neg(\exists x)B(x, y) && \text{(德·摩根律)} \\
 &\neg(\forall x)A(x) \vee \neg(\exists x)B(x, y) \Rightarrow \neg((\forall x)A(x) \wedge (\exists x)B(x, y)) && \text{(德·摩根律)}
 \end{aligned}$$

在谓词逻辑中, 增加了量词这一新要素, 为此下面给出关于量词分配的几个常用的永真蕴含式:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad &(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x)); \\
 \textcircled{2} \quad &(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x); \\
 \textcircled{3} \quad &(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x); \\
 \textcircled{4} \quad &(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x); \\
 \textcircled{5} \quad &(\forall x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall x)A(x, x); \\
 \textcircled{6} \quad &(\exists x)A(x, x) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A(x, y); \\
 \textcircled{7} \quad &(\exists x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x, y)。
 \end{aligned}$$

例 5.25 证明下列永真蕴含式:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad &(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x); \\
 \textcircled{2} \quad &(\forall x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall x)A(x, x); \\
 \textcircled{3} \quad &(\exists x)A(x, x) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A(x, y); \\
 \textcircled{4} \quad &(\forall x)(\forall y)(A(x) \leftrightarrow B(y)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \leftrightarrow (\forall y)B(y)。
 \end{aligned}$$

证明 ① 如果 $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ 为真, 那么必有 a 使 $A(a) \rightarrow B(a)$ 为真。进而, 如果 $A(a)$ 为真, 则 $B(a)$ 为真, 即 $(\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$ 为真。所以, $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$ 。

② 如果 $(\forall x)(\forall y)A(x, y)$ 为真, 那么任意 x 和 y 使得 $A(x, y)$ 为真, 从而任意 x 使得 $A(x, x)$ 为真, 即 $(\forall x)A(x, x)$ 为真。所以, $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall x)A(x, x)$ 。

③ 如果 $(\exists x)A(x, x)$ 为真, 那么存在 a 使得 $A(a, a)$ 为真, 从而 $(\exists x)(\exists y)A(x, y)$ 为真。所以, $(\exists x)A(x, x) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A(x, y)$ 。

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{4} (\forall x)(\forall y)(A(x) \leftrightarrow B(y)) \\
 & \Rightarrow (\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x)) \\
 & \Leftrightarrow (\forall x)((A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow A(x))) \\
 & \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (\forall x)(B(x) \rightarrow A(x)) \\
 & \Rightarrow ((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)) \wedge ((\forall x)B(x) \rightarrow (\forall x)A(x)) \\
 & \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \leftrightarrow (\forall y)B(y)
 \end{aligned}$$

定义 5.20 对于谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 和 B , 如果 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ 是永真蕴含式, 则称谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 到谓词公式 B 是一个**有效推理**(effective reasoning), 或者称谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 到谓词公式 B 的推理是**有效的**(effective)或**正确的**。并称谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是推理的**前提**(premise), 谓词公式 B 是以谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为前提的推理的**逻辑结果**(logic conclusion)或**有效结论**(effective conclusion), 并记为 $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$, 或 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 。

例如, 对于谓词公式 $(\forall x)A(x)$ 和 $(\forall x)A(x) \rightarrow (\exists y)B(y)$ 及 $(\exists y)B(y)$, 由于 $(\forall x)A(x) \wedge ((\forall x)A(x) \rightarrow (\exists y)B(y)) \Rightarrow (\exists y)B(y)$, 所以, 谓词公式 $(\exists y)B(y)$ 是谓词公式 $(\forall x)A(x)$ 和 $(\forall x)A(x) \rightarrow (\exists y)B(y)$ 的有效结论, 或者, 谓词公式 $(\forall x)A(x)$ 和 $(\forall x)A(x) \rightarrow (\exists y)B(y)$ 到谓词公式 $(\exists y)B(y)$ 是一个有效推理, 并记为 $(\forall x)A(x), (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists y)B(y) \vdash (\exists y)B(y)$ 。

在谓词逻辑推理中, 推理的前提和结论中可能存在受到量词约束的个体变元。为了确立前提和结论之间的内在联系, 必须适时地消去和添加量词。下面给出几个量词有关的量词消去或引入规则。

全称量词消去规则(Universal Specification, US): $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$ 。

全称量词引入规则(Universal Generalization, UG): $A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$ 。

存在量词消去规则(Existential Specification, ES): $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$ 。

存在量词引入规则(Existential Generalization, EG): $A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$ 。

全称量词消去规则的含义在于: 若个体域中所有个体 x 都具有性质 A , 则个体域中任意一个个体 y 也必具有性质 A 。当 $A(x)$ 中不再含有量词和其他个体变元时, 这条规则明显成立。但当 $A(x)$ 中还含有量词和其他个体变元时, 运用该规则的条件是: 限制 y 不是 $A(x)$ 中的约束变元。该规则还有一个推广形式: $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$, 其中 c 为一个个体常量。

全称量词引入规则的含义在于: 若个体域中任意一个个体 y 都具有性质 A , 则个体域中所有个体 x 也都具有性质 A 。运用该规则的条件是: y 是个体域中的任意一个个体, 且 y 取任何值时 A 都为真; 个体变元 x 不是 $A(y)$ 中的约束变元。

存在量词消去规则的含义在于：若个体域中存在个体 x 具有性质 A ，则个体域中必有某个体 c 具有性质 A 。运用该规则的条件是： c 是个体域中某个确定的个体常量，且使 A 为真； c 不在 $A(x)$ 中出现过； $(\exists x)A(x)$ 中没有自由变元。

存在量词引入规则的含义在于：若个体域中存在个体 c 具有性质 A ，则 $(\exists x)A(x)$ 必为真。运用该规则的限制条件是： x 不在 $A(c)$ 中出现。

在谓词逻辑中，谓词公式的解释依赖于个体域，求取谓词公式在所有解释下的真值往往非常烦琐甚至异常困难，这就导致命题逻辑中的简单证明推理在谓词逻辑中不容易实施。谓词逻辑推理通常采用的是基于永真蕴含式或推理规则的构造证明推理。

例 5.26 证明以下推理：“所有计算机科学与技术专业的本科生都要修离散数学，王强是计算机科学与技术专业的本科生。所以，王强要修离散数学。”

证明 对命题进行符号化。

谓词 $C(x)$ ： x 是计算机科学与技术专业的本科生。

谓词 $D(x)$ ： x 要修离散数学。

个体常量 a ：王强。

前提： $(\forall x)(C(x) \rightarrow D(x)), C(a)$ 。

结论： $D(a)$ 。

- | | |
|--|------------|
| (1) $(\forall x)(C(x) \rightarrow D(x))$ | 前提引入 |
| (2) $C(a) \rightarrow D(a)$ | (1)US 规则 |
| (3) $C(a)$ | 前提引入 |
| (4) $D(a)$ | (2)(3)假言推论 |

例 5.27 证明以下推理：“一切科学规律都具有客观性。所有政治经济学规律是科学规律。按劳分配规律是政治经济学规律。所以，按劳分配规律具有客观性。”

证明 对命题进行符号化。

谓词 $S(x)$ ： x 是科学规律。

谓词 $P(x)$ ： x 具有客观性。

谓词 $R(x)$ ： x 是政治经济学规律。

个体常量 a ：按劳分配规律。

前提： $(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x)), (\forall x)(R(x) \rightarrow S(x)), R(a)$ 。

结论： $P(a)$ 。

- | | |
|--|-------------|
| (1) $(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$ | 前提引入 |
| (2) $S(a) \rightarrow P(a)$ | (1)US 规则 |
| (3) $(\forall x)(R(x) \rightarrow S(x))$ | 前提引入 |
| (4) $R(a) \rightarrow S(a)$ | (3)US 规则 |
| (5) $R(a) \rightarrow P(a)$ | (2)(4)条件三段论 |
| (6) $R(a)$ | 前提引入 |
| (7) $P(a)$ | (5)(6)假言推论 |

例 5.28 证明 $\neg(\exists x)(A(x) \wedge C(x)), (\forall x)(B(x) \rightarrow C(x)) \vdash (\forall x)(B(x) \rightarrow \neg A(x))$ 。

- 证明**
- | | |
|--|--------------|
| (1) $\neg(\exists x)(A(x) \wedge C(x))$ | 前提引入 |
| (2) $(\forall x) \neg(A(x) \wedge C(x))$ | (1)量词与否定的交换律 |

- | | |
|--|--------------|
| (3) $(\forall x)(\neg A(x) \vee \neg C(x))$ | (2) 德·摩根律 |
| (4) $(\forall x)(\neg C(x) \vee \neg A(x))$ | (3) 交换律 |
| (5) $(\forall x)(C(x) \rightarrow \neg A(x))$ | (4) 蕴含等值式 |
| (6) $C(y) \rightarrow \neg A(y)$ | (5) US 规则 |
| (7) $(\forall x)(B(x) \rightarrow C(x))$ | 前提引入 |
| (8) $B(y) \rightarrow C(y)$ | (7) US 规则 |
| (9) $B(y) \rightarrow \neg A(y)$ | (6)(8) 条件三段论 |
| (10) $(\forall x)(B(x) \rightarrow \neg A(x))$ | (9) UG 规则 |

定理 5.5 谓词公式 B 是谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的有效结论当且仅当谓词公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ 是矛盾式。

证明 由定义 5.20 知,谓词公式 B 是谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的有效结论当且仅当谓词公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ 是重言式。由于

$$\begin{aligned} & A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B) \end{aligned}$$

所以,谓词公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ 是重言式当且仅当谓词公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ 是矛盾式,即谓词公式 B 是谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的有效结论当且仅当谓词公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ 是矛盾式。证毕。

定理 5.5 是谓词逻辑推理的理论基础。一方面,根据定义 5.20,只要证明谓词公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ 是重言式,那么谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的有效结论就是谓词公式 B ; 另一方面,谓词公式 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的有效结论是谓词公式 B ,也可以通过证明谓词公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ 是矛盾式而得到证明。前者称为谓词逻辑推理的**直接方法**(direct method),后者称为谓词逻辑推理的**间接方法**(indirect method)或**反证法**。

例 5.29 用反证法证明以下推理:“学术委员会的每个成员都是博士并且是教授。有些学术委员会成员是青年人。因而,有的成员是青年教授。”

证明 对命题进行符号化。

谓词 $F(x)$: x 是学术委员会成员。

谓词 $G(x)$: x 是教授。

谓词 $H(x)$: x 是博士。

谓词 $R(x)$: x 是青年人。

前提: $(\forall x)(F(x) \rightarrow (G(x) \wedge H(x))), (\exists x)(F(x) \wedge R(x))$ 。

结论: $(\exists x)(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$ 。

- | | |
|--|-------------|
| (1) $\neg(\exists x)(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$ | 结论的否定引入 |
| (2) $(\exists x)(F(x) \wedge R(x))$ | 前提引入 |
| (3) $F(c) \wedge R(c)$ | (2) ES 规则 |
| (4) $(\forall x)(F(x) \rightarrow (G(x) \wedge H(x)))$ | 前提引入 |
| (5) $F(c) \rightarrow (G(c) \wedge H(c))$ | (4) US 规则 |
| (6) $F(c)$ | (3) 化简式 |
| (7) $G(c) \wedge H(c)$ | (5)(6) 假言推论 |

- | | |
|---|--------------|
| (8) $G(c)$ | (7) 化简式 |
| (9) $F(c) \wedge R(c) \wedge G(c)$ | (3)(8) 合取引入 |
| (10) $(\exists x)(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$ | (9) EG 规则 |
| (11) $(\neg(\exists x)(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))) \wedge ((\exists x)(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x)))$ | (1)(10) 合取引入 |
| (12) 0 | (11) 矛盾律 |

例 5.30 用反证法证明 $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\forall x)((\exists y)(F(y) \wedge H(x, y)) \rightarrow (\exists z)(G(z) \wedge H(x, z)))$ 。

- 证明**
- | | |
|--|----------------|
| (1) $\neg(\forall x)((\exists y)(F(y) \wedge H(x, y)) \rightarrow (\exists z)(G(z) \wedge H(x, z)))$ | 结论的否定引入 |
| (2) $(\exists x)\neg((\exists y)(F(y) \wedge H(x, y)) \rightarrow (\exists z)(G(z) \wedge H(x, z)))$ | (1) 量词与否定的交换律 |
| (3) $\neg((\exists y)(F(y) \wedge H(a, y)) \rightarrow (\exists z)(G(z) \wedge H(a, z)))$ | (2) ES 规则 |
| (4) $\neg(\neg(\exists y)(F(y) \wedge H(a, y)) \vee (\exists z)(G(z) \wedge H(a, z)))$ | (3) 蕴含等值式 |
| (5) $\neg\neg(\exists y)(F(y) \wedge H(a, y)) \wedge \neg(\exists z)(G(z) \wedge H(a, z))$ | (4) 德·摩根律 |
| (6) $(\exists y)(F(y) \wedge H(a, y)) \wedge \neg(\exists z)(G(z) \wedge H(a, z))$ | (5) 双重否定律 |
| (7) $(\exists y)(F(y) \wedge H(a, y))$ | (6) 化简式 |
| (8) $F(b) \wedge H(a, b)$ | (7) ES 规则 |
| (9) $F(b)$ | (8) 化简式 |
| (10) $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$ | 前提引入 |
| (11) $F(b) \rightarrow G(b)$ | (10) US 规则 |
| (12) $G(b)$ | (9)(11) 假言推论 |
| (13) $\neg(\exists z)(G(z) \wedge H(a, z))$ | (6) 化简式 |
| (14) $(\forall z)\neg(G(z) \wedge H(a, z))$ | (13) 量词与否定的交换律 |
| (15) $(\forall z)(\neg G(z) \vee \neg H(a, z))$ | (14) 德·摩根律 |
| (16) $\neg G(b) \vee \neg H(a, b)$ | (15) US 规则 |
| (17) $H(a, b)$ | (8) 化简式 |
| (18) $\neg\neg H(a, b)$ | (17) 双重否定律 |
| (19) $\neg G(b)$ | (16)(18) 析取三段论 |
| (20) $G(b) \wedge \neg G(b)$ | (12)(19) 合取引入 |
| (21) 0 | (20) 矛盾律 |

归结推理也是谓词逻辑推理的一种重要方法。在谓词逻辑中,首先需要进行量词的消去,然后才能按照命题逻辑中归结推理的步骤实施。在这里,斯柯伦范式有着重要的作用。在前面已经证明,谓词公式的不可满足性和该谓词公式的斯柯伦范式的不可满足性等价。这正是谓词逻辑中归结推理的理论依据。

采用间接归结推理证明 $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ 的一般步骤如下。

步骤 1, 将 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B$ 等值演算为前束范式 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 。

步骤 2, 将 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 等值演算为合取范式 $M'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 。

步骤 3, 消去 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的存在量词, 得到斯柯伦范式。

步骤 4, 将斯柯伦范式的母式中所有的析取式作为推理的前提进行推演。

例 5.31 用归结推理证明 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)), (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)), (\forall x)R(x) \vdash (\forall x)P(x)$ 。

证明 令 $G = (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge (\forall x)R(x) \wedge \neg(\forall x)P(x)$ 。首先, 将 G 转化为与之等值的前束范式, 即

$$\begin{aligned} & (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge (\forall x)R(x) \wedge \neg(\forall x)P(x) \\ \Leftrightarrow & (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge (\forall x)R(x) \wedge (\exists x)\neg P(x) \\ \Leftrightarrow & (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge R(x)) \wedge (\exists x)\neg P(x) \\ \Leftrightarrow & (\exists x)\neg P(x) \wedge (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge R(x)) \\ \Leftrightarrow & (\exists y)\neg P(y) \wedge (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge R(x)) \\ \Leftrightarrow & (\exists y)(\forall x)(\neg P(y) \wedge (P(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge R(x)) \\ \Leftrightarrow & (\exists y)(\forall x)(\neg P(y) \wedge (P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg R(x)) \wedge R(x)) \end{aligned}$$

上面前束范式的母式已经是合取范式。

其次, 消去存在量词, 可以得到以下斯柯伦范式, 即

$$G' = (\forall x)(\neg P(a) \wedge (P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg R(x)) \wedge R(x))$$

最后, 得到推理的前提为 $\neg P(a), P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee \neg R(x), R(x)$ 。

归结推理如下:

- | | |
|--------------------------------|-----------|
| (1) $\neg P(a)$ | 前提引入 |
| (2) $P(x) \vee Q(x)$ | 前提引入 |
| (3) $\neg Q(x) \vee \neg R(x)$ | 前提引入 |
| (4) $R(x)$ | 前提引入 |
| (5) $Q(a)$ | (1)(2)归结 |
| (6) $\neg R(a)$ | (3)(5)归结 |
| (7) 0 | (4)(6)矛盾律 |

例 5.32 用归结推理证明 $(\exists x)(P(x) \wedge S(x)), (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(R(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash (\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))$ 。

证明 令 $G = (\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))$ 。首先, 将 G 转化为与之等值的前束范式, 即

$$\begin{aligned} & (\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \wedge \neg Q(x)) \\ & \wedge \neg(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x)) \\ \Leftrightarrow & (\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \\ & (\forall x)\neg(S(x) \wedge \neg P(x)) \\ \Leftrightarrow & (\exists y)(P(y) \wedge S(y)) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \\ & (\forall x)(\neg S(x) \vee \neg \neg P(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\exists y)(P(y) \wedge S(y)) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \\
&\quad (\forall x)(\neg S(x) \vee P(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)((P(y) \wedge S(y)) \wedge (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \\
&\quad (\neg S(x) \vee P(x)))
\end{aligned}$$

再将上述前束范式的母式化为合取范式,即

$$\begin{aligned}
&(\exists y)(\forall x)((P(y) \wedge S(y)) \wedge (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (\neg S(x) \vee P(x))) \\
&\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(P(y) \wedge S(y) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge R(x) \wedge \neg Q(x) \wedge (\neg S(x) \vee P(x)))
\end{aligned}$$

其次,消去存在量词,可以得到以下斯柯伦范式,即

$$G' = (\forall x)(P(a) \wedge S(a) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge R(x) \wedge \neg Q(x) \wedge (\neg S(x) \vee P(x)))$$

最后,得到推理的前提为 $P(a), S(a), \neg P(x) \vee Q(x), R(x), \neg Q(x), \neg S(x) \vee P(x)$ 。

归结推理如下:

- | | |
|---------------------------|-----------|
| (1) $P(a)$ | 前提引入 |
| (2) $\neg P(x) \vee Q(x)$ | 前提引入 |
| (3) $Q(a)$ | (1)(2)归结 |
| (4) $\neg Q(x)$ | 前提引入 |
| (5) 0 | (3)(4)矛盾律 |

例 5.33 证明以下推理:“参加比赛者都是计算机系的学生并且是高级程序员。有些参赛者是女生。所以,有的参赛者是女高级程序员。”

证明 对命题进行符号化。

谓词 $M(x)$: x 是参赛者。

谓词 $S(x)$: x 是计算机系的学生。

谓词 $P(x)$: x 是高级程序员。

谓词 $G(x)$: x 是女生。

前提: $(\forall x)(M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)), (\exists x)(M(x) \wedge G(x))$ 。

结论: $(\exists x)(M(x) \wedge G(x) \wedge P(x))$ 。

令 $G = (\forall x)(M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)) \wedge (\exists x)(M(x) \wedge G(x)) \wedge \neg(\exists x)(M(x) \wedge G(x) \wedge P(x))$ 。

首先,将 G 转化为与之等值的前束范式,即

$$\begin{aligned}
&(\forall x)(M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)) \wedge (\exists x)(M(x) \wedge G(x)) \wedge \neg(\exists x)(M(x) \wedge G(x) \wedge P(x)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)) \wedge (\exists x)(M(x) \wedge G(x)) \wedge \\
&\quad (\forall x)\neg(M(x) \wedge G(x) \wedge P(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists y)(M(y) \wedge G(y)) \wedge (\forall x)(M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)) \wedge \\
&\quad (\forall x)(\neg M(x) \vee \neg G(x) \vee \neg P(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)((M(y) \wedge G(y)) \wedge (M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)) \wedge \\
&\quad (\neg M(x) \vee \neg G(x) \vee \neg P(x)))
\end{aligned}$$

再将上述前束范式的母式化为合取范式,即

$$\begin{aligned}
&(\exists y)(\forall x)((M(y) \wedge G(y)) \wedge (M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)) \wedge (\neg M(x) \vee \neg G(x) \vee \neg P(x))) \\
&\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(M(y) \wedge G(y) \wedge (\neg M(x) \vee (S(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg M(x) \vee \\
&\quad \neg G(x) \vee \neg P(x)))
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(M(y) \wedge G(y) \wedge (\neg M(x) \vee S(x)) \wedge (\neg M(x) \vee P(x)) \wedge (\neg M(x) \vee \neg G(x) \vee \neg P(x)))$$

其次,消去存在量词,可以得到以下斯柯伦范式,即

$$G' = (\forall x)(M(a) \wedge G(a) \wedge (\neg M(x) \vee S(x)) \wedge (\neg M(x) \vee P(x)) \wedge (\neg M(x) \vee \neg G(x) \vee \neg P(x)))$$

最后,得到推理的前提为 $M(a), G(a), \neg M(x) \vee S(x), \neg M(x) \vee P(x), \neg M(x) \vee \neg G(x) \vee \neg P(x)$ 。

归结推理如下:

- | | |
|---|-----------|
| (1) $M(a)$ | 前提引入 |
| (2) $\neg M(x) \vee P(x)$ | 前提引入 |
| (3) $P(a)$ | (1)(2)归结 |
| (4) $\neg M(x) \vee \neg G(x) \vee \neg P(x)$ | 前提引入 |
| (5) $\neg M(a) \vee \neg G(a)$ | (3)(4)归结 |
| (6) $\neg G(a)$ | (1)(5)归结 |
| (7) $G(a)$ | 前提引入 |
| (8) 0 | (6)(7)矛盾律 |

5.4 谓词逻辑的应用

自动规划是人工智能应用领域中一种重要的问题求解技术。与一般问题求解相比,自动规划更注重问题的求解过程,而不是求解结果。此外,自动规划要解决的问题往往是具体现实世界问题,如机器人路径规划等,而不是抽象的数学模型问题。自动规划将现实世界问题用状态、操作、动作等相关概念来描述,并从某个特定的问题状态出发,寻求一系列行为动作,建立一个操作序列(问题的解),直至达到目标状态为止。基于谓词逻辑及推理的现实世界问题表示和规划求解是一种重要的自动规划方法。

图 5.1 所示为一个简单的机器人规划问题。工具箱、工作台、机器人分别放置于不同的位置 L_1 、 L_2 和 L_3 ,电子仪器放置于工作箱内。机器人的任务是完成打开工具箱,并把电子仪器搬放到工作台上。自动规划所要解决的就是给出机器人完成这一任务的操作序列。

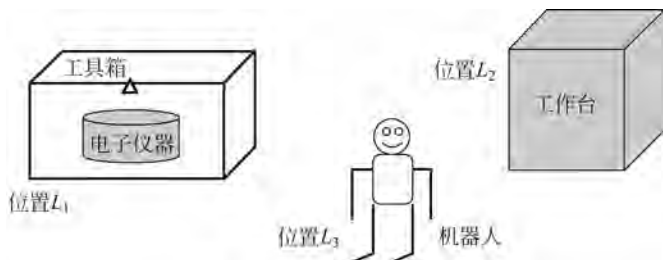


图 5.1 机器人搬运示意图

为了表示自动规划问题,定义以下相关个体常量和谓词。

个体常量 R : 机器人。

个体常量 B : 工具箱。

个体常量 A : 电子仪器。

个体常量 D : 工作台。

个体常量 L_1 : 位置 L_1 。

个体常量 L_2 : 位置 L_2 。

个体常量 L_3 : 位置 L_3 。

$EMPTY(x)$: x 上面是空的。

$H_EMPTY(x)$: x 手中是空的。

$HOLDING(x, y)$: x 手中拿着 y 。

$ON(x, y)$: x 在 y 的上面。

$NEAR(x, y)$: x 在 y 的附近。

$IN(x, y)$: x 在 y 的里面。

$AT(x, y)$: x 在 y 处。

$ISCLOSE(x)$: x 处于关闭状态。

$ISOPEN(x)$: x 处于打开状态。

$OPEN(x, y)$: x 把 y 打开。

$CLOSE(x, y)$: x 把 y 关闭。

$GOTO(x, y)$: x 走到 y 旁边。

$PICKDOWN(x, y, z)$: x 把 y 放在 z 上。

$PICKUP(x, y)$: x 把 y 拿起。

这样, 机器人搬运问题的初始状态(s_0)可以描述为

$$AT(B, L_1) \wedge IN(A, B) \wedge ISCLOSE(B) \wedge AT(D, L_2) \wedge EMPTY(D) \wedge \\ AT(R, L_3) \wedge H_EMPTY(R)$$

目标状态(s_f)可以描述为

$$AT(B, L_1) \wedge \neg IN(A, B) \wedge ISCLOSE(B) \wedge AT(D, L_2) \wedge ON(A, D) \wedge \\ NEAR(R, D) \wedge H_EMPTY(R)$$

自动规划所要解决的是: 找出一个操作序列, 然后把这些操作序列告诉机器, 机器就可以按预定的操作序列完成相应的任务。这里, 谓词 $OPEN(x, y)$ 、 $CLOSE(x, y)$ 、 $GOTO(x, y)$ 、 $PICKDOWN(x, y, z)$ 和 $PICKUP(x, y)$ 等都表示的是操作。

任何操作的执行都要满足一定的条件, 称为先决条件(pre-condition)。操作执行的同时会产生相应的状态或条件的改变, 称为行为动作(action)。下面给出这些操作的先决条件和行为动作:

$OPEN(x, y)$

先决条件: $H_EMPTY(x) \wedge NEAR(x, y) \wedge ISCLOSE(y)$

行为动作: 消去 $ISCLOSE(y)$; 添加 $ISOPEN(y)$

$CLOSE(x, y)$

先决条件: $H_EMPTY(x) \wedge NEAR(x, y) \wedge ISOPEN(y)$

行为动作: 消去 $ISOPEN(y)$; 添加 $ISCLOSE(y)$

GOTO(x, y)

先决条件: $\neg \text{NEAR}(x, y)$

行为动作: 消去 $\neg \text{NEAR}(x, y)$; 添加 $\text{NEAR}(x, y)$

PICKDOWN(x, y, z)

先决条件: $\text{NEAR}(x, z) \wedge \text{HOLDING}(x, y) \wedge \text{EMPTY}(z)$

行为动作: 消去 $\text{HOLDING}(x, y) \wedge \text{EMPTY}(z)$; 添加 $\text{ON}(y, z) \wedge \text{H_EMPTY}(x)$

PICKUP(x, y)

先决条件: $\text{NEAR}(x, z) \wedge \text{IN}(y, z) \wedge \text{ISOPEN}(z) \wedge \text{H_EMPTY}(x)$

行为动作: 消去 $\text{IN}(y, z) \wedge \text{H_EMPTY}(x)$; 添加 $\neg \text{IN}(y, z) \wedge \text{HOLDING}(x, y)$

下面的问题是依据谓词逻辑推理, 确定各操作的具体执行顺序, 以使问题从初始状态到达目标状态。目前已开发出了许多自动规划推理系统, 如 STRIPS (Stanford Research Institute Problem Solver) 等。这里仅从谓词逻辑推理的机理角度, 给出操作序列的求解过程。

在初始状态 s_0 , $\text{AT}(R, L_3)$ 满足。那么, 操作 GOTO(R, B) 的先决条件 $\neg \text{NEAR}(R, B)$ 成立。所以, 操作 GOTO(R, B) 可以执行, 产生的行为动作是: 消去 $\text{AT}(R, L_3)$; 添加 $\text{NEAR}(R, B)$ 。得到新的状态 s_1 , 即

$$\text{AT}(B, L_1) \wedge \text{IN}(A, B) \wedge \text{ISCLOSE}(B) \wedge \text{AT}(D, L_2) \wedge \text{EMPTY}(D) \wedge \text{NEAR}(R, B) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$$

在状态 s_1 , 操作 OPEN(R, B) 的先决条件 $\text{H_EMPTY}(R) \wedge \text{NEAR}(R, B) \wedge \text{ISCLOSE}(B)$ 成立。所以, 操作 OPEN(R, B) 可以执行, 产生的行为动作是: 消去 $\text{ISCLOSE}(B)$; 添加 $\text{ISOPEN}(B)$ 。得到新的状态 s_2 , 即

$$\text{AT}(B, L_1) \wedge \text{IN}(A, B) \wedge \text{ISOPEN}(B) \wedge \text{AT}(D, L_2) \wedge \text{EMPTY}(D) \wedge \text{NEAR}(R, B) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$$

在状态 s_2 , 操作 PICKUP(R, A) 的先决条件 $\text{IN}(A, B) \wedge \text{ISOPEN}(B) \wedge \text{NEAR}(R, B) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$ 成立。所以, 操作 PICKUP(R, A) 可以执行, 产生的行为动作是: 消去 $\text{IN}(A, B) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$; 添加 $\neg \text{IN}(A, B) \wedge \text{HOLDING}(R, A)$ 。得到新的状态 s_3 , 即

$$\text{AT}(B, L_1) \wedge \text{ISOPEN}(B) \wedge \text{AT}(D, L_2) \wedge \text{EMPTY}(D) \wedge \text{NEAR}(R, B) \wedge \neg \text{IN}(A, B) \wedge \text{HOLDING}(R, A)$$

在状态 s_3 , $\text{NEAR}(R, B)$ 满足, 那么操作 GOTO(R, D) 的先决条件 $\neg \text{NEAR}(R, D)$ 成立。所以, 操作 GOTO(R, D) 可以执行, 产生的行为动作是: 消去 $\text{NEAR}(R, B)$; 添加 $\text{NEAR}(R, D)$ 。得到新的状态 s_4 , 即

$$\text{AT}(B, L_1) \wedge \text{ISOPEN}(B) \wedge \text{AT}(D, L_2) \wedge \text{EMPTY}(D) \wedge \text{NEAR}(R, D) \wedge \neg \text{IN}(A, B) \wedge \text{HOLDING}(R, A)$$

在状态 s_4 , 操作 PICKDOWN(R, A, D) 的先决条件 $\text{NEAR}(R, D) \wedge \text{HOLDING}(R, A) \wedge \text{EMPTY}(D)$ 成立。所以, 操作 PICKDOWN(R, A, D) 可以执行, 产生的行为动作是: 消去 $\text{HOLDING}(R, A) \wedge \text{EMPTY}(D)$; 添加 $\text{ON}(A, D) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$ 。得到新的状态 s_5 , 即

$$\text{AT}(B, L_1) \wedge \text{ISOPEN}(B) \wedge \text{AT}(D, L_2) \wedge \text{NEAR}(R, D) \wedge \neg \text{IN}(A, B) \wedge \text{ON}(A, D) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$$

在状态 s_5 , $\text{NEAR}(R, D)$ 满足, 那么操作 $\text{GOTO}(R, B)$ 的先决条件 $\neg \text{NEAR}(R, B)$ 成立。所以, 操作 $\text{GOTO}(R, B)$ 可以执行, 产生的行为动作是: 消去 $\text{NEAR}(R, D)$; 添加 $\text{NEAR}(R, B)$ 。得到新的状态 s_6 , 即

$$\text{AT}(B, L_1) \wedge \text{ISOPEN}(B) \wedge \text{AT}(D, L_2) \wedge \text{NEAR}(R, B) \wedge \neg \text{IN}(A, B) \wedge \\ \text{ON}(A, D) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$$

在状态 s_6 , 操作 $\text{CLOSE}(R, B)$ 的先决条件 $\text{H_EMPTY}(x) \wedge \text{ISOPEN}(B) \wedge \text{NEAR}(R, B)$ 成立。所以, 操作 $\text{CLOSE}(R, B)$ 可以执行, 产生的行为动作是: 消去 $\text{ISOPEN}(B)$; 添加 $\text{ISCLOSE}(B)$ 。得到新的状态 s_7 , 即

$$\text{AT}(B, L_1) \wedge \text{ISCLOSE}(B) \wedge \text{AT}(D, L_2) \wedge \text{NEAR}(R, B) \wedge \neg \text{IN}(A, B) \wedge \\ \text{ON}(A, D) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$$

在状态 s_7 , $\text{NEAR}(R, B)$ 满足, 那么操作 $\text{GOTO}(R, D)$ 的先决条件 $\neg \text{NEAR}(R, D)$ 成立。所以, 操作 $\text{GOTO}(R, D)$ 可以执行, 产生的行为动作是: 消去 $\text{NEAR}(R, B)$; 添加 $\text{NEAR}(R, D)$ 。得到新的状态 s_8 , 即

$$\text{AT}(B, L_1) \wedge \text{ISCLOSE}(B) \wedge \text{AT}(D, L_2) \wedge \text{NEAR}(R, D) \wedge \neg \text{IN}(A, B) \wedge \\ \text{ON}(A, D) \wedge \text{H_EMPTY}(R)$$

状态 s_8 就是目标状态 s_f 。由此, 可得到该机器人搬运任务的操作序列为

$$\text{GOTO}(R, B) \rightarrow \text{OPEN}(R, B) \rightarrow \text{PICKUP}(R, A) \rightarrow \text{GOTO}(R, D) \rightarrow \\ \text{PICKDOWN}(R, A, D) \rightarrow \text{GOTO}(R, B) \rightarrow \text{CLOSE}(R, B) \rightarrow \text{GOTO}(R, D)。$$

习题

5.1 用谓词表示下列命题:

- ① 王强不是计算机专业的学生;
- ② 李阳会讲英语、法语和德语;
- ③ 机器人搬运货物到仓库;
- ④ 王强喜欢足球和网球;
- ⑤ 北京、上海、天津和重庆都是直辖市;
- ⑥ 京沪高铁穿过济南和南京;
- ⑦ 深圳在广州和香港之间;
- ⑧ 张宏和刘伟是朋友。

5.2 用谓词和函词表示下列命题:

- ① 空集属于它的幂集;
- ② 小张的叔叔和小刘的爸爸是朋友;
- ③ 王强的离散数学任课老师是张辉的女朋友的研究生导师;
- ④ π 的平方大于 5;
- ⑤ 小明的父亲和母亲都是科学家。

5.3 用谓词和量词符号表示下列命题:

- ① 每一个有理数都是实数;

- ② 某些实数是自然数;
- ③ 有些学生完成了所有习题;
- ④ 没有人登上过喜马拉雅山的所有山峰;
- ⑤ 火星上存在生命;
- ⑥ 中国短道速滑队获得过冬奥会金牌;
- ⑦ 中国乒乓球队包揽了 2010 年乒乓球世界锦标赛所有金牌;
- ⑧ 任意三点确定一个平面。

5.4 设 $S(x, y, z)$ 表示“ $x+y=z$ ”, $E(x, y)$ 表示“ $x=y$ ”, $M(x, y, z)$ 表示“ $x \cdot y=z$ ”, $L(x, y)$ 表示“ $x < y$ ”, 个体域为自然数集, 给出下列命题的符号表示:

- ① 并非一切 x 都有 $x \leq y$;
- ② 对任意 $x, x+y=y$ 当且仅当 $y=0$;
- ③ 如果 $x \cdot y \neq 0$, 则 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$;
- ④ 存在 x , 使得对所有 $y, x \cdot y=y$ 成立;
- ⑤ 没有 $x < 0$ 且 $x > 0$;
- ⑥ 对于 x , 必有 y , 满足 $y > x$ 。

5.5 设个体域为自然数集, 给出下列命题的符号表示:

- ① x 是两数平方之和;
- ② x 是 y 和 z 的最大公约数;
- ③ 任何数被 2 除时余数为 0 或 1;
- ④ 任意 3 个数有最小公倍数;
- ⑤ 并非任何自然数都有比它小的自然数;
- ⑥ 两个奇数之和是偶数。

5.6 设个体域为实数集, 给出下列命题的符号表示:

- ① 不存在某数的平方小于零;
- ② 方程 $x=f(x)$ 的解是 $f(x)$ 的不动点;
- ③ 任何两实数之间必存在一个实数;
- ④ 非零实数都是另外两个不同实数的积;
- ⑤ 有些一元二次方程有两个不同的实根;
- ⑥ 闭区间的连续函数一定有上界和下界。

5.7 用谓词逻辑符号化下列命题:

- ① 我为人人, 人人为我;
- ② 有些乌龟比有些兔子跑得快;
- ③ 不管白猫黑猫, 抓住老鼠都是好猫;
- ④ 如果 R 是集合 A 上的自反、对称和传递关系, 则该关系是集合 A 上的等价关系;
- ⑤ 任何实数都有比它小的后继实数;
- ⑥ 不存在最大的自然数;
- ⑦ 只要功夫深, 铁棒磨成针;
- ⑧ 天下乌鸦一般黑;
- ⑨ 吃一堑长一智;

⑩ 空集是任何集合的子集合。

5.8 判断下列符号串哪些是谓词公式：

- ① $H(x, y) \vee \neg (\exists y)G(x)$;
- ② $(\forall x) \neg H(x, f(y))$;
- ③ $(\forall x) \neg (\exists y) \neg H(x, f(y))$;
- ④ $(\forall x) \neg (\exists y) (\neg H(x, f(y)) \vee \neg (\exists y)G(x))$;
- ⑤ $(\forall x) \neg (\exists y) (\neg H(x, f(y)) \vee \neg (\exists y))G(x)$;
- ⑥ $(\forall x) \neg (\exists y) (\neg H(x, f(y)) \vee \neg (\exists y)G(x))$;
- ⑦ $H(, \forall y) \vee G(\forall x) \leftrightarrow \forall x \neg (\exists y) (\neg H(x, ;$
- ⑧ $(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow H(x)$;
- ⑨ $(\forall x)(\forall y)A(x, y, z) \wedge (\forall z)B(x)$;
- ⑩ $(\forall x) \neg H(x \rightarrow y)$;

5.9 给出下列谓词公式的自然语言表述：

- ① $(\forall x)(\exists y)A(x, y)$, 其中 $A(x, y)$ 表示 $x \cdot y = y$;
- ② $(\forall x)(\exists y)F(x, y)$, 其中 $F(x, y)$ 表示 $x + y = y$;
- ③ $(\forall x)(\exists y)N(x, y)$, 其中 $N(x, y)$ 表示 $y = 2x$;
- ④ $(\forall x)(\exists y)M(x, y)$, 其中 $M(x, y)$ 表示 $x \cdot y = 1$;
- ⑤ $(\forall x)(\exists y)(\exists z)B(x, y, z)$, 其中 $B(x, y, z)$ 表示 $x \leq y < z$;
- ⑥ $(\forall x)(\forall y)(\exists z)C(x, y, z)$, 其中 $C(x, y, z)$ 表示 $x^2 + y^2 = z$ 。

5.10 对于谓词, 有

$P(x)$: x 是素数; $E(x)$: x 是偶数; $O(x)$: x 是奇数; $N(x, y)$: x 可以整除 y 。

给出下列谓词公式的自然语言表述：

- ① $(\forall x)(N(2, x) \rightarrow E(x))$;
- ② $(\exists x)(N(x, 6) \wedge E(x))$;
- ③ $(\forall x)(\neg E(x) \rightarrow \neg N(2, x))$;
- ④ $(\forall x)(E(x) \rightarrow (\forall y)(N(x, y) \rightarrow E(y)))$;
- ⑤ $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(N(y, x) \wedge O(y)))$;
- ⑥ $(\forall x)(O(x) \rightarrow (\exists y)(\neg N(y, x) \wedge E(y)))$ 。

5.11 指出下列各谓词公式中的自由变元、约束变元及量词的辖域：

- ① $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x) \wedge S(x)) \rightarrow (\forall x)(R(x) \wedge Q(x, y))$;
- ② $(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow R(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow (\forall x)R(x) \wedge Q(x, y)$;
- ③ $(\forall x)(\exists y)(P(x) \leftrightarrow R(x) \wedge S(y)) \leftrightarrow R(x) \wedge (\forall x)Q(x, y)$;
- ④ $(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\exists y)(R(x) \wedge \neg S(y)) \wedge (\forall x)R(x) \wedge (\exists y)Q(x, y)$;
- ⑤ $(\forall x)(\forall y)(\exists z) \neg B(x, y, z) \vee (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall y)(\exists y)(R(x) \wedge S(y)) \wedge (\forall x)G(x) \wedge (\exists y)Q(y)$;
- ⑥ $(\forall x)(\forall y)(\exists z)B(x, y, z) \vee (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg R(x) \wedge S(y, w)) \wedge (\forall x)Q(x)$ 。

5.12 对下列谓词公式进行个体变元替换, 使得每一个个体变元有唯一的出现形式：

- ① $(\forall x)S(x) \rightarrow (\forall x)(R(x) \wedge Q(x, y))$;

- ② $\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (R(x, y) \wedge S(x) \leftrightarrow (\forall x)M(x, y))$;
 ③ $(\forall x)(\exists y)(P(x) \leftrightarrow R(x) \wedge S(y)) \vee R(x) \wedge (\forall y)F(x, y)$;
 ④ $(\forall x)P(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(R(x) \wedge \neg S(y)) \wedge (\exists y)Q(x, y)$;
 ⑤ $(\forall x)(\forall y)\neg(\exists z)H(x, y, z) \rightarrow (\forall y)(\exists x)(R(x, y) \wedge S(y)) \wedge (\forall x)G(x)$;
 ⑥ $((\forall x)(\forall y)N(x, y, z) \vee (\forall x)P(x, y) \vee (\exists x)R(x, z)) \wedge (\forall x)Q(x)$ 。

5.13 设 $P(x)$ 表示“ $x=x^2$ ”, 个体域为整数集, 求下列各谓词公式的真值:

- ① $P(0) \wedge P(1)$; ② $P(-1) \rightarrow P(2)$;
 ③ $(\forall x)P(x)$; ④ $(\exists x)P(x)$;
 ⑤ $P(3) \rightarrow (\forall x)P(x)$; ⑥ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)$ 。

5.14 设个体域为自然数集, 个体常量 $a=0$, 函词 $f(x, y)=x+y$, 函词 $g(x, y)=x \cdot y$, 谓词 $P(x, y)$ 为 $x=y$ 。求使得下列各谓词公式的真值为真或假的个体变元的取值:

- ① $P(f(x, y), g(y, z))$;
 ② $P(f(x, a), y) \rightarrow P(f(x, y), z)$;
 ③ $\neg P(g(x, y), g(y, z))$;
 ④ $(\forall x)P(g(x, y), z)$;
 ⑤ $(\forall x)P(g(x, a), x) \rightarrow P(x, y)$;
 ⑥ $(\exists x)(\forall y)(P(f(x, y), a) \rightarrow P(x, g(x, y)))$ 。

5.15 设个体域为实数集, 个体常量 $a=0$, 函词 $f(x, y)=x-y$, 谓词 $Q(x, y)$ 为 $x=y$ 。求使得下列各谓词公式的真值为真或假的个体变元的取值:

- ① $Q(x, a)$;
 ② $Q(f(x, y), x) \rightarrow Q(a, f(x, y))$;
 ③ $\neg Q(x, f(x, f(x, y)))$;
 ④ $(\forall x)Q(f(x, y), z)$;
 ⑤ $(\forall x)Q(f(x, a), x) \rightarrow Q(x, y)$;
 ⑥ $(\exists x)(\forall y)(Q(f(x, a), y) \rightarrow Q(x, f(a, y)))$ 。

5.16 设 $Q(x, y)$ 表示“ $x+y=x-y$ ”, 个体域为整数集合, 求下列各谓词公式的真值:

- ① $Q(0, 1)$; ② $(\forall x)Q(0, x)$;
 ③ $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$; ④ $(\exists x)Q(x, 2)$;
 ⑤ $(\forall x)(\forall y)Q(x, y)$; ⑥ $(\exists x)(\forall y)Q(x, y)$ 。

5.17 设个体域为整数集, 求下列各语句的真值:

- ① $(\exists x)(x^2=2)$; ② $(\exists x)(\exists y)(x+y=x \cdot y)$;
 ③ $(\forall x)(\exists y)(x+1=y^2)$; ④ $(\exists x)(\exists y)((x+y=1) \wedge (2x+y=3))$;
 ⑤ $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(x+y=z-y)$; ⑥ $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x+y)/2=z)$ 。

5.18 对于解释 I :

个体域 $D=\{a, b\}$;

谓词 $P(x, y)$: $P(a, a)=1, P(a, b)=0, P(b, a)=0, P(b, b)=1$ 。

给出下列谓词公式在解释 I 下的真值:

- ① $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$; ② $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$;
 ③ $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$; ④ $(\exists x)P(x, x)$;

$$\textcircled{5} (\forall y)P(b, y);$$

$$\textcircled{6} (\exists x)(\exists y)P(x, y)。$$

5.19 对于解释 I :

个体域 $D = \{1, 2\}$;

个体常量 $a = 1, b = 2$;

函词 $f(x)$: $f(1) = 2, f(2) = 1$;

谓词 $P(x, y)$: $P(1, 1) = 1, P(1, 2) = 1, P(2, 1) = 0, P(2, 2) = 1$ 。

给出下列谓词公式在解释 I 下的真值:

$$\textcircled{1} P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b));$$

$$\textcircled{2} (\exists x)(\forall y)P(x, f(y));$$

$$\textcircled{3} (\forall x)(\forall y)(P(f(x), y) \vee P(x, x)); \quad \textcircled{4} (\exists x)P(x, x) \wedge (\forall x)P(x, f(x));$$

$$\textcircled{5} (\forall y)P(b, y) \rightarrow (\exists x)P(x, f(x)); \quad \textcircled{6} (\exists x)(\exists y)P(f(x), f(y))。$$

5.20 对于谓词公式 $G = (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$, 如果解释 I 的个体域仅包含一个元素, 那么 G 的真值是什么? 如果个体域为 $D = \{a, b\}$, 试找出 G 的成假解释。

5.21 对于个体域为 $D = \{1, 2\}$, 给出使得谓词公式 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ 的真值同时为真和同时为假的两个解释。

5.22 对于解释 I :

个体域 D 为整数集;

个体常量 $a = 0$;

函词 $f(x, y) = x - y$;

谓词 $P(x, y)$: $x = y$;

谓词 $Q(x, y)$: $x < y$ 。

说明下列各谓词公式在解释 I 下的意义及其真值, 并求另一解释 I' , 使相应谓词公式取相反的真值:

$$\textcircled{1} (\forall x)(\forall y)(Q(f(x, y), a) \rightarrow Q(x, y));$$

$$\textcircled{2} (\forall x)(\forall y)(P(f(x, y), a) \rightarrow Q(x, y));$$

$$\textcircled{3} (\forall x)(\forall y)(Q(x, y) \rightarrow \neg P(x, y));$$

$$\textcircled{4} (\forall x)(\exists y)(Q(f(x, y), a) \rightarrow Q(x, y));$$

$$\textcircled{5} (\exists x)(\forall y)(P(f(x, y), a) \rightarrow Q(x, y));$$

$$\textcircled{6} (\exists x)(\exists y)(Q(f(x, y), a) \rightarrow Q(x, y))。$$

5.23 判断下列谓词公式是否为永真公式:

$$\textcircled{1} (\exists x)(\forall y)P(x, y) \leftrightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y);$$

$$\textcircled{2} (\forall x)(\forall y)P(x, y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y);$$

$$\textcircled{3} (\exists x)(\exists y)P(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y);$$

$$\textcircled{4} ((\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)) \leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x));$$

$$\textcircled{5} ((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)) \rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x));$$

$$\textcircled{6} (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x))。$$

5.24 判断下列谓词公式是否为永真公式:

$$\textcircled{1} (\exists x)(\forall y)P(x, y) \wedge (\forall y)(\exists x)P(x, y);$$

$$\textcircled{2} (\forall x)(\forall y)P(x, y) \wedge (\forall y)(\forall x)P(x, y);$$

$$\textcircled{3} (\exists x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\exists y)(\exists x)P(x, y);$$

- ④ $((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)) \rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$;
 ⑤ $((\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)) \rightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$;
 ⑥ $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x))$ 。

5.25 判断下列谓词公式是否为永真公式:

- ① $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \vee (\forall y)(\exists x)P(x, y)$;
 ② $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \vee (\forall y)(\forall x)P(x, y)$;
 ③ $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \vee (\exists y)(\exists x)P(x, y)$;
 ④ $((\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)) \rightarrow (\exists x)(A(x) \vee B(x))$;
 ⑤ $((\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)) \rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$;
 ⑥ $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x))$ 。

5.26 判断下列谓词公式哪些是永真公式、哪些是可满足公式、哪些是不可满足公式:

- ① $(\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)A(x)$;
 ② $(\forall x)\neg A(x) \rightarrow \neg(\forall x)A(x)$;
 ③ $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)A(x)$;
 ④ $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$;
 ⑤ $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y)$;
 ⑥ $(\exists x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$;
 ⑦ $((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)) \leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$;
 ⑧ $((\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)) \leftrightarrow (\exists x)(A(x) \vee B(x))$;
 ⑨ $((\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)) \rightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$;
 ⑩ $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \vee (\forall y)B(y))$ 。

5.27 将下列谓词公式中的否定联结词移动,使其只出现在谓词的前面:

- ① $\neg(\exists x)(\forall y)P(x, y) \vee (\forall y)\neg(\exists x)P(x, y)$;
 ② $\neg(\forall x)\neg A(x) \rightarrow \neg(\forall x)B(x)$;
 ③ $\neg(\exists x)(A(x) \rightarrow (\forall x)A(x))$;
 ④ $(\exists x)\neg(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg(\forall y)(\exists x)P(x, y))$;
 ⑤ $\neg((\forall x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)\neg(\forall x)P(x, y))$;
 ⑥ $(\exists x)\neg(\exists y)(P(x, y) \rightarrow B(x)) \vee \neg(\exists y)(\exists x)P(x, y)$ 。

5.28 设个体域为 $D = \{a, b\}$,消去以下谓词公式中的量词:

- ① $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \wedge P(a, z)$;
 ② $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \wedge (\forall y)(\exists x)P(x, y)$;
 ③ $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)A(x)$;
 ④ $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$;
 ⑤ $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow B(y)) \vee (\forall x)A(x)$;
 ⑥ $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge B(z)) \vee (\forall x)G(x, y)$ 。

5.29 设解释 I 的个体域由 a, b 和 c 组成,试将下列谓词公式写成在解释 I 中不含量词的形式:

- ① $(\exists x)P(x) \wedge (\forall y)Q(y)$;
 ② $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)A(y))$;

- ③ $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)Q(y))$;
 ④ $(\forall y)P(y) \wedge (\forall y)(\exists x)Q(x, y)$;
 ⑤ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \rightarrow B(z)) \vee (\forall x)A(x)$;
 ⑥ $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge B(y)) \vee (\exists x)(\forall y)G(x, y)$ 。

5.30 证明下列谓词公式的等值式:

- ① $(\forall x)A(x) \wedge ((\forall x)A(x) \vee (\exists x)A(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)$;
 ② $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall y)B(y) \Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x) \vee (\forall y)B(y)$;
 ③ $\neg((\forall x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)) \Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x) \vee (\forall y) \neg B(y)$;
 ④ $((\exists x)A(x) \rightarrow (\forall y)P(x, y)) \wedge ((\exists x)A(x) \rightarrow \neg(\forall y)P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall x) \neg A(x)$;
 ⑤ $\neg((\forall x)(\forall y)P(x, y) \vee (\exists x)A(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y) \neg P(x, y) \wedge \neg(\exists x)A(x)$;
 ⑥ $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists y)B(y) \Leftrightarrow (\forall y) \neg B(y) \rightarrow \neg(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ 。

5.31 证明下列谓词公式的等值式:

- ① $(\forall x)(\neg A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \rightarrow B$;
 ② $(\exists x)(\neg A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee B$;
 ③ $(\exists x)A(x) \wedge \neg(\forall x) \neg B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$;
 ④ $(\exists x)(\neg A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$;
 ⑤ $(\exists x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\forall x) \neg A(x) \wedge B$;
 ⑥ $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y) \neg(\exists x) \neg P(x, y)$ 。

5.32 求下列谓词公式的前束范式:

- ① $\neg(\exists x)(\forall y)G(x, y) \vee (\forall y)P(x, y)$;
 ② $\neg(\forall x)A(x, y) \rightarrow (\forall x)B(x)$;
 ③ $\neg(\exists x)(G(x) \rightarrow (\forall y)A(x, y))$;
 ④ $(\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x, y))$;
 ⑤ $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\forall z)G(x, z)$;
 ⑥ $(\exists x)(\forall y)(A(x) \rightarrow B(y)) \vee (\exists y)(\exists x)P(x, y)$ 。

5.33 求习题 5.23 中各谓词公式的前束范式。

5.34 求习题 5.24 中各谓词公式的前束范式。

5.35 假设 $(\exists x)(\forall y)M(x, y)$ 是谓词公式 G 的前束范式, 其中, $M(x, y)$ 是仅仅包含变量 x 和 y 的母式。试证明: G 是重言式当且仅当 $(\exists x)M(x, f(x))$ 是重言式, 其中, f 是不出现在 $M(x, y)$ 中的函词。

5.36 求下列谓词公式的斯柯伦范式:

- ① $(\exists y)(G(x) \rightarrow (\exists y)Q(x, y))$;
 ② $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)M(x, y, z, u, v, w)$;
 ③ $(\exists x)(G(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists z)A(x, y, z))$;
 ④ $(\exists x)(\forall y)(N(x, y) \vee (\forall y)(\exists x)G(x, y))$;
 ⑤ $(\forall x)(\forall y)N(x, y) \wedge (\forall y)(\forall z)G(x, z)$;
 ⑥ $(\exists x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x, y)$ 。

5.37 求习题 5.28 中谓词公式的斯柯伦范式。

5.38 判断下列谓词公式的蕴含式是否为永真蕴含式:

- ① $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$;
- ② $(\exists x)A(x, x) \rightarrow (\exists x)(\exists y)A(x, y)$;
- ③ $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$;
- ④ $(\forall x)A(x, x) \rightarrow (\forall x)(\forall y)A(x, y)$;
- ⑤ $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x))$;
- ⑥ $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\exists y)B(y)$ 。

5.39 证明下列谓词公式的永真蕴含式:

- ① $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$;
- ② $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall x)A(x, x)$;
- ③ $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$;
- ④ $(\forall x)A(x) \wedge ((\exists x) \neg A(x) \vee (\exists y)B(y)) \Rightarrow (\forall x)A(x)$;
- ⑤ $(\exists y) \neg B(y) \wedge ((\exists x) \neg A(x) \rightarrow (\forall y)B(y)) \Rightarrow (\forall x)A(x)$;
- ⑥ $(\exists x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x, y)$ 。

5.40 设个体域由两个元素组成,如果谓词公式 $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ 和 $(\exists y)(A(y) \wedge C(y))$ 在某解释 I 下真值为真,则 $(\exists z)(B(z) \wedge C(z))$ 是否在该解释 I 下真值为真? 如果将谓词公式中的存在量词换成全称量词,结果如何?

5.41 证明下列推理:

- ① $(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(a))), (\forall x)P(x) \vdash Q(y) \wedge (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$;
- ② $(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x) \neg Q(x) \vdash (\exists x)P(x)$;
- ③ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall y)((P(y) \vee Q(y)) \rightarrow R(y)), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)R(x)$;
- ④ $(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$ 。

5.42 每一个自然数不是奇数就是偶数。自然数是偶数当且仅当它能被 2 整除。并不是所有自然数都能被 2 整除。因此,有的自然数是奇数。符号化表示该命题,并给出推理的证明。

5.43 如果一个人怕困难,那么他就不会获得成功。每个人或者获得成功或者失败过。有些人未曾失败过。所以,有些人不怕困难。符号化表示该命题,并给出推理的证明。

5.44 两个三角形全等当且仅当它们的 3 条边分别相等。如果两个三角形全等则它们的 3 个内角分别相等。三角形 A 和三角形 B 的 3 条边相等。所以,三角形 A 和三角形 B 的 3 个内角相等。符号化表示该命题,并给出推理的反证法证明。

5.45 用归结推理证明习题 5.41 中的推理。

5.46 用归结推理证明习题 5.42 中的推理。

5.47 用归结推理证明习题 5.43 中的推理。

5.48 用归结推理证明习题 5.44 中的推理。