



3-D景物表达

中册第6章讨论了对图像中分割出的2-D区域的各种表达方法。实际的客观景物是3-D的,对其进行表达可直接采用3-D方法。这里需要指出,从2-D空间到3-D空间的变化不仅是量的丰富,还有质的飞跃(如在2-D空间中,区域是由线封闭而成的,而在3-D空间中,仅仅有线并不能包围体积),对视觉信息的表达和加工在理论和方法上都提出了新的要求。

客观世界中存在多种3-D结构,还可能对应不同的抽象层次。因此,需要使用不同的方法表达各种不同层次的3-D结构,以满足不同应用中后续加工的要求。

根据上述讨论,本章各节将安排如下。

5.1节介绍曲线和曲面的一些局部特征,它们在3-D目标表面的表达中起着重要的基础作用。

5.2节讨论3-D表面的表达方法,它们是对3-D目标进行表达的常用方法。

5.3节给出在用体素表达3-D目标的情况下,对其等值表面进行构造的两种算法。

5.4节介绍从3-D目标的并行轮廓出发,通过插值,借助网格面元集合表达目标表面、实现表面拼接的技术。

5.5节介绍直接对3-D实体(包括表面和内部)进行表达的方法。

5.1 曲线和曲面的局部特征

曲线和曲面是构成3-D实体的重要组件,也是观察实体时最先观察到的部分。为表达和描述曲线和曲面,需要研究其局部特征[Forsyth 2003]。微分几何是研究曲线和曲面局部特征的重要工具,下面讨论几个基本的概念。

5.1.1 曲线局部特征

对平面曲线和空间曲线分别进行讨论。

1. 平面曲线特殊点的分类

先考虑平面上的曲线。如图5.1.1所示,设一条曲线 C 通过空间一个点 P 。通过点 P 且与曲线 C 相切的直线 T 称为曲线 C 在点 P 的切线(切线是割线的极限)。与点 P 的切线 T 相垂直且通过点 P 的直线 N ,称为曲线 C 在点 P 的法线。

设点 P 为原点,沿切线 T 的方向和法线 N 的方向为坐标轴的方向,则可构建一个局部坐标系,以研究曲线在点 P 附近的性质。如图5.1.2所示,考虑第一象限中的一个点 Q 沿曲线 C 向 P 点移动,当它到达 P 点后继续运动,则它的下一个位置会有4种可能,分别位于一、二、三、四象限,依次如图5.1.2(a)~图5.1.2(d)所示。这4种情况对应4种不同的曲线 C ,或者说描述了曲线 C 在

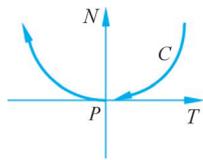


图 5.1.1 曲线在由切线和法线定义的坐标系中

点 P 附近的 4 种变化。

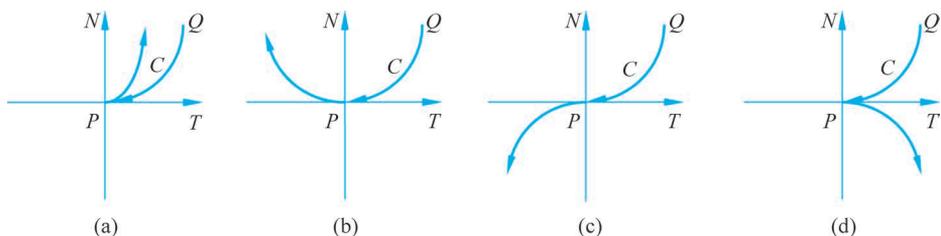


图 5.1.2 4 种曲线变化情况

曲线上的点 Q 通过 P 点后如果到达第二象限,则称点 P 为一个规则点,而在其他 3 种情况下,都称点 P 为奇异点。奇异点还可进一步细分:点 Q 通过 P 点后如果到达第三象限,则称点 P 为拐点;点 Q 通过 P 点后如果到达第四象限或第一象限,则称点 P 为第一类或第二类尖点。

过点 P 的切线 T 是对曲线 C 在点 P 的最佳线性近似。如果能在点 P 建立圆周近似,就可定义曲线 C 在点 P 的曲率。曲率是沿曲线切线方向对变化速率的测度,它比切线或斜率能更好地表达曲线的特性。曲线 C 在点 P 的曲率可借助曲线上的另一点 Q 沿曲线向点 P 逼近计算。首先,考虑曲线 C 在点 P 的法线 N 和曲线 C 在点 Q 的法线 M ,两条法线有一个交点 S ,当点 Q 沿曲线向点 P 逼近时,交点 S 会沿点 P 的法线 N 到达极限位置 O ,它就是曲线 C 在点 P 的曲率中心。当点 Q 与点 P 间的距离随点 Q 沿曲线向点 P 逼近而趋于零时,法线 N 与法线 M 的夹角也会趋于零,上述夹角与距离的比值会趋于极限 K , K 就是曲线 C 在点 P 的曲率。 K 在数值上等于 O 与 P 距离 r 的倒数,称 r 为曲率半径,而以 O 为圆心、以 r 为半径的圆称为点 P 的曲率圆。

2. 高斯图

可借助高斯图描述曲线 C 。如图 5.1.3 所示,选定一个方向,使点 P 沿该方向遍历曲线 C 并依次将曲线 C 上的各点 P 与单位圆周上的各点 Q 对应。为此要使过点 P 的单位法线矢量与从单位圆心出发的终点为 Q 的矢量对应。这个从曲线向单位圆周映射的结果就是与曲线对应的高斯图。

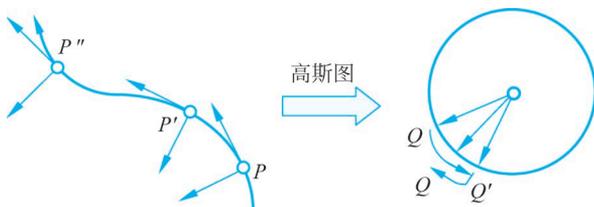


图 5.1.3 平面曲线的高斯图

前面讨论曲率时,借助了曲线上一点 Q 沿曲线向另一点 P 逼近的过程。因为曲线可被映射到高斯图,所以逼近过程也体现在高斯图中。当点 P' 逼近点 P 时,点 P' 对应高斯图上的点 Q' 也逼近点 P 对应高斯图上的点 Q 。点 P' 和点 P 处的法线 N' 和 N 间的夹角对应单位圆周上连接 Q' 和 Q 的弧长。曲率就是高斯图上对应弧长度和曲线长度的比值在两者趋于零时的极限。

现在考虑一个点沿曲线的运动及其高斯图上对应点的运动。在规则点和拐点处,该点沿曲线 C 的遍历方向不变;但在两类尖点处,该点沿曲线 C 的遍历方向会发生反转变(参见图 5.1.2)。其高斯图上的点沿单位圆的遍历方向在规则点和第一类尖点处不发生变化,而在

拐点和第二类尖点处发生反转变(参见图 5.1.3)。将两者结合,根据一个点沿曲线 C 的遍历方向及其高斯图上对应点沿单位圆运动时的方向变化,可对 4 类曲线点进行分类,如表 5.1.1 所示。

表 5.1.1 曲线点分类表

分 类	点沿曲线遍历方向不变	点沿曲线遍历方向反转变
高斯图上点沿单位圆运动方向不变	规则点	第 1 类尖点
高斯图上点沿单位圆运动方向反转变	拐点	第 2 类尖点

在对曲线 C 选出一个方向后,曲线 C 上任意一点的曲率可定义为一个符号。例如,可令凸点的曲率为正,即该点的曲率中心与该点法线矢量的顶点将处于曲线 C 的同一侧。同理,凹点的曲率为负,即该点的曲率中心与该点法线矢量的顶点将处于曲线 C 的两侧,拐点的曲率符号将改变,如果曲线的方向反转,曲率的符号也将反转。

3. 空间曲线

空间曲线的情况常比平面内曲线的情况复杂得多。例如,空间曲线 C 上一点 P 可有无穷多的直线与该点的切线垂直,它们共同组成空间曲线在该点的法平面。又如,空间曲线 C 上一点的邻域点并不一定处于同一平面,但确实存在一个唯一的平面与这些点最贴近,该平面称为密切平面,其包含点 P 及趋于 P 的曲线点。通过点 P 并与法平面和密切平面都垂直的平面称为校正平面。由法平面 N 、密切平面 T 和校正平面 R 可建立以点 P 为中心(原点)的坐标系,称为移动三面体或 Férnet 框架,如图 5.1.4 所示。其中,坐标系的 3 个轴分别对应切线矢量 t 、主法线(法平面和密切平面的交线)矢量 n 和副法线(法平面和校正平面的交线)矢量 b ,曲线 C 在 P 点的曲率中心为 O 。

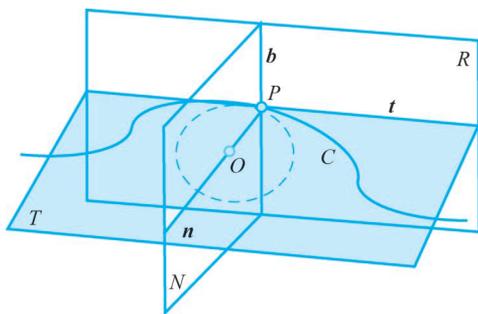


图 5.1.4 空间曲线的局部几何

空间曲线与平面曲线也有类似的地方。例如,可将平面曲线中高斯图的概念推广到空间曲线,不过此时表示切线、主法线和副法线的矢量端点处于一个单位圆球(高斯球)体上。空间曲线与平面曲线还有不同的地方。例如,不可能将空间曲线定义为一个有意义的符号。一般来说,空间曲线不存在拐点,其曲率在各个位置都是正的。

空间曲线与平面曲线也有类似的地方。例如,可将平面曲线中高斯图的概念推广到空间曲线,不过此时表示切线、主法线和副法线的矢量端点处于一个单位圆球(高斯球)体上。空间曲线与平面曲线还有不同的地方。例如,不可能将空间曲线定义为一个有意义的符号。一般来说,空间曲线不存在拐点,其曲率在各个位置都是正的。

下面考虑密切平面上沿空间曲线变化的速率(可看作对曲率的推广)。设曲线 C 上有两个相邻的点 P 和 P' ,计算与其对应的两个密切平面之间的夹角(或对应两个副法线之间的夹角),并除以其间距。当 P' 趋于 P 时,上述夹角和距离都趋于 0,而其比值存在一极限,该极限称为曲线 C 在点 P 的挠率。曲线 C 上两个相邻点 P 与 P' 之间的弧长 s 可以设为有向的。点 P 的切线矢量 t 为单位速率 dP/ds (定义为 P' 趋于 P 且两者间的距离趋于 0 时,矢量 $\Delta\overrightarrow{PP'}/\Delta s$ 的极限)。如果 s 反向,则 t 也反向。进一步,加速度 $d^2\mathbf{P}/ds^2$ 与曲率 K 和主法线 n 之间存在如下关系:

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{P} = \frac{d}{ds}\mathbf{t} = K\mathbf{n} \quad (5.1.1)$$

注意,曲率 K 是加速度的幅度, K 和主法线矢量 n 都与曲线方向无关。副法线矢量可定义为 $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ 。与 t 类似, b 依赖于曲线的方向。可以证明:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{n} = -K\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \quad (5.1.2)$$

$$\frac{d}{ds} \mathbf{b} = \tau \mathbf{n} \quad (5.1.3)$$

其中, τ 为曲线在点 P 的挠率。

与曲率不同, 对于一般空间曲线而言, 挠率可以为正、为负或为零。其符号取决于曲线的遍历方向, 并具有几何意义: 一般来说, 曲线会以一个非零的挠率通过密切平面的每一点。当挠率为正时, 曲线出现在密切平面的正面(副法线那面); 当挠率为负时, 曲线出现在密切平面的反面; 当挠率为零时, 则为平面曲线。

5.1.2 曲面局部特征

景物的表面可以是平面, 也可以是曲面, 可将平面看作曲面的特例。下列讨论的均为一般性曲面。

1. 表面法截线

先考虑表面 S 上一点 P 附近的性质。可以证明, 对于通过点 P 且处于表面 S 上的曲线 C , 其所有切线均位于同一平面 U 上, 平面 U 是过表面 S 上点 P 的切平面。通过点 P 且与表面 S 垂直的直线 N 称为表面 S 在点 P 处的法线, 如图 5.1.5 所示。可以取点 P 处法线矢量的方向为表面 S 在点 P 处的局部方向。可见, 表面上的每一点有唯一的法线, 但可以有无数条切线。

虽然通过表面 S 的点 P 处的法线只有一条, 但包含该法线的平面(同时包含一条切线)有无数个(可将任一包含法线的平面绕法线旋转得到)。这些平面与表面 S 的交线构成一个单参数平面曲线族, 称为法截线族。图 5.1.5 还给出了一条与曲线 C 的切线对应的法截线 C_t (完全位于表面 S 中, 但可以与曲线 C 不同)。

一般情况下, 表面 S 的法截线在点 P 处是规则的, 有时也会为拐点。法截线在点 P 处的曲率称为表面 S 在点 P 处相应切线方向上的法曲率。如果法截线与指向内部的表面法线位于切平面的同一侧, 称法曲率为正; 如果分处两侧, 则称法曲率为负。如果点 P 为对应法截线的拐点, 那么表面 S 在点 P 处相应切线方向上的法曲率为零。

2. 表面主法曲率

由于可能有无穷条曲线通过表面上的同一点, 所以不能直接将前面平面曲线的曲率定义推广至表面。不过对于每个表面, 其上至少可确定一个具有最大曲率 K_1 的方向, 还可确定一个具有最小曲率 K_2 的方向(对于比较平坦的表面, 可能有多个最大曲率和最小曲率的方向, 此时可任选)。换句话说, 法截线在表面上点 P 处的法曲率会在绕法线的某个方向上取得最大值 K_1 , 也会在某个方向上取得最小值 K_2 。一般将这两个方向称为表面 S 在点 P 处的主方向, 可以证明其是互相正交的(除非法曲率在所有方向都取同一值, 此时对应平面)。图 5.1.6 给出了一个示例, T_1 和 T_2 代表两个主方向。

可根据表面 S 在点 P 处邻域中两个主法曲率符号的异同判断该邻域的 3 种不同形状。如果两个主法曲率的符号相同, 则点 P 处邻域的表面是椭圆形的, 不跨越切平面。当曲率的符号为正时, 点 P 处是凸的; 当曲率的符号为负时, 点 P 处是凹的。如果两个主法曲率的符号相反, 则点 P 处邻域的表面是双曲形

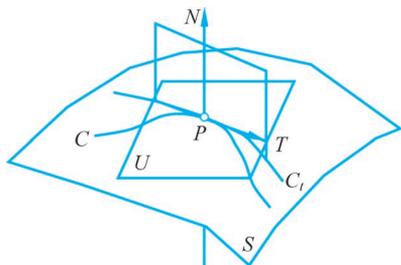


图 5.1.5 表面一点的法线 N 、切线 T 、切面 U 和法截线 C_t

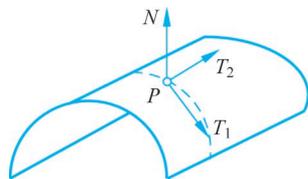


图 5.1.6 主曲率方向

的,表面 S 呈局部马鞍形并沿两条曲线通过切平面。对应的法截线在点 P 处有一个拐点。它们的切线位于表面 S 在点 P 处的渐近方向,这些方向被主方向隔开。椭圆形的点和双曲形的点在表面上组成块状区域,这些区域一般被抛物形的点组成的曲线隔开,在这些曲线上,两个主曲率之一为零。与此相应的主方向也是渐近方向,表面与其切平面相交处沿该方向有一个尖点。

类似于定义平面曲线的高斯图,也可定义表面的高斯图,此时一般称**高斯球**(更多讨论见 5.2.2 小节)。高斯球是将表面上的每个点映射到单位法线矢量与单位球的交点上得到的。对于平面曲线,高斯球在规则点附近是一一对应的,但在奇异点附近其遍历方向会改变。类似地,对于表面的椭圆点和双曲点,高斯球也是一一对应的;而对于表面的抛物点,任何小邻域都包含具有平行法线的点,所以高斯球会有折叠[Forsyth 2003]。

3. 平均曲率和高斯曲率

将前面介绍的主法曲率 K_1 与 K_2 结合,可构成平均曲率 H 和高斯曲率 G [Lohmann 1998]:

$$H = (K_1 + K_2)/2 = \text{tr}(K)/2 \quad (5.1.4)$$

$$G = K_1 K_2 = \det(K) \quad (5.1.5)$$

平均曲率确定表面是否局部凸(平均曲率为负)或凹(平均曲率为正)。如果表面局部是椭圆类型的,则高斯曲率为正;如果表面局部是双曲线类型的,则高斯曲率为负。

结合对高斯曲率和平均曲率的符号分析,可获得对表面的分类描述,也称地形性描述,如表 5.1.2 所示(这些描述也可用于深度图像分割,常称表面分割)。

表 5.1.2 高斯曲率 G 和均值曲率 H 确定的 8 种表面类型

	$H < 0$	$H = 0$	$H > 0$
$G < 0$	鞍脊	最小/迷向	鞍谷
$G = 0$	山脊/脊面	平面	山谷/谷面
$G > 0$	峰/顶面		凹坑

用数学语言表示[刘 1998],峰点的梯度为零,且所有的二次方向导数均为负值。坑点的梯度也为零,但所有的二次方向导数均为正值。脊可以分为脊点和脊线。脊点也是一种峰点,但其与孤立的峰点不同,只在某个方向的二次方向导数为负值。相邻的脊点连接构成脊线,脊线可以是水平的直线,也可以是曲线(包括不水平的直线)。沿水平脊线方向的梯度为零,且二次方向导数也为零,而与脊线相交方向的二次方向导数为负。沿与弯曲脊线相交的方向必有负的二次导数,而且在该方向的一次导数必为零。谷也称沟,其与孤立的坑点不同,只在某些方向二次导数为正值(将对脊线描述中二次方向导数为负改为二次方向导数为正,就得到对谷线的描述)。鞍点的梯度为零,其两个二次方向导数的极值(在某个方向有局部最大值,在与之垂直的方向有局部最小值)必有不同的符号。鞍脊和鞍谷分别对应两个极值取不同符号的情况。

例 5.1.1 8 种表面类型示例

由表 5.1.2 可知,高斯曲率和均值曲率可确定 8 种不同类型的表面。图 5.1.7 分别给出了这 8 种表面类型的示例。

图 5.1.7 中示例图的位置排列与表 5.1.2 中的名称排列相同,其中,图 5.1.7(a)对应鞍脊,图 5.1.7(b)对应最小/迷向,图 5.1.7(c)对应鞍谷,图 5.1.7(d)对应山脊/脊面,图 5.1.7(e)对应平面,图 5.1.7(f)对应山谷/谷面,图 5.1.7(g)对应峰/顶面,图 5.1.7(h)对应凹坑。

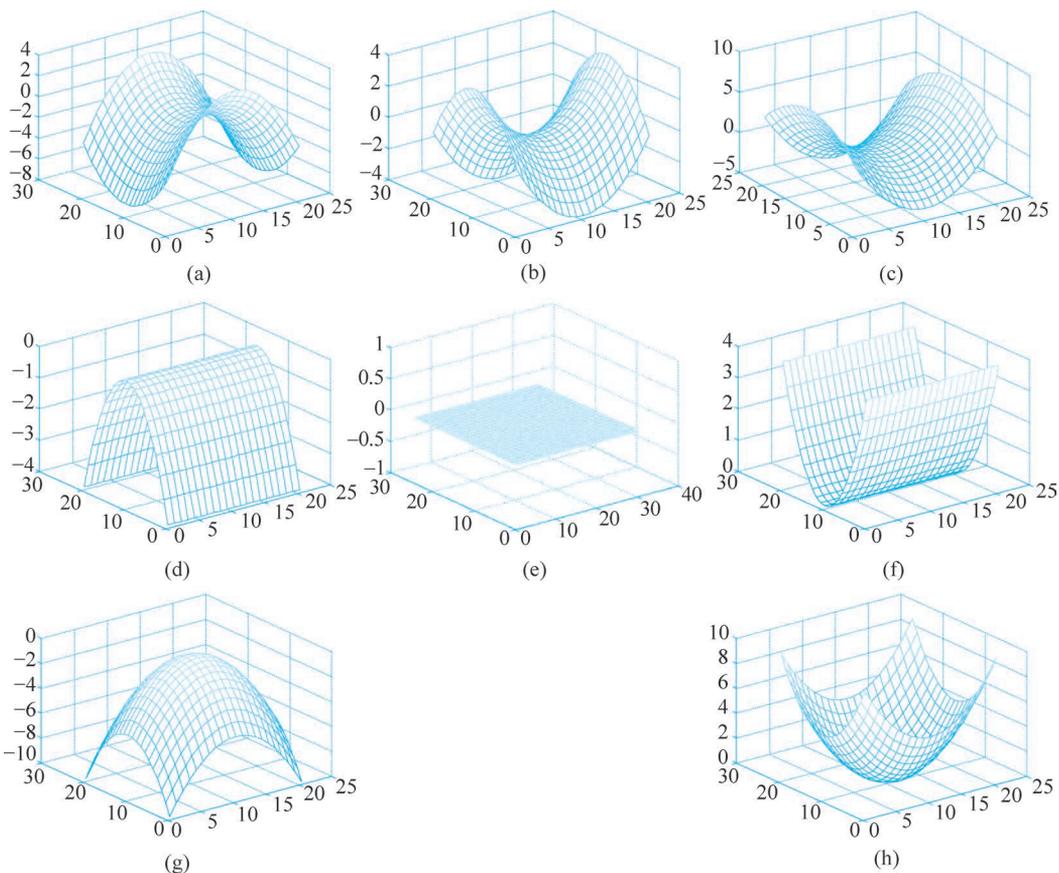


图 5.1.7 8 种表面类型的示例

□

5.2 3-D 表面表达

当人们观察 3-D 场景时,首先观察到的是景物的外表面。一般情况下,外表面是由一组曲面构成的。为表达 3-D 景物的外表面并描述其形状,可利用景物的外轮廓线或外轮廓面。如果给定外轮廓线,也可通过插值或“贴面”方法进一步获得外轮廓面。这里主要使用**表面模型**。

5.2.1 参数表达

参数表达是通用的解析表达。

1. 曲线的参数表达

景物外轮廓线是表达景物形状的重要线索。例如,常用的**线框表达法**就是借助一组外轮廓线表达 3-D 景物的一种近似方法。有些景物的外轮廓线可直接从图像中得到。例如利用结构光法采集深度图像时,可以得到光平面与景物外表面相交各点的 3-D 坐标。如果将同一平面上的点用光滑曲线连接并依次显示这一系列曲线,即可表示景物表面的形状。有些景物的外轮廓线需要根据图像计算。例如为了观察生物体标本的内部,要将标本切成一系列切片,对每个切片采集一幅图像。通过对每幅图像的分割可获得每片标本的边界,也就是生物体横切面的轮廓线[Zhang 1991a]。如果要恢复原标本的 3-D 形状,还需将这些轮廓线校正对齐并结合起来。

景物外轮廓线一般情况下为 3-D 曲线,常用参数样条表示,写成矩阵形式(用 t 表示沿曲



彩图

线从某点开始的归一化长度)为

$$\mathbf{P}(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]^T \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.2.1)$$

曲线上的任一点都由 3 个参数 t 的函数描述,曲线从 $t=0$ 开始,在 $t=1$ 结束。为了表示通用的曲线,使参数样条的一阶和二阶导数连续, $\mathbf{P}(t)$ 的阶数至少为 3。三次多项式曲线可写为

$$\mathbf{P}(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \quad (5.2.2)$$

其中

$$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{b} = [b_x \quad b_y \quad b_z]^T \quad (5.2.4)$$

$$\mathbf{c} = [c_x \quad c_y \quad c_z]^T \quad (5.2.5)$$

$$\mathbf{d} = [d_x \quad d_y \quad d_z]^T \quad (5.2.6)$$

而三次样条曲线可表示为

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \quad (5.2.7)$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \quad (5.2.8)$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \quad (5.2.9)$$

三次多项式可表示通过具有特定切线点的曲线,也是表示非平面曲线的最低阶多项式。

另外,一条 3-D 曲线可隐式地表示为满足下式的点 (x, y, z) 的集合:

$$f(x, y, z) = 0 \quad (5.2.10)$$

2. 曲面的参数表达

景物的外表面也是表达景物形状的重要线索。景物外表面可用多边形片的集合表示,每个多边形片可表示为

$$\mathbf{P}(u, v) = [x(u, v) \quad y(u, v) \quad z(u, v)]^T \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (5.2.11)$$

如果计算 $\mathbf{P}(u, v)$ 沿两个方向的一阶导数,可得到 $\mathbf{P}_u(u, v)$ 和 $\mathbf{P}_v(u, v)$,其都在通过表面点 $(x, y, z) = \mathbf{P}(u, v)$ 的切平面上,该点的法线矢量 \mathbf{N} 可由 $\mathbf{P}_u(u, v)$ 和 $\mathbf{P}_v(u, v)$ 计算得到:

$$\mathbf{N}(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v}{|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v|} \quad (5.2.12)$$

一个 3-D 表面也可隐式地表示为满足下式的点 (x, y, z) 的集合:

$$f(x, y, z) = 0 \quad (5.2.13)$$

例如,一个中心为 (x_0, y_0, z_0) 的半径为 r 的球可表示为

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0 \quad (5.2.14)$$

3-D 表面的一种显式表达形式为

$$z = f(x, y) \quad (5.2.15)$$

表面面元可用不同阶的双变量多项式表示。最简单的双线性面元(任何平行于坐标轴的截面都是直线)可表示为

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (5.2.16)$$

而曲面可用高阶多项式表达。例如,双二次面元

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \quad (5.2.17)$$

和双三次面元

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3 \quad (5.2.18)$$

另外,借助面元的概念,可将对表面的表达转换为对曲线的表达。设每个面元由 4 条曲线

包围和界定,那么确定各面元的4条曲线,也可完成对整个表面的表达。

5.2.2 表面朝向表达

通过表达3-D景物各表面的朝向可勾勒景物的外观形状,而要表达表面的朝向,可借助表面的法线。

1. 扩展高斯图

扩展高斯图是表达3-D目标的一种模型,其具有近似和抽象两个特点。一个目标的扩展高斯图给出目标表面法线的分布,从而给出表面各点的朝向。如果目标是凸多锥体,则目标和其扩展高斯图是一一对应的,但一个扩展高斯图可能对应无穷多个凹形目标[Shirai 1987]。

计算扩展高斯图,可借助高斯球的概念。**高斯球**是一个单位球,给定3-D目标[图5.2.1(a)]表面的一个点,将该点对应到球面上具有相同表面法线的点,就可得到高斯球[图5.2.1(b)]。换句话说,将目标表面点的朝向矢量尾端放在球中心,矢量的顶端与球面在一个特定点相交,这个交点可用于标记原目标表面点的朝向。球面上交点在球上的位置可用两个变量(有两个自由度)表示,例如极角和方位角或者经度和纬度。如果在高斯球上各点都放置与对应表面面积数值相等的质量,就可得到扩展高斯图[图5.2.1(c)]。

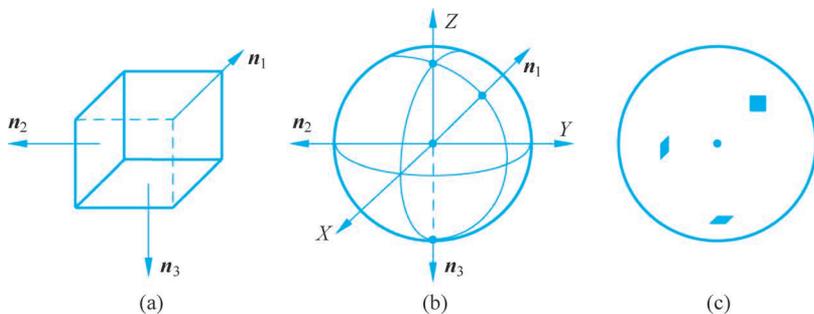


图 5.2.1 高斯球和扩展高斯图

考虑目标为凸多面体的情况,其各表面均为平面。该凸多面体可完全由其各表面的面积和朝向确定。利用各表面平面的朝向(法线矢量的方向),可得到凸多面体的高斯球,因为凸多面体不同表面上的点不会有相同的表面法线矢量,所以其高斯球上每个点对应一个特定的表面朝向。这样得到的扩展高斯图具有如下特性:扩展高斯图上的总质量在数值上与多面体表面区域面积的总和相等;如果多面体是闭合的,则从任何相对的方向投影都可得到相同的区域。

上述方法可推广至光滑的曲面。定义高斯球上一个区域 δS 与目标上对应区域 δO 的比值在 δO 趋于零时的极限为**高斯曲率** G ,即

$$G = \lim_{\delta O \rightarrow 0} \frac{\delta S}{\delta O} = \frac{dS}{dO} \quad (5.2.19)$$

如果对目标上一个区域 O 进行积分,则得到**积分曲率**

$$\iint_O G dO = \iint_S dS = S \quad (5.2.20)$$

其中, S 是高斯球上的对应区域。上式可允许处理法线不连续的表面。

如果对高斯球上一个区域 S 进行积分,则得到

$$\iint_S \frac{1}{G} dS = \iint_O dO = O \quad (5.2.21)$$

其中, O 是目标上的对应区域。

式(5.2.21)表明可用高斯曲率的倒数定义扩展高斯图,具体是将目标表面上一点高斯曲率的倒数映射到单位球上的对应点。如果用 u 和 v 表示目标表面上点的系数,用 p 和 q 表示高斯球上点的系数,则扩展高斯图定义为

$$G_e(p, q) = \frac{1}{G(u, v)} \quad (5.2.22)$$

上述映射对凸形景物是唯一的。如果目标不是凸体,则可能出现下面 3 种情况[Horn 1986]。

- (1) 某些点的高斯曲率会变为负数。
- (2) 目标上的多个点会对球上同一点有贡献。
- (3) 目标的某些部分会被其他部分遮掩。

例 5.2.1 扩展高斯图计算示例

给定一个半径为 R 的圆球,其扩展高斯图 $G_e(p, q) = R^2$,如果从球的中心观察区域 δO ,则观察立体角 $\omega = \delta O / R^2$,而高斯球上区域的面积 $\delta S = \omega$ 。

2. 球心投影和球极投影

景物的表面朝向有两个自由度。为指定面元的朝向,可使用梯度,也可使用单位法线,其中表面法线所指的方向可用前面的高斯球表达。高斯球本身具有曲面形状的外表面,一般可将其投影到一个平面以得到梯度空间,如图 5.2.2(a)所示。

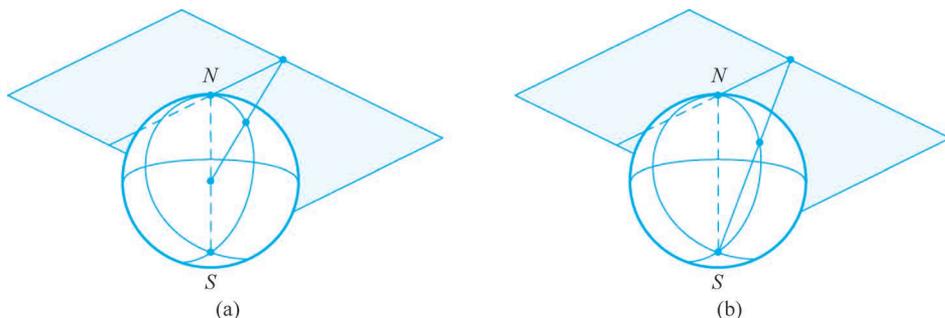


图 5.2.2 球心投影和球极投影

考虑通过球且平行于 Z 轴的轴,可将球的中心作为投影的中心,将北半球上的点投影到与北极相切的平面上,称为球心投影。可以证明梯度为 (p, q) 的点在此平面上的位置为 $(-p, -q)$ 。利用此平面定义梯度空间有一个缺点,即为避免混淆只能将一个半球面投影到此平面。

球心投影是方位投影的一种特殊情况,投影结果等效于从一个球心发出的光束透过球面照射在与球面相切的平面上所成的像。球心投影除了具有方位投影的一般性质外,其最大特性是能保持直线特征的几何属性,即 3-D 空间中的直线经过球心投影后仍然为直线。借助这一特性,[岳 2017]设计了一种利用球心投影纠正成像形变并计算点云在目标区域的投影坐标初值,以实现点云与全景影像配准的方法。

很多情况下,只关心观察者可看到的表面,这正对应北半球上的点。但也有其他情况,例如对于一个由背面照明的场景,指向光源的方向需要由南半球的点表示。这样就遇到梯度空间的一个难题,即对应高斯球表面的赤道上的点会投影到梯度空间的无穷远处。

解决以上问题的一种方法是利用立体图投影(也称球极投影)。投影的目的地仍是与北极相切的平面,但投影的中心是南极[图 5.2.2(b)]。这样除南极点外,所有球面上的点都可唯

一地映射到平面上,赤道的投影将是一个半径为球直径的圆周。如果设球极投影中的坐标为 s 和 t ,则可以证明

$$s = \frac{2p}{1 + \sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad t = \frac{2q}{1 + \sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad (5.2.23)$$

反过来有

$$p = \frac{4s}{4 - s^2 - t^2} \quad q = \frac{4t}{4 - s^2 - t^2} \quad (5.2.24)$$

另外,球极投影是高斯球上的一个保角投影,即球面上的角投影到平面上仍是相同的角。球极投影的缺点是有些公式比在球心投影中更复杂。有关球极投影的定义、性质及应用的更多讨论可见[刘 2001]、[郑 2003]。

5.3 等值面的构造和表达

3-D 图像中的基本单元是**体素**,如果一个 3-D 目标的轮廓体素具有确定的灰度值,那么这些体素点将构成一个等值表面,即该目标与其他目标或背景的交界面。下面介绍两种对等值面进行构造和表达的算法[Lohmann 1998],并对其进行比较。

5.3.1 行进立方体算法

考虑由 8 个体素构成顶点的立方体,如图 5.3.1(a)所示,其中黑色体素表示前景,白色体素表示背景。该立方体具有 6 个(上下左右前后)邻接的立方体。如果该立方体的 8 个体素全部属于前景或全部属于背景,则该立方体为内部立方体。如果该立方体的 8 个体素中有的属于前景,有的属于背景,则该立方体为边界立方体。等值面应在边界立方体中(穿过边界立方体)。如图 5.3.1(a)所示的立方体,等值面可以是图 5.3.1(b)中的阴影矩形。

行进立方体(MC)算法(也称**移动立方体算法**)是确定等值面的一种基本方法[Lorenson 1987]。该算法先检查图像中各个立方体,再确定与目标表面相交的边界立方体,同时确定其交面。根据目标表面与立方体相交的情况,处于立方体内部的目标表面部分一般情况下是一个曲面,但可用**多边形片**近似。这样的片很容易被分解为一系列三角形,而三角形又很容易进一步组成目标表面的三角形网。

算法逐次检查每个体素,从一个立方体行进到其相邻的立方体。理论上讲,立方体的每个顶点体素均可能为黑色体素或白色体素,所以对于每个立方体,可能有 $2^8 = 256$ 种不同的黑白体素布局/构型。不过,如果考虑立方体的对称性,则只有 22 种不同的黑白体素布局。在 22 种不同的布局中,又有 8 种是其他布局形式的反转(黑色体素转变为白色体素或白色体素转变为黑色体素)。这样,只剩下 14 种不同的黑白体素布局,即只有 14 种不同的目标表面片,如图 5.3.2 所示(其中第一图代表目标表面与立方体不相交的情况)。

可将这些情况列入一个查找表,每当检查一个立方体时,只需从查找表中搜索以确定对应的多边形表面片。算法执行如下:先从左上角开始整幅扫描 3-D 图像中的第 1 层,到达右下角;再从第 2 层的左上角开始整幅扫描,依次进行,直到最后一层图像的右下角。每扫描一个

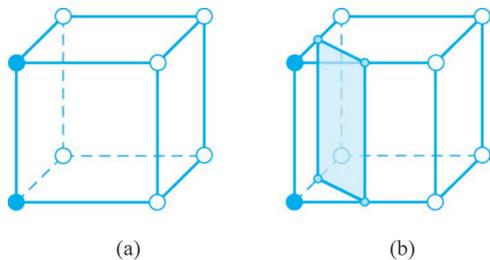


图 5.3.1 由 8 个体素构成顶点的立方体与目标表面相交

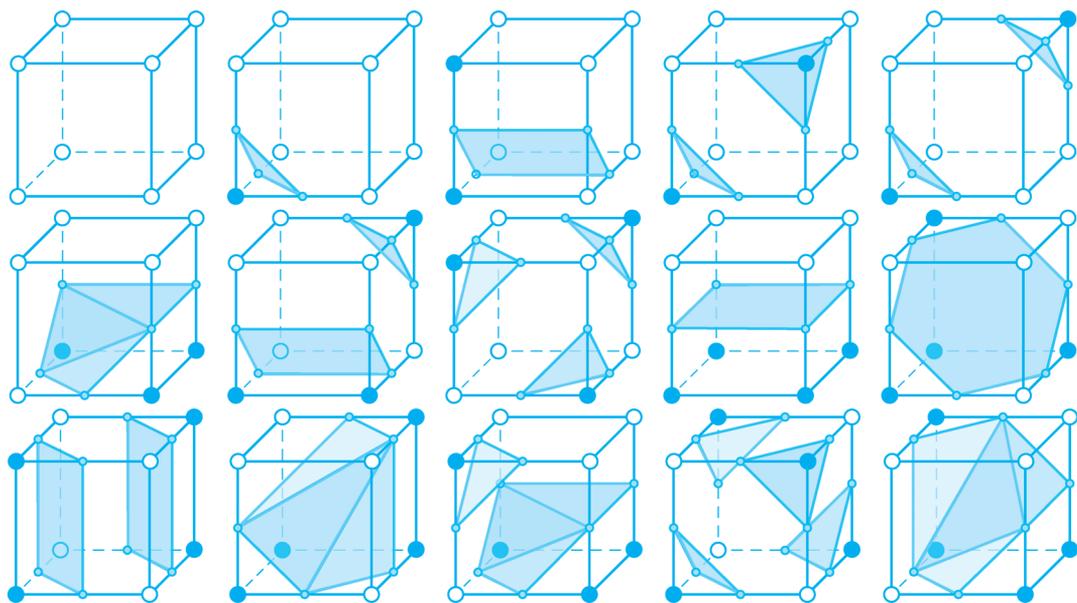


图 5.3.2 行进立方体布局

前景体素,就去检查该体素所属的由 8 个体素构成顶点的立方体。只要目标表面与立方体相交,就属于图 5.3.2 中后 14 种布局情况之一,可利用上面的查找表,找出各个对应的多边形表面片并进一步分解为一系列三角形。实际应用中常将 256 种布局情况全部列入查找表,以避免采用耗时更长的对称性和反转性验证。

虽然上述黑白体素的分布情况不同,容易区分,但有些情况下,仅从黑白体素的分布并不能确切地获得与立方体相交的目标表面在立方体内的部分。事实上,图 5.3.2 的后 14 种布局情况中,第 3、6、7、10、12 和 13 共 6 种布局(对角顶点多为同色体素)均对应不止一种表面分布,或者说存在(确定平面的)歧义性。图 5.3.3 给出了一对典型的例子,其对应同一布局(第 10 种布局),但目标表面分布存在两种可能。

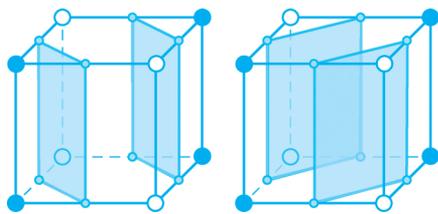


图 5.3.3 有歧义的行进立方体布局示例

解决上述歧义问题的一种方法是对基本布局中的有歧义的布局,通过添加其互补布局进行扩展。可将图 5.3.3 右图看作左图的互补布局。其他 5 种对有歧义布局扩展的互补布局如图 5.3.4 所示(其中前 3 图中的多边形片都已三角剖分)。实际应用中,可对其分别建立一个子查找表。每个子查找表包含两种三角剖分方式。此外,还需存储一个表以记录三角剖分方式的相容性。



图 5.3.4 对有歧义布局添加的 5 种互补布局

另外,还有两种方法均将布局对应为拓扑流形,一种称为面平均值法,计算歧义面上 4 个顶点值的平均值,通过比较该平均值与事先确定的阈值的大小选择一种可能的拓扑流形;另

一种称为**梯度一致性试探法**,借助歧义面上4个角点的梯度平均估算歧义面中心点的梯度,并根据该梯度的方向确定歧义面的拓扑流形。

除上述歧义问题外,由于行进立方体算法对每个立方体分别检验,未考虑整体目标的拓扑情况,所以即便没有采用有歧义的布局,也不能保证总能得到封闭的目标表面。一个采用行进立方体算法但没有得到封闭目标表面的示例如图 5.3.5 所示。图中两个初始的布局都得到了没有歧义的正确分解,但将其组合并没有得到封闭的目标表面。

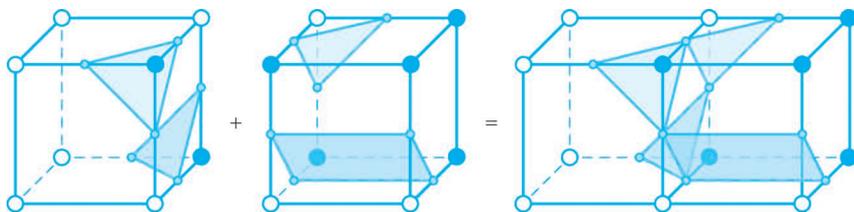


图 5.3.5 采用行进立方体算法没有得到封闭的目标表面

例 5.3.1 三角形面元的不同组合

用两个三角形连接4个顶点并构成目标的表面部分有两种方法,得到的表面积和表面朝向都不相同。例如图 5.3.6 中,对于同样处于正方形上的4个顶点(其中数字指示该点相对基准面的高度),图 5.3.6(a)和图 5.3.6(b)分别给出两种方式。按图 5.3.6(a)方式得到的表面积为 13.66,而按图 5.3.6(b)方式得到的表面积为 14.14。两者之间存在约 3.5% 的差别。

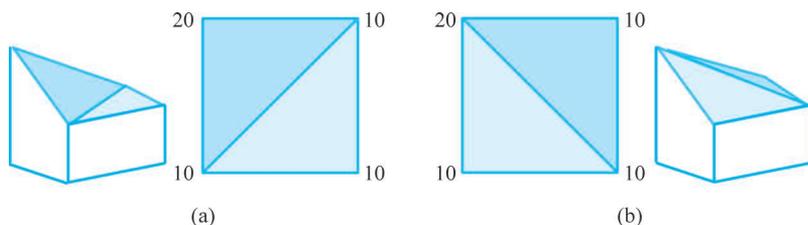


图 5.3.6 两种三角形面元的组合

行进立方体算法需要遍历目标的全部体素,逐次检查每个体素以确定等值面。对于实际景物,其全部体素中包含等值面的只是一小部分,所以遍历全部体素会浪费大量时间。为此,可采取另一种无须遍历的策略[刘 2019],先确定包含等值面的种子体素,再利用区域生长技术,直接选出与选定的种子体素相邻的、包含等值面的体素。实验结果表明,采用这种方法所需检查的体素数量只有原方法的 1/400,整个算法的耗时减少了一半多。考虑到实际景物具有的连通性,[范 2019]采取了类似的策略,区别只是在确定种子体素后,利用中值法结合对等值面的追踪近似实现。实验结果表明,采用这种方法生成的三角面片个数少了近一半;在目视效果没有明显差异的情况下,耗时也减少了近一半。

5.3.2 覆盖算法

覆盖算法也称**移动四面体(MT)**算法,可用于解决上述行进立方体算法得不到封闭目标表面的问题,从而保证得到封闭和完整的目标表面的三角形表示[Guéziec 1994]。不过该算法的缺点是其一般会生成多达实际需要数量 3 倍的三角形,所以还需要后处理步骤以简化多边形网格,从而将三角形的数量减少到可接受程度。

在此算法中,每次考虑的也是如图 5.3.1(a)所示的具有 8 个体素的立方体。算法第一步将体素网格分解为立方体集合,每个立方体都有 6 个(上下左右前后)邻接的立方体。算法第

第二步将每个立方体分解为5个四面体,如图5.3.7所示。其中左边的4个四面体有两组长度相同的边缘(各3个),而第5个四面体具有4个相同尺寸的面(图5.3.7最右)。可将属于四面体的体素看作在目标内部,而不属于四面体的体素看作在目标外部。

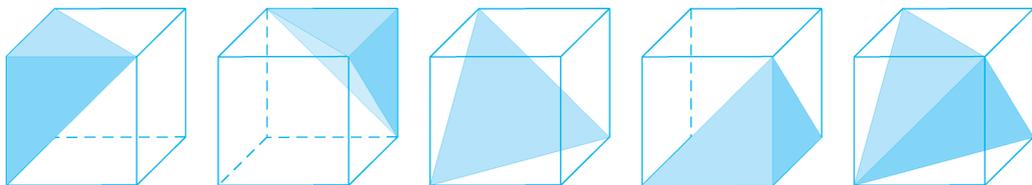


图 5.3.7 每个立方体分解为 5 个四面体

立方体的四面体分解有两种方案,如图5.3.8所示。其中,左图和右图两种方案分别称为奇方案和偶方案。对体素网络的分解是按奇偶相间进行的,就像国际象棋棋盘那样黑白交替,保证相邻立方体中的四面体可以互相匹配,以便得到协调一致的表面。

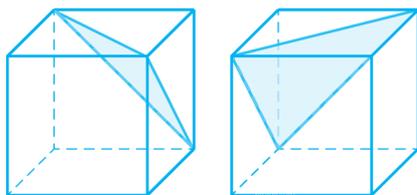


图 5.3.8 将立方体分解为四面体的两种方案

算法的第三步是确定目标表面是否与四面体相交。注意每个四面体都包含4个体素。对于一个四面体来说,如果其4个体素都在目标内部或任一个体素都不在目标内部,那么目标表面与该四面体不相交,在后续处理中就无须考虑了。

算法的下一步是估计在与目标表面相交的四面体中,目标表面与四面体各面(多边形)相交的边界。对每对边界两端的顶点可进行线性插值,通过逼近获得在连接每对顶点的边上的交点。如果使用4个顶点进行双线性插值,可能得到更好的效果。对于6-邻接的体素,双线性插值与线性插值等价。对于对角边缘,设4个顶点的灰度值分别为 a 、 b 、 c 、 d ,得到的插值结果为

$$I(u) = (a - b - c + d)u^2 + (-2a + b + c)u + a \quad (5.3.1)$$

其中,参数 u 沿对角线从0变到1。通过计算 u_0 值,并使 $I(u_0) = 0$,即可计算出交点。

可根据交点确定表面拼接后的顶点,如图5.3.9所示,共分3种情况。其中,拼接表面的朝向用箭头表示。朝向有助于区分每个拼接表面的内部和外部。根据约定,当从外部观察时,朝向是逆时针的。为使目标的拓扑稳定,在整个表面网格中都要遵守上面的约定。

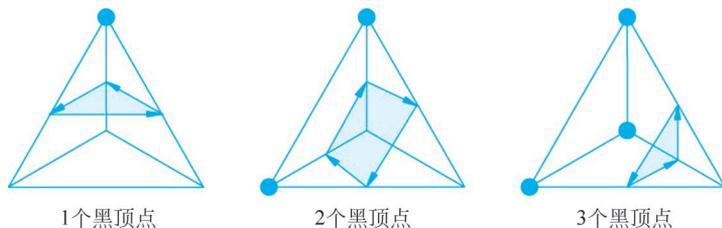


图 5.3.9 表面相交的 3 种情况

5.3.3 两种算法比较

移动立方体算法与移动四面体算法都是在3-D标量场数据可视化、隐函数曲面显示、3-D曲面重建等应用中提取等值面的常用方法。两种算法的比较如表5.3.1所示。

表 5.3.1 两种算法比较

算 法	体 素 单 元	主要操作步骤	离 散 逼 近
移动立方体	立方体	遍历立方体网格中的所有体素,依次判断每个体素的 8 个顶点与等值面之间的位置关系;将交点作为逼近等值面的三角形面片的顶点	三线性
移动四面体	四面体	遍历四面体网格中的所有体素,依次判断每个四面体的 4 个顶点与等值面之间的位置关系;将交点作为逼近等值面的三角形面片的顶点	线性

两种算法在构建等值面时都会产生一定的偏差。偏差的主要来源有两个:三线性或线性假设;在体素单元内用三角形面片逼近等值面。

关于两种算法的实验比较如下[王 2014b]。

(1) 实验分别测试了 4 种等值面提取算法: MC^A 、 MC^L 、 MT^A 、 MT^L ,其中,上标“A”表示等值面与体素边交点通过数值方法精确计算得到,上标“L”表示交点通过线性插值得到。两种算法的输入体网格类型不同,下面仅考虑四面体网格中的采样点数目与立方体网格大致相同的情况。

(2) 实验分别使用豪斯道夫距离、平均偏差和偏差均方差描述所提取等值面与真实等值面之间的最大偏离程度、平均偏离程度及偏差波动幅度。

(3) 实验分别使用 5 种具有不同次数的代数曲面。下面仅给出其中 3 种曲面结果的比较。3 种曲面分别是:①球面(2 次): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;②圆环面(4 次): $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2)$;③心形表面(6 次): $(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)^3 - 0.1x^2z^3 - y^2z^3 = 0$ 。

对 4 种等值面提取算法借助 3 种不同次数的代数曲面进行实验,得到的平均偏差和偏差均方差结果如图 5.3.10 和图 5.3.11 所示。

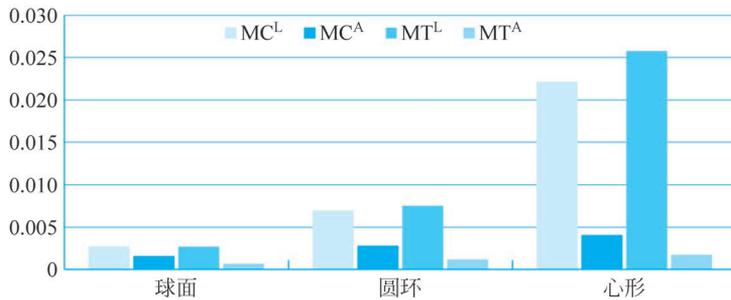


图 5.3.10 等值面的平均偏差

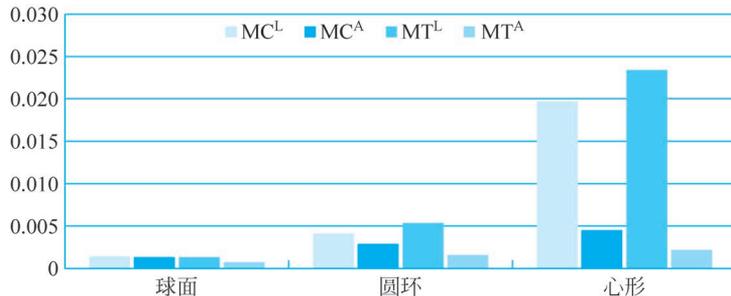


图 5.3.11 等值面的偏差均方差

由图 5.3.10 和图 5.3.11 可看出:

(1) 基于数值求根计算交点的算法的平均偏差均小于基于线性插值计算交点的算法。

- (2) MT^A 算法的平均偏差总是最小。
- (3) 由高次曲面得到的平均偏差总大于由低次曲面得到的平均偏差。

5.4 从并行轮廓插值 3-D 表面

对于 3-D 目标表面,一类常用的边界表达方法是利用多边形网格(mesh)。这里多边形由顶点、边缘和表面组成,每个网格可看作一个面元。给定一组立体数据,获得上述多边形网格并用面元集合表达目标表面的过程称为**表面拼接**。5.3 节的两种方法是对任意 3-D 网格进行表面拼接的一般方法,本节考虑一种特殊的情况。

1. 轮廓内插和拼接

许多 3-D 成像方式(如 CT、MRI 等)都是先逐层获得 2-D 图像,再叠加得到 3-D 图像。如果从每幅 2-D 图像中检测出目标的轮廓,根据这一系列并行轮廓就可重建 3-D 目标表面。根据并行轮廓插值 3-D 表面时,每个轮廓都是 2-D 的,它是轮廓内(部分)与轮廓外(部分)的边界;而 3-D 表面实际上是 3-D 实体内外(部分)的边界。这是一个从 2-D 边界到 3-D 边界的过程。填充 2-D 轮廓并堆叠,就可得到 3-D 实体。这是一个从 2-D 区域到 3-D 体积的过程。

实际上,3-D 打印很好地诠释了这种 3-D 表达方式。3-D 打印流程如图 5.4.1 所示,主要通过计算机 CAD 软件对拟打印目标进行 3-D 建模,再将 3-D 模型划分为逐层的截面和切片,由计算机控制打印机逐层(2-D)打印,最后打印出 3-D 目标[孙 2022]。



图 5.4.1 3-D 打印流程

根据并行轮廓插值 3-D 表面的一种常用方法是用(三角形)面元进行轮廓间的内插。实际常以多边形的形式给出轮廓线,以节省表达数据量(见中册 6.1.5 小节)。此时要解决的问题可描述为用一系列三角形平面拼接成相邻两个多边形之间的表面。如果一个三角形有一个顶点位于一个多边形上,则剩下的两个顶点要位于另一个多边形上,反之亦然。主要工作包括两步。第 1 步是如何从相邻的两个多边形上确定一个初始顶点对,这两个顶点的连线构成三角形的一条边。第 2 步是如何在已知一个顶点对的基础上选取下一个相邻的顶点[Shirai 1987],以构成完整的三角形。不断重复第 2 步,即可将构造三角形的工作继续下去,从而组成封闭的轮廓(常称为**线框**)。此过程也称轮廓拼接。

先看第 1 步。直观地说,相邻两个多边形上对应的初始顶点应在各自的多边形上有一定的相似性,即在各自的多边形上具有相似的特征。可考虑的特征包括顶点的几何位置、连接相邻顶点的方向、两相邻边的夹角及从重心到边缘点的方向等。当多边形重心到边缘点的距离较大时,从重心到边缘点的方向将是一个比较稳定的特征。如图 5.4.2 所示,设从一个多边形边缘点 P_i 到该多边形重心的矢量为 U_i ,从另一个多边形边缘点 Q_j 到该多边形重心的矢量为 V_j ,那么

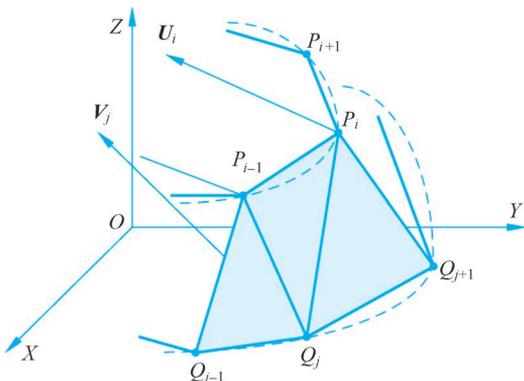


图 5.4.2 由轮廓线到轮廓面中顶点的选取

初始顶点对可根据使矢量 U_i 和 V_j 内积最大的原则确定。内积最大是指两个矢量尽可能平行且边缘点到重心的距离尽量大的情况。如果两个多边形相似,那么选择最远的顶点对即可。

再看第 2 步。选定了第一对顶点后,再选取一个顶点,即可组成第一个三角形。选择规则有多种,例如可根据三角形的面积、与下一对顶点的距离、与重心连线的取向等。如果基于与下一对顶点的距离,可选取具有最短距离的顶点对。但有时仅基于一种规则是不够的,特别是当顶点的水平位置不同时。

下面用图 5.4.3 介绍一种用于第 2 步顶点选取的方法,它是将图 5.4.2 的轮廓线向 XY 平面投影得到的。设当前的顶点对为 P_i 和 Q_j , P_i 的 X 轴坐标小于 Q_j 的 X 轴坐标, $\overline{P_{i+1}Q_j}$ 可能比 $\overline{P_iQ_{j+1}}$ 短。然而由于 $\overline{P_iP_{i+1}}$ 与 $\overline{Q_{j-1}Q_j}$ 的方向相差很多,从表面连续的角度考虑,还是应倾向于选取 Q_{j+1} 作为下一个三角形的顶点。具体来说还要考虑方向差。设 $\overline{P_iP_{i+1}}$ 与 $\overline{Q_{j-1}Q_j}$ 的方向差为 A_i , $\overline{P_{i-1}P_i}$ 与 $\overline{Q_jQ_{j+1}}$ 的方向差为 B_j ,那么当 $\overline{P_{i+1}Q_j} < \overline{P_iQ_{j+1}}$ 时对下一顶点的选取规则如下(T 表示一个预先确定的阈值)。

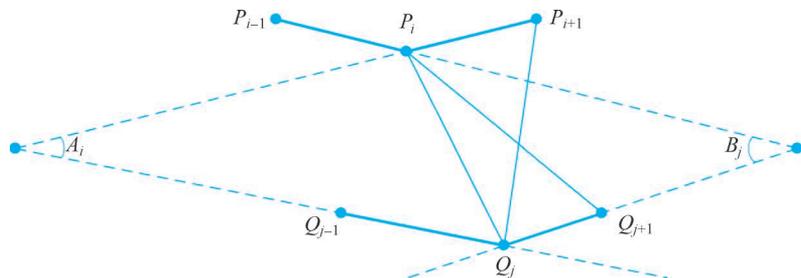


图 5.4.3 将图 5.4.2 的轮廓线向 XY 平面投影的结果

(1) 如果 $\cos A_i > T$, 表明 A_i 较小, $\overline{P_iP_{i+1}}$ 与 $\overline{Q_{j-1}Q_j}$ 更接近平行, 此时下一个顶点应选 P_{i+1} 。

(2) 如果 $\cos A_i \leq T$, 且 $\cos B_j > T$, 则表明 B_j 较小, $\overline{P_{i-1}P_i}$ 与 $\overline{Q_jQ_{j+1}}$ 更接近平行, 此时下一个顶点应选 Q_{j+1} 。

(3) 如果上述两个条件均不满足, 即 $\cos A_i \leq T$, 且 $\cos B_j \leq T$, 则仍考虑距离因素, 下一个顶点应选 P_{i+1} 。

2. 可能遇到的问题

可将上述对轮廓进行插值以获取表面的方法看作从矢量表达的平面轮廓中提取表面拼接的网格。这项工作比从具有体素数据结构的栅格图像中提取表面网格困难得多。由平面轮廓建立 3-D 表面常遇到 3 种问题, 可借助图 5.4.4 解释。

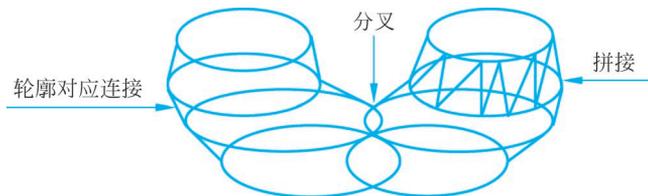


图 5.4.4 由平面轮廓建立 3-D 表面常遇到的 3 种问题

(1) 对应问题

对应包括两个层次的问题。如果两个平面中都只有一个轮廓, 那么对应问题仅涉及在相邻平面轮廓中确定对应关系和对应点。当平面之间的距离较小时, 轮廓之间形状的差别也会较小, 容易找到轮廓点间的匹配。但当平面之间的距离较大, 且轮廓形状比较复杂时, 则很难

确定对应性。如果两个平面中都有不止一个轮廓,问题将更复杂。若需确定不同平面中的对应轮廓,不仅要考虑轮廓的局部特征,还要考虑轮廓的全局特征(有些方法将在第11章讨论)。由于约束不足,目前缺乏可靠的解决对应问题的全自动方法,某些场合还是需要人工干预。

(2) 拼接问题

拼接是用三角形网格建立覆盖相邻平面的两个对应轮廓间的表面,其基本思路是根据某种准则产生一组优化的三角面片,将目标表面近似地表达出来。这里采用的准则根据要求而定,例如表面面积最小、总体积最大、轮廓点间连线最短、轮廓点间连线与轮廓重心间连线平行等。尽管准则很多,但中心问题都是优化问题。另外,拼接在一般意义上讲还可用曲面拟合对应轮廓间的表面(上述使用三角形平面的方法是一种特例),此时常使用参数曲面的表达方式,可获得较高阶的连续性(见5.2.1小节)。

(3) 分支或分叉问题

当一个轮廓从一个平面到相邻平面而分成两个或多个轮廓时会出现**分支或分叉**问题。一般情况下,分叉发生时的轮廓对应关系并不能仅由分叉处的局部信息确定,常需利用轮廓整体的几何信息和拓扑关系。解决这一问题的常用方法是利用如下的Delaunay三角剖分方法,由一组给定的输入顶点产生三角形网格[Lohmann 1998]。

除以上问题外,如果要在三角形网格或多边形网格的基础上通过选用参数曲面拟合获得光滑的表面,还要解决曲面拟合问题。可将网格点作为控制点进行。

3. 德劳内三角剖分和邻域沃罗诺伊图

1934年,苏联数学家德劳内(Delaunay)指出:对于平面域上 N 个点组成的点集合,存在且仅存在一种三角剖分,即**德劳内三角剖分**,使所有三角形的最小内角之和为最大。德劳内三角剖分可使得到的每个三角形尽可能接近等边三角形,不过该定义并不完备。

根据德劳内三角剖分的定义,可导出其满足的下列两条准则(构造三角剖分算法的基础)。

(1) **共圆准则**:任意三角形的外接圆将不包含其他任何数据点,此准则也常被称为**空圆盘性质**。

(2) **最大最小角准则**:对任意相邻的两个三角形构成的四边形来说,德劳内三角剖分要求按该四边形的一条对角线分成的两个三角形中6个内角中的最小值将大于另一条对角线分成的两个三角形中6个内角中的最小值。此准则使德劳内三角剖分尽可能避免产生狭长、具有尖锐内角的病态三角形。

沃罗诺伊(Voronoi)图和德劳内三角形互为对偶。一个像素的沃罗诺伊邻域提供该像素的一个直观的近似定义。一个给定像素的沃罗诺伊邻域对应一个与该像素最接近的欧氏平面区域,即一个有限独立点的集合 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,其中 $n \geq 2$ 。

下面先来定义沃罗诺伊区域和直属沃罗诺伊图[Kropatsch 2001]。

利用欧氏距离

$$d(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2} \quad (5.4.1)$$

可将点 p_i 的沃罗诺伊邻域定义为

$$V(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \forall i \neq j: d(p, p_i) \leq d(p, p_j)\} \quad (5.4.2)$$

包含邻域的边界 $B_V(p_i)$,该边界包含满足下式的等距离的点:

$$B_V(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists i \neq j: d(p, p_i) = d(p, p_j)\} \quad (5.4.3)$$

所有点的沃罗诺伊邻域的集合为

$$W(P) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\} \quad (5.4.4)$$

称为点集 P 的**直属沃罗诺伊图**,简称沃罗诺伊图。沃罗诺伊图中的边表示边界 $B_V(p_i)$ 的线段,图中的顶点为线段相交的点。

德劳内图的顶点都是 P 中的点。当且仅当 $V(p_i)$ 和 $V(p_j)$ 在沃罗诺伊图中相邻时, p_i 、 p_j 两点构成德劳内图的一条边。

构建沃罗诺伊图时,可先从最简单的情况,即只有两个不同的平面点 p_1 和 p_2 开始,如图 5.4.5(a)所示。式(5.4.2)表明, p_1 的沃罗诺伊邻域 $V(p_1)$ 包含所有或者离 p_1 (比 p_2) 更近的点,或者与两点等距离的点。由图 5.4.6(a)可见,所有与 p_1 、 p_2 两点等距离的点都正好落在 p_1 到 p_2 线段的垂直二分线 b_{12} 上。根据式(5.4.3)和垂直二分线的定义, p_1 的沃罗诺伊邻域的轮廓 $B_V(p_1)$ 就是 b_{12} 。所有在由 b_{12} 限定的包含 p_1 的半平面上的点离 p_1 (比 p_2) 更近,它们将组成 p_1 的沃罗诺伊邻域 $V(p_1)$ 。

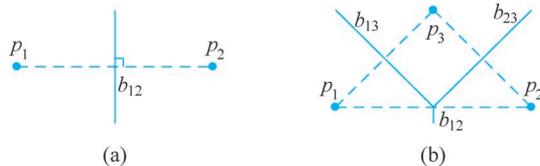


图 5.4.5 构建沃罗诺伊图的垂直二分线方法

如果构建沃罗诺伊图时加上第 3 个点 p_3 ,就可构建一个三角形 Δ_{123} ,如图 5.4.5(b)所示。再次对三角形的每条边作垂直二分线,就可构建 $n=3$ 的沃罗诺伊图。

图 5.4.6 为沃罗诺伊图和德劳内三角形的对偶性示例。其中图 5.4.6(a)是一些平面点的沃罗诺伊图,图 5.4.6(b)是其对偶,即德劳内三角形,图 5.4.6(c)给出了两者之间的联系。

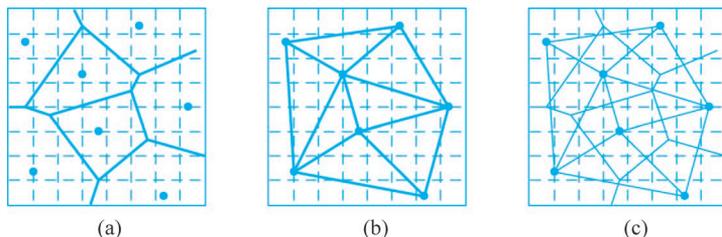


图 5.4.6 沃罗诺伊图和德劳内三角形的对偶性示例

基于构建沃罗诺伊图的式(5.4.1)~式(5.4.4),可进一步构建**区域沃罗诺伊图**。

一个图像单元 i_j 的区域沃罗诺伊图可定义为

$$V_a(i_j) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \forall j \neq k: d_a(p, i_j) \leq d_a(p, i_k)\} \quad (5.4.5)$$

其中,图像单元 i_j 与点 p 间的距离为

$$d_a(p, i_j) = \min_{q \in i_j} d(p, q) \quad (5.4.6)$$

上式给出点 p 与图像单元 i_j 中任意点 q 间的最小欧氏距离。一个图像单元的沃罗诺伊邻域是一个点集,从该点集到 i_j 的距离小于或等于其他任意图像单元到 i_j 的距离。类似于沃罗诺伊图,区域沃罗诺伊图的边界 $B_{V_a}(i_j)$ 可由下式给出:

$$B_{V_a}(i_j) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists j \neq k: d_a(p, i_j) = d_a(p, i_k)\} \quad (5.4.7)$$

该边界包含与两个或多个图像单元等距离的点(并不与其中某一个图像单元更近)。在沃罗诺伊图中,两个邻接的沃罗诺伊邻域的共同边界总是线或线段;而在区域沃罗诺伊图中,边界总是曲线。

一幅图像的区域沃罗诺伊图 W_a 是所有图像单元的区域沃罗诺伊图的集合,即



彩图

$$W_a(P) = \{V_a(i_1), V_a(i_2), \dots, V_a(i_n)\} \quad (5.4.8)$$

沃罗诺伊图是计算几何学中一种重要的数据结构。生成沃罗诺伊图的方法较多,常用沃罗诺伊图生成方法分类如表 5.4.1 所示[王 2022b]。

表 5.4.1 常用沃罗诺伊图生成方法分类

类别	优缺点	分类	特点	具体方法	参考文献
矢量法	精度高,仅适合离散空间点要素的图,对包含线、面全要素的图生成较为困难	直接法	直接生成要素	分治法	[Shamos 1977]
				并行法	[屠 2015]
				增量法	[司 2020]
		间接法	先生成其对偶——德劳内三角网	可靠高效法	[Held 2001]
				质心法	[王 2021c]
栅格法	精度高的时间效率较低,时间复杂度低的精度较低	基于均匀栅格结构	基于距离变换	距离变换法	[Chen 1999]
				确定归属法	[王 2003]
				栅格扫描法	[Shih 2004]
				扩张法	[Guo 2011]
		基于层次栅格结构	利用层次数据结构,空间复杂度较小	层次法	[Liang 1998]
				细分法	[寿 2013]

5.5 3-D 实体表达

对于真实世界中的绝大部分目标来说,尽管通常只能看到表面,但实际上它们都是 3-D 的实体。这些实体可根据具体应用情况采用多种方法表达。这里主要使用**体积模型**。

5.5.1 基本表达方案

3-D 实体的表达方案较多,下面对几种最基本和常用的表达方案进行简单介绍。

1. 空间占有数组

与中册 6.2.2 小节介绍的表达 2-D 区域的空间占有数组类似,人们常用 3-D 的**空间占有数组**表示 3-D 目标。具体来说,对于图像 $f(x, y, z)$ 中任一点 (x, y, z) ,如果其在给定实体内,则取 $f(x, y, z)$ 为 1,否则为 0。所有 $f(x, y, z)$ 为 1 的点组成的集合就代表了要表达的目标。示例如图 5.5.1 所示,图像体素与数组元素是一一对应的。

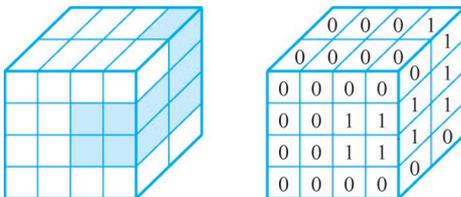


图 5.5.1 空间占有数组表达 3-D 目标示例

因为 3-D 数组的尺寸是图像分辨率的立方,所以空间占有数组法只有在图像分辨率较低(且目标形状不规则)时才有效和实用。3-D 数组表达目标的优点是容易从中获得通过目标的各个截层,从而显示目标内部的信息。

2. 单元分解

单元分解是指将目标逐步分解,直至分解为可统一表达的单元,从而进行表达的方法。可将前述的空间占有数组表达法看作单元分解的一种特例,其单元就是体素。在一般的单元分解中,分解具有不同的形式;单元还可能具有复杂的形状,但仍具有**准不连接性**,即不同的单元不共享体积。对分解后 3-D 实体单元的唯一组合操作是**粘接**。

八叉树法是一种常用的单元分解法,其结构如图 5.5.2 所示。

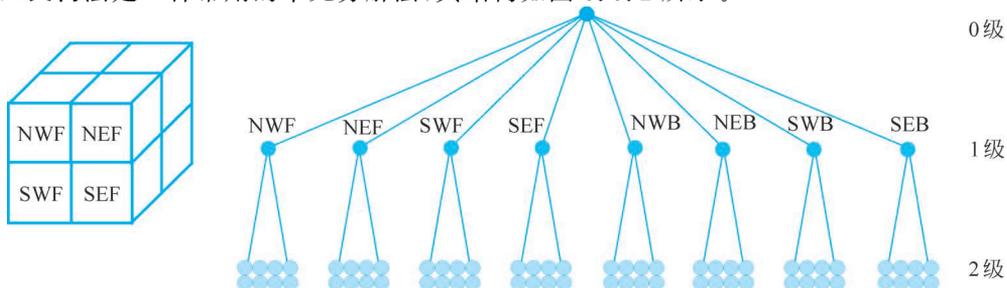


图 5.5.2 八叉树结构

八叉树是 2-D 图像中的四叉树(见中册 6.2.3 小节)在 3-D 图像中的直接推广,可由递归的体积分解产生。八叉树表达法将目标在图像中的位置转化为分层结构树中的位置。由类似对四叉树的证明,可知对于 n 级的八叉树,其节点总数 N 最多为(实际应用中一般要小于这个数):

$$N = \sum_{k=0}^n 8^k = \frac{8^{n+1} - 1}{7} \approx \frac{8}{7} 8^n \quad (5.5.1)$$

单元分解的基本原理适用于各种形式的基元。一个典型的例子是表面分解,其中可将 3-D 结构外观看作各个可见表面的组合。表面分解用代表各个面元、边缘(面元的交)和顶点(边缘的交)的结点及代表这些基本单元联系的指针集合表示目标表面。图 5.5.3 给出了三棱锥体的表面分解示例,3 种单元分别用 3 种符号表示,指针用连线表示。

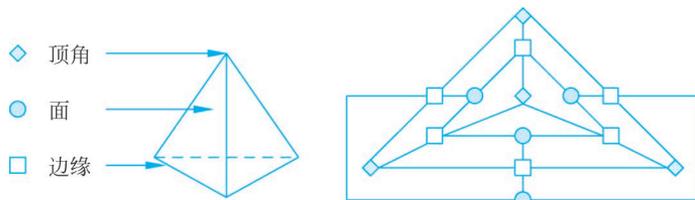


图 5.5.3 三棱锥体的表面分解示例

表面分解的结果是所有(基本)表面的集合,这些表面也可用区域邻接图(RAG,参见中册 7.3.4 小节)表示。区域邻接图只考虑表面及其邻接关系(隐含顶角和边缘两种单元),所以比图 5.5.3 的表达简单。

3. 几何模型法

几何模型法常在基于计算机辅助设计(CAD)模型的系统中使用。它也称刚体模型法,因为可用于表示刚体(非刚体的表达目前仍是一个具有挑战性的问题,尚无统一的方法)。刚体模型系统可分为两类:在边界表达系统中,刚体用其各个边界面的并集表示;在结构刚体几何表达系统中,通过一组集合操作将刚体表示为另一些简单刚体的组合。最低级(最简单)的是基元体,一般可用解析函数 $F(x, y, z)$ 表达,并限定在 $F(x, y, z) \geq 0$ 定义的封闭半空间交集区域之内。

例 5.5.1 边界表达和结构表达示例

图 5.5.4(a)给出了一个两个几何体组合成的目标,图 5.5.4(b)给出了该目标边界表达的示例,图 5.5.4(c)给出了该目标结构表达的示例。

5.5.2 广义圆柱体表达

许多实际的 3-D 目标可用 2-D 集合沿某条 3-D 曲线运动形成。一般情况下,该集合在运

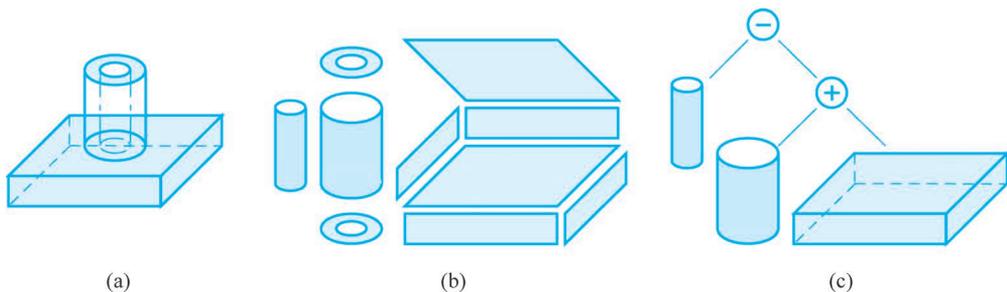


图 5.5.4 边界表达和结构表达示例

动中还可能出现参数变化。基于这种方式的刚体表达法通常称为**广义圆柱体法**,也称**广义圆锥法**。这是因为其中的基元体常为任意尺寸的圆柱或圆锥体,也可以是任意尺寸的长方体或球体(圆柱或圆锥体的变形)等。

广义圆柱体法通常用一个带有一定轴线和一定截面(广义)圆柱体的组合表达 3-D 目标。换句话说,它包括两个基本的单元:一根穿轴线和一个沿穿轴线移动的具有一定形状的截面,如图 5.5.5(a)所示。将多个基元组合,可以逐级表示目标从高到低的不同细节,图 5.5.5(b)给出了一个示例(其中每个圆柱体用长方形表示)。

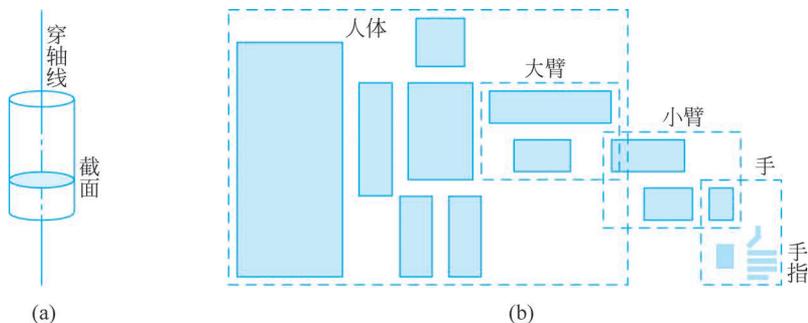


图 5.5.5 广义圆柱体法示例

如果将基元作为变量,即改变穿轴线和移动截面,可得到一系列广义圆柱体的变形。事实上穿轴线可分为以下两类。

- (1) 穿轴线是一条直线。
- (2) 穿轴线是一条曲线(可以封闭)。

移动截面的变化类型或形式较多,主要分为以下三类。

- (1) 截面的边界可以是直线或曲线。
- (2) 截面可以旋转对称或不对称、反射对称或不对称,仅旋转或仅反射对称。
- (3) 截面移动时其形状可以变化或不变化,如果变化,可以变大、变小、先大后小、先小后大等。

图 5.5.6 给出了广义圆柱体的一些变形的情况。将这些变形作为**体基元**进行组合,可表达复杂的 3-D 目标。理论上讲,任意一个 3-D 目标都存在无穷多个穿轴线和截面对。

将基本的 3-D 广义圆柱体投影到 2-D 图像会产生两种不同的结果,即**条带**和**椭圆**。条带是沿圆柱体长度方向投影的结果,而椭圆是对圆柱体截面投影的结果。如果考虑各种广义圆柱体的变形,则可能产生任意的结果,表达任意形状的实体。

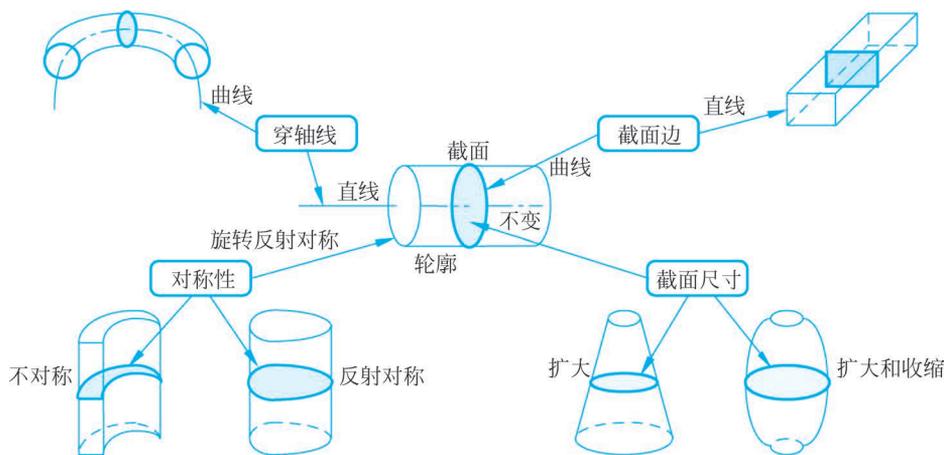


图 5.5.6 广义圆柱体的变形

总结和复习

随堂测试

