# 第 3 章　信道与信道容量

香农将各种通信系统概括为信源、信道和信宿三部分，信宿和信源在数学模型上没有本质的区别，其类型和信息熵及其性质已在第 2 章进行了深入的讨论。也就是说，对广义的通信系统而言，给定信源，则该信源发出一个消息的信息量即信源熵是已知的，那么对某个特定的信道，到底信宿能够接收到多少信息量呢？该信道能够传送或传输的最大信息量是多少呢？第一个问题与信道模型有关，第二个问题与信源概率分布有关。本章首先定量地研究信源发出一个符号时信道传输的互信息以及平均互信息量；然后讨论离散信道的数学模型及信道容量；最后给出连续信道和波形信道的信道容量计算方法。

## 3.1　互　信　息

各种通信系统形式上传递的是消息，但实质上传递的是信息。

接收端收到某一消息后所获得的信息，可以用接收端在通信前后“不确定性”的消除量来度量。简而言之，接收端所得到的信息量，在数量上等于通信前后“不确定性”的消除量或减少量。这就是信息理论中度量信息的基本观点。

### 3.1.1　互信息量

在离散情况下，$X$ 的样本空间可写成$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，样本空间中任一元素 $x_i$ 的概率表示为 $p(x_i)$，则在离散情况下，概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

式中，$p(x_i)$为选择符号 $x_i$ 作为消息的概率，称为先验概率。

具体地说，如信源发送某一符号 $x_i$，在接收端，对是否选择这个消息(符号)$x_i$ 的不确定性大小与 $x_i$ 的自信息量相等，即

$$I(x_i) = \log \frac{1}{p(x_i)}$$

由于信道中存在噪声和随机干扰，接收端一般收到的是 $x_i$ 的某种变形，假设接收端收到的消息(符号)为 $y_j$，这个 $y_j$ 可能与 $x_i$ 相同，也可能有差异。把条件概率 $p(x_i/y_j)$称为后验概率，它是接收端接收到消息(符号)$y_j$ 而发送端发送的是 $x_i$ 的概率。那么，接收端接收到消息(符号)$y_j$ 后，发送端发送的符号是否是 $x_i$ 尚存在的不确定性应是后验概率的函数，即条件信息量

$$I(x_i/y_j) = \log \frac{1}{p(x_i/y_j)}$$

于是，接收端收到消息(符号)$y_j$ 后，已经消除的不确定性为：先验的不确定性减去尚存在的不确定性。这就是接收端获得的信息量，定义为互信息量，即

$$I(x_i;\ y_j) = I(x_i) - I(x_i/y_j) = \log \frac{1}{p(x_i)} - \log \frac{1}{p(x_i/y_j)} = \log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} \tag{3.1.1}$$

如果信道没有干扰，信道的统计特性使 $x_i$ 以概率 1 传送到接收端，这时接收端接到消息后尚存在的不确定性等于零，即

$$p(x_i/y_j)=1,\quad I(x_i/y_j)=0$$

由此得互信息量

$$I(x_i;y_j)=I(x_i) \tag{3.1.2}$$

一般信道都会存在干扰或噪声，那么 $p(x_i/y_j)<1$，$I(x_i/y_j)>0$，这样接收端收到 $y_j$ 后得到的信息量为

$$I(x_i;y_j)=I(x_i)-I(x_i/y_j)<I(x_i) \tag{3.1.3}$$

值得注意的是，如果信道质量非常差，可能导致接收端收到符号 $y_j$ 后对发送的符号 $x_i$ 存在的不确定性比通信前符号 $x_i$ 的不确定性还要大，即 $p(x_i/y_j)<p(x_i)$，$I(x_i/y_j)>I(x_i)$。此时，接收端在该通信过程获得的信息量将小于 0，即

$$I(x_i;y_j)=I(x_i)-I(x_i/y_j)<0 \tag{3.1.4}$$

可见，互信息量不具备非负性的性质。

式(3.1.1)中，代入 $p(x_iy_j)=p(x_i)p(y_j/x_i)=p(y_j)p(x_i/y_j)$，可以得到互信息的另外两种描述公式：

$$I(x_i;y_j)=I(y_j)-I(y_j/x_i)=\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_i)} \tag{3.1.5}$$

$$I(x_i;y_j)=I(x_i)+I(y_j)-I(x_iy_j)=\log\frac{p(x_iy_j)}{p(x_i)p(y_i)} \tag{3.1.6}$$

**例 3.1.1**　图 3.1.1 所示是一个二元对称信道。信源等概率输出符号 1 和 0，计算发生错误的概率 $p$。

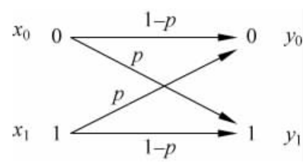

图 3.1.1　二元对称信道

**解**：由图 3.1.1，可以得到

$$p(y_0/x_0)=p(y_1/x_1)=1-p$$

$$p(y_1/x_0)=p(y_0/x_1)=p$$

根据

$$p(y_j)=\sum_{i=0}^{1}p(x_i)p(y_j/x_i)$$

可得

$$p(y_0)=p(y_1)=0.5$$

假定接收端收到符号 0 的情况下，想确定发送端发送的是什么。根据式(3.1.5)，接收端收到符号 0，发送端发送的是符号 0 的互信息为

$$I(x_0;y_0)=I(0,0)=\log\frac{p(y_0/x_0)}{p(y_0)}=\log\frac{1-p}{0.5}=\log2(1-p) \tag{3.1.7}$$

接收端收到符号 0，发送端发送的是符号 1 的互信息为

$$I(x_1;y_0)=I(1,0)=\log\frac{p(y_0/x_1)}{p(y_0)}=\log\frac{p}{0.5}=\log2p \tag{3.1.8}$$

$I(x_0;y_0)$随信道错误概率 $p$ 的变化曲线如图 3.1.2 所示。

图 3.1.2 对应的程序代码如下：

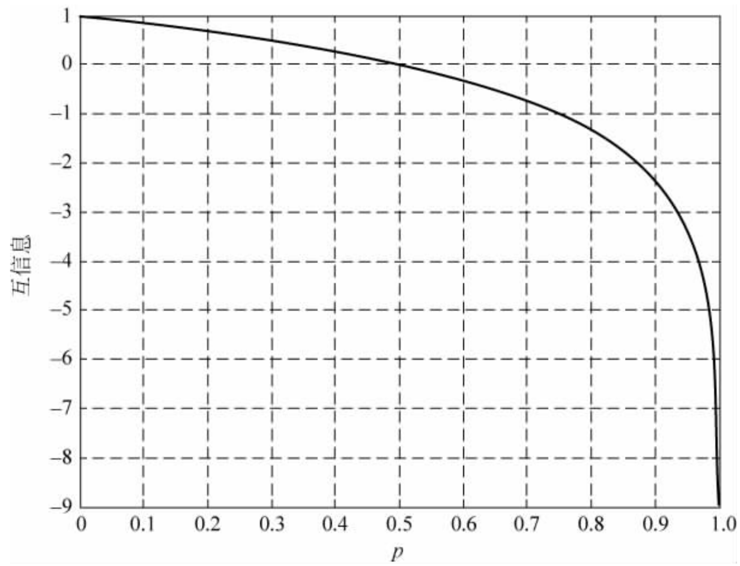


图 3.1.2　互信息 $I(x_0;y_0)$与信道错误概率 $p$ 的关系

```
clear all;
clc;
p = 0:0.001:1;
I00 = log2(2 * (1 - p));
figure;
plot(p,I00);
xlabel('p');
ylabel('互信息');
```

对于例 3.1.1 所示的二元离散信道，当信道错误概率 $p>0.5$ 时，$I(x_0;y_0)$为负值。也就是说，接收端收到符号 0 时，认为发送端的符号为 0 将不能获取任何信息量。

### 3.1.2　平均互信息量与平均条件互信息量

式(3.1.1)已经定义了互信息量 $I(x_i,y_j)$，即信源发出一个符号 $x_i$ 时，通过信道传输，接收端接收到 $y_j$ 所获得的关于 $x_i$ 的信息量。那么，信源发出符号 $X$，接收端收到符号 $Y$ 后获得的关于信源 $X$ 的信息量，称为 $X$ 和 $Y$ 的互信息 $I(X;Y)$，这是平均意义上的互信息量，称为平均互信息量，定义为单符号互信息量 $I(x_i,y_j)$在集合 $X$ 和 $Y$ 上的统计平均值，即

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= E[I(x_i;y_j)] = \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) I(x_i;y_j) \\ &= \sum_i \sum_j p(y_j) p(x_i/y_j) I(x_i;y_j) = \sum_j p(y_j) I(X;y_j) \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

式中，$I(X;y_j)$为互信息量在 $X$ 集合上的统计平均值。

$$I(X;y_j) = \sum_i p(x_i/y_j) I(x_i;y_j) \tag{3.1.10}$$

平均的条件自信息量称为条件熵，定义为在联合符号集 $XY$ 上的条件自信息量的联合概率加权统计平均值，即

$$H(X/Y)=\sum_i\sum_j p(x_iy_j)I(x_i/y_j) \tag{3.1.11}$$

它表示已知 $Y$ 后，关于 $X$ 仍存在的不确定度或平均信息量。结合式(3.1.9)可得

$$\begin{aligned}I(X;Y)&=\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}\\&=\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log p(x_i/y_j)-\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log p(x_i)\\&=\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log p(x_i/y_j)-\sum_j p(y_j/x_i)\Big[\sum_i p(x_i)\log p(x_i)\Big]\\&=H(X)-H(X/Y)\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

同理可推导出

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X) \tag{3.1.13}$$

在通信系统中，若发送端的符号是 $X$，而接收端的符号是 $Y$，则 $I(X;Y)$就是在接收端收到 $Y$ 后所能获得的关于 $X$ 的平均信息量，是随机变量 $Y$ 中包含 $X$ 的平均信息量的度量。互信息 $I(X;Y)$也可看作是随机变量 $X$ 和 $Y$ 之间独立性的度量，表征了 $Y$ 与 $X$ 之间的距离；互信息 $I(X;Y)$中 $X$ 和 $Y$ 可以互换位置，且总是非负的。由于 $I(X;Y)\geqslant 0$，必有 $H(X)\geqslant H(X/Y)$。当 $X$ 和 $Y$ 统计独立时，等号才成立。此时，接收端收到 $Y$ 后由于信道噪声很大，有 $H(X)=H(X/Y)$，$I(X;Y)=0$ 接收端收到 $Y$ 后不能提供任何关于 $X$ 的信息，此信道称为全损离散信道。反之，当 $X$ 和 $Y$ 一一对应，即对应于无干扰的确定性信道时，$I(X;Y)=H(X)$，接收端就能全部收到关于 $X$ 的信息 $H(X)$，此信道称为无扰离散信道。在一般情况下，$X$ 与 $Y$ 既非相互独立，也不是一一对应，那么互信息 $I(X;Y)$的范围是

$$0\leqslant I(X;Y)\leqslant H(X) \tag{3.1.14}$$

即从 $Y$ 获得 $X$ 的信息为 $0\sim H(X)$，常小于 $X$ 的熵。

**例 3.1.2** 在一个二进制信道中，信源消息集 $X\in\{0,1\}$，输入符号的概率为 $p(X=0)=q$，$p(X=1)=1-q$，信道转移概率为

$$\begin{aligned}p(Y=0/X=0)&=1-p_0\\p(Y=1/X=0)&=p_0\\p(Y=1/X=1)&=1-p_1\\p(Y=0/X=1)&=p_1\end{aligned}$$

在 $p_0=p_1=p$ 的条件下，求 $H(X/Y)$和 $I(X;Y)$的值。

**解**：信源熵是

$$H(X)=H(q)=-q\log q-(1-q)\log(1-q)$$

这里，$H(q)$是二元熵函数，$H(X/Y)$为式(3.1.11)定义的条件熵。以 $q$ 为参数，$H(X/Y)$可表示为

$$H(X/Y)=-\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(x_i/y_j) \tag{3.1.15}$$

根据

$$p(y_j)=\sum_{i=0}^{1}p(x_i)p(y_j/x_i)$$

可得

$$p(y_0)=\sum_{i=0}^{1}p(x_i)p(y_0/x_i)=q(1-p_0)+(1-q)p_1$$

$$p(y_1)=\sum_{i=0}^{1}p(x_i)p(y_1/x_i)=qp_0+(1-q)(1-p_1)$$

根据

$$p(x_i/y_j)=\frac{p(y_j/x_i)p(x_i)}{p(y_j)}$$

可得

$$p(x_0/y_0)=\frac{p(y_0/x_0)p(x_0)}{p(y_0)}=\frac{q(1-p_0)}{q(1-p_0)+(1-q)p_1}$$

$$p(x_1/y_0)=\frac{p(y_0/x_1)p(x_1)}{p(y_0)}=\frac{(1-q)p_1}{q(1-p_0)+(1-q)p_1}$$

$$p(x_0/y_1)=\frac{p(y_1/x_0)p(x_0)}{p(y_1)}=\frac{qp_0}{qp_0+(1-q)(1-p_1)}$$

$$p(x_1/y_1)=\frac{p(y_1/x_1)p(x_1)}{p(y_1)}=\frac{(1-q)(1-p_1)}{qp_0+(1-q)(1-p_1)}$$

代入式(3.1.15)，可得

$$\begin{aligned}H(X/Y)=&-p(x_0)[p(y_0/x_0)\log p(x_0/y_0)+p(y_1/x_0)\log p(x_0/y_1)]-\\&p(x_1)[p(y_0/x_1)\log p(x_1/y_0)+p(y_1/x_1)\log p(x_1/y_1)]\\=&-q\left[(1-p_0)\log\frac{q(1-p_0)}{q(1-p_0)+(1-q)p_1}+p_0\log\frac{qp_0}{qp_0+(1-q)(1-p_1)}\right]-\\&(1-q)\left[p_1\log\frac{(1-q)p_1}{q(1-p_0)+(1-q)p_1}+(1-p_1)\log\frac{(1-q)(1-p_1)}{qp_0+(1-q)(1-p_1)}\right]\\=&-q\left[(1-p)\log\frac{q(1-p)}{q(1-p)+(1-q)p}+p\log\frac{qp}{qp+(1-q)(1-p)}\right]-\\&(1-q)\left[p\log\frac{(1-q)p}{q(1-p)+(1-q)p}+(1-p)\log\frac{(1-q)(1-p)}{qp+(1-q)(1-p)}\right]\end{aligned}$$

由式(3.1.11)可得 $I(X;Y)$为

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$$

### 3.1.3 平均互信息的特性

本节介绍平均互信息 $I(X;Y)$的一些基本特性。

1. 非负性

由式(3.1.4)，互信息量不具备非负性的性质。信道传输某个特定的信源符号时信宿获得的信息量可能为负值。然而，从统计平均的角度看，通过一个信道获得的平均信息量不会是负值，总有

$$I(X;Y)\geqslant 0$$

只有当信源 $X$ 与信宿 $Y$ 相互统计独立时，信宿才接收不到任何信息。此时根据式(3.1.11)，有

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=0$$

此时信道疑义度(信道损失熵)为

$$H(X/Y)=H(X)$$

信道传输的信息全部损失在信道中，以致没有任何信息传输到信宿。

### 2. 极值性

由式(3.1.12)和式(3.1.13)可知

$$I(X;Y)\leqslant H(X) \tag{3.1.16}$$

$$I(X;Y)\leqslant H(Y) \tag{3.1.17}$$

当信道损失熵 $H(X/Y)=0$ 及噪声熵 $H(Y/X)=0$ 时，式(3.1.16)和式(3.1.17)的等号成立，此时对应的信道分别是确定信道和无噪信道。

极值性表明，经过信道的传输，信息量或多或少会减少，最多保持发送的信息量。这就是数据处理定理。

### 3. 交互性

$$I(X;Y)=I(Y;X) \tag{3.1.18}$$

根据平均互信息的定义

$$I(X;Y)=\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}=\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log\frac{p(y_i/x_j)}{p(y_i)}=I(Y;X) \tag{3.1.19}$$

这里利用了关系式

$$p(x_i/y_j)p(y_j)=p(y_j/x_i)p(x_i)$$

### 4. 凸性

根据平均互信息的定义式(3.1.9)，平均互信息 $I(X;Y)$是信道转移概率分布 $p(y/x)$和信源输入符号概率分布 $p(x)$的函数，即 $I(X;Y)=I[p(y/x),p(x)]$。$p(y/x)$代表信道特性，$p(x)$代表信源特性，因此不同的信道和信源得到的平均互信息不同。

根据凸函数的定义可以证明以下定理：

**定理 3.1** 平均互信息 $I(X;Y)$是输入信源的概率分布 $p(x)$的$\cap$型凸函数。

**定理 3.2** 平均互信息 $I(X;Y)$是信道转移概率分布 $p(y/x)$的$\cup$型凸函数。

定理 3.1 表明，对给定的信道，存在某种信源分布，使信宿获得的平均互信息最大。信道上传输的最大平均互信息就是信道容量。该定理给出了信道容量的定义。

定理 3.2 表明，对给定的信源，存在某种信道，使信宿获得的平均互信息最小。如果把信道转移概率看作某种信源编码映射关系，那么可以认为，对给定的信源，存在某种信源编码，使压缩后的平均互信息最小。该定理是限失真信源编码的基础。

## 3.1.4 平均互信息凸性的 MATLAB 分析

例 3.1.2 中，平均互信息 $I(X;Y)$随信道转移概率分布 $p(y_j/x_i)$和信源输入符号概率分布 $p(x_i)$变化的关系曲线分别如图 3.1.3(a)和 3.1.3 (b)所示。

图 3.1.3 对应的 MATLAB 程序代码如下：

```
clear all
clc
%%%计算输入概率固定条件下的条件熵和互信息
%%%计算条件熵 H(Y/X)
```

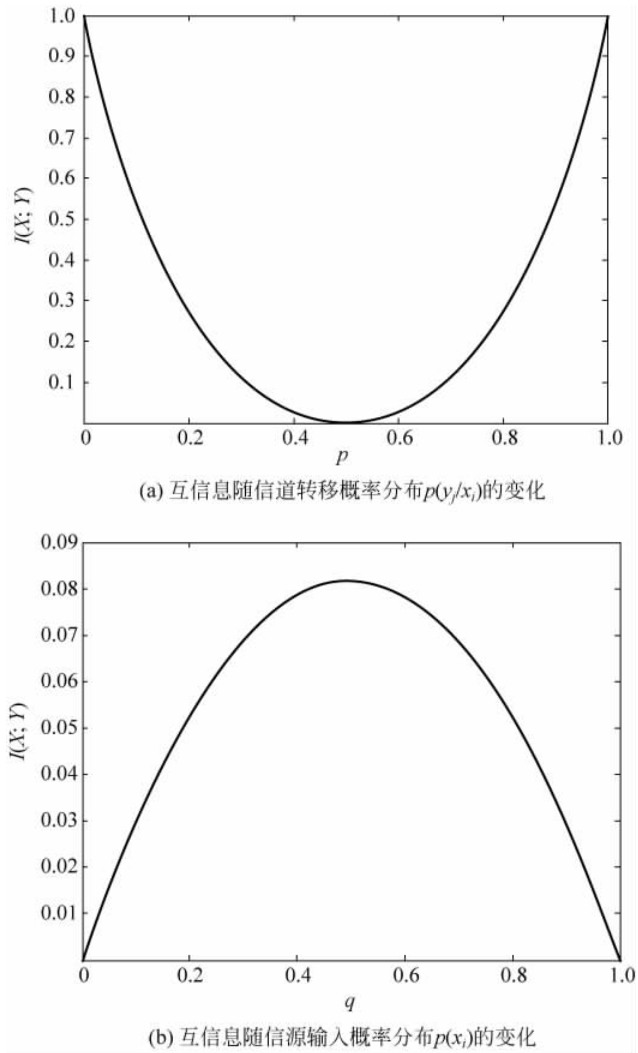


图 3.1.3　二进制信道的平均互信息

```
q = 1/2;
p = 0.0001:0.0001:1;
Hxy = - q * ((1 - p). * log2(q * (1 - p)./(q * (1 - p) + (1 - q) * p)) + p. * log2(q * p./(q * p + (1 -
    q) * (1 - p)))) - (1 - q) * (p. * log2((1 - q) * p./(q * (1 - p) + (1 - q) * p)) + (1 - p). * log2
    ((1 - q) * (1 - p)./(q * p + (1 - q) * (1 - p))));
%%%计算互信息 I(X;Y)
Ixy = 1 - Hxy;
figure(1);                    %%%图 3.1.3(a)
plot(p,Ixy);
xlabel('p');
ylabel('I(X;Y)')
%%%计算信道转移概率固定条件下的条件熵和互信息
%%%计算条件熵 H(Y/X)
p = 1/3;
q = 0.0001:0.0001:1;
```

```
Hxy = - q. * ((1 - p) * log2(q * (1 - p)./(q * (1 - p) + (1 - q). * p)) + p * log2(q * p./(q * p + (1 -
q) * (1 - p)))) - (1 - q). * (p * log2((1 - q) * p./(q * (1 - p) + (1 - q) * p)) + (1 - p) * log2((1 -
q) * (1 - p)./(q * p + (1 - q) * (1 - p))));
%%%计算互信息 I(X;Y)
Ixy = - q. * log2(q) - (1 - q). * log2(1 - q) - Hxy;
figure(2);                    %%图 3.1.3(b)
plot(q,Ixy);
xlabel('q');
ylabel('I(X;Y)')
```

在上例中，互信息是信源 $X$ 的概率分布 $p(x_i)$ 和信道转移概率 $p(y_j/x_i)$ 的函数，当 $p(x_i)$ 一定时，$I$ 是关于 $p(y_j/x_i)$ 的 $\bigcup$ 型凸函数，存在极小值(图 3.1.3(a))；而当 $p(y_j/x_i)$ 一定时，$I$ 是关于 $p(x_i)$ 的 $\bigcap$ 型凸函数，存在极大值(图 3.1.3(b))。

# 3.2 离散信道的数学模型与分类

由 3.1 节对平均互信息的讨论可知，对给定的信源，信宿获得的信息量由信道唯一确定，噪声和干扰主要从信道引入，它使信源输出的消息通过信道后产生错误或失真。因此信道的输入和输出不是确定的函数关系，而是统计依赖的关系。只要知道输入、输出，以及它们之间的统计依赖关系，那么信道的全部特性就确定了。

本章关注信道输入(信源)、信道输出(信宿)以及受噪声或干扰影响的信道特性，所以第 1 章的通信系统模型可简化为图 3.2.1。

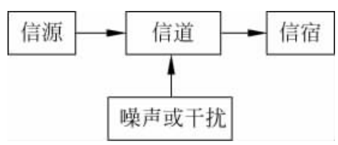

图 3.2.1 通信系统简化模型

在此模型中，信源是指原来的信源、信源编码器和信道编码器，其输出是二(多)进制信息序列。信道是包括发射机、实际信道(或称为传输媒质)和接收机在内的广义信道(又称为编码信道)，它的输入是二(多)进制数字序列，输出一般也是二(多)进制数字序列，而图 3.2.1 中的信宿可以是人或计算机。

## 3.2.1 信道的分类

信源输出的消息通过信道才能传送到信宿。信道有不同的种类。

从信道的定义大体可把信道分为狭义信道和广义信道。狭义信道是以传输媒质为基础的信号通路，根据传输媒质的不同，可分为有线信道和无线信道，狭义的有线信道特指明线、双绞线、同轴电缆、光缆等传输媒质，狭义的无线信道特指无线电波传播的空间。为了分析问题的方便，人们把收/发两端的设备纳入信道，称为广义信道。根据纳入信道的设备不同，广义信道可分为编码信道和调制信道。编码信道指信源(或信道)编码器输出端到信源(或信道)译码器输入端的部分，从编译码的角度来看，编码器的输出是某一数字序列，而译码器的输入同样也是某一数字序列，它们可能是不同的数字序列。因此，从编码器输出端到译码器输入端，可以用一个对数字序列进行变换的方框来概括。调制信道指调制器输出端到解调器输入端的部分，从调制和解调的角度来看，调制器输出端到解调器输入端的所有变换装置及传输媒质，不论其过程如何，只不过是对已调制信号进行某种变换。广义的信道定义除了包括传输媒质，还

包括传输信号的相关设备，在讨论通信的一般原理时，通常采用的是广义信道。

根据信道用户的多少，可分为单用户信道和多用户信道。单用户信道只有一个输入端和一个输出端；多用户信道至少有两个以上的输入端或输出端。

根据输入端和输出端的关联，可分为无反馈信道和有反馈信道。

根据信道参数与时间的关系，可分为固定参数信道（恒参信道）和时变参数信道（随参信道）。

根据输入输出信号的特点，可分为离散信道、连续信道、半离散半连续信道和波形信道。离散信道的输入/输出信号在时间、幅度上均离散；连续信道的输入/输出信号幅度连续、时间离散；半离散半连续信道的输入/输出信号中有一个是离散的，一个是连续的，如AWGN信道，输入离散，输出连续；波形信道就是实际模拟通信系统中的信道，其输入/输出信号在时间和幅度上均连续。

以下章节只研究无反馈、固定参数的单用户离散信道。

### 3.2.2 信道的数学模型

设离散信道的输入为一个随机变量 $X$，相应的输出的随机变量为 $Y$，如图3.2.2所示。

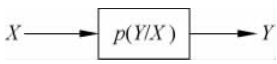


图 3.2.2 信道模型

一个离散信道应有三个参数：

输入符号集：$X \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

输出符号集：$Y \in \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$

信道转移概率：$p(Y/X)$

根据这一模型，可对信道分类如下：

(1) 无干扰信道：输入信号与输出信号有一一对应关系

$$y_j = f(x_i)\text{，并且 } p(y_j/x_i) = \begin{cases} 1 & y_j = f(x_i) \\ 0 & y_j \neq f(x_i) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

(2) 有干扰无记忆信道：输入与输出无一一对应关系，输出只与当前输入有关，此时只需分析单个符号的转移概率 $p(y_j/x_i)$ 即可。

(3) 有干扰有记忆信道：这是最一般的信道，输入与输出无一一对应关系，输出不但与当前输入有关，还与以前的若干个输入有关。

对有干扰无记忆信道，根据输入/输出符号数目等于2、大于2或趋于∞，可分以下信道模型：

**1. 二进制离散信道，$m=2$，$n=2$**

在二进制硬判决情况下，其信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ p_{10} & 1-p_{10} \end{bmatrix}$$

若 $p_{01}=p_{10}=p_e$，则称这种信道为二进制对称信道（BSC），否则称为非对称信道。若 $p_{01}$ 或 $p_{10}$ 等于0，则称为Z信道（确定性信道）。通常BSC是一种无记忆信道，所以也称为随机信道，它说明数据序列中出现的错误彼此无关。

**2. 离散无记忆信道**

当无记忆信道的输入/输出符号大于2但为有限值时，称为离散无记忆信道（DMC）。信道的输入是 $n$ 元符号，即输入符号集由 $n$ 个元素 $X \in \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ 构成，输出是 $m$ 元符号，即信道输出由 $m$ 个元素 $Y \in \{y_1, y_2, \cdots y_m\}$ 构成。那么输入/输出符号之间共有 $mn$ 个转

移概率,采用转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=[p(b_j/a_i)]=[p_{ij}]$表示,即

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}$$

式中,$\sum_{j=1}^{m} p(b_j/a_i)=1, i=1,2,\cdots,n$

BSC 信道是 DMC 信道的一个特例,其输入/输出符号均为 2,故 BSC 信道的转移概率矩阵可表示为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

3. 离散输入、连续输出信道

离散输入、连续输出信道也称为半连续信道,手机和固话之间的信道就是一个半连续信道,手机上处理的是数字信号,固话上处理的是模拟信号。半连续信道的输出一般可表示为

$$Y=X+G \tag{3.2.2}$$

式中,输入空间 $X$ 是一个离散符号集,输出空间 $Y$ 是一个连续符号集。在无线通信系统中,一般 $G$ 是一个均值为零、方差为 $\sigma^2$ 的高斯随机变量,当 $X=a_i$ 给定后,$Y$ 是一个均值为 $a_i$、方差为 $\sigma^2$ 的高斯随机变量,即其概率密度函数为

$$p(y/X=a_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(y-a_i)^2/2\sigma^2} \tag{3.2.3}$$

4. 波形信道——模拟信道

当信道的输入和输出都是随机模拟信号时,该信道称为波形信道,也即模拟信道。实际通信系统中的信道均为波形信道。加性信道是一种典型的波形信道,信道的输入 $x(t)$、输出 $y(t)$和加性噪声 $n(t)$满足关系

$$y(t)=x(t)+n(t) \tag{3.2.4}$$

若式中 $n(t)$为高斯白噪声,则此信道称为高斯白噪声信道。

**结论**:在离散或模拟加性噪声信道中,$H(Y/X)=H(n)$,$H(n)$称作噪声熵。

**证明**:在离散或模拟加性信道中,接收到的随机变量 $Y$ 是发送的随机变量 $X$ 和噪声随机变量 $n$ 的线性叠加,即

$$Y=X+n$$

基本加性信道中一般输入信号与噪声是相互独立的,满足

$$p(y/x)=p(n)$$

因此,在此加性信道中,条件熵为

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -\iint_{XY} p(xy)\log p(y/x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{XY} p(x)p(y/x)\log p(y/x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint_{XN} p(x)p(n)\log p(n)\mathrm{d}x\mathrm{d}n = -\int_X p(x)\mathrm{d}x\int_N p(n)\log p(n)\mathrm{d}n \\ &= -\int_N p(n)\log p(n)\mathrm{d}n = H(n) \end{aligned}$$

证明完毕。

## 3.3 信道容量及其一般计算方法

第 2 章讨论的信源熵，即信源每符号所携带的平均信息量，也称为信源信息传输率或信源信息率。据此定义信源的信息传输速率为单位时间内信源平均发出的信息量。同样，讨论信道时，定义信道中每个符号所能传送的信息量为信息传输率 $R$。假设信源发送符号 $X$，信宿收到符号 $Y$，则该信道中接收到符号 $Y$ 后平均每个符号获得的关于 $X$ 信息量是平均互信息 $I(X;Y)$，可见平均互信息就是信道的信息传输率。即

$$R = I(X;Y)(\text{bit/ 符号}) \tag{3.3.1}$$

若信道平均传输一个符号需要 $t$ 秒，则单位时间内信道平均传输的信息量，即信道的信息传输速率为

$$R_t = \frac{I(X;Y)}{t}(\text{b/s}) \tag{3.3.2}$$

对于固定的信道，信道容量定义为信道信息传输率或信息传输速率的最大值，记为 $C$ 或 $C_t$。$C$ 是信道能够传输的最大信息量，$C_t$ 是单位时间内信道平均传输的最大信息量。由 3.1 节平均互信息的凸性可知，对于一个固定的信道（信道转移概率一定），平均互信息是信源概率分布 $p(x)$ 的 $\cap$ 型凸函数。因此，存在一种最佳的信源概率分布，使某一信道的平均互信息达到最大值，即信道容量。

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)(\text{bit/ 符号}) \tag{3.3.3}$$

$$C_t = \frac{1}{t}\max_{p(x)} I(X;Y)(\text{b/s}) \tag{3.3.4}$$

式中，$t$ 为平均传输一个符号所需的时间，单位为秒。

由式(3.3.3)和式(3.3.4)可见，信道容量与信源的统计特性无关，它只与信道的统计特性有关，是信道转移概率的函数。

信道容量是信道上能够传输给接收端的最大信息量，这一点除了数学上平均互信息 $I(X;Y)$ 的凸性可以证明外，还可以通过一些例子进行说明。

**例 3.3.1** 无噪二元信道如图 3.3.1 所示。

无噪二元信道中，输出是输入的精确复制，可以无误差地接收任何传输比特。因此，每一次传输，可以可靠地传输 1bit 给接收端，也就是说，该信道的信道容量是 1bit。

**例 3.3.2** 有噪四元信道如图 3.3.2 所示。


图 3.3.1 无噪二元信道

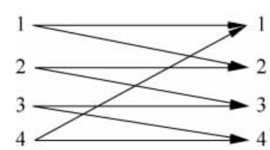


图 3.3.2 有噪四元信道

该信道中，接收端接收当前相同符号的概率是 1/2。如果考虑所有输入符号，那么接收端收到某符号后将不能确定所发送的符号。如果仅考虑输入端口 1 和 3，那么接收到某符

号后能立即判断所发送的符号，如同二元无噪信道的特性。每次发送可以可靠地在信道上传输 1bit 给接收端，因此信道容量是 1bit。

一般情况下，通信信道不具有图 3.3.1 和图 3.3.2 简单的模型，因此不是总能确定可靠传输的输入符号子集。此时可以通过观察输出序列以趋于零的低误码率确定输入序列。

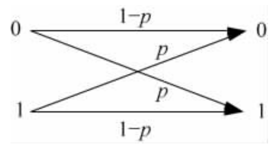


图 3.3.3　二元对称信道

**例 3.3.3**　二元对称信道如图 3.3.3 所示，求其信道容量。

**解**：二元对称信道是一个典型的有噪通信系统，设$\bar{p}=1-p$，则该信道的数学模型为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{p} & p\\ p & \bar{p}\end{bmatrix}$$

设二元信源的概率分布为 $p(0)=\alpha$，则 $p(1)=1-\alpha=\bar{\alpha}$，则二元对称信道的平均互信息为

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=H(\alpha\bar{p}+\bar{\alpha}p,\alpha p+\bar{\alpha}\bar{p})-H(p,1-p)$$

令

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial\alpha}=0$$

得

$$\alpha=\frac{1}{2}$$

$$C=\max_{p(x)}I(X;Y)=I(X;Y)\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}=1+p\log p+(1-p)\log(1-p)(\text{bit/ 符号})$$

上式进一步表明，二元对称信道的信道容量是信道转移概率 $p$ 的函数，与信源符号概率分布 $\alpha$ 无关。$p$ 不同，则信道不同。不同信道的信道容量随 $p$ 的变化如图 3.3.4 所示。

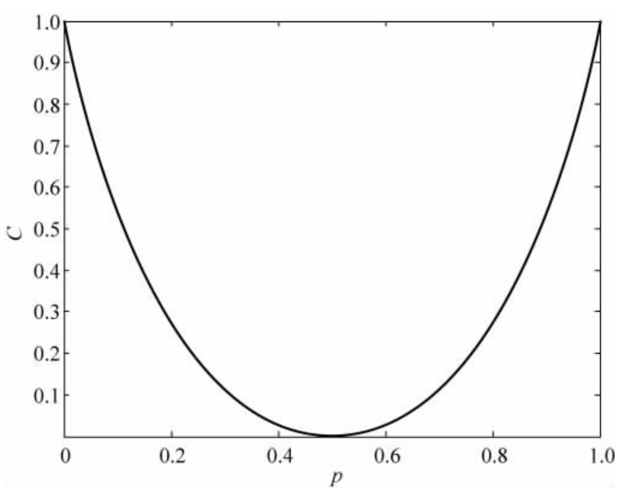


图 3.3.4　二元对称信道的信道容量随传输错误率 $p$ 的变化

对于一般信道，计算信道容量的问题就是求该信道的平均互信息的极大值问题。对一些特殊类型的离散信道，有一些经验公式可以推导出来以便于计算其信道容量。

图 3.3.4 对应的 MATLAB 程序代码如下：

```
clear all
clc
%%%计算二元信道符号传输概率变化时的信道容量曲线 q = 1/2;
p = 0.0001:0.0001:1;
C = 1 + p. * log2(p) + ((1 - p). * log2(1 - p);
figure(1);              %%%图 3.3.4
plot(p,C);
xlabel('p');
ylabel('C')
```

### 3.3.1 特殊离散信道的信道容量

根据平均互信息的表达式

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) \tag{3.3.5}$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) \tag{3.3.6}$$

若式(3.3.6)中,损失熵 $H(X/Y)=0$,那么该信道称作无损信道；若式(3.3.5)中噪声熵 $H(Y/X)=0$,则该信道称作无噪信道；损失熵和噪声熵均为零的信道称为无噪无损信道。这些特殊信道的信道容量求解问题,已经从求平均互信息 $I(X;Y)$的极大值问题简化为求信息熵 $H(X)$或 $H(Y)$的极大值问题。

有噪无损信道的信道容量为

$$C = \max_{p(x)} H(X) \tag{3.3.7}$$

无噪有损信道的信道容量为

$$C = \max_{p(x)} H(Y) \tag{3.3.8}$$

无噪无损信道的信道容量为

$$C = \max_{p(x)} H(X) = \max_{p(x)} H(Y) \tag{3.3.9}$$

1. 有噪无损信道

在离散有噪无损信道中,一个 $X$ 值对应多个 $Y$ 值,每个 $X$ 对应的 $Y$ 值不重合。因此,一个 $Y$ 值一一对应确定的 $X$ 值。信道转移概率矩阵中每一列仅有一个非零元素,每一行有多个非零元素,其和为 1。因此该信道的损失熵 $H(X/Y)=0$,而噪声熵 $H(Y/X)\neq 0$。有噪无损信道的信道容量为

$$C = \max_{p(x)} H(X)$$

**例 3.3.4** 一个有噪无损信道如图 3.3.5 所示。

其信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

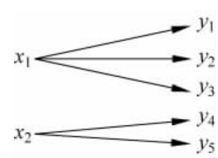

图 3.3.5 有噪无损信道

可见,信道矩阵中每一列有且只有一个非零元素时,这个信道一定是有噪无损信道。此时信道疑义度为 0,而信道噪声熵不为 0,从而

$$C = \max_{p(x)} H(X) = \log 2 = 1(\text{bit/ 符号})$$

2. 无噪有损信道

离散无噪有损信道中，一个 $X$ 值对应一个 $Y$ 值，每个 $Y$ 对应的 $X$ 值不重合。因此，一个 $X$ 值一一对应确定的 $Y$ 值。信道转移概率矩阵中每一行仅有一个"1"元素。因此该信道的损失熵 $H(X/Y)\neq 0$，而噪声熵 $H(Y/X)=0$。无噪有损信道的信道容量为

$$C=\max_{p(x)} H(Y)$$

**例 3.3.5**　一个无噪有损信道如图 3.3.6 所示。

其信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

可见，此信道每一行只有一个"1"元素，此时信道疑义度不为 0，而信道噪声熵为 0，从而

$$C=\max_{p(x)} H(Y)=\log 2=1(\text{bit/ 符号})$$

3. 无噪无损信道

离散无噪无损信道中，一个 $X$ 值对应一个 $Y$ 值，每个 $Y$ 对应一个 $X$ 值。信道转移概率矩阵中每一行和每一列都仅有一个"1"元素。因此该信道的损失熵 $H(X/Y)\neq 0$，而噪声熵 $H(Y/X)=0$。无噪无损信道的信道容量为

$$C=\max_{p(x)} H(Y)$$

**例 3.3.6**　一个无噪无损信道如图 3.3.7 所示。

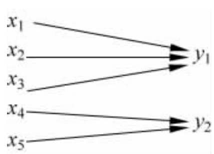


图 3.3.6　无噪有损信道

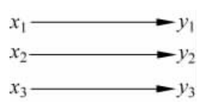


图 3.3.7　无噪无损信道

其信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可见，此信道每一行只有一个"1"元素，每一列也只有一个"1"元素，此时由于信道的损失熵和疑义度都等于 0，所以

$$C=\max_{p(x)} H(Y)=\max_{p(x)} H(X)=\log 3(\text{bit/ 符号})$$

### 3.3.2　对称离散信道的信道容量

如果一个离散信道的信道转移矩阵中的每一行都是由同一组元素的不同组合构成的，称为行对称，如果每一列也是由这一组元素组成的，称为列对称，同时满足行对称和列对称的信道称为对称信道。如

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

如果离散信道的输入符号数和输出符号数相等，即 $n=m$；其信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\bar{p} & \frac{p}{m-1} & \cdots & \frac{p}{m-1}\\ \frac{p}{m-1} & \bar{p} & \cdots & \frac{p}{m-1}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \frac{p}{m-1} & \frac{p}{m-1} & \cdots & \bar{p}\end{bmatrix}$$

则称此信道为强对称信道或均匀信道，它是对称离散信道的一种特例。该信道的各行之和为 1，各列之和也为 1。

若信道的列可以划分成若干个互不相交的子集，每一个子集都是对称信道，则称该信道为准对称信道。准对称信道的信道转移概率矩阵只满足行对称，不满足列对称。如

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3\end{bmatrix}$$

可划分为

$$\begin{bmatrix}1/3 & 1/6\\ 1/6 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3\\ 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/6\\ 1/6\end{bmatrix}$$

又如

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.1 & 0.7\end{bmatrix}$$

可分成

$$\begin{bmatrix}0.7 & 0.2\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}$$

对上述对称信道，信道容量的计算可参考以下公式。

对称离散信道的信道容量为

$$C=\max_{p(x_i)}[H(Y)-H(Y/x_i)]=\log m-H(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{im}) \tag{3.3.10}$$

强对称信道的信道容量为

$$\begin{aligned}C&=\log m-H\left(\bar{p},\frac{p}{m-1},\cdots,\frac{p}{m-1}\right)\\ &=\log M-\log(M-1)-H(\bar{p},p)\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

准对称离散信道的信道容量为

$$C=\log N-H(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{im})-\sum_{k=1}^{K}N_k\log M_k \tag{3.3.12}$$

式中，$n$ 为输入符号集的个数；$m$ 为输出符号集的个数；$p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{im}$ 为矩阵中的行元素；

$N_k$ 为第 $k$ 个划分子矩阵中的行元素之和；$M_k$ 为第 $k$ 个划分子矩阵的列元素之和。

上述信道的平均互信息 $I(X;Y)$达到信道容量时，上述信道的输入符号等概率分布。

**结论**：对称离散信道的信道损失熵 $H(Y/X)=H(Y/x_i)$。

**证明**：根据信道损失熵的定义

$$\begin{aligned}H(Y/X) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\log p(y_j/x_i) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}p(x_i)\left[-\sum_{j=1}^{m}p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}p(x_i)H(Y/x_i)\\ &= H(Y/x_i)\sum_{i=1}^{n}p(x_i) = H(Y/x_i)\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

式中，$H(Y/x_i)$为对信道转移概率矩阵的第 $i$ 行求和，由对称信道定义，此值是一个与 $i$ 无关的一个常数。即

$$H(Y/x_i) = H(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{im}) \tag{3.3.14}$$

**结论**：对称离散信道输入符号等概率分布时，输出符号也等概率分布，反之亦成立。

**证明**：根据联合概率展开公式

$$p(y_j) = \sum_i p(x_iy_j) = \sum_i p(x_i)p(y_j/x_i)$$

如果输入符号等概率，即 $p(x_i)=\dfrac{1}{n}$，则

$$p(y_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p(y_j/x_i)$$

由对称信道定义，第 $j$ 列的信道转移概率 $p(y_j/x_i)$之和为定值，与列数 $j$ 无关，因此

$$\sum_{i=1}^{n}p(y_1/x_i) = \sum_{i=1}^{n}p(y_2/x_i) = \cdots = \sum_{i=1}^{n}p(y_m/x_i)$$

则

$$p(y_1) = p(y_2) = \cdots = p(y_m) = \frac{1}{m}$$

可见，对称信道的输入符号等概率分布，输出符号也等概率分布。

反之，当输出符号等概率分布时，$p(y_j)=\dfrac{1}{m}$，则

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m}p(y_j)p(x_i/y_j) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}p(x_i/y_j)$$

由对称信道定义，第 $i$ 行的信道转移概率 $p(x_i/y_j)$之和为定值，与行数 $i$ 无关，因此

$$\sum_{j=1}^{m}p(x_1/y_j) = \sum_{j=1}^{m}p(x_2/y_j) = \cdots = \sum_{j=1}^{m}p(x_n/y_j)$$

则

$$p(x_1) = p(x_2) = \cdots = p(x_n) = \frac{1}{n}$$

可见，对称信道的输出符号等概率分布，输入符号也等概率分布。

证明完毕。

**例 3.3.7** 某信道的信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

求信道容量。

**解**：该信道为对称信道，根据信道公式(3.3.10)，有

$$C=\log 4-H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=2+\left[\frac{1}{3}\log 3+\frac{1}{3}\log 3+\frac{1}{6}\log 6+\frac{1}{6}\log 6\right]$$
$$=0.817(\text{bit/ 符号})$$

**例 3.3.8** 对于二元对称信道，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{p} & p\\ p & \bar{p}\end{bmatrix}$$

其信道容量为

$$C=\log 2-H(\bar{p},p)=1-H(1-p,p)$$

是信道转移概率 $p$ 的函数。

**例 3.3.9** 某准对称信道

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p-q & q & p\\ p & q & 1-p-q\end{bmatrix}$$

可分成

$$\begin{bmatrix}1-p-q & p\\ p & 1-p-q\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}q\\ q\end{bmatrix}$$

根据信道容量公式(3.3.12)，有

$$C=\log 2-H(1-p-q,p,q)-(1-q)\log(1-q)-q\log 2q$$

### 3.3.3 一般离散信道的信道容量

对于一般的信道，可根据信道容量定义，对平均互信息的输入符号概率分布求极值。

$$C=\max_{p(x)} I(X;Y)(\text{bit/ 符号})$$

根据平均互信息定义

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)p(y_j/x_i)\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}$$

对输入符号概率分布 $p(x_i)$求极值，得到

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p(x_i)}=\sum_{j=1}^{m}p(y_j/x_i)\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}=I(x_i;Y)$$

根据输入符号概率全概公式，并引入参数 $e$、$\lambda>0$，可以得到

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}P(y_j/x_i)\log\frac{P(y_j/x_i)}{P(y_j)}=\lambda+\log e\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(x_i)=1\end{cases}$$

该信道的信道容量为

$$C = \lambda + \log e \tag{3.3.15}$$

**定理 3.3** 一般离散信道达到信道容量的充要条件是输入概率分布满足

$$I(x_i;Y) = C, \quad \text{对所有 } x_i, p(x_i) \neq 0 \tag{3.3.16}$$

$$I(x_i;Y) \leqslant C, \quad \text{对所有 } x_i, p(x_i) = 0 \tag{3.3.17}$$

该定理说明,当平均互信息达到信道容量时,信源每一个符号都对输出端输出相同的互信息。

可以利用该定理对一些特殊信道求得它的信道容量

**例 3.3.10** 输入符号集为{0,1,2},信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设 $P(0)=P(2)=1/2, P(1)=0$,则

$$p(y=0) = \frac{1}{2}$$

$$p(y=1) = \frac{1}{2}$$

则

$$I(0,Y) = \sum_{y=1}^{2} p(y/0)\log\frac{p(y/0)}{p(y)} = \log 2$$

$$I(2,Y) = \sum_{y=1}^{2} p(y/2)\log\frac{p(y/2)}{p(y)} = \log 2$$

$$I(1,Y) = \sum_{y=1}^{2} p(y/1)\log\frac{p(y/1)}{p(1)} = 0$$

所以

$$C = \log 2 = 1(\text{bit/ 符号})$$

对于一般信道的求解方法,就是求解方程组

$$C = I(x_i;Y) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i) - \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\log p(y_j) \tag{3.3.18}$$

移项,并令 $\beta_j = C + \log p(y_j)$,得

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)[C + \log p(y_j)] = \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\beta_j \tag{3.3.19}$$

上式可展开为 $n$ 个方程:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_1)\log p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_1)\beta_j \\ \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_2)\log p(y_j/x_2) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_2)\beta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_n)\log p(y_j/x_n) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_n)\beta_j \end{cases} \tag{3.3.20}$$

若 $n=m$，则可以解出 $m$ 个未知数 $\beta_j$，然后根据 $\beta_j=C+\log p(y_j)$，得

$$p(y_j)=2^{\beta_j-C} \tag{3.3.21}$$

根据

$$\sum_{j=1}^{m}2^{\beta_j-C}=1$$

可得

$$C=\log\sum_{j=1}^{m}2^{\beta_j} \tag{3.3.22}$$

**例 3.3.11** 某信道的信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

可列方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{4}\beta_2+\frac{1}{4}\beta_4=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\\ \beta_2=0\\ \beta_3=0\\ \frac{1}{4}\beta_1+\frac{1}{4}\beta_3+\frac{1}{2}\beta_4=\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\end{cases}$$

解之得

$$\beta_2=\beta_3=0$$

$$\beta_1=\beta_4=-2$$

$$C=\log(2^{-2}+2^{0}+2^{0}+2^{-2})=\log\frac{5}{2}=\log5-1$$

$$p(y_1)=p(y_4)=2^{-2-\log5+1}=\frac{1}{10}$$

$$p(y_2)=p(y_3)=2^{0-\log5+1}=\frac{4}{10}$$

$$p(x_1)=p(x_4)=\frac{4}{30}$$

$$p(x_2)=p(x_3)=\frac{11}{30}$$

### 3.3.4 *N* 次离散扩展信道的平均互信息与信道容量

上一节讨论了单符号离散信道，其输入和输出都只是单个随机变量。然而一般离散信道的输入和输出是离散的随机序列，若输入或输出随机序列的长度为 $N$，且其中每一个随机变量都取值于同一个输入或输出的符号集，则该信道称为单符号离散信道的 $N$ 次离散扩展信道。若输入或输出随机序列中每一个随机变量相互独立，则该信道称为 $N$ 次离散无记

忆扩展信道或离散无记忆信道的 $N$ 次扩展信道。$N$ 次离散扩展信道与单符号离散信道的数学模型相同，为$\{X^N, P(Y^N/X^N), Y^N\}$，如图 3.2.2 所示。不同的是，$N$ 次离散扩展信道的输入和输出均为长度为 $N$ 的随机序列，可表示为

$$X^N = (X_1 X_2 \cdots X_i \cdots X_N), \quad X_i \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \tag{3.3.23}$$

$$Y^N = (Y_1 Y_2 \cdots Y_j \cdots Y_N), \quad Y_j \in \{y_1, y_2, \cdots, y_m\} \tag{3.3.24}$$

而且当信道无记忆时，$N$ 次离散扩展信道的输入和输出随机序列之间的转移概率等于对应时刻的随机变量的转移概率的乘积，即

$$\begin{aligned} p(Y^N/X^N) &= p(Y_1 Y_2 \cdots Y_j \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_i \cdots X_N) \\ &= p(\beta_l / \alpha_k) \\ &= p(\beta_{l_1} \beta_{l_2} \cdots \beta_{l_N} / \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \cdots \alpha_{k_N}) \\ &= \prod_{i=1}^{N} p(\beta_{l_i} / \alpha_{k_i}) \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

式中，

$$\alpha_{ki} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \quad \beta_{li} \in \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}, \quad k = 1, 2, \cdots, n^N, l = 1, 2, \cdots, m^N \tag{3.3.26}$$

则 $N$ 次离散扩展信道的信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p(\beta_1/\alpha_1) & p(\beta_2/\alpha_1) & \cdots & p(\beta_{m^N}/\alpha_1) \\ p(\beta_1/\alpha_2) & p(\beta_2/\alpha_2) & \cdots & p(\beta_{m^N}/\alpha_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p(\beta_1/\alpha_{n^N}) & p(\beta_2/\alpha_{n^N}) & \cdots & p(\beta_{m^N}/\alpha_{n^N}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m^N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m^N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n^N 1} & p_{n^N 2} & \cdots & p_{n^N m^N} \end{bmatrix} \tag{3.3.27}$$

式中，$\sum_{l=1}^{m^N} p(\beta_l/\alpha_k) = 1, k = 1, 2, \cdots, n^N$

由此，$N$ 次离散扩展信道的数学模型如图 3.3.8 所示。

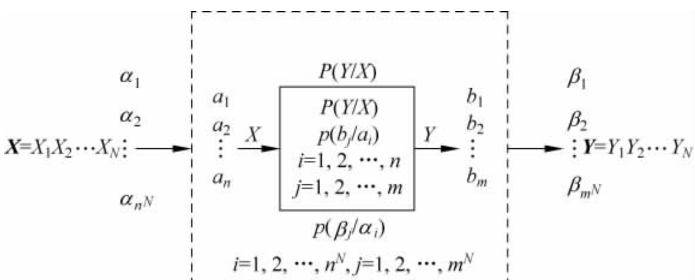


图 3.3.8　$N$ 次离散扩展信道的数学模型

**例 3.3.12**　二进制无记忆对称信道矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix}$$

求该信道的二次扩展信道矩阵及其信道容量。

**解**：二次扩展信道的输入符号集为

$$X^2 = (X_1 X_2) = \{00, 01, 10, 11\}$$

输出符号集为

$$Y^2 = (Y_1Y_2) = \{00,01,10,11\}$$

根据无记忆信道的特性，可得二次扩展信道的转移概率为

$$p_{11} = p(\beta_1/\alpha_1) = p(00/00) = p(0/0)p(0/0) = \bar{p}^2$$

$$p_{12} = p(\beta_2/\alpha_1) = p(01/00) = p(0/0)p(1/0) = \bar{p}p$$

$$p_{13} = p(\beta_3/\alpha_1) = p(10/00) = p(1/0)p(0/0) = p\bar{p}$$

$$p_{14} = p(\beta_4/\alpha_1) = p(11/00) = p(1/0)p(1/0) = p^2$$

同理，可求得 $p(\beta_l/\alpha_k)$，$k=1,2,3,4$；$l=1,2,3,4$。则二次扩展信道的信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \bar{p}^2 & \bar{p}p & p\bar{p} & p^2 \\ \bar{p}p & \bar{p}^2 & p^2 & p\bar{p} \\ p\bar{p} & p^2 & \bar{p}^2 & \bar{p}p \\ p^2 & p\bar{p} & \bar{p}p & \bar{p}^2 \end{bmatrix}$$

已知 $N$ 次离散扩展信道的转移概率矩阵，根据平均互信息的定义，可得 $N$ 次离散扩展信道的平均互信息为

$$\begin{aligned} I(X^N;Y^N) &= H(Y^N) - H(Y^N/X^N) \\ &= \sum_{k=1}^{n^N}\sum_{l=1}^{m^N} p(\beta_l/\alpha_k)\log\frac{p(\beta_l/\alpha_k)}{p(\beta_l)} \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

当信道无记忆时，有

$$p(Y^N/X^N) = \prod_{i=1}^{N} p(\beta_{l_i}/\alpha_{k_i}) = \prod_{i=1}^{N} p(Y_i/X_i) \tag{3.3.29}$$

当信源无记忆时，有

$$p(X^N) = p(X_1X_2\cdots X_N) = \prod_{i=1}^{N} p(X_i) \tag{3.3.30}$$

对于无记忆信源和无记忆信道，将式(3.3.29)和式(3.3.30)代入式(3.3.28)，可得

$$H(Y^N) = \sum_{i=1}^{N} H(Y_i)$$

$$H(Y^N/X^N) = \sum_{i=1}^{N} H(Y_i/X_i)$$

则

$$I(X^N;Y^N) = \sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_i) \tag{3.3.31}$$

若 $N$ 次扩展信道的输入和输出随机序列中的每一个随机变量取自同一个概率空间，且输入的随机序列在同一信道（或时不变信道）中传输，则有

$$I(X^N;Y^N) = NI(X;Y) \tag{3.3.32}$$

对于 $N$ 次离散扩展信道，其信道容量为

$$C^N = \max_{p(X^N)} I(X^N;Y^N)$$

进一步满足无记忆信源和无记忆信道条件时，有

$$C^N = \max_{p(X)} \sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_i) = \sum_{i=1}^{N} \max_{p(X_i)} I(X_i;Y_i) = \sum_{i=1}^{N} C_i \tag{3.3.33}$$

若输入随机序列在同一信道中传输时，$C_i=C$，则

$$C^N = NC \tag{3.3.34}$$

这说明对于离散无记忆信道，其 $N$ 次离散扩展信道的信道容量等于单符号离散信道的信道容量的 $N$ 倍，条件是输入信源为无记忆的，且每一个输入变量的分布各自达到最佳分布。

### 3.3.5　并联信道的平均互信息与信道容量

本节只讨论独立并联信道，其数学模型如图 3.3.9 所示。图中，每一个输入的随机变量经过不同的并行信道进行传输，每一个信道的输出只与本信道的输入有关，与其他信道的输入和输出都无关。因此该独立并联信道相当于时变的无记忆的 $N$ 次离散扩展信道。

若独立并联信道的每个输入和输出均为单符号随机变量，表示为

$$X_i \in \{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}\}$$

$$Y_j \in \{y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jm}\}$$

可根据时变无记忆的 $N$ 次离散扩展信道的特性给出 $N$ 个独立并联信道的联合传递概率为

$$p(Y_1Y_2\cdots Y_N/X_1X_2\cdots X_N) = p(Y_1/X_1)P(Y_2/X_2)\cdots P(Y_N/X_N)$$

对于独立并联信道，当各输入信源也相互独立时，$N$ 个独立并联信道的平均互信息等于各信道的平均互信息之和。一般情况下，$N$ 个独立并联信道的平均互信息会随着输入信源间存在的相关性而减少。

$$I(X^N; Y^N) \leqslant \sum_{i=1}^{N} I(X_i; Y_i) \tag{3.3.35}$$

当各输入信源相互独立时取等号。

同理可得到 $N$ 个独立并联信道的信道容量与各信道的信道容量之间的关系：

$$C_{并} \leqslant \sum_{i=1}^{N} C_i \tag{3.3.36}$$

当各输入信源相互独立，且各信源符号的概率分布达到各信道容量的最佳输入分布时取等号。

**例 3.3.13**　两个并联的 BSC 信道如图 3.3.10 所示。

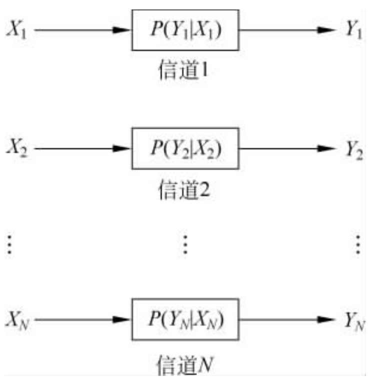


图 3.3.9　独立并联信道数学模型

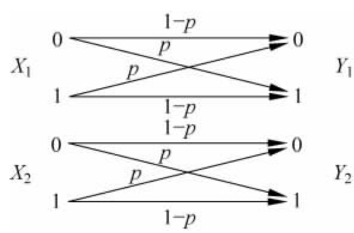


图 3.3.10　独立并联 BSC 信道

求该并联信道的转移概率矩阵及信道容量。

**解**：两个 BSC 信道的转移概率矩阵相同，为

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{p} & p\\ p & \bar{p}\end{bmatrix}$$

并联信道的输入符号集为

$$X^2=(X_1X_2)\in\{x_{01},x_{11},x_{02},x_{12}\}$$

输出符号集为

$$Y^2=(Y_1Y_2)=\{y_{01},y_{11},y_{02},y_{12}\}$$

根据无记忆信道的特性，可得独立并联信道的转移概率为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & p & 0 & 0\\ p & 1-p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-p & p\\ 0 & 0 & p & 1-p\end{bmatrix}$$

该信道为对称 DMC 信道，其信道容量为

$$C_{并}(\mathrm{I},\mathrm{II})=\log4-H(p,1-p) \tag{3.3.37}$$

若三个 BSC 信道并联，其信道容量为

$$C_{并}(\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})=\log6-H(p,1-p) \tag{3.3.38}$$

依此类推，若 $N$ 个 BSC 信道并联，其信道容量为

$$C_{并}(\mathrm{I},\mathrm{II}\cdots,N)=\log2N-H(p,1-p) \tag{3.3.39}$$

并联信道的信道容量随并联级数的关系如图 3.3.11 所示。随着并联级数的增加，信道容量逐渐增加。

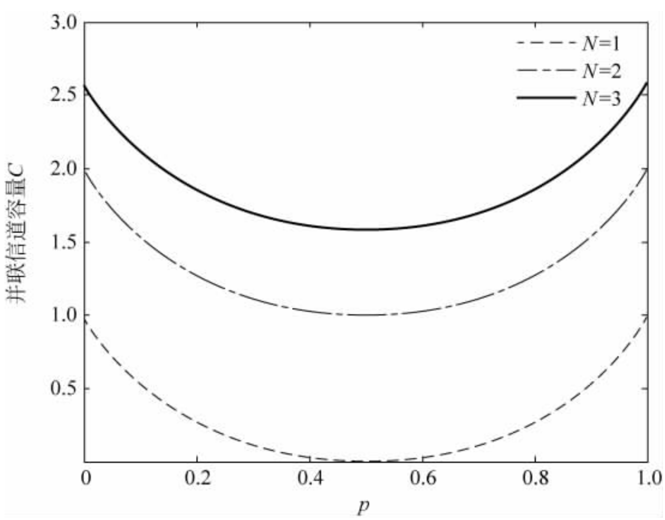


图 3.3.11　$N$ 级二元对称信道并联的信道容量

图 3.3.11 对应的 MATLAB 程序代码如下：

```
clear all
clc
```

```
p = 0:0.0001:1;
H = - p. * log2(p) - (1 - p). * log2(1 - p);
c1 = 1 - H;
c2 = 2 - H;
c3 = log2(6) - H;
figure(1);
plot(p,c1,'-- ',p,c2,'- .',p,c3);
xlabel('p');
ylabel('并联信道容量 C')
legend('N = 1','N = 2','N = 3');
axis([0 1,0 1])
```

### 3.3.6 串联信道的平均互信息与信道容量

中继通信系统的信道是一种典型的串联信道。本节以 2 个信道串联为例进行讨论。假设信道Ⅰ的输入为单符号随机变量 $X$,输出为单符号随机变量 $Y$,信道Ⅱ与信道Ⅰ串联,因此信道Ⅱ的输入为信道Ⅰ的输出 $Y$,信道Ⅱ的输出为单符号随机变量 $Z$。$X$、$Y$、$Z$ 的取值分别为

$$X \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$
$$Y \in \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$$
$$Z \in \{z_1, z_2, \cdots, z_t\}$$

串联信道模型如图 3.3.12 所示。

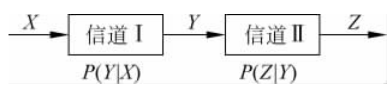


图 3.3.12 串联信道模型

信道Ⅰ的输出 $Y$ 仅与其输入 $X$ 有关,而信道Ⅱ的输出 $Z$ 不仅与信道Ⅱ的输入 $Y$ 有关,也与信道 $I$ 的输入 $X$ 有关。因此信道 $I$ 和信道Ⅱ的转移概率分别为

$$p(Y/X) = p(b_j/a_i)$$
$$p(Z/XY) = p(z_k/a_ib_j)$$

串联信道的转移概率为

$$p(Z/X) = \sum_Y p(Y/X)p(Z/XY)$$

若串联信道满足一阶马尔可夫链性质,即信道当前的输出只与当前的输入符号有关,则

$$p(Z/XY) = p(Z/Y) = p(z_k/b_j)$$
$$p(Z/X) = \sum_Y p(Y/X)p(Z/Y) = \sum_j p(b_j/a_i)p(z_k/b_j)$$

此时,信道的转移概率矩阵满足

$$[p(Z/X)]_{n\times t} = [p(Y/X)]_{n\times m} \cdot [p(Z/Y)]_{m\times t} \tag{3.3.40}$$

式(3.3.40)说明,$X$、$Y$、$Z$ 满足马尔可夫链的串联信道的转移概率矩阵等于各串联信道的转移概率矩阵的乘积。

据平均互信息的定义,串联信道的输出 $Z$ 所能提供的关于 $XY$ 的平均信息量不小于从输出 $Z$ 所获得的关于 $X$ 或 $Y$ 的平均信息量。

$$I(XY; Z) \geqslant I(X; Z)$$
$$I(XY; Z) \geqslant I(Y; Z)$$

当 $X$、$Y$、$Z$ 满足马尔可夫链性质,即各串联子信道相互独立时取等号。

由第 2 章信息不增性定理，$X$、$Y$、$Z$ 满足马尔可夫链的串联信道的平均互信息满足关系

$$I(X;Z) \leqslant I(X;Y) \tag{3.3.41}$$

$$I(X;Z) \leqslant I(Y;Z) \tag{3.3.42}$$

对于式(3.3.41)，$X$、$Z$ 之间总的串联信道的转移概率矩阵与 $X$、$Y$ 之间信道Ⅰ的转移概率矩阵相同时取等号，此时 $Y$、$Z$ 之间的信道Ⅱ为无噪无损信道。同理，当信道Ⅰ为无噪无损信道时式(3.3.42)取等号。

式(3.3.41)和式(3.3.42)也表明，对于一般的串联信道，串联的子信道越多，则总的串联信道的平均互信息越小，甚至减小为零。

已知串联信道的平均互信息，则串联信道的信道容量定义为

$$C_{串} = \max_{p(X)} I(X;Z) \tag{3.3.43}$$

与串联信道的平均互信息特性相同，串联信道的容量也可能随着串联子信道的数量增加而减小，甚至为零。

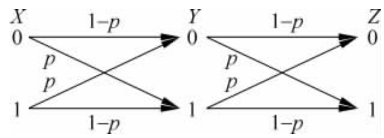


图 3.3.13　两个二进制对称信道组成的串联信道

**例 3.3.14**　两个二进制对称信道组成的串联信道如图 3.3.13 所示。求两信道串联后的信道容量。

**解**：令 $\bar{p}=1-p$，串联信道的信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{XZ} = \boldsymbol{P}_{YZ}\boldsymbol{P}_{XY} = \begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}^2 + p^2 & 2\bar{p}p \\ 2\bar{p}p & \bar{p}^2 + p^2 \end{bmatrix}$$

可见，串联信道为对称信道，当信源输入符号等概率分布时达到信道容量

$$C_{串}(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ}) = \log 2 - H(\bar{p}^2 + p^2,\ 2\bar{p}p) \tag{3.3.44}$$

依此类推，可得三级二元对称信道串联后的信道容量为

$$C_{串}(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ},\text{Ⅲ}) = \log 2 - H(\bar{p}^3 + 3\bar{p}p^2, p^3 + 3\bar{p}^2 p) \tag{3.3.45}$$

串联信道的信道容量与串联级数的关系如图 3.3.14 所示。随着串联级数的增加，信道容量有所减小。

图 3.3.14 对应的 MATLAB 程序代码如下：

```
clear all
clc
p = 0:0.0001:1;
H1 = - p. * log2(p) - (1 - p). * log2(1 - p);
H2 = - ((1 - p).^2 + p.^2). * log2((1 - p).^2 + p.^2) - (2 * (1 - p).^2. * p). * log2(2 * (1 - p).
^2. * p);
H3 = - ((1 - p).^3 + 3 * (1 - p). * p.^2). * log2((1 - p).^3 + 3 * (1 - p). * p.^2) - (p.^3 + 3 *
(1 - p).^2. * p). * log2(p.^3 + 3 * (1 - p).^2. * p);
c1 = 1 - H1;
c2 = 1 - H2;
c3 = 1 - H3;
figure(1);
plot(p,c1,'--',p,c2,'-.',p,c3);
xlabel('p');
ylabel('串联信道容量 C')
legend('n = 1','n = 2','n = 3');
axis([0 1,0 1])
```

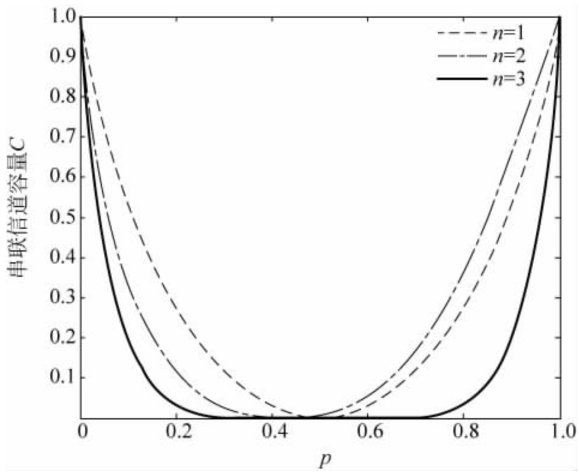


图 3.3.14 $n$ 级二元对称信道串联的信道容量

### 3.3.7 对称离散信道的信道容量 MATLAB 分析

四元信道输入为等概率分布，即 $p_i=1/4, i=1,2,3,4$，信道转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

求其信道容量。

(1) 用于计算互信息量的函数文件 hmessaga.m，其源代码如下：

```
function r = hmessage(x,f,nx,my)
% x 为输入概率分布,f 为转移概率矩阵,nx 为输出符号的可选个数,即 x 的元素个数
% nx 同时也是矩阵 f 的行数,my 是矩阵 f 的列数,即输出概率空间中的元素个数
sum = 0;
for i = 1:nx
for j = 1:my
        t = f(i,j) * x(i);
%求平均互信息量
if t > 0
sum = sum - t * log(f(i,j))/log(2);
end
end
end
r = sum;
disp('平均互信息量');
double(r)                      %返回结果
```

(2) 用于计算离散信源平均信息量的函数为 message.m 文件，其源代码如下：

```
function r = message(x,n)
  r = 0;
```

```
fori = 1:n
    r = r - x(i) * log(x(i))/log(2);
end
disp('离散信源的平均信息量')
r
```

（3）计算信道容量。利用函数 message 求信源的熵，利用函数 hmessage 求平均互信息量，并最终得到信道容量。其实现的 MATLAB 程序代码如下：

```
clc;
clear all
x = [0.25 0.25 0.25 0.25];                                 % 信道输入符号的概率
f = [0.5 0.5 0 0;0 0.5 0.5 0;0 0 0.5 0.5; 0.5 0 0 0.5];    % 信道转移概率矩阵
Hf1 = hmessage(x,f1,4,4);
hx = message(x,4);
disp('信道容量')
c = hx - Hf1
disp('信道的平均互信息量')
Hf
disp('信源的平均信息量')
hx
```

程序运行结果为

```
信道容量
c = 1
信道的平均互信息量
Hf = 1
信源的平均信息量
hx = 2
```

由运行结果可以看出给定任意矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$，输入本程序，经过 MATLAB 软件运行判断其为对称信道，利用函数 message 求平均互信息量，得出该信道的平均互信息量为：$Hf1=1$，此时离散信源的平均信息量为：$hx=2$，最终得出该信道的信道容量：$c=1$。

### 3.3.8 离散无记忆信道的信道容量 MATLAB 分析

用 MATLAB 实现 DMC 容量迭代计算的算法如下：

（1）初始化信源分布：$p_i^{(k)}=\dfrac{1}{n}$，$i=0,1,\cdots,n$，置 $k=0$，选 $1>\text{deta}>0$，一般选 $\text{deta}=0.000\,001$。

（2）由式 $t_{ij}^{(k)}=\dfrac{p_i^{(k)}p_{ji}}{\sum\limits_i p_i^{(k)}p_{ji}}$，得反向转移概率矩阵$\{t_{ij}^{(k)}\}$。

(3) 由式 $p_i^{(k+1)} = \dfrac{\exp\left[\sum_j p_{ji}\log t_{ij}^{(k)}\right]}{\sum_i \exp\left[\sum_j p_{ji}\log t_{ij}^{(k)}\right]}$,计算 $P^{(k+1)} = \{p_i^{(k+1)}\}$。

(4) 由式 $C^{(k+1)} = I(P^{(k+1)}, t^{(k)}) = \log\left\{\sum_{i=0}^{n}\exp\left[\sum_{j=0}^{m} p_{ji}\log t_{ij}^{(k)}\right]\right\}$,计算 $C^{(k+1)}$。

(5) 若 $\dfrac{|C^{(k+1)} - C^{(k)}|}{C^{(k+1)}} > \text{deta}$,则 $k=k+1$,转步骤(2)。

(6) 输出迭代次数 $k$ 以及 $C^{(k+1)}$ 和 $P^{(k+1)}$,终止。

根据信道容量的定义和上述 DMC 信道容量迭代计算方法,可用 MATLAB 编程进行迭代计算得出信道容量。程序中,需要定义输入信源个数、信宿个数和信道容量的精度,程序能任意生成随机的信道转移概率矩阵,也可以自己输入信道转移矩阵,最后输出最佳信源分布和信道容量。将程序 dmc.m 文件直接运行可以自主输入信道转移概率矩阵,运行 dmc1.m 可以随机生成信道转移概率矩阵。

```
%%%%dmc.m
clc;
clear;
n = input('输入信源个数');
m = input('输入信宿个数');
deta = input('输入信道容量的计算精度');
Q = rand(n,m);                    %形成 n 行 m 列随机矩阵 Q
A = sum(Q,2);                     %把 Q 矩阵每一行相加和作为一个列矩阵 A
B = repmat(A,1,m);                %把矩阵 A 的第一列复制成 m 列的新矩阵

%判断信道转移概率矩阵输入是否正确
P = input('输入信道转移概率矩阵 P:')
[n,m] = size(P);
for i = 1:n
if(sum(P(i,:))~= 1)               %检测信道转移概率矩阵行之和是否为 1
        error('信道转移概率矩阵输入有误')
return;
end
for j = 1:m
if(P(i,j)< 0||P(i,j)> 1)          %检测信道转移概率矩阵是否存在负值或大于 1
            error('信道转移概率矩阵输入有误')
return
end
end
end
%将上面的语句用下面两条语句代替可自动生成信道转移概率矩阵:
%disp('信道转移概率矩阵:')
%P = Q./B                         %信道转移概率矩阵(新数值等于每一个原矩阵的数值除以所在
                                  %行的数值之和)

i = 1:1:n;                        %设置循环,起始值为 1,公差为 1,结束值为 n(Q 的行数)
p(i) = 1/n;                       %原始信源:r 个符号,等概率分布
```

```
disp('原始信源分布')
p(i)
E = repmat(p',1,m);              % 把 n 个等概率元素组成一列,复制为 m 列
for k = 1:1:1/deta
    m = E. * P;                  % m = p. * E; % 后验概率的分子部分
    a = sum(m); % 把得到的矩阵每列相加的和构成一行 su1 = repmat(a,n,1);   % 把得到的行矩阵
a 复制 n 行,成为一个新矩阵 su1,后验概率的分母部分
    t = m./su1;                  % 后验概率矩阵
    n = exp(sum(P. * log(t),2)); % 信源分布的分子部分
    su2 = sum(n);                % 信源分布的分母部分
    p = n/su2;
    E = repmat(p,1,n);
    C(k + 1) = log(sum(exp(sum(P. * log(t),2))))/log(2);
kk = abs(C(k + 1) - C(k))/C(k + 1);
if(kk < = deta)
break;
end
disp('迭代次数:k = '),disp(k)
end
disp('达到信道容量时的信源分布:p = '),disp(p')
disp('信道容量:C = '),disp(C(k + 1))
```

程序运行结果为

```
输入信源个数:2
输入信宿个数:3
输入信道容量的精度:0.000001
输入信道转移矩阵 P:[0.5000   0.3000   0.2000;0.3000   0.5000   0.2000]
P =
    0.5000   0.3000   0.2000
    0.3000   0.5000   0.2000
```

原始信源分布：

```
ans =   0.5000   0.5000
迭代次数:k = 1
最大信道容量时的信源分布:p = 0.5000   0.5000
最大信道容量:C =   0.0365

输入信源个数:2
输入信宿个数:2
输入信道容量的计算精度:0.000001
输入信道转移矩阵 P:[0.6   0.4;0.01   0.99]

P =
    0.6000   0.4000
    0.0100   0.9900
原始信源分布:
ans =   0.5000   0.5000
最大信道容量时的信源分布:p =   0.4240   0.5760
最大信道容量:C = 0.3688
```

如果采用随机生成信道转移概率矩阵，只需要将程序 dmc.m 中的以下语句进行更改，命名为 dmc1.m：

```
%P = input('输入信道转移概率矩阵 P:')
%[n,m] = size(P);
%for i = 1:n
%if(sum(P(i,:))～ = 1)          %检测信道转移概率矩阵行元素之和是否为 1
%     error('信道转移概率矩阵输入有误')
%return;
%end
%for j = 1:m
%if(P(i,j)<0||P(i,j)>1)       %检测信道转移概率矩阵是否存在负值或大于 1
%     error('信道转移概率矩阵输入有误')
%return
%end
%end
%end
%将上面的语句用下面两条语句代替可随机生成信道转移概率矩阵：
disp('信道转移概率矩阵:')
P = Q./B                       %信道转移概率矩阵(新数值等于每一个原矩阵的数值除以所在
                               %行的数值之和)
```

运行 dmc1.m 结果如下：

```
输入信源个数:2
输入信宿个数:3
输入信道容量的精度:0.000001
信道转移概率矩阵:
P =
    0.0823  0.4998   0.4179
    0.6074   0.3038   0.0888

原始信源分布:
ans = 0.5000  0.5000
最大信道容量时的信源分布:p = 0.5256   0.4744
最大信道容量:C = 0.2648
```

## 3.4 连续信道和波形信道的信道容量

当信道的输入和输出都是单个连续型随机变量时，称作单符号连续信道。而输入和输出为 $N$ 维连续型随机序列的信道称为多维连续信道。因此单符号连续信道是 $N=1$ 的多维连续信道的特例。

$N$ 维连续信道的输入和输出为 $N$ 维连续型随机序列：

$$X^N=(X_1X_2\cdots X_i\cdots X_N),X_i\in[a_i,b_i]\text{ 或 }X_i\in\mathbf{R} \tag{3.4.1}$$

$$Y^N=(Y_1Y_2\cdots Y_j\cdots Y_N),Y_j\in[a_j,b_j]\text{ 或 }Y_j\in\mathbf{R} \tag{3.4.2}$$

而 $N$ 维连续信道的转移概率密度函数为

$$p(Y^N/X^N)=p(Y_1Y_2\cdots Y_N/X_1X_2\cdots X_N)$$

且满足

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\cdots\int_{\mathbf{R}}p(Y_1Y_2\cdots Y_N/X_1X_2\cdots X_N)\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2\cdots\mathrm{d}Y_N=1$$

因此描述多维连续信道的数学模型为

$$[X^N,p(Y^N/X^N),Y^N],\quad X,Y\in\mathbf{R} \tag{3.4.3}$$

由 3.2 节，信道的输入$\{x(t)\}$和输出$\{y(t)\}$都是随机模拟信号时，该信道称为波形信道，也即模拟信道。因为实际波形信道在有限的观察时间内，能近似满足限时 $T$、限频 $W$ 的条件，在研究波形信道的信息传输问题时，采用的方法是对波形信道的输入$\{x(t)\}$和输出$\{y(t)\}$进行时间采样，离散化成 $N=2WT$ 个时间离散、取值连续的平稳随机序列 $X^N=(X_1X_2\cdots X_i\cdots X_N)$和 $Y^N=(Y_1Y_2\cdots Y_j\cdots Y_N)$，从而把波形信道转化为 $N$ 维连续信道进行研究。

与离散信道的平均互信息凸性相似，可以证明，连续信道和波形信道的平均互信息 $I(X;Y)$是信源概率密度函数 $p_X(x)$的上凸函数。已知连续信道和波形信道的平均互信息，其信道容量的求解问题就是：当信源 $X$ 满足某一概率密度函数 $p_X(x)$时，信道平均互信息 $I(X;Y)$的最大值，即

$$C=\max_{p_X(x)}I(X;Y)$$

一般连续信道或波形信道的信道容量计算并不容易，当信道为加性时计算会简单一些。

在单符号加性信道中，如图 3.4.1 所示，信道的输出 $Y$ 与输入 $X$ 和加性噪声 $n$ 的关系是

$$Y=X+n$$

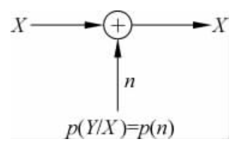


图 3.4.1　加性连续信道模型

一般输入 $X$ 与信道噪声 $n$ 是相互独立的，因此加性信道的转移概率密度函数等于噪声的概率密度函数，即

$$p(Y/X)=p(X+n/X)=p(n) \tag{3.4.4}$$

**证明**：根据坐标变换理论 $p(xy)=p(xn)\left|J\left(\frac{xn}{yn}\right)\right|=p(xn)$

坐标变换为 $x=x,n=y-x$ $\left|J\left(\frac{xn}{yn}\right)\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial x}\\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial n}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$

$$p(xn)=p(x)p(n)p(xy)=p(x)p(y/x)=p(x)p(n)$$

所以

$$p(y/x)=p(n)$$

证明完毕。

因此，在加性信道中，噪声熵

$$H_c(Y/X)=-\iint\limits_{XY}p(x)p(y/x)\log p(y/x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{XY} p(x)p(n)\log p(n)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}n$$

$$= -\int_N p(n)\log p(n)\,\mathrm{d}n\left[\int_X p(x)\,\mathrm{d}x\right] = -\int_N p(n)\log p(n)\,\mathrm{d}n = H_c(n)$$

该结论说明了条件熵是由于信道中噪声引起的，它完全等于噪声源的不确定性，即噪声源的熵，这也是把 $H(Y/X)$ 被称为噪声熵的原因。

因此，加性信道的平均互信息可简化为

$$I(X;Y) = H(X) - H(Y/X) = H(X) - H(n)\ (\text{bit/ 符号}) \tag{3.4.5}$$

在噪声的概率密度函数已知情况下，若输入信源 $X$ 满足某一概率密度函数，使平均互信息取得极大值，就可求得单符号加性信道的信道容量。

同理，$N$ 维加性连续信道的平均互信息可表示为

$$I(X^N;Y^N) = H(X^N) - H(n^N)\ (\text{bit/ 序列}) \tag{3.4.6}$$

加性波形信道的平均互信息表示为

$$I(x(t);y(t)) = \lim_{N\to\infty} I(X^N;Y^N) = \lim_{N\to\infty}[H(X^N) - H(n^N)]\ (\text{bit/ 符号}) \tag{3.4.7}$$

一般情况下，对于波形信道，都是研究其单位时间内的信息传输率

$$R_t = \frac{1}{T}\lim_{N\to\infty} I(x(t);y(t))\ (\text{b/s}) \tag{3.4.8}$$

本节主要研究单符号高斯加性连续信道和限带高斯白噪声加性波形信道的信道容量问题。

### 3.4.1 单符号高斯加性信道

单符号连续信道的输入信源 $X$ 为

$$\begin{bmatrix} X \\ p_X(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ p_X(x) \end{bmatrix},\quad \int_{\mathbf{R}} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{3.4.9}$$

输出 $Y$ 为

$$\begin{bmatrix} Y \\ p_Y(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ p_Y(y) \end{bmatrix},\quad \int_{\mathbf{R}} p_Y(y)\,\mathrm{d}y = 1 \tag{3.4.10}$$

当加性信道噪声满足高斯分布时，该信道称为高斯加性信道。满足高斯分布方差为 $\sigma^2$ 的噪声的信息熵

$$H(n) = \log\sqrt{2\pi e\sigma^2} \tag{3.4.11}$$

则单符号高斯加性信道的信道容量为

$$C = \max_{p_X(x)} I(X;Y) = \max_{p_X(x)}[H(Y) - H(n)] = \max_{p_X(x)} H(Y) - H(n) = \max_{p_X(x)} H(Y) - \log\sqrt{2\pi e\sigma^2} \tag{3.4.12}$$

由于输入/输出均为连续信源，根据连续信源差熵的极值性条件，当输出随机变量 $Y$ 的平均功率受限时，其信息熵 $H(Y)$ 存在最大值。若输出 $Y$ 的平均功率为 $P_Y$，当 $Y$ 是均值为零的高斯变量，其熵 $H(Y)$ 最大。

$$\max_{p_X(x)} H(Y) = \log\sqrt{2\pi e P_Y} \tag{3.4.13}$$

因为输出 $Y$ 是输入 $X$ 和噪声 $n$ 的线性叠加，且噪声 $n$ 是均值为零、方差为 $\sigma^2$ 的高斯变

量，要使 $Y$ 是均值为零、方差为 $P_Y$ 的高斯变量，要求输入 $X$ 也是均值为零、方差为 $P_X$ 的高斯变量。且

$$P_X = P_Y - \sigma^2 \tag{3.4.14}$$

此时平均功率受限的高斯加性信道的信道容量为

$$C = \log\sqrt{2\pi e P_Y} - \log\sqrt{2\pi e\sigma^2} = \log\sqrt{\frac{P_Y}{\sigma^2}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_X}{\sigma^2}\right)\ (\text{bit/ 符号}) \tag{3.4.15}$$

式中，$\frac{P_X}{\sigma^2}$为信号噪声功率比，简称信噪比。

可见，单符号高斯加性信道的信道容量由信噪比决定。只有输入信源和噪声均为高斯变量时，信道的平均互信息才能达到信道容量。

### 3.4.2 限带高斯白噪声加性波形信道

研究波形信道的信息传输问题时，采用的方法是对限时 $T$、限频 $W$ 的波形信道的输入 $\{x(t)\}$ 和输出 $\{y(t)\}$ 进行时间采样，离散化成 $N=2WT$ 个时间离散、取值连续的平稳随机序列 $X^N=(X_1X_2\cdots X_i\cdots X_N)$ 和 $Y^N=(Y_1Y_2\cdots Y_j\cdots Y_N)$，从而把波形信道转化为 $N$ 维连续信道进行研究。

加性波形信道的平均互信息可用 $N$ 维加性连续信道的平均互信息近似计算得到：

$$I(x(t);y(t)) = \lim_{N\to\infty} I(X^N;Y^N) = \lim_{N\to\infty}[H(X^N)-H(n^N)]\ (\text{bit/ 符号}) \tag{3.4.16}$$

若该多维连续信道满足无记忆特性，则 $N$ 维统计独立的随机序列可分解为 $N$ 个独立的单符号连续变量。$N$ 维无记忆连续信道等价于 $N$ 个独立的并联单符号连续信道，因此

$$I(X^N;Y^N) = NI(X_i;Y_i) \tag{3.4.17}$$

根据 3.4.1 节限功率单符号高斯加性信道的信道容量公式，对平均功率受限的高斯加性多维连续信道，当 $N$ 维随机序列中的每一个输入连续变量 $X_i$ 都是均值为零、方差为 $P_{X_i}$ 的高斯变量时，其平均互信息 $I(X^N;Y^N)$ 达到极大值，其信道容量为

$$C_N = \max_{p(X)} I(X^N;Y^N) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log\left(1+\frac{P_{X_i}}{\sigma_i^2}\right) \tag{3.4.18}$$

若每个输入连续变量的平均功率相同，每个噪声分量的平均功率也相同，即

$$P_{X_1} = P_{X_2}\cdots = P_{X_N} = P_X,\quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots\sigma_N^2 = \sigma^2$$

则

$$C_N = \max_{p(X)} I(X^N;Y^N) = \frac{N}{2}\log\left(1+\frac{P_X}{\sigma^2}\right) \tag{3.4.19}$$

高斯加性波形信道可等价于 $N=2WT$ 维高斯加性信道，对于频带受限于$(0,W)$，时间受限于$(0,T)$的平均功率受限的高斯加性波形信道，信道的一次传输看成是一次采样，传输 $N$ 个采样点的时间是 $T$ 秒，则信道每秒传输 $2W$ 个样点，所以单位时间的信道容量为

$$C_t = 2WC_N = W\log\left(1+\frac{P_X}{\sigma^2}\right)(\text{b/s}) \tag{3.4.20}$$

这就是著名的香农公式。

香农公式推出的条件：

(1) 连续消息是平均功率受限的高斯随机过程，平均功率为 $P_X$。被采样后的样值同样

呈高斯分布，样值之间彼此独立。

（2）噪声为加性高斯白噪声（AWGN），平均功率为$\sigma^2$。

（3）信号的有效带宽为$W$。

香农公式说明：

（1）当信道容量一定时，增大信道带宽，可以降低对信噪功率比的要求；反之，当信道频带较窄时，可以通过提高信噪功率比来补偿。

（2）当信道频带无限时，其信道容量与信号功率成正比。

$$\lim_{W\to\infty} C_t = \lim_{W\to\infty} W \log_2\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right)=\lim_{W\to\infty} W \log_2\left(1+\frac{P_X}{N_0 W}\right)$$

式中，$N_0=\dfrac{P_N}{W}$为加性高斯噪声的单边谱密度。令$z=\dfrac{P_X}{N_0 W}$，则

$$\lim_{W\to\infty} C_t = \lim_{W\to\infty} \frac{P_X}{N_0}\frac{N_0 W}{P_X} \log_2\left(1+\frac{P_X}{N_0 W}\right)=\lim_{W\to\infty} \frac{P_X}{N_0} \log_2 (1+z)^{\frac{1}{z}}$$

当且仅当$z\to 0$时，$\ln (1+z)^{\frac{1}{z}}\to 1$，所以

$$\lim_{W\to\infty} C_t = \frac{P_X}{N_0 \ln 2} \approx 1.4427\frac{P_X}{N_0}(\mathrm{b/s}) \tag{3.4.21}$$

香农公式的意义：

（1）信道容量与所传输信号的有效带宽成正比，信号的有效带宽越宽，信道容量越大。

（2）信道容量与信道上的信噪比有关，信噪比越大，信道容量也越大，但其制约规律呈对数关系。

（3）信道容量$C$、有限带宽$W$和信噪比可以相互起补偿作用，即可以互换。应用极为广泛的扩展频谱通信、多相位调制等都以此为理论基础。

（4）当信道上的信噪比小于1时（低于0dB），信道容量并不等于0，说明此时信道仍具有传输消息的能力。也就是说信噪比小于1时仍能进行可靠的通信，这对于卫星通信、深空通信等具有特别重要的意义。

（5）当信道带宽趋于无穷大时，信道容量$C$趋于有限值，正比于发射功率和信道白色高斯噪声的功率谱密度之比。因此，无限带宽并不能换取无限的信道容量。该结论指出了信号带宽与发射功率互换的有效性问题。信道容量是通信系统的最大信息传输速率，通常是系统的设计指标，因此$C$往往是给定的。这时可以根据信道特性来权衡发射功率和信号有效带宽的互换，使系统的设计趋于最佳。

香农公式是在噪声为AWGN情况下推得的，由于高斯白噪声是危害最大的信道干扰，因此对于那些不是高斯白噪声的信道干扰，其信道容量应该大于按香农公式计算的结果。

### 3.4.3　高斯信道的MATLAB建模

高斯噪声的概率密度函数服从高斯分布（即正态分布）。发射机发送的信号经过加性高斯信道后的接收信号是发送信号和高斯噪声之和。

如果带传输的信号功率为P_signal，信道的输入信噪比为SNR_dB，可据此计算定义噪声。

```
SNR_DB = [0:1:12];                        %定义信噪比
sum = 1000000;                            %定义信号长度
message = randsrc(1,sum,[0 1]);           %定义发送信号
```

```
%%定义噪声
 P_noise = P_signal/10.^(SNR_dB/10);        %噪声功率
sigma = sqrt(P_noise);                      %噪声方差
noise1 = sigma * randn(1,sum);              %定义噪声实部
noise2 = sigma * randn(1,sum);              %定义噪声虚部
 receive = message + noise1 + noise2 * j;   %接收信号

%也可以用以下语句替换上面5个语句：
receive = awgn(message, SNR_DB,'measured','linear');
```

### 3.4.4 多径衰落信道的 MATLAB 建模

由于多径和移动台运动等影响因素，使得移动信道对传输信号在时间、频率和角度上造成了色散，如时间色散、频率色散、角度色散等，因此多径信道的特性对移动通信质量有着至关重要的影响，多径信道的包络统计特性是研究的焦点。根据不同无线环境，接收信号包络一般服从几种典型分布，如瑞利分布、莱斯分布或 Nakagami-$m$ 分布。本书专门针对服从瑞利分布和莱斯分布的多径信道进行模拟仿真，进一步加深对多径信道特性的了解。

瑞利衰落的包络服从瑞利分布，而相位服从均匀分布。瑞利衰落信道的发射机和接收机之间没有直射波路径，存在大量反射波。莱斯衰落信道的发射机和接收机存在直射波路径。莱斯衰落的包络服从莱斯分布或称广义瑞利分布。

根据 ITU-RM.1125 标准，离散多径衰落信道模型为

$$\tilde{y}(t)=\sum_{k=1}^{N} r_k(t)\,\tilde{x}(t-\tau_k) \tag{3.4.22}$$

式中，$r_k(t)$为复路径衰落，服从瑞利分布或莱斯分布；$\tau_k$ 为多径时延；$N$ 为多径条数。

可用 MATLAB 中的 rayleighchan 或 ricianchan 函数产生瑞利信道或莱斯信道模型，结合 filter 函数产生对应信道传输后的信号。

```
Ts = 1e-4;                                           %抽样周期(s)
fd = 100;                                            %最大多普勒频移
 %路径延时和衰落
tau = [0.1 1.2 2.3 6.2 11.3] * Ts;                   %多径时延
PdB = linspace(0, -10, length(tau)) - length(tau)/20;  %幅度衰落

nTrials = 10000;                                     %仿真次数
N = 100;                                             %每帧抽样点数
h = rayleighchan(Ts, fd, tau, PdB);                  %产生瑞利信道
h.NormalizePathGains = false;
h.ResetBeforeFiltering = false;
h.StoreHistory = 1;
h                                                    %显示信道

 %信道衰落仿真
for trial = 1:nTrials
    x = randint(10000, 1, 4);                        %输入数字信号
dpskSig = dpskmod(x, 4);                             %产生DPSK调制信号
    y = filter(h, dpskSig);                          %经过信道后的信号
plot(h);
    if isempty(findobj('name', '多径信道')), break; end;
end
```

程序运行后显示的信道 $h$ 如图 3.4.2 所示，具体信道参数为

```
h =

ChannelType: 'Rayleigh'
InputSamplePeriod: 1.0000e-004
DopplerSpectrum: [1x1 doppler.jakes]
MaxDopplerShift: 100
PathDelays: [1.0000e-005 1.2000e-004 2.3000e-004 6.2000e-004 0.0011]
AvgPathGaindB: [-0.2500 -2.7500 -5.2500 -7.7500 -10.2500]
NormalizePathGains: 0
StoreHistory: 1
StorePathGains: 0
PathGains: [0.3107 + 0.2950i -0.3586 + 0.3846i 0.4535 + 0.1432i -0.4136 + 0.2926i
0.1283 + 0.0777i]
ChannelFilterDelay: 4
ResetBeforeFiltering: 0
NumSamplesProcessed: 0
```

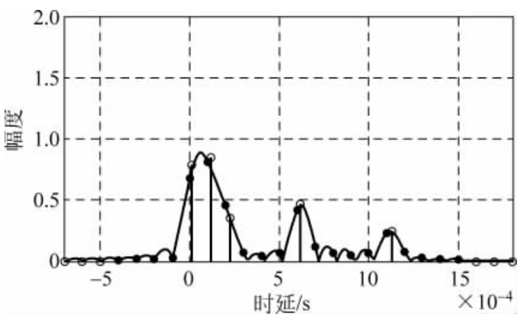


图 3.4.2 多径信道 $h$ 的冲激响应

也可用 MATLAB 中能生成伪随机序列的 randn 语句，得到期望的莱斯衰落序列。瑞利衰落序列可以由 $K=0$dB 得到。图 3.4.3 和图 3.4.4 分别是一个当 $K=0$dB 和 K＝7dB 时典型的瑞利衰落和莱斯衰落信号包络，衰落幅度用分贝(dB)表示。

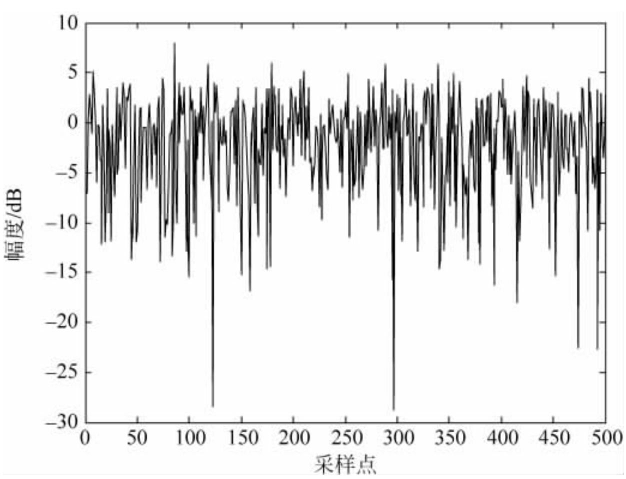


图 3.4.3 当 $K=0$dB 时瑞利衰落信号的包络

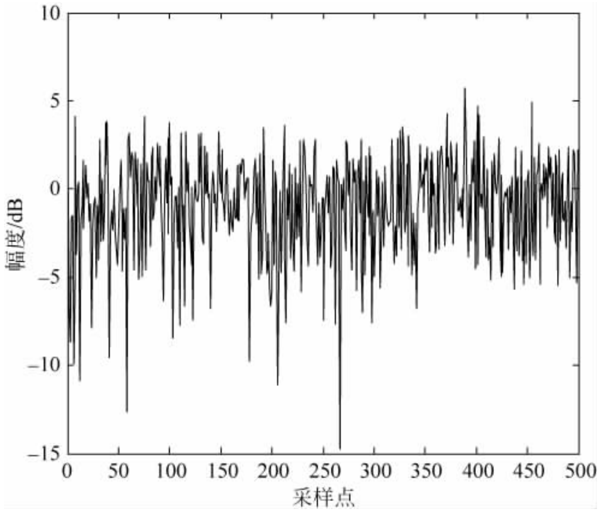


图 3.4.4　当 $K=7\text{dB}$ 时莱斯衰落信号的包络

图 3.4.4 对应的 MATLAB 程序 riceam.m：

```
clc;
Kdb = 7;
N = 100000;
Mi = 1;
r = rice_fading(Kdb,N,Mi);
r_dB = 20 * log10(r_dB);
figure(1);
plot(r_dB(1:500));
xlabel('采样点')
ylabel('幅度/dB')
```

子程序 rice_fading.m：

```
function r = rice_fading(Kdb,N,Mi)
K = 10 ^(Kdb/10);
const = 1/(2 * (K + 1));
x = randn(1,N);
y = randn(1,N);
r = sqrt(const * ((x + sqrt(2 * K)).^2 + y.^2));
rt = zeros(1,Mi * length(r));
ki = 1;
fori = 1:length(r)
rt(ki:i * Mi) = r(i);
ki = ki + Mi;
end
r = rt;
```

利用 MATLAB 对莱斯分布的累积分布函数(CDF)进行近似估计。莱斯分布的累积分布函数是通过迭代法得到的，在每一步的迭代中利用 MATLAB 中的 find 和 length 函数得到符合要求的衰落序列，并使用上面产生莱斯分布的 M 文件 rice_fading.m 得到 $K=7\text{dB}$

时的莱斯分布的累积分布函数的近似估计，如图 3.4.5 所示。然后通过 MATLAB 中的 hist 函数得到的瑞利分布概率密度函数(PDF)的估计值与解析表达式分析求得的 PDF 进行比较，结果如图 3.4.6 所示，所得的估计值与理论分析求得的 PDF 非常接近。

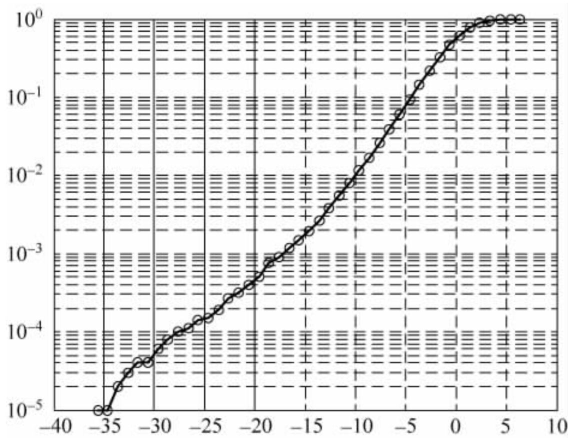


图 3.4.5　$K=7$dB 时莱斯分布的 CDF

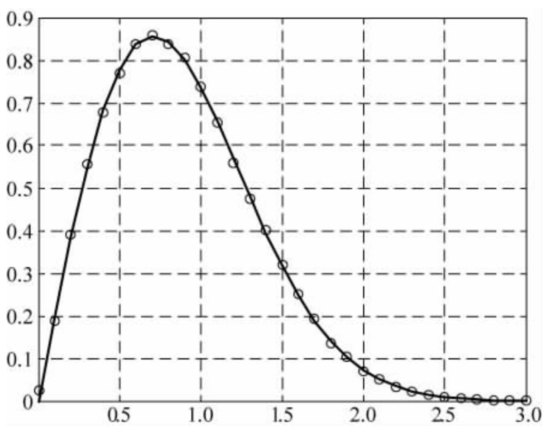


图 3.4.6　$K=0$dB 时瑞利分布的 PDF

图 3.4.5 对应的 MATLAB 程序 rice.m：

```
clc;
Kdb = 7;
N = 100000;
Mi = 1;
r = rice_fading(Kdb,N,Mi);
RdB = 20 * log10(r);
Rt = [min(RdB):max(RdB)];
for m = 1:length(Rt)
fade = find(RdB < Rt(m));
    Nm = length(fade);
AF(m) = Nm/N;
```

```
end
semilogy(Rt,AF,'k-o');
set(gcf,'paperunits','centimeters');
set(gcf,'papersize',[5 5]);                          % 设置图像大小为5cm×5cm
grid;
```

图 3.4.6 对应的 MATLAB 程序 ray.m：

```
clc;
N=100000;
x=randn(1,N);
y=randn(1,N);
r=sqrt(0.5*(x.^2+y.^2));
step=0.1;
range=0:step:3;
h=hist(r,range);
fr_approx=h/(step*sum(h));
fr=(range/0.5).*exp(-range.^2);
plot(range,fr_approx,'ko',range,fr,'k');
set(gcf,'paperunits','centimeters');
set(gcf,'papersize',[5 5]);                          % 设置图像大小为5cm×5cm
grid;
```

## 3.5 信源与信道的匹配

信源发出的消息要通过信道来传输。根据信道容量的定义，只有当信源符号的概率分布 $P(x)$满足一定条件时才能使信道的信息传输率 $R=I(X;Y)$达到最大值，即信道容量。

$$C=\max_{p(x)} I(X;Y)(\text{bit/ 符号})$$

对于某一信道，其信道容量是一定的。信源与信道连接时，信道的信息传输率一般小于信道容量，即

$$R=I(X;Y)<C$$

这时，信道没有得到充分利用。如果信源能使信道的信息传输率达到信道容量，称此信源与信道达到匹配，否则认为信道有剩余。信道剩余度 $\gamma$ 定义为

$$\gamma=C-I(X;Y) \tag{3.5.1}$$

信道的相对剩余度 $\gamma_c$ 定义为

$$\gamma_c=\frac{C-I(X;Y)}{C}=1-\frac{I(X;Y)}{C} \tag{3.5.2}$$

对于某一固定的信道，其信道容量 $C$ 一定，信道剩余度由信道的信息传输率决定。根据平均互信息的凸性，对于一定的信道，平均互信息 $I(X;Y)$是输入信源的概率分布 $P(x)$的$\cap$型凸函数，即信道的剩余度由信源的特性决定。

在无损信道中，信道容量为

$$C=\log n \tag{3.5.3}$$

式中，$n$ 为信道输入符号的个数。

无损信道的信息传输率为

$$I(X;Y)=H(X) \tag{3.5.4}$$

式中，$H(X)$为与信道连接的信源的熵。因此，无损信道的相对剩余度为

$$\gamma_c = 1-\frac{H(X)}{\log n} \tag{3.5.5}$$

式(3.5.5)与第2章信源冗余度的定义式(2.6.3)类似。也就是说，对于无损信道，提高其信息传输率的研究就等同于减小信源冗余度的研究。信源的冗余度减小了，信道的信息传输率提高了，当信息传输率达到信道容量时信道剩余度就消除了，从而信道和信源达到匹配。

实际上，上述结论对于一般的信道同样成立，因为对于某一信道，其信道剩余度的大小完全由信源特性决定。

可见，信源与信道的匹配问题就是信源冗余度的问题。通过信源编码可减小信源的冗余度，减小信道的剩余度，使信源与信道达到匹配。

## 习　　题

1. 发送端有三种等概率符号($x_1,x_2,x_3$)，在一个二进制信道中，信源消息集 $X=\{0,1\}$ 且 $p(1)=p(0)$，信宿的消息集 $Y=\{0,1\}$，信道传输概率 $p(y=1|x=0)=1/4$，$p(y=0|x=1)=1/8$。求：

(1) 在接收端收到 $y=0$ 后，所提供的关于传输消息 $X$ 的平均条件互信息 $I(X;y=0)$；

(2) 该情况下所能提供的平均互信息量 $I(X;Y)$。

2. 一信道的输入和输出分别为 $X$ 和 $Y$，其中 $X$ 等概率取值为 $+1$、$-1$，$Y=X+Z$，$Z$ 是均值为零、方差为 $\sigma^2$ 的高斯分布。

(1) 画出 $Y$ 的概率分布 $P_Y(y)$ 与 $\sigma^2$ 关系的曲线；

(2) 画出信道输入与输出之间的平均互信息 $I(X;Y)$与 $\sigma^2$ 的关系曲线。

3. 某二元对称信道如图3.1所示，请编写程序画出互信息 $I(x_0;y_0)$和 $I(X;Y)$关于错误概率 $p$ 的关系图，并进行解释。

4. 某一离散无记忆信道如图3.2所示，信道输入、输出分别为 $X$、$Y$。

(1) 写出该信道的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$；

(2) 求信道容量 $C$；

(3) 求达到容量时的输出概率分布；

(4) 求达到容量时的输入概率分布。

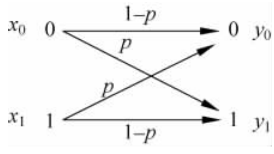


图3.1　二元对称信道

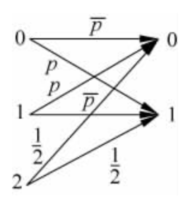


图3.2　离散无记忆信道

5．二元对称信道转移矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & p \\ p & 1-p\end{bmatrix}$。

（1）若输入 $p(x_0)=\dfrac{3}{4}$，$p(x_1)=\dfrac{1}{4}$，求 $H(X)$ 和 $I(X;Y)$；

（2）求该信道的信道容量和最佳输入分布；

（3）$p$ 取何值时，信道容量达到最大值，用 MATLAB 工具画出该信道的信道容量随 $p$ 的变化曲线。

6．某信道的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1/4 & 1/8 & 5/8 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8\end{bmatrix}$$

分别求上述两个信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布。

7．一个高斯白噪声信道，接收机前端的带通滤波器带宽为 1MHz，信道上的信号与噪声的平均功率之比为 30.1dB，求该信道的信道容量。

8．设有三个信道的转移概率矩阵分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

试比较上述三个信道的好坏。

9．设某信源发送端符号集为 $X\in\{x_1,x_2\}$，$p(x_1)=a$，接收端符号集为 $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，信道转移矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$，求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布。

10．设某一信号的信息传输率为 5.6kb/s，在带宽为 4kHz 的高斯信道中传输，噪声功率谱密度 $N_0=5\times10^{-6}$mW/Hz。试求：

（1）无差错传输需要的最小输入功率是多少？

（2）此时输入信号的最大连续熵是多少？写出对应的输入概率密度函数的形式。

11．一个二元对称信道，如图 3.3 所示，其中 $p=0.1$。

（1）设信道以 1500 个二元符号/s 的速度输入符号。现有一消息序列共有 13 000 个二元符号，符号间无统计相关性，且每一符号取值概率分布 $p(x=0)=p(x=1)=1/2$，从信息传输的角度考虑，10s 内能否将这个消息序列无失真地传送完？

（2）若信源概率分布为 $p(x=0)=0.7$，$p(x=1)=0.3$，无失真传送以上信源消息序列至少需要多长时间？

12．一信道如图 3.4 所示。

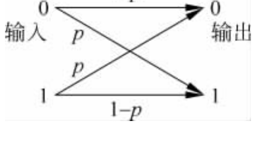


图 3.3　二元对称信道

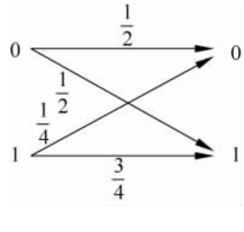


图 3.4　信道的转移概率

(1) 求信道容量;

(2) 若将两个同样的信道串接,求串接后信道的转移概率矩阵;

(3) 求(2)中串接信道的容量和达到容量时的输入概率分布。

13. 电视图像由30万个像素组成,对于适当的对比度,一个像素可取10个可辨别的亮度电平。假设各个像素的10个亮度电平都以等概率出现,实时传送的电视图像每秒发送30帧图像。为了获得满意的图像质量,要求信号与噪声的平均功率比值为30dB。试计算在这些条件下传送电视的视频信号所需的带宽。