第5章 MATLAB符号工具箱及其应用

MATLAB 可以快速进行各种数值运算，尤其是矩阵运算。除此之外，MATLAB 还具有符号计算的功能。利用 MATLAB 符号工具箱，可以对函数进行微分、偏微分和极限计算，定积分和不定积分计算，还可以求解代数方程和微分方程，对函数做积分变换等。这些功能能够将部分烦琐的推演工作交由计算机处理，从而使人们专注于问题的本身，因此具有重要的应用。

5.1 MATLAB 符号工具箱简介

本节首先分类介绍符号工具箱相关的函数及其应用，然后结合具体的电磁问题进行符号工具的讲解。

5.1.1 基本操作命令

本节给出符号工具箱中最基本的函数并加以介绍。

1. syms 创建符号变量和函数

其基本格式如下：

```
syms var1 var2 … varN
syms f(var1,var2,…,varN)
```

例如，下面的命令就创建了两个符号变量 x 和 y。

```
syms x y
```

如果要创建一个函数，但不需要给定具体的表达式，则可以用如下形式的定义：

```
syms f(x,y)
```

也可以用如下的方式定义函数，并给定函数的具体表达式：

```
syms x y
f(x,y) = x + y
```

2. sym 创建符号变量或者符号数字

例如，可以使用下面的命令创建符号数字 2 和 2/5。

```
sym('2');  sym('2/5')
```

利用 x=sym('x')命令则可以定义符号变量 x。

5.1.2 表达式化简和替换

本节给出符号工具箱中的表达式化简和替换用的函数并加以介绍。

1. pretty 将符号表达式以美观的形式呈现出来

基本格式如下：

```
pretty(x)
```

其中，x 为一个符号表达式。

```
syms a b c
x1 = ( - b + sqrt(b^2 - 4 * a * c))/(2 * a);
x2 = ( - b - sqrt(b^2 - 4 * a * c))/(2 * a);
pretty(x1); pretty(x2);
```

则显示结果如下：

```
   - b - (b^2 - 4ac)^1/2
 --------------------
        2 a

   - b + (b^2 - 4ac)^1/2
 --------------------
        2 a
```

可见，使用 pretty 呈现的结果更容易识别。上面的结果就是大家所熟知的一元二次方程的求根公式。

2. simplify 将表达式化简

基本格式如下：

```
simplify(S)
```

例如：

```
syms x
y = (cos(x))^2 + (sin(x))^2;
simplify(y)
```

结果为 1。

3. simple 寻找最简表达式

基本格式如下：

```
simple(S)
```

simple 利用内置的各种算法，尝试将表达式化简，并且将最简短的形式呈现出来。因此，是一个强有力的化简工具。

4. subs替换命令

基本格式如下：

```
subs(s,old,new)
```

在表达式s中，用new表达式替换全部的old表达式，并重新计算表达式，返回s的一个副本。注意，s本身并不发生变化。

或

```
subs(s)
```

将表达式s中的所有符号变量，根据上下文中的定义，或者用工作区中的数值替换，代入表达式s中，并进行计算。没有赋值的符号变量，依然看作变量。注意，替换之后，s本身并不发生变化。

例如：

```
syms x
f = 2 * x^2 - 3 * x + 1;
subs(f,1/3)
ans = 2/9
```

经过上述替换，f的表达式依旧是2＊x^2－3＊x＋1。

还可以替换一个多变量表达式中某个特定变量，代码如下：

```
syms x y
f = x^2 * y + 5 * x * sqrt(y);
subs(f,x,3);
ans = 9 * y + 15 * y^(1/2)
```

5. subexpr公共表达式替换命令

基本格式如下：

```
[Y,sigma] = subexpr(X,'sigma')
```

将表达式X中的公共表达式，用符号变量sigma表示；简化之后的新的表达式，存放在符号变量Y中。

例如：

```
t = solve('a * x^3 + b * x^2 + c * x + d = 0');      %求一元三次方程的根
[r,s] = subexpr(t,'s')                               %对结果进行化简,提取公共表达式,用s表示
```

结果如下：

```
r =
 s^(1/3) - b/(3 * a) - ( -  b^2/(9 * a^2) + c/(3 * a))/s^(1/3)
 ( -  b^2/(9 * a^2) + c/(3 * a))/(2 * s^(1/3)) - s^(1/3)/2 + (3^(1/2) * (s^(1/3) +
 ( -  b^2/(9 * a^2) + c/(3 * a))/s^(1/3)) * i)/2 - b/(3 * a)
 ( -  b^2/(9 * a^2) + c/(3 * a))/(2 * s^(1/3)) - s^(1/3)/2 - (3^(1/2) * (s^(1/3) +
 ( -  b^2/(9 * a^2) + c/(3 * a))/s^(1/3)) * i)/2 - b/(3 * a)

s =
 ((d/(2 * a) + b^3/(27 * a^3) - (b * c)/(6 * a^2))^2 + ( -  b^2/(9 * a^2) + c/(3 * a))^3)^(1/2) -
 b^3/(27 * a^3) - d/(2 * a) + (b * c)/(6 * a^2)
```

作为对比，可以在 MATLAB 下显示 t 的表达式，可以发现：通过将三个根中的公用表达式用 s 表示出来，大大简化了 t 的形式。

5.1.3 微积分运算

本节给出符号工具箱中的微积分运算函数并加以介绍。

1. diff 微分运算

基本格式如下：

diff(expr)，对表达式和默认的变量做导数运算。

diff(expr,n)，对表达式及默认的变量做 n 阶导数运算。

diff(expr,var,n)，对表达式及指定的变量做 n 阶导数运算。

例如：

```
syms x n
f = besselj(n,x);
diff(f)
ans =
(n * besselj(n,x))/x - besselj(n + 1,x)
```

上面的运算给出了贝塞尔函数的导数形式，这个结果在实际应用中也非常重要。例如，它可以把贝塞尔函数导数的根的问题转化为贝塞尔函数的根的问题，从而简化求解。

下面的例子给出了偏微分运算的情况。

```
syms x y
f = sin(x)^2 + cos(y)^2;
diff(f)
```

此时，因为没有给定求导变量，MATLAB 默认选择距离字母 x 最近的一个变量进行求导。

```
ans =
2 * cos(x) * sin(x)
```

也可以指定变量做偏微分运算。例如：

```
syms x y
f = sin(x)^2 + cos(y)^2;
diff(f,y)
```

则运行结果如下：

```
- 2 * cos(y) * sin(y)
```

如果要做高阶导数运算，只需要指定相应的变量，并给出阶数即可。例如：

```
syms x y
f = sin(x)^2 + cos(y)^2;
diff(f,y,2)
ans =
2 * sin(y)^2 - 2 * cos(y)^2
```

2. int 不定积分和定积分运算

基本格式如下:

int(expr,var),对指定的表达式,针对指定的变量做不定积分。

int(expr,var,a,b),对指定的表达式,针对指定的变量,做积分限为 a 和 b 的定积分。

例如:

```
syms x
f = sin(x)^2;
int(f)
ans =
x/2 - sin(2 * x)/4
```

再如:

```
syms x y n
f = x^n + y^n;
int(f)
ans = x * y^n + (x * x^n)/(n + 1)
```

MATLAB 根据距离字母 x 的距离,选择积分变量。也可以指定相应的变量,做不定积分。例如:

```
syms x y n
f = x^n + y^n;
int(f,y)
ans = x^n * y + (y * y^n)/(n + 1)
```

如果进行定积分,只需将积分上下限传入到函数 int 的最后两个参数即可。

```
syms x y n
f = x^n + y^n;
int(f,1,10);
```

5.1.4 方程求解

本节给出符号工具箱中用来进行方程求解的函数并加以介绍。

1. solve 求解代数方程

基本格式如下:

S=solve(eqn,var),将 var 当作未知数,求解方程,并将结果赋予变量 S。

在只有一个符号变量的情况下,可以不注明未知数 var。例如:

```
syms x
solve(x^3 - 6 * x^2 == 6 - 11 * x);
```

注意:MATLAB 使用"=="来定义一个方程,然后即可用 solve 进行求解。如果没有给出方程右侧的表达式,solve 认为右侧即为 0。例如:

```
syms x
solve(x^3 - 6 * x^2 - 6);
```

```
ans =
1
2
3
```

当方程中有多个符号变量时,必须指定对哪个变量进行求解。例如:

```
syms x y
solve(6 * x^2 - 6 * x^2 * y + x * y^2 - x * y + y^3 - y^2 == 0,y);
ans =
1
2 * x
- 3 * x
```

2. solve 求解代数方程或方程组

基本格式如下:

```
s = solve(eqns,vars)
syms x y z
[x y z] = solve(z == 4 * x,x == y,z == x^2 + y^2)
```

如果要改变 solve 返回的根的顺序,则可以在方程组后面把变量顺序指定。例如:

```
syms x y z
[y z x] = solve(z == 4 * x,x == y,z == x^2 + y^2,y,z,x)
```

3. dsolve 常微分方程求解

基本格式如下:

dsolve(eq,cond),对微分方程按照给定的初始(边界)条件进行求解。如果没有给定初始条件,则给出方程的通解形式。例如:

```
syms y(t)
dsolve(diff(y) == y)
ans =
 C5 * exp(t)
```

下面的代码给出了初始条件:

```
syms x(s) a
x = dsolve(diff(x) ==- a * x,x(0) == 1)
x =
   exp( - a * s)
```

dsolve 还可以求解常微分方程组,如下代码将求解之后的结果放入一个结构 S 中,并显示出来。

```
syms f(t) g(t)
S = dsolve(diff(f) == f + g,diff(g) ==- f + g,f(0) == 1,g(0) == 2);
[S.g;S.f]
```

输出结果如下:

```
ans =
 2 * exp(t) * cos(t) - exp(t) * sin(t)
 exp(t) * cos(t) + 2 * exp(t) * sin(t)
```

5.1.5 特殊函数

MATLAB 符号工具箱内置许多特殊函数，现将最基本的函数或与电磁理论相关的部分函数列举如下。

1. 特殊函数列表 mfunlist

用于显示所有的特殊函数列表。可以通过此命令了解 MATLAB 所包含的所有特殊函数。如下即给出了 MATLAB 的输出结果。其中，第一列表示函数名称，第二列表示参数，第三列是函数的英文解释。

```
bernoulli       n           Bernoulli Numbers
bernoulli       n,z         Bernoulli Polynomials
BesselI         x1,x        Bessel Function of the First Kind
BesselJ         x1,x        Bessel Function of the First Kind
BesselK         x1,x        Bessel Function of the Second Kind
BesselY         x1,x        Bessel Function of the Second Kind
Beta            z1,z2       Beta Function
binomial        x1,x2       Binomial Coefficients
EllipticF -     z,k         Incomplete Elliptic Integral,First Kind
EllipticK -     k           Complete Elliptic Integral,First Kind
EllipticCK -    k           Complementary Complete Integral,First Kind
EllipticE -     k           Complete Elliptic Integrals,Second Kind
EllipticE -     z,k         Incomplete Elliptic Integrals,Second Kind
EllipticCE -    k           Complementary Complete Elliptic Integral,Second Kind
EllipticPi -    nu,k        Complete Elliptic Integrals,Third Kind
EllipticPi -    z,nu,k      Incomplete Elliptic Integrals,Third Kind
EllipticCPi -   nu,k        Complementary Complete Elliptic Integral,Third Kind
erfc            z           Complementary Error Function
erfc            n,z         Complementary Error Function's Iterated Integrals
Ci              z           Cosine Integral
dawson          x           Dawson's Integral
Psi             z           Digamma Function
dilog           x           Dilogarithm Integral
erf             z           Error Function
euler           n           Euler Numbers
euler           n,z         Euler Polynomials
Ei              x           Exponential Integral
Ei              n,z         Exponential Integral
FresnelC        x           Fresnel Cosine Integral
FresnelS        x           Fresnel Sine Integral
GAMMA           z           Gamma Function
harmonic        n           Harmonic Function
Chi             z           Hyperbolic Cosine Integral
Shi             z           Hyperbolic Sine Integral
GAMMA           z1,z2       Incomplete Gamma Function
L               n,x         Laguerre
L               n,x1,x      Generalized Laguerre
W               z           Lambert's W Function
W               n,z         Lambert's W Function
lnGAMMA         z           Logarithm of the Gamma function
```

```
Li                  x              Logarithmic Integral
Psi                 n,z            Polygamma Function
Ssi                 z              Shifted Sine Integral
Si                  z              Sine Integral
Zeta                z              (Riemann) Zeta Function
Zeta                n,z            (Riemann) Zeta Function
Zeta                n,z,x          (Riemann) Zeta Function

        Orthogonal Polynomials
T                   n,x            Chebyshev of the First Kind
U                   n,x            Chebyshev of the Second Kind
G                   n,x1,x         Gegenbauer
H                   n,x            Hermite
P                   n,x1,x2,x      Jacobi
P                   n,x            Legendre
```

需要指出的是,符号工具箱所提供的函数,其自变量可以是符号变量或者表达式。这是与普通函数不同的。

2. 特殊函数计算 mfun

基本格式如下:

```
mfun(function,para1,para2,…,paran)
```

例如:mfun('besselj',0,0),返回值为 1,表明 $J_0(0)=1$。

3. 正交多项式

在 MATLAB 中,内置了多种正交多项式。其格式如下:

(1) 车贝雪夫第一类、第二类多项式:T(n,x),U(n,x)。
(2) 厄米特多项式:H(n,x)。
(3) 拉盖尔多项式:L(n,x)。
(4) 广义拉盖尔多项式:L(n,a,x)。
(5) 勒让德多项式:P(n,x)。

在上面的公式中,n 表示整数,一般是多项式的阶数;x 是一个实数;广义拉盖尔多项式中的 a 是一个常数。

5.1.6 绘制符号函数的图像

本节给出符号工具箱中专门用于绘制符号函数图像的绘图函数,并对其应用加以介绍。

1. ezplot 绘制曲线

(1) ezplot(f,[xmin xmax]),在给定的自变量的区间绘制函数 f。如果不指定区间,默认的区间是[-2π,2π]。例如:

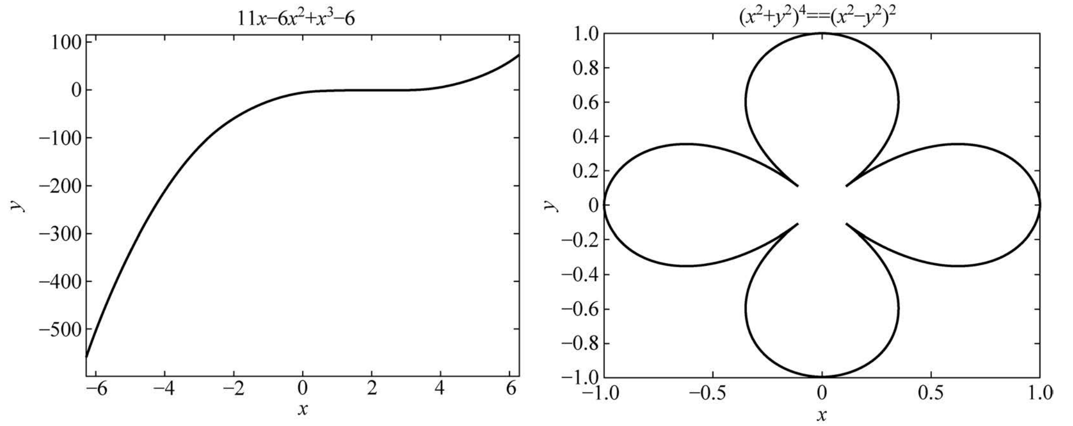
```
syms x
ezplot(x^3 - 6 * x^2 + 11 * x - 6);
```

图 5-1(a)展示了 MATLAB 绘制的曲线效果。

(2) ezplot(f,[xmin,xmax,ymin,ymax]),在给定的变量的区间绘制 f 对应的隐函数。例如:

```
syms x y
ezplot((x^2 + y^2)^4 == (x^2 - y^2)^2,[ - 1 1])
```

图 5-1(b)展示了 MATLAB 绘制的曲线效果。



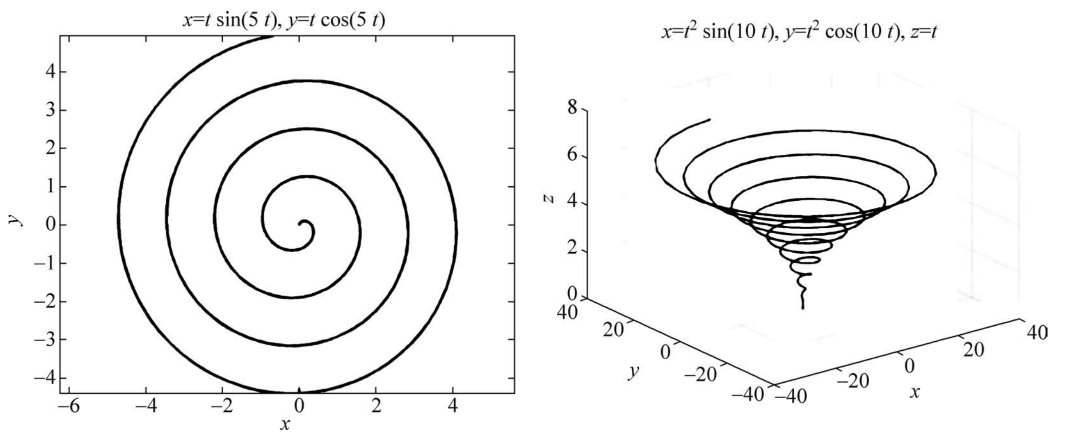
(a) 显式函数　　(b) 隐式函数

图 5-1　ezplot 绘制曲线举例

(3) ezplot(x,y,[tmin,tmax]),在给定的参变量的区间绘制曲线。其中,x、y 均为 t 的函数。例如:

```
syms t
x = t * sin(5 * t);
y = t * cos(5 * t);
ezplot(x,y,[0 5]);
```

图 5-2(a)给出了用 ezplot 具体绘制的曲线形状。



(a) ezplot绘制的平面曲线(给定参变量)　　(b) ezplot3绘制的空间曲线(给定参变量)

图 5-2　给定参变量绘制曲线举例

2. ezplot3 绘制三维曲线

基本格式如下：

ezplot3(x,y,z,[tmin,tmax]),绘制参变量 t 确定的三维空间曲线。

例如：

```
syms t
ezplot3(t^2 * sin(10 * t),t^2 * cos(10 * t),t );
```

图 5-2(b)给出了用 ezplot3 绘制的曲线。

3. ezsurf 绘制曲面

基本格式如下：

(1) ezsurf(f,domain),在指定的区域内绘制函数 f 对应的曲面。默认的区域是 $-2\pi<x<2\pi$，$-2\pi<y<2\pi$。

```
syms x y
ezsurf(x^2 + y^2)
```

图 5-3(a)就是 ezsurf 绘制的一个曲面示意。

(2) ezsurf(x,y,z,[smin,smax,tmin,tmax]),绘制由参变量 s 和 t 确定的曲面。

除了上述函数外,MATLAB 符号工具箱还提供了 ezcontour、ezcontourc、ezmesh、ezmeshc、ezploar、ezsurfc 等函数,供绘图使用。其基本格式与 ezsurf 等相似,应用起来非常方便。图 5-3(b)就是 ezmeshc 绘制的一个曲面。

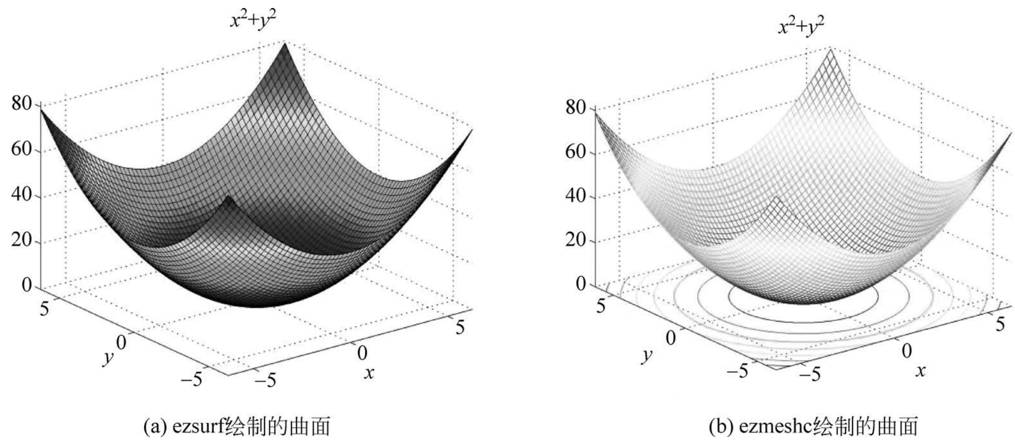
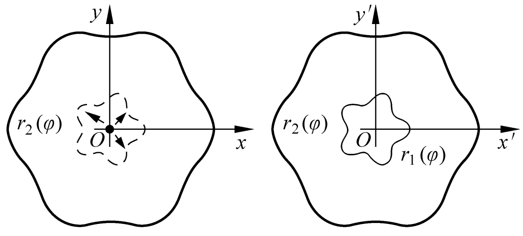


图 5-3 曲面绘制举例

5.2 变换电磁理论

如前所述,光学变换实际上是一个广义的坐标变换。它牵涉两个空间,如图 5-4 所示,一个是虚拟空间,也称为电磁空间,一般认为是真空(也可以包含介质),用 $\boldsymbol{X}=(x,y,z)$表示；另一个是物理空间,也称为材料空间,用 $\boldsymbol{X}'=(x',y',z')$表示。光学变换的本质就是将虚拟空间的部分区域(图 5-4(a)中黑色实线包围的区域)映射到物理空间的另一个区域(图 5-4(b)中黑色粗实线与灰色细实线之间的

部分),由于麦克斯韦方程组的协变性,此空间的映射可以用对应区域的材料电磁参数的改变来表示。从电磁理论的角度来看,物理空间中填充有适当介质的问题,与虚拟空间无介质填充的电磁问题完全等价。这样,人们就可以研究虚拟空间的电磁现象,而通过坐标变换将其变换到物理空间,并通过实际人工电磁材料来实现。在这个过程中,物理本质不变。这就是基于光学变换理论设计新型电磁器件的思路。假设光学变换前空间的电磁参数为$\boldsymbol{\varepsilon}$、$\boldsymbol{\mu}$,则变换后物理空间的电磁参数为



(a) 虚拟空间　　(b) 物理空间

图 5-4　变换电磁理论牵涉的虚拟空间和物理空间

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{\det(\boldsymbol{A})} \tag{5-1}$$

$\boldsymbol{\mu}$ 的变换公式同上。其中,$\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial \boldsymbol{X}'}{\partial \boldsymbol{X}}=\dfrac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}$为雅可比矩阵。

当虚拟空间与物理空间都采用直角坐标系时,采用式(5-1)比较方便,直接可以得到物理空间的材料参数。但实际应用中,由于具体边界条件的限制,为方便起见,人们往往使用正交坐标系或者曲线坐标系,材料的参数也都使用相应坐标系下面的表示形式。因此,在使用光学变换的过程中,往往牵涉许多直角坐标系与曲线坐标系下的张量转换问题,比较烦琐。

假设附加在 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}'$系上的正交坐标系为$\boldsymbol{R}=(u_1,u_2,u_3)$与$\boldsymbol{R}'=(u_1',u_2',u_3')$,它们与直角坐标系单位基矢之间的转换矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}\,(1/h_i)\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{R}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{5-2}$$

其中:$\boldsymbol{\Lambda}$ 表示对角阵,其对角线上的元素为 $1/h_1,1/h_2,1/h_3$。

因此有

$$[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}[\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z]^{\mathrm{T}}$$

h_i 为对应于该正交坐标系的拉梅系数,有

$$h_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}\quad i=1,2,3 \tag{5-3}$$

则由链式求导法则可得

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial \boldsymbol{X}'}{\partial \boldsymbol{R}'}\,\frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial \boldsymbol{R}}\,\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{5-4}$$

$$\det(\boldsymbol{A})=\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}'}{\partial \boldsymbol{R}'}\right)\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial \boldsymbol{R}}\right)\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\right) \tag{5-5}$$

将上述公式代入式(5-1),并考虑到正交坐标系与直角坐标系之间基矢转换矩阵的正交性,则可以得到变换后的正交系下,材料的电磁参数表示形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathrm{ort}}=\frac{\boldsymbol{B}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}}{\det\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{X}'}{\partial \boldsymbol{R}'}\right)\det\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial \boldsymbol{R}}\right)}\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{R}}\right) \tag{5-6}$$

若虚拟空间填充的介质为各向同性,则上式还可以进一步简化为

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{ort}}=\varepsilon\frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}(1/h_i^2)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}}{\det\left(\frac{\partial\boldsymbol{X}'}{\partial\boldsymbol{R}'}\right)\det\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}'}{\partial\boldsymbol{R}}\right)}\det\left(\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{R}}\right)\tag{5-7}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}(h_i')\frac{\partial\boldsymbol{R}'}{\partial\boldsymbol{R}}$$

于是,材料在直角坐标系下的张量分量就可以通过坐标系的旋转而得到,即

$$\boldsymbol{\varepsilon}'=\boldsymbol{T}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{ort}}\boldsymbol{T}'\tag{5-8}$$

利用式(5-8),可以得到直角坐标系下的分量表示;利用式(5-9),可以得到正交坐标系下的分量表示。一般曲线系的推导,与此类似。需要注意的是,具体使用时,加撇或者不加撇都适用,即公式对虚拟空间和物理空间都是有效的。

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{ort}}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{T}'^{\mathrm{T}}\tag{5-9}$$

5.3 基于符号工具箱的变换电磁理论推演

如前所述,MATLAB具有功能强大的符号计算功能,能够进行如微积分、线性代数、积分变换、化简等操作。由于在光学变换中牵涉众多张量转换的操作,大多通过矩阵来进行,因此,利用MATLAB的符号工具箱,将会极大提高推算速度和准确度,对利用复杂变换设计新型电磁器件具有重要的意义。

5.3.1 正交坐标系与直角坐标系下材料张量的转换

作为一个简单的例子,对式(5-8)在柱坐标系的具体情况进行简单的推导。假设已经知道了柱坐标系下的材料表达式为 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\Lambda}(\varepsilon_r,\varepsilon_\varphi,\varepsilon_z)$,考虑用符号推演的方法得到其在直角坐标系下的表达式。对应的MATLAB代码如下:

```
syms x y z rho phi                    % 坐标变量定义
syms er ep ez                         % 材料参数定义
x = rho * cos(phi);                   % 变量关系定义
y = rho * sin(phi);
R = [rho phi z];
X = [x; y; z];
T = jacobian(X,R);                    % 雅可比矩阵计算
H = diag([1 1/rho 1]);                % 拉梅系数矩阵
T = H * T.';
epsilon = diag([er ep ez]);
epsilon = T.' * epsilon * T;          % 推算结果
simple(epsilon)                       % 结果化简
```

式(5-10)就是根据MATLAB的输出表达式写出的具体结果。

$$\begin{bmatrix}\cos^2\theta\varepsilon_r+\sin^2\theta\varepsilon_\theta & \cos\theta\sin\theta(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta) & 0\\ \cos\theta\sin\theta(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta) & \sin^2\theta\varepsilon_r+\cos^2\theta\varepsilon_\theta & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix}\tag{5-10}$$

可以看出,这个过程快速、准确。光学变换过程中牵涉众多此类变换,因此,使用符号工具箱,将

极大地提高推算效率,使研究者有更多的时间和精力投入变换本身的优化中去,而不是拘泥于烦琐的数学推导过程。当使用一般曲线坐标系时,这个优势更为突出。

类似地,假设已经知道了球坐标系下的材料表达式为 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\Lambda}(\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_\varphi)$,也可以用符号推演的方法得到其在直角坐标系下的表达式。对应的MATLAB代码如下:

```
syms x y z r phi theta                  %坐标变量定义
syms er et ep                           %材料参数定义
x = r * sin(theta) * cos(phi);          %变量关系定义,x
y = r * sin(theta) * sin(phi);          %变量关系定义,y
z = r * cos(theta);                     %变量关系定义,z
R = [r theta phi];
X = [x; y; z];
T = jacobian(X,R);                      %雅可比矩阵计算
H = diag([1 1/r 1/(r * sin(theta))]);   %拉梅系数矩阵
T = H * T.';
epsilon = diag([er et ep]);
epsilon = T.' * epsilon * T;            %推算结果
simple(epsilon)                         %结果化简
```

式(5-11)就是根据MATLAB的输出表达式写出的具体结果。

$$\begin{bmatrix} \sin^2\theta\cos^2\varphi\varepsilon_r+\cos^2\theta\cos^2\varphi\varepsilon_\theta+\sin^2\varphi\varepsilon_\varphi & \cos\varphi\sin\varphi(\sin^2\theta\varepsilon_r+\cos^2\theta\varepsilon_\theta-\varepsilon_\varphi) & \sin\theta\cos\theta\cos\varphi(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta) \\ \cos\varphi\sin\varphi(\sin^2\theta\varepsilon_r+\cos^2\theta\varepsilon_\theta-\varepsilon_\varphi) & \sin^2\theta\sin^2\varphi\varepsilon_r+\cos^2\theta\sin^2\varphi\varepsilon_\theta+\cos^2\varphi\varepsilon_\varphi & \sin\theta\cos\theta\sin\varphi(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta) \\ \sin\theta\cos\theta\cos\varphi(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta) & \sin\theta\cos\theta\sin\varphi(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta) & \cos^2\theta\varepsilon_r+\sin^2\theta\varepsilon_\theta \end{bmatrix} \tag{5-11}$$

5.3.2 变换电磁理论的符号推演

本节采用MATLAB符号工具箱,对几种典型的变换光学理论设计的电磁装置进行电磁参数的推演。为方便起见,仅考虑介电常数。磁导率的考虑与之相似。

1. 柱状隐形装置

首先考虑Pendry等所设计的柱形隐形衣。采用柱坐标系的表示,隐形衣的内外半径分别是 a 和 b,对应的空间映射函数为

$$\rho'=\frac{b-a}{b}\rho+a,\quad \varphi'=\varphi,\quad z'=z$$

根据式(5-7),并在MATLAB下进行编程,得到柱坐标系下的材料电磁参数为

$$\boldsymbol{\Lambda}\left(\frac{(\rho'-a)}{\rho'},\frac{\rho'}{\rho'-a},\frac{(\rho'-a)b^2}{\rho'(b-a)^2}\right)\varepsilon \tag{5-12}$$

这个公式与文献中的结果完全一致。

完成上述符号计算的MATLAB代码如下:

```
syms x y z x1 y1 z1 rho phi rho1 phi1 eps a b c     %坐标变量定义
x = rho * cos(phi); x1 = rho1 * cos(phi1);          %直角坐标系与柱坐标系间的关系
```

```
y = rho * sin(phi); y1 = rho1 * sin(phi1);           % 直角坐标系与柱坐标系间的关系
R = [rho phi z];    R1 = [rho1 phi1 z1];             % 定义几个矢量
X = [x; y; z];      X1 = [x1; y1; z1];
det1 = det(jacobian(X1,R1));                         % 计算行列式的值
rho1 = rho * (b - a)/b + a; phi1 = phi; z1 = z;      % 虚拟空间与物理空间的变换关系
R1 = [rho1 phi1 z1];
T = jacobian(X,R);                                   % 雅可比矩阵计算
H = diag([1 rho 1]);                                 % 拉梅系数矩阵
H1 = diag([1 rho1 1]);                               % 拉梅系数矩阵
B = H1 * jacobian(R1,R);                             % 计算矩阵 B
det2 = det(jacobian(R1,R));                          % 计算行列式
eps1 = eps * B * inv(H * H) * B.' * det(jacobian(X,R))/det1/det2;  % 光学变换的公式
clear phi1 z1 rho1                                   % 清除物理空间的变量
syms phi1 z1 rho1                                    % 重新定义这些变量
phi = phi1;z = z1;rho = (rho1 - a) * b/(b - a);      % 虚拟空间与物理空间的变换关系
simple(subs(eps1))  % 结果化简,并且将最终结果用物理空间的变量表示出来
```

2. 柱坐标系下的复杂变换

考虑另外一个比较复杂的情况,以验证方法的通用性。在柱坐标系下,采用的变换函数为

$$\begin{cases}\rho'=f(\rho)\\ \varphi'=g(\varphi)\\ z'=h(z)\end{cases}\tag{5-13}$$

下面是 MATLAB 代码,用于推导物理空间的电磁参数:

```
syms x y z x1 y1 z1 rho phi rho1 phi1 eps a b c        % 坐标变量定义
x = rho * cos(phi); x1 = rho1 * cos(phi1);             % 直角坐标系与柱坐标系间的关系
y = rho * sin(phi); y1 = rho1 * sin(phi1);             % 直角坐标系与柱坐标系间的关系
R = [rho phi z];    R1 = [rho1 phi1 z1];               % 定义矢量
X = [x; y; z];      X1 = [x1; y1; z1];
det1 = det(jacobian(X1,R1));                           % 计算行列式的值
rho1 = sym('f(rho)');                                  % 虚拟空间与物理空间的变换函数设置
phi1 = sym('g(phi)');
z1 = sym('h(z)');
R1 = [rho1 phi1 z1];                                   % 再次给 R1 赋值,包含变换函数
T = jacobian(X,R);                                     % 雅可比矩阵计算
H = diag([1 rho 1]);                                   % 拉梅系数矩阵
H1 = diag([1 rho1 1]);                                 % 拉梅系数矩阵
B = H1 * jacobian(R1,R);                               % 定义 B 矩阵
det2 = det(jacobian(R1,R));
eps1 = eps * B * inv(H * H) * B.' * det(jacobian(X,R))/det1/det2;  % 计算电磁参数
simple(eps1)                                           % 简化表达式
```

根据运行结果整理的材料参数为

$$\boldsymbol{\varepsilon}'=\boldsymbol{\Lambda}(f'^2\quad (fg')^2/\rho^2\quad h'^2)\frac{\varepsilon\rho}{ff'g'h'}\tag{5-14}$$

式(5-14)与理论推导结果相一致。将其中的不加撇变量用加撇变量表示出来,即可得到物理空间的具体表达式,可以直接指导设计和后续仿真。

3. 直角坐标系下的二维复杂映射

考虑直角坐标系下,二维情况中最一般的映射,也即虚拟空间和物理空间按照如下函数进行

变换：

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \\ z' = z \end{cases} \tag{5-15}$$

那么根据变换光学理论，容易得到物理空间中的介电常数和磁导率。下面的 MATLAB 代码就可以完成上述功能。

```
syms x y z x1 y1 z1 eps                  % 坐标变量定义
x1 = sym('f(x,y)');                      % 定义变换函数
y1 = sym('g(x,y)');
z1 = z;
A = jacobian([x1 y1 z1],[x y z]);        % 计算雅可比矩阵
eps1 = eps * A * A.'/(det(A));           % 应用式(5-1)
simple(eps1)                             % 化简表达式
```

根据 MATLAB 运行结果，写出介电常数张量为

$$\varepsilon\begin{bmatrix} \dfrac{f_x^2+f_y^2}{g_yf_x-g_xf_y} & \dfrac{g_xf_x+g_yf_y}{g_yf_x-g_xf_y} & 0 \\ \dfrac{g_xf_x+g_yf_y}{g_yf_x-g_xf_y} & \dfrac{g_x^2+g_y^2}{g_yf_x-g_xf_y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{g_yf_x-g_xf_y} \end{bmatrix} \tag{5-16}$$

上述结果与理论推导完全一致。

本节内容采用 MATLAB 下的符号工具箱对光学变换所涉及的各个转换公式进行辅助推演。解析对比和数值仿真验证都证实了上述方法的有效性。该方法快速、高效、准确，可以将科研人员从烦琐的数学推导中解放出来。本节的结果对于应用复杂光学变换、光学变换函数的优化和新型电磁器件的设计有重要的指导作用。

5.3.3 介电常数张量的对角化

由变换光学的理论可知，其生成的材料都是非均匀各向异性的磁性材料，需要用人工电磁材料的方法实现。由式(5-1)可以看出，介电常数张量为对称矩阵，因此，在具体实现的时候，可以利用本征值问题将其在主轴坐标系中对角化。由于只需考虑三个方向的电磁响应特性，这将大大降低材料设计的难度，有利于加工人工电磁材料。

1. 一般情况下的张量对角化

假设光学变换理论中得到的材料的电磁参数为一满阵形式(对称阵)，即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{5-17}$$

利用下面的 MATLAB 代码可以计算该矩阵的本征值，并得到对应的本征矢量。由于表达式过长，所以不再列出。

```
syms epxx epxy epxz epyy epyz epzz                          % 定义符号变量
eps = [epxx epxy epxz; epxy epyy epyz; epxz epyz epzz];     % 式(5-17)
[V D] = eig(eps);                                           % 计算本征值和本征矢量
```

上面代码中,V 中的列矢量给出的就是本征矢量;D 中的对角线元素就是相应的本征值;以各个本征矢量(列矢量)为基所构成的新的坐标系就是主轴坐标系。具体在使用的时候,还可以将各个列矢量做归一化处理。

2. 直角坐标系中二维情况下的张量对角化

5.3.2 节中已经给定了直角坐标系中二维情况下最一般的变换光学的结果,也就是式(5-16),也可以简写作式(5-18)。接下来,采用 MATLAB 符号工具箱找出其特征值和特征矢量。代码如下:

```
syms epxx epxy epyy epzz                                    % 定义符号变量
eps = [epxx epxy 0; epxy epyy 0; 0 0 epzz];                 % 式(5-18)
[V D] = eig(eps);                                           % 计算本征值和本征函数
```

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \tag{5-18}$$

本征值矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\Lambda}\left(\varepsilon_{zz},\frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}-\sqrt{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+4\varepsilon_{xy}^2}}{2},\frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\sqrt{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+4\varepsilon_{xy}^2}}{2}\right) \tag{5-19}$$

对应的本征矢量矩阵 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}-\sqrt{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+4\varepsilon_{xy}^2}}{2\varepsilon_{xy}} & \dfrac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}+\sqrt{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+4\varepsilon_{xy}^2}}{2\varepsilon_{xy}}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5-20}$$

如前所述,以式(5-20)各个列矢量为基所构成的坐标系就是主轴坐标系。在这个坐标系下,介电常数张量最简,如式(5-19)所示。

5.4 椭球坐标系的 MATLAB 辅助分析

椭球坐标系是正交坐标系中较为复杂的一种,在研究包含椭圆边界的电磁问题时非常重要。下面将利用 MATLAB 符号工具箱来辅助学习椭球坐标系。

5.4.1 椭球坐标系中的坐标平面

解决椭球问题时,一般使用椭球坐标系。在这个坐标系中,空间任意一点可以用三个两两正交的曲面的交点表示出来。这三个曲面在直角坐标系中可以统一表示为

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1 \tag{5-21}$$

其中:a、b、c 为已知常数,且假定 $a>b>c$。在 x、y、z 均为确定数值的时候,式(5-21)是关于 u 的方

程,其有三个不同的实根,分别为ξ、η、ζ,这三个实根也是点(x,y,z)对应的椭球坐标(ξ,η,ζ),并且这三个根分别有不同的取值范围,即

$$\xi \geqslant -c^2,\ -c^2 \geqslant \eta \geqslant -b^2,\ -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2$$

各自对应的曲面方程单独写作

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2+\xi}+\dfrac{y^2}{b^2+\xi}+\dfrac{z^2}{c^2+\xi}=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2+\eta}+\dfrac{y^2}{b^2+\eta}+\dfrac{z^2}{c^2+\eta}=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2+\zeta}+\dfrac{y^2}{b^2+\zeta}+\dfrac{z^2}{c^2+\zeta}=1 \end{cases} \tag{5-22}$$

ξ、η、ζ为常数时,对应的平面分别为椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面,并且均与下面的椭球面共焦,这个椭球面的表达式为

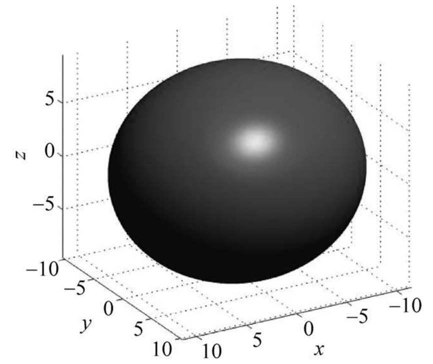
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{5-23}$$

它对应的正是$\xi=0$的情形。

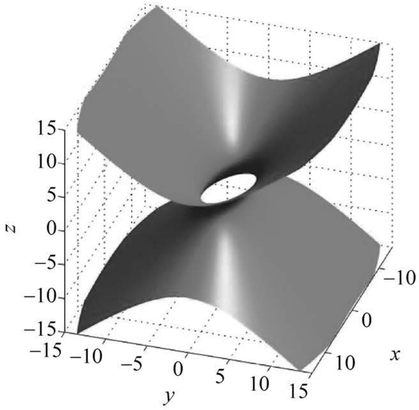
下面的MATLAB代码在直角坐标系中任意选择了一点(6,6,6),然后计算并绘制通过这一点的三个曲面。通过对这些曲面的观察,就容易理解椭球坐标系中三个坐标平面的形状和特征。需要指出的是,为了绘制式(5-22)所对应的各个坐标平面,采用了等势面的绘制方式。

```
a = 7;b = 5;c = 3;                              % 设置椭球系的三个常数
x = 6;y = 6;z = 6;                              % 任意选择一点(6,6,6)
syms u;                                         % 定义符号变量 u
S = solve(x^2/(a^2 + u) + y^2/(b^2 + u) + z^2/(c^2 + u) == 1,u,'Real',true);
                                                % 求解 u 的三个实数解
S = double(S);                                  % 将解由符号形式转化为数值
ksi = S(1);eta = S(2);zeta = S(3);              % 分别赋予 ksi、eta、zeta 等三个椭球系下的坐标
f1 = @(x,y,z) x.^2/(a^2 + ksi) + y.^2/(b^2 + ksi) + z.^2/(c^2 + ksi) - 1;   % 函数表达式
[x,y,z] = meshgrid( - 15:.2:15, - 15:.2:15, - 15:.2:15);                   % 画图范围
v = f1(x,y,z);                                  % 定义三元函数 f1
h = patch(isosurface(x,y,z,v,0));               % 绘制 v = 0 的等势面,即式(5-22)对应坐标平面
set(h,'FaceColor','r','EdgeColor','none');      % 设置坐标面的属性
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');            % 标注坐标轴
hold on;                                        % 准备继续绘制其他曲面
 % 以下用类似的方法,分别绘制 eta 和 zeta 等于常数的坐标曲面
f2 = @(x,y,z) x.^2/(a^2 + eta) + y.^2/(b^2 + eta) + z.^2/(c^2 + eta) - 1;       % 函数表达式
[x,y,z] = meshgrid( - 15:.5:15, - 15:.5:15, - 15:.5:15);                         % 画图范围
v = f2(x,y,z);
h = patch(isosurface(x,y,z,v,0));
isonormals(x,y,z,v,h)
set(h,'FaceColor','g','EdgeColor','none');
f3 = @(x,y,z) x.^2/(a^2 + zeta) + y.^2/(b^2 + zeta) + z.^2/(c^2 + zeta) - 1;  % 函数表达式
[x,y,z] = meshgrid( - 15:.2:15, - 15:.2:15, - 15:.2:15);                         % 画图范围
v = f3(x,y,z);
h = patch(isosurface(x,y,z,v,0));
set(h,'FaceColor','b','EdgeColor','none');
alpha(0.6);                                                                       % 曲面半透明
view(3); axis equal; camlight; lighting gouraud;                                  % 其他辅助设置
axis vis3d;
```

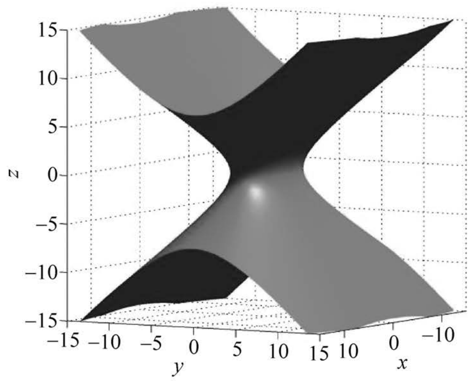
上述程序生成的图像如图 5-5 所示。为了方便观察,图中将各个坐标面做了单独呈现,并将最终结果放置在图中。



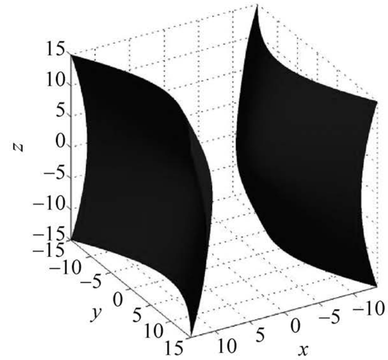
(a) ξ等于常数的椭球面



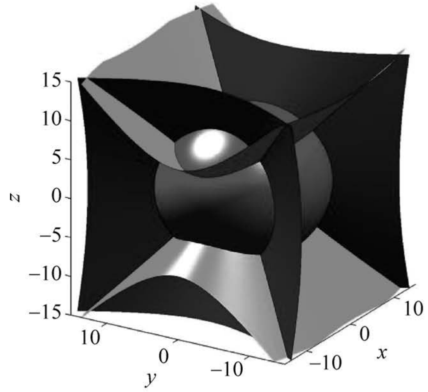
(b) η等于常数的单叶双曲面



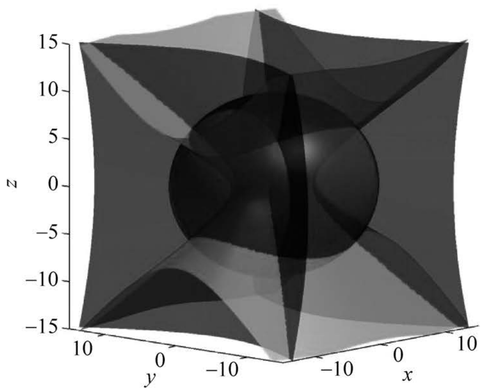
(c) 不同角度观察η等于常数的单叶双曲面



(d) ζ等于常数的双叶双曲面



(e) 三个曲面两两相交的情形



(f) 利用半透明设置展现三个曲面两两相交

图 5-5 椭球坐标系下的坐标平面及其两两相交的情形

5.4.2 与直角坐标系的关系

直角坐标系和椭球坐标系的关系为

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}} \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}} \\ z=\pm\sqrt{\dfrac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}} \end{cases} \tag{5-24}$$

由式(5-24)可以看出,对于特定的 ξ、η、ζ,一共有 8 个点与其对应。从图 5-5 可以看出,这 8 个点对称分布在 8 个卦限中。下面的 MATLAB 代码利用符号计算工具,得到式(5-24)的结果。它实际上是计算求解式(5-22)所对应的三元方程组所得到的。

```
syms a b c x y z ksi eta zeta                    % 定义符号变量
                                                 % 求解三元方程组,得到 x、y、z 的表达式
S = solve(x^2/(a^2 + ksi) + y^2/(b^2 + ksi) + z^2/(c^2 + ksi) == 1, …
          x^2/(a^2 + eta) + y^2/(b^2 + eta) + z^2/(c^2 + eta) == 1, …
          x^2/(a^2 + zeta) + y^2/(b^2 + zeta) + z^2/(c^2 + zeta) == 1);
                                                 % 分别显示 x、y、z 的表达形式
pretty(S.x(1))                                   % 用直观的形式,显示 x 的一个根,下同
pretty(S.y(1))
pretty(S.z(1))
```

正如前面所述,该方程组一共有 8 组根,为方便起见,程序仅仅显示了其中的一组。

5.4.3 椭球坐标系中的拉梅系数和拉普拉斯运算

拉梅系数是曲线坐标系中的重要元素,它反映了在空间任意一点,当只有一个坐标变量发生变化时(如 ξ、η、ζ),对应的弧长变化的系数。在椭球坐标系中,拉梅系数为

$$h_\xi=\frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}}=\frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R(\xi)} \tag{5-25a}$$

$$h_\eta=\frac{\sqrt{(\eta-\xi)(\eta-\zeta)}}{2\sqrt{(\eta+a^2)(\eta+b^2)(\eta+c^2)}}=\frac{\sqrt{(\eta-\xi)(\eta-\zeta)}}{2R(\eta)} \tag{5-25b}$$

$$h_\zeta=\frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2\sqrt{(\zeta+a^2)(\zeta+b^2)(\zeta+c^2)}}=\frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R(\zeta)} \tag{5-25c}$$

其中

$$R(s)=\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)} \tag{5-26}$$

下面的 MATLAB 代码利用符号工具箱推演了上述公式。

```
syms a b c x y z ksi eta zeta                                     % 定义符号变量
S = solve(x^2/(a^2 + ksi) + y^2/(b^2 + ksi) + z^2/(c^2 + ksi) == 1, …
          x^2/(a^2 + eta) + y^2/(b^2 + eta) + z^2/(c^2 + eta) == 1, …
```

```
        x^2/(a^2 + zeta) + y^2/(b^2 + zeta) + z^2/(c^2 + zeta) == 1); % 求 x、y、z 的表达式
x = (S.x(1));                                                           % x 的表达式
y = (S.y(1));                                                           % y 的表达式
z = (S.z(1));                                                           % z 的表达式
R_ksi = sqrt((diff(x,ksi))^2 + (diff(y,ksi))^2 + (diff(z,ksi))^2);      % 计算拉梅系数
R_eta = sqrt((diff(x,eta))^2 + (diff(y,eta))^2 + (diff(z,eta))^2);
R_zeta = sqrt((diff(x,zeta))^2 + (diff(y,zeta))^2 + (diff(z,zeta))^2);
pretty(simple(R_ksi))                                                   % 直观显示拉梅系数
pretty(simple(R_eta))
pretty(simple(R_zeta))
```

知道了拉梅系数，则很容易得到拉普拉斯算符在椭球坐标系下的表达式为

$$\nabla^2\phi = \frac{4R(\xi)}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\phi\right] + \frac{4R(\eta)}{(\eta-\xi)(\eta-\zeta)}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}R(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\phi\right] + \frac{4R(\zeta)}{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}R(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\phi\right] \tag{5-27}$$

5.5 内部匀质化理论及其 MATLAB 分析

越来越多的研究和实验表明，在基底材料中混合呈周期性排列且结构尺寸远远小于工作波长的其他材料，可以等效为新的均质材料，这也是设计和加工新型人工电磁材料的重要方法之一。利用均匀媒质来等效周期性亚波长结构的研究方法被称作等效媒质理论(Effective Medium Theory，EMT)。将混合材料做匀质化处理，有两种方法，即外部匀质化和内部匀质化。外部匀质化把一个非均匀材料向外等效为一个均匀材料；内部匀质化是针对具有复杂结构的混合材料而言，它是将这些具有复杂构造的“原子”结构等效为具有相同形状的均匀的“颗粒”，等效的前提条件是它们对外部的电磁响应相同。图 5-6 给出了两种匀质化方法的差异。

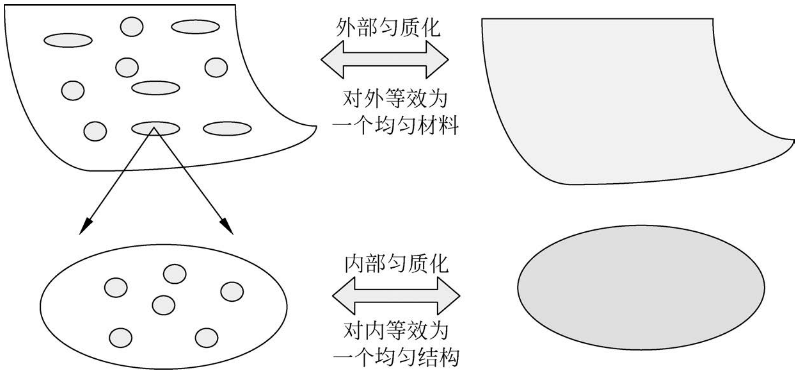


图 5-6　内部和外部匀质化示意图

5.5.1 双层圆柱等效介电常数的分析

对于双层圆柱的等效介电常数的分析，在准静态近似的情况下，首先利用圆柱坐标系内的分离变量法，将双层圆柱和相同外部尺寸的单个圆柱各处电势计算出来。其次基于内部匀质化原理，双层圆柱和相同尺寸的单个圆柱对外电场的响应是等效的，因此可以得到双层圆柱的等效介电常数。

1. 单层介质柱

首先来研究一个无限长圆柱介质置于均匀电场中时介质柱内外的电势分布。如图5-7所示,设在介电常数为ε_b的无限大均匀介质中存在电场强度E_0,垂直于电场方向放置一根半径为b的无限长直介质圆柱体,其介电常数为ε。下面来求解圆柱介质内外的电势。

根据拉普拉斯方程在柱坐标下分离变量的通解形式,可以得到介质柱内外的电势分布有如下形式:

$$\begin{cases}\phi_1=\left(-E_0 r+\dfrac{B_1}{r}\right)\cos\varphi\\ \phi_2=A_1 r\cos\phi\end{cases}\tag{5-28}$$

考虑到介质表面的边界条件,当$r=b$时,$\phi_1=\phi_2$且$\varepsilon_b\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}=\varepsilon\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}$,可以得到如下两个方程:

$$\begin{cases}-E_0 b+\dfrac{B_1}{b}=A_1 b\\ -\varepsilon_b E_0-\varepsilon_b\dfrac{B_1}{b^2}=\varepsilon A_1\end{cases}\tag{5-29}$$

对式(5-29)进行求解,可得

$$B_1=\frac{\varepsilon-\varepsilon_b}{\varepsilon+\varepsilon_b}E_0 b^2=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}E_0 b^2\tag{5-30}$$

其中:$\varepsilon_r=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_b}$,表示相对介电常数。

2. 双层介质柱

如图5-8所示,设在介电常数为ε_b的无限大均匀介质中存在电场强度E_0,垂直于电场方向放置一根内半径为a,外半径为b的无限长双层圆柱介质,其中内层介电常数为ε_1,电势为ϕ_1;外层介电常数为ε_2,电势为ϕ_2。

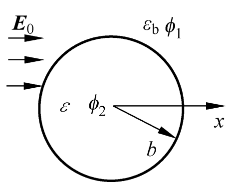


图5-7 均匀电场中的介质柱

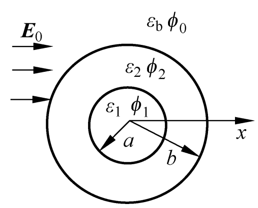


图5-8 均匀电场中双层圆柱的模型

通过上一部分均匀电场中圆柱介质得到的结论,容易得到如下表达式:

$$\begin{cases}\phi_1=Ar\cos\varphi\\ \phi_2=\left(Br+\dfrac{C}{r}\right)\cos\varphi\\ \phi_0=\left(-E_0 r+\dfrac{D}{r}\right)\cos\varphi\end{cases}\tag{5-31}$$

依旧根据边界上电势和电位移矢量的法向分量连续,可以得到以下的边界条件:

(1) 当 $r=a$ 时,有 $\phi_1=\phi_2$ 且有 $\varepsilon_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}$。

(2) 当 $r=b$ 时,有 $\phi_2=\phi_0$ 且有 $\varepsilon_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}=\varepsilon_b\dfrac{\partial\phi_0}{\partial r}$。

将式(5-31)分别代入上述两个边界条件,可以得到 4 个方程,此问题有 4 个未知数,所以可以得到唯一解。4 个联立方程如下:

$$\begin{cases}Aa=Ba+C/a\\ \varepsilon_1 A=\varepsilon_2(B-C/a^2)\\ Bb+C/b=-E_0b+D/b\\ \varepsilon_2(B-C/b^2)=\varepsilon_b(-E_0-D/b^2)\end{cases}\tag{5-32}$$

因为方程组(5-32)是由符号构成的,人工进行计算烦琐而且容易出现错误。利用 MATLAB 求解符号方程的途径是理想的方法。因此将方程(5-32)写成矩阵方程形式非常有助于利用 MATLAB 求解出未知数。将方程组(5-32)写成矩阵方程的形式为

$$\begin{bmatrix}a & -a & -\dfrac{1}{a} & 0\\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & \dfrac{\varepsilon_2}{a^2} & 0\\ 0 & b & \dfrac{1}{b} & -\dfrac{1}{b}\\ 0 & \varepsilon_2 & -\dfrac{\varepsilon_2}{b^2} & \dfrac{\varepsilon_b}{b^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-E_0b\\-E_0\varepsilon_b\end{bmatrix}\tag{5-33}$$

内部匀质化原理的本质在于,在准静态近似下,无限长圆柱介质和双层圆柱之间存在一个等量关系,即 $B_1\equiv D$。此时,从外部来看,双层圆柱与单层圆柱的电磁响应是一模一样的,或者说二者是等效的。D 的表达式为

$$D=E_0b^2\,\frac{b^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_b)+a^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_2+\varepsilon_b)}{b^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_2+\varepsilon_b)+a^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_b)}\tag{5-34}$$

根据式(5-30),由于 $B_1\equiv D$,所以很容易得到

$$\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}E_0b^2=D\tag{5-35}$$

为了表示方便和编程简单,设 $\overline{D}=D/E_0b^2$,则有

$$\varepsilon_r=\frac{1+\overline{D}}{1-\overline{D}}\tag{5-36}$$

使用 MATLAB 编写程序,将所求得的 D 的值代入式(5-36),可以得到最终相对介电常数的值为

$$\varepsilon_r=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_b}=\frac{\varepsilon_2[b^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+a^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]}{\varepsilon_b[b^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-a^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]}\tag{5-37}$$

约去式(5-37)两边重复的 ε_b,ε 即为待求解的介电常数,即双层柱的等效介电常数

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_2[b^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+a^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]}{b^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-a^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\tag{5-38}$$

如果设内外层圆柱的半径比为 $r_{cs}=a/b$，则式(5-38)又可以进一步简化为

$$\varepsilon=\varepsilon_2 * \frac{[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+r_{cs}^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-r_{cs}^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)} \tag{5-39}$$

下面的 MATLAB 代码就实现了上面的代数方程求解并进行化简的过程。

```
syms a ep_1 ep_2 ep_b b E0 b ep_e
A = [a       - a        - 1/a       0;
    ep_1    - ep_2     ep_2/a^2    0;
    0       b           1/b     - 1/b;
    0       ep_2       - ep_2/b^2  ep_b/b^2];          % 方程系数矩阵
m = [0;0; - E0 * b; - ep_b * E0];                      % 方程右侧部分
C = A\m;                                               % 左除的位置矢量
D = C(4);                                              % D 的结果
D_m = D/(E0 * b^2);                                    % 将 D 化简
[N1,D1] = numden(D_m)                                  % D_m 的分子和分母,用于验证
ep_e = (1 + D_m)/(1 - D_m);                            % 等效介电常数
[N2,D2] = numden(ep_e)                                 % ep_e 的分子和分母
```

3. 双层介质柱等效介电常数的变化曲线

在本部分使用银和二氧化硅两种物质来研究当内外层材料不同时，等效介电常数与内外层圆柱的半径比 r_{cs} 的关系。假设波长为 405nm，此时银的介电常数为 $\varepsilon_m=-4.70+i0.22$，二氧化硅的介电常数为 $\varepsilon_d=2.42$。

首先，当外层是银介质，内层是二氧化硅时，等效介电常数可以写作 $\varepsilon_{eff}=\varepsilon'_{eff}+i\varepsilon''_{eff}$ 的形式，在 MATLAB 中绘制这种情况下等效介电常数的实部 ε'_{eff} 与虚部 ε''_{eff} 随着内外层半径比的关系。变化趋势如图 5-9 所示。

从图 5-9 可以看出，这种情况下双层圆柱等效介电常数的虚部接近 0，而介电常数实部从 -4.70 到 2.42 变化，也就是说外层为金属介质时，等效介电常数的实部不可能超出其组成材料的介电常数的范围。

当内层是银介质，外层是二氧化硅时，等效介电常数也可以写作 $\varepsilon_{eff}=\varepsilon'_{eff}+i\varepsilon''_{eff}$ 的形式。同样地，在 MATLAB 中绘制这种情况下等效介电常数的实部 ε'_{eff} 与虚部 ε''_{eff} 随着内外层半径比 a/b 的关系。变化趋势如图 5-10 所示。

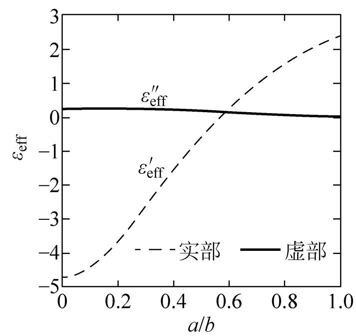


图 5-9　外层为银，内层为二氧化硅时介电常数的变化趋势

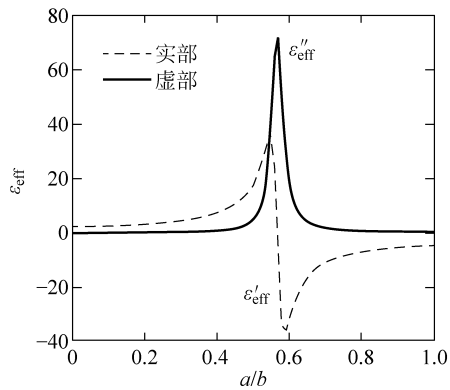


图 5-10　内层为银，外层为二氧化硅时介电常数的变化趋势

从图 5-10 可以看出，内层为银介质的情况下，介电常数的变化范围很广，其变化范围不单纯的是在两种材料的介电常数范围内，实际应用时可以根据设计的实际需要来确定内外层材料和内外圆柱半径比。

由上述计算可以看出，采用两种材料就可以搭配出诸多介电常数的组合，从而实现具有特殊功能的电磁器件。因此，内部匀质化方法是实现人工电磁材料的重要方法。

5.5.2 双层球结构

与上述做法相似，可以考虑双层介质球的等效介电常数。

1. 单层介质球的电势分布

首先研究在无限大均匀电场中放置的单层介质球的电势分布。如图 5-11 所示，设均匀电场的电场强度为 $\boldsymbol{E}_0$，方向沿 z 轴方向。背景材料介电常数为 ε_b，电势为 ϕ_1；置于均匀电场中的单层介质球的介电常数为 ε，电势为 ϕ_2。

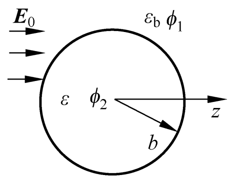


图 5-11 均匀电场中的单层介质球

利用球坐标系下拉普拉斯方程的通解，各个区域的电势分布为

$$\begin{cases}\phi_1=(-E_0r+B_1r^{-2})P_1(\cos\theta)\\ \phi_2=A_1rP_1(\cos\theta)\end{cases}\tag{5-40}$$

根据当 $r=b$ 时，$\phi_1=\phi_2$ 且 $\varepsilon_b\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}=\varepsilon\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}$这个条件可以得到如下方程组：

$$\begin{cases}-E_0b+\dfrac{B_1}{b^2}=A_1b\\ -\varepsilon_bE_0-2\varepsilon_b\dfrac{B_1}{b^3}=\varepsilon A_1\end{cases}\tag{5-41}$$

求解方程组(5-41)可以得到

$$B_1=\frac{\varepsilon-\varepsilon_b}{\varepsilon+2\varepsilon_b}E_0b^3=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}E_0b^3\tag{5-42}$$

其中：$\varepsilon_r=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_b}$，表示相对介电常数。

2. 双层介质球的电势分布

上一部分已经得到了单层介质球的电势分布的表达式，与求解双层柱的方法类似，本部分待求解的是双层介质球每层的电势分布，根据单层和双层之间存在的某些等量关系，就可以求得双层介质球的等效介电常数。

如图 5-12 所示，设在介电常数为 ε_b 的无限大均匀介质中存在电场强度 E_0，其中放置有一个内半径为 a，外半径为 b 的双层介质球，内层介电常数为 ε_1，电势为 ϕ_1；外层介电常数为 ε_2，电势为 ϕ_2。

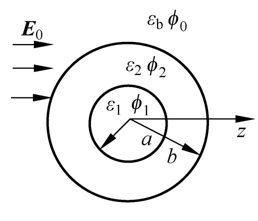


图 5-12 均匀电场中的双层介质球

根据上一部分得到的结论，可以很容易得到每层的电势表达式为

$$\begin{cases}\phi_1 = ArP_1(\cos\theta) \\ \phi_2 = [Br + Cr^{-2}]P_1(\cos\theta) \\ \phi_0 = [-E_0 r + Dr^{-2}]P_1(\cos\theta)\end{cases} \tag{5-43}$$

根据边界上电势和电位移矢量的法向分量连续，可以得到如下边界条件：

(1) $r=a$ 时，$\phi_1=\phi_2$ 且 $\varepsilon_1 \dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}=\varepsilon_2 \dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}$。

(2) $r=b$ 时，$\phi_2=\phi_0$ 且 $\varepsilon_2 \dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}=\varepsilon_b \dfrac{\partial\phi_0}{\partial r}$。

将上述边界条件应用到式(5-43)中，可以得到如下方程组：

$$\begin{cases}Aa = Ba + C/a^2 \\ \varepsilon_1 A = \varepsilon_2(B - 2C/a^3) \\ Bb + C/b^2 = -E_0 b + D/b^2 \\ \varepsilon_2(B - 2C/b^3) = \varepsilon_b(-E_0 - 2D/b^3)\end{cases} \tag{5-44}$$

为了方便在 MATLAB 中进行计算，将式(5-44)写成矩阵方程，其形式为

$$\begin{bmatrix} a & -a & -\dfrac{1}{a^2} & 0 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & \dfrac{2\varepsilon_2}{a^3} & 0 \\ 0 & b & \dfrac{1}{b^2} & -\dfrac{1}{b^2} \\ 0 & \varepsilon_2 & -\dfrac{2\varepsilon_2}{b^3} & \dfrac{2\varepsilon_b}{b^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_0 b \\ -E_0\varepsilon_b \end{bmatrix} \tag{5-45}$$

利用内部匀质化原理可以得知，当双层介质球与同等大小的单层介质球放入同样的均匀电场中时，在准静态近似下引起的响应必然是相同的。所以必有 $B_1 \equiv D$。因此可以得到

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} E_0 b^3 \equiv D \tag{5-46}$$

为了表示方便，此处设 $\bar{D} = D/E_0 b^3$，可以得到

$$\varepsilon_r = \frac{1+2\bar{D}}{1-\bar{D}} = \frac{1+2D/E_0 b^3}{1-D/E_0 b^3} \tag{5-47}$$

利用 MATLAB 编程求解式(5-45)，解出 D 的表达式为

$$D = E_0 b^3 \ \frac{b^3(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_b)+a^3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_b+2\varepsilon_2)}{b^3(\varepsilon_2+2\varepsilon_b)(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)-2a^3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_b)}$$

将 D 代入式(5-47)中，有

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_b} = \frac{\varepsilon_2[b^3(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)+2a^3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]}{\varepsilon_b[b^3(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)-a^3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]} \tag{5-48}$$

观察式(5-48)，约去公式左右两边的 ε_b，可以得到双层椭球的等效介电常数 ε 为

$$\varepsilon = \varepsilon_2 * \ \frac{[b^3(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)+2a^3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]}{[b^3(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)-a^3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]} \tag{5-49}$$

下面的 MATLAB 代码可以实现上述方程组求解和等效介电常数计算的过程。

```
syms a ep_1 ep_2 ep_b b E0 b ep_e
A = [a       - a        - 1/(a^2)       0;
    ep_1    - ep_2    2 * ep_2/a^3     0;
    0       b         1/(b^2)          - 1/(b^2);
    0       ep_2      - 2 * ep_2/b^3   2 * ep_b/b^3];          % 定义系数矩阵
m = [0;0; - E0 * b; - ep_b * E0];                              % 方程右侧部分
C = A\m;                                                       % 求未知数矢量[A B C D]^T
D = C(4);                                                      % D 的表达式
D_m = D/(E0 * b^3);                                            % 简化 D
[N1,D1] = numden(D_m)                                          % 求 D_m 的分子和分母
ep_e = (1 + 2 * D_m)/(1 - D_m);                                % 式(5-47)
[N2,D2] = numden(ep_e)                                         % 求 ep_e 的分子和分母,以便于验证
```

5.5.3 双层椭球结构的等效介电常数

1. 椭球形介质周围的势函数

接下来,采用类似的方法,考虑共焦双层椭球结构的情形。将双层椭球之间的边界定义为 ξ_1 和 ξ_2,且注意双层椭球共焦的条件为椭球的三个半轴 a_i、b_i、c_i 必须满足如下条件:

$$a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2 = c_1^2 - c_2^2 = -\xi_2 \tag{5-50}$$

从式(5-50)可以明显看出 ξ_1 的值为 0。

如图 5-13 所示,双层椭球和同等大小的单层匀质椭球均被置于均匀外电场中。外电场 $\boldsymbol{E}$ 沿 x 轴方向。

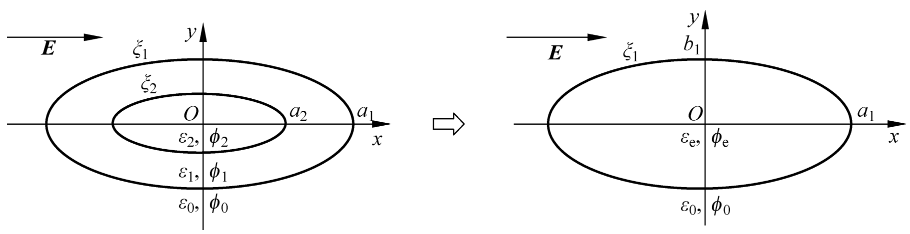


图 5-13 双层椭球及等效的单层匀质椭球示意

对于单层椭球而言,设无穷远处电势为 ϕ_∞,很容易得到其表达式为

$$\phi_\infty = -Ex = -E\sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \tag{5-51}$$

而椭球附近电势可以表示为 $\phi = \phi_\infty F(\xi)$。朗道所编写的《连续介质的电动力学》一书中已经给出了 $F(\xi)$的最终表达式。$F(\xi)$为常数或为

$$F(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s + a^2)R(s)} \tag{5-52}$$

其中

$$R(s) = \sqrt{(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)}$$

由于受到式(5-50)所示的椭球共焦条件的限制,所以式(5-52)中的 a、b、c 可以替换成任意的 a_i、b_i、

c_i。此处用 a_1、b_1、c_1 代替,因此电势的表达式可以写作

$$\phi=\phi_\infty\left[C-\frac{D}{2}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right] \tag{5-53}$$

$$R_1(s)=\sqrt{(s+a_1^2)(s+b_1^2)(s+c_1^2)} \tag{5-54}$$

与双层球和双层柱相同,边界上的电势应是连续的,即 $C-\frac{D}{2}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}$ 在边界上连续。另外,边界上的法向电位移也应该是连续的,电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的法向部分表达式为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=-\varepsilon\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \tag{5-55}$$

其中:h_ξ 为椭球坐标系的度量系数,其表达式为

$$h_\xi=\frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_1(\xi)} \tag{5-56}$$

将式(5-56)代入式(5-55)可以得到:要使法向电位移连续,也就是必须使表达式 $\varepsilon\left[C+\frac{D}{R_1(\xi)}-\frac{D}{2}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right]$ 在边界上连续。

2. 单层椭球的电势分布

如图5-13的右侧所示的单层匀质椭球,分析其每层的电势分布。注意到内层椭球 $F(\xi)$ 只能是常数,否则积分那一部分在原点处存在奇异值。所以根据上述分析可以很容易得到如下电势分布:

$$\begin{cases}\phi_e=-CEx\,(\xi\leqslant\xi_1)\\ \phi_0=-Ex\left[1-\frac{D}{2}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right](\xi>\xi_1)\end{cases} \tag{5-57}$$

根据电势连续和法向电位移连续可以得到以下方程

$$C=1-\frac{D}{2}\int_{\xi_1}^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)} \tag{5-58a}$$

$$\varepsilon_e C=\varepsilon_0\left[1+\frac{D}{R_1(\xi_1)}-\frac{D}{2}\int_{\xi_1}^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right] \tag{5-58b}$$

上述方程依旧是符号组成的方程,利用MATLAB解方程可以得到 D 的表达式为

$$D=\frac{2R_1(\xi_1)(\varepsilon_e-\varepsilon_0)}{2\varepsilon_0+N_1R_1(\xi_1)(\varepsilon_e-\varepsilon_0)} \tag{5-59}$$

其中

$$N_1=\int_{\xi_1}^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}=\frac{2}{a_1b_1c_1}N_1^x \tag{5-60}$$

其中:N_1^x 为 x 方向的退极化因子。

上述求解系数 D 的过程,可以用MATLAB代码计算如下:

```
syms ep_e ep_0 N1  R1                     % 定义符号变量
A = [1 N1/2;ep_e ep_0 * N1/2 - ep_0/R1];  % 定义系数矩阵
m = [1;ep_0];                             % 定义方程右侧的列矢量
C = A\m;                                  % 求解代数方程
D = C(2);                                 % D 的表达式
pretty(D)                                 % 用直观的形式显示系数 D
```

3. 双层椭球的电势分布

图 5-13 中左侧双层椭球的电势分布与单层匀质椭球的电势分布是类似的，每层的电势为

$$\begin{cases} \phi_2 = -C_2 Ex(\xi \leqslant \xi_2) \\ \phi_1 = -Ex\left[C_1 - \dfrac{D_1}{2}\displaystyle\int_\xi^\infty \dfrac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right](\xi_2 < \xi < \xi_1) \\ \phi_0 = -Ex\left[1 - \dfrac{D_0}{2}\displaystyle\int_\xi^\infty \dfrac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right](\xi \geqslant \xi_1) \end{cases} \tag{5-61}$$

边界条件仍旧是边界上电势和法向电位移连续，由此可得以下方程组：

$$C_2 = C_1 - \frac{D_1}{2}\int_{\xi_2}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)} \tag{5-62a}$$

$$\varepsilon_2 C_2 = \varepsilon_1\left[C_1 + \frac{D_1}{R_1(\xi_2)} - \frac{D_1}{2}\int_{\xi_2}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right] \tag{5-62b}$$

$$C_1 - \frac{D_1}{2}\int_{\xi_1}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)} = 1 - \frac{D_0}{2}\int_{\xi_1}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)} \tag{5-62c}$$

$$\varepsilon_1\left[C_1 + \frac{D_1}{R_1(\xi_1)} - \frac{D_1}{2}\int_{\xi_1}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right] = \varepsilon_0\left[1 + \frac{D_0}{R_1(\xi_1)} - \frac{D_0}{2}\int_{\xi_1}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)}\right] \tag{5-62d}$$

观察式(5-57)与式(5-61)可以发现，常数 D 与 D_0 分别代表将匀质椭球与双层椭球放置于外加均匀电场中时产生的扰动。当椭球尺寸远小于波长时，在准静态近似情况下应有 $D \equiv D_0$，即二者对椭球外电场的响应相同。这就是内部匀质化原理的本质。

利用 MATLAB 编写程序，解方程组(5-62)，可以得到 D_0 的表达式，其形式过于复杂，此处暂不给出。再由 $D \equiv D_0$，解得等效介电常数的表达式为

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1\left\{1 + \frac{2R_1(\xi_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{R_1(\xi_1)[2\varepsilon_1 + (N_1 - N_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R_1(\xi_2)]}\right\} \tag{5-63}$$

其中：N_2 的值为

$$N_2 = \int_{\xi_2}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a_1^2)R_1(s)} = \frac{2}{a_2 b_2 c_2}N_2^x$$

上面已经提到 $a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2 = c_1^2 - c_2^2 = -\xi_2$ 且 $\xi_1 = 0$，因此有

$$R_1(\xi_1) = a_1 b_1 c_1, R_1(\xi_2) = a_2 b_2 c_2$$

对式(5-63)进行化简，可得

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1\left[1 + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\lambda}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\lambda N_1^x - N_2^x)}\right] \tag{5-64}$$

其中

$$\lambda = \frac{a_2 b_2 c_2}{a_1 b_1 c_1}$$

这就是双层椭球的等效介电常数的最终结果。

下面的 MATLAB 程序正是对上述过程进行符号推演的具体实现。

```
syms ep_1 ep_2 ep_0 N1 N2 R1 R2 ep_r ep_e   %定义符号变量
A = [ - 1 1  - N2/2 0;
     - ep_2 ep_1 ep_1/R2 - ep_1 * N2/2 0;
```

```
    0 1  - N1/2 N1/2;
    0 ep_1 ep_1/R1 - ep_1 * N1/2 ep_0 * N1/2 - ep_0/R1];
m = [0;0;1;ep_0];
C = A\m;                                      % C = [C2 C1 D1 D0]
D0 = C(4);                                    % D0 的表达式
A = [1 N1/2;ep_e ep_0 * N1/2 - ep_0/R1];
m = [1;ep_0];
C = A\m;
D = C(2);                                     % D 的表达式
ep_r = solve(D == D0,ep_e);                   % 求解方程,得到 ep_e
pretty(simple(ep_r))                          % 显示 ep_e 的表达式
```

5.6 无限大半平面的衍射——特殊函数的应用

借助于惠更斯-菲涅尔原理可以解释和描述光束通过各种形状的障碍物时所产生的衍射现象。讨论时,通常可以根据光源和考察点到障碍物的距离把衍射现象分为两类。第一类是障碍物到光源和考察点的距离都是有限的,或其中之一为有限的,称为菲涅尔衍射,又称近场衍射;第二类是障碍物到光源和考察点的距离可认为是无限远的,即实际上使用的是平行光束,这种衍射称为夫琅禾费衍射,又称远场衍射。

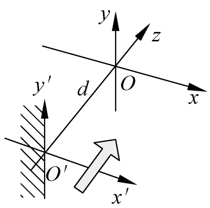


图 5-14　半无限大平板的衍射示意图

采用标量衍射理论,考察平行光垂直入射到一个半无限大平板时发生的衍射情况,如图 5-14 所示。平板占据的位置为 $x'<0$,与观察屏之间的距离为 d。

则观察屏上电磁波的复振幅分布为

$$U(x,y)=A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{5-65}$$

其中: A 为半无限大平板上的电磁场的幅度,且有

$$R=[(x'-x)^2+(y'-y)^2+d^2]^{1/2}$$

考虑到观察屏到半无限大平面的距离非常大,所以可以将上式近似用牛顿公式表示为

$$R\approx d+\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2d}$$

代入式(5-65),并注意到幅度和相位对精度要求的差异,整理得到

$$U(x,y)=\frac{A}{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\frac{2}{\lambda d}[(x'-x)^2+(y'-y)^2]\right\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

做变量替换

$$u=\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}(x'-x),\quad v=\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}(y'-y)$$

则有

$$U(x,y)=\frac{A\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}\int_{-\zeta}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}u^2}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}v^2}\mathrm{d}v \tag{5-66}$$

其中

$$\zeta=\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}x$$

利用菲涅尔积分的定义,式(5-66)可以写作

$$U(x,y)=\frac{A\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}\int_{-\zeta}^{\infty}\left[\cos\frac{\pi}{2}u^2-\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}u^2\right]\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\frac{\pi}{2}v^2-\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}v^2\right]\mathrm{d}v$$

其中

$$C(x)=\int_0^x\cos\frac{\pi t^2}{2}\mathrm{d}t,S(x)=\int_0^x\sin\frac{\pi t^2}{2}\mathrm{d}t \tag{5-67}$$

考虑到被积函数的奇偶性,即

$$U(x,y)=\frac{A\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}\left[C(\infty)-\mathrm{j}S(\infty)+C(\zeta)-\mathrm{j}S(\zeta)\right]$$
$$\left[2C(\infty)-\mathrm{j}2S(\infty)\right] \tag{5-68}$$

由于 $C(\infty)=S(\infty)=0.5$,式(5-68)可以化简为

$$U(x,y)=\frac{A\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}\left[\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}+C(\zeta)-\mathrm{j}S(\zeta)\right](1-\mathrm{j})$$

所以,观察屏上的光强为

$$I=\frac{A^2\lambda^2}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+C(\zeta)\right)^2+\left(\frac{1}{2}+S(\zeta)\right)^2\right]=I_0\left[\left(\frac{1}{2}+C(\zeta)\right)^2+\left(\frac{1}{2}+S(\zeta)\right)^2\right] \tag{5-69}$$

下面的MATLAB代码就计算了光场分布的情况。

```
zeta = - 5:0.1:5;                         % 定义 zeta 区间,它与 x 成正比
C = mfun('FresnelC',zeta);                % 计算菲涅尔余弦积分值
S = mfun('FresnelS',zeta);                % 计算菲涅尔正弦积分值
I0 = 1;
I = (C + 1/2).^2 + (S + 1/2).^2;          % 计算光场强度
plot(zeta,I);                             % 绘制曲线
 % figure; plot(C,S);                     % 绘制考纽螺线
```

图5-15给出了观察屏上 x 轴上的光场分布。从图5-15中可以看出,在几何光学中光线照射不到的位置($x<0$),光强不为零;在靠近几何光学生成的阴影边界处($x>0$),光强是明暗分布的,直到距离边界很远的地方,光强才稳定下来。

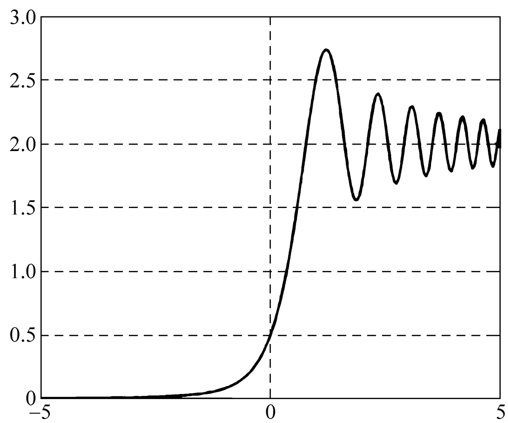


图5-15　观察屏上 x 轴方向上看到的情况

事实上,利用符号工具箱中的mfun函数很容易得到 $C(\infty)=S(\infty)=0.5$。在MATLAB命令行下输入mfun('FresnelC',inf)或mfun('FresnelS',inf),则可得到其积分值,即0.5。

另外,当自变量取值一致时,分别以菲涅尔余弦积分和正弦积分作为横纵坐标,可以绘制所谓的考纽螺线,如图 5-16 所示。只需在上述代码部分增加一条指令即可(上面代码中注释掉的最后一行)。

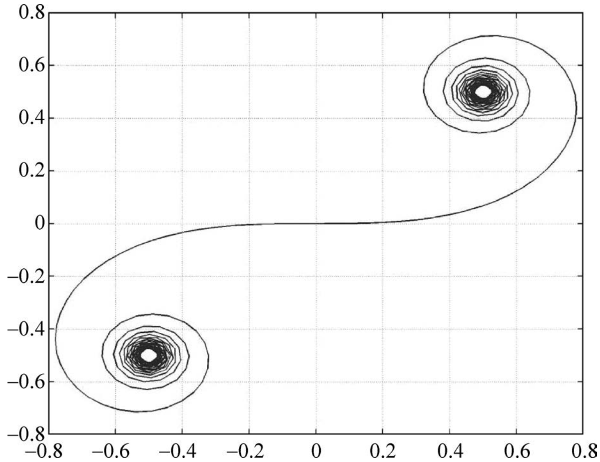


图 5-16　考纽螺线示意图

5.7　变分法及其在电磁理论中的应用

如前所述,泛函求极值的过程中,利用变分法可以得到其对应的必要条件,即所谓的欧拉-拉格朗日方程,一般情况下,它对应于一个二阶的微分方程或者方程组。而在电磁理论中,需要求解的电磁方程往往归结为亥姆霍兹方程或者泊松方程,也是一个二阶的微分方程。于是,通过泛函求极值的方法,为间接求解电磁方程提供了额外的途径。本节介绍如何利用符号工具箱的演算功能,完成相关题目的计算。

5.7.1　泛函取极值的必要条件

在 3.1.1 节中已经知道,当泛函的变量函数为一个一元函数,且该变量函数通过两个定点,即 $y(x_0)=a$,$y(x_1)=b$ 时,则有如下泛函取极值的条件:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \tag{5-70}$$

其中:$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 为已知泛函。此式又称为欧拉-拉格朗日方程,一般来讲,是一个二阶微分方程。

当泛函的变量函数是三元函数时,有 $J[u]=\iiint F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,则同样地,其所对应的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u_z}=0 \tag{5-71}$$

很明显地,这对应于一个二阶的偏微分方程。

例如，对于泛函 $J[u]=\frac{1}{2}\iiint|\nabla u|^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}V$，当变量函数满足一定的边界条件时，其所对应的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u_z}=0-2u_{xx}-2u_{yy}-2u_{zz}=0 \tag{5-72}$$

上式也就是 $\Delta u=0$，这正是电磁理论中的拉普拉斯方程。

表 5-1 给出了电磁理论中常见的电磁方程形式及其所对应的泛函以及泛函取极值的必要条件。

表 5-1 电磁方程形式

方 程 形 式	对应的泛函	泛函取极值的条件
泊松方程	$J[\phi]=\frac{1}{2}\int[\mid\nabla\phi\mid^2+2g\phi]\mathrm{d}V$	$\Delta\phi=g$
拉普拉斯方程	$J[\phi]=\frac{1}{2}\int\mid\nabla\phi\mid^2\mathrm{d}V$	$\Delta\phi=0$
齐次亥姆霍兹方程	$J[\phi]=\frac{1}{2}\int[\mid\nabla\phi\mid^2-k^2\phi^2]\mathrm{d}V$	$\Delta\phi+k^2\phi=0$
非齐次亥姆霍兹方程	$J[\phi]=\frac{1}{2}\int[\mid\nabla\phi\mid^2-k^2\phi^2+2g\phi]\mathrm{d}V$	$\Delta\phi+k^2\phi=g$

5.7.2 求解泛函极值的瑞利-里兹方法

如表 5-1 所述，泛函求极值所对应的必要条件，正好对应着电磁理论中的各种微分方程。因此，如果有办法利用其他方式求得对应泛函的极值，则该极值函数必定满足相应的微分方程，或者说，通过变分的方法，得到了电磁方程定解问题的解。瑞利-里兹方法，就是求解泛函极值的常用方法。

假设 $J[u]=\iiint F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为电磁问题所对应的泛函，$u(x,y,z)$为所求的未知函数。瑞利-里兹方法假设可以用基函数序列将待求函数展开，即

$$u(x,y,z)=\sum_n c_n\phi_n(x,y,z)$$

将其代入相应的泛函中，则可以将原泛函转换为未知系数 c_n 的一般函数 $J(c_n)$。根据多元函数微积分的结论易知，该函数要想取极值，必须满足

$$\frac{\partial J(c_n)}{\partial c_n}=0 \quad n=1,2,\cdots \tag{5-73}$$

将上述代数方程组联立求解，即可得到待定系数 c_n，进而求得未知函数。当级数展开取有限项时，可以得到原始问题的近似解。实际应用中，可以选择很少的几项做展开，就能够得到原始问题的较高精度的解，这正是变分法的优势。由此可见，将泛函极值问题转换为函数极值问题，就是瑞利-里兹方法的核心。

上述基函数的选择是有讲究的，一般情况下，根据未知函数所满足的边界条件，可以选择三角函数、多项式、正交函数系等；在数值求解的情况下，往往将待求区域分解为离散的单元，此时，往往采取子域基函数展开，而这就是有限元法的基础。

5.7.3 利用符号工具箱实现瑞利-里兹方法求解

1. 利用瑞利-里兹方法求解泛函极值

用瑞利-里兹方法求解泛函 $J[y]=\int_0^1 (y'^2-y^2+2xy)\mathrm{d}x$ 的极值函数的近似值，并与精确值做比较。已知，$y(0)=y(1)=0$。

该泛函对应的欧拉-拉格朗日方程为

$$y''+y=x \tag{5-74}$$

在满足 $y(0)=y(1)=0$ 的边界条件下，该方程对应的解为

$$y=x-\frac{1}{\sin 1}\sin x \tag{5-75}$$

如果考虑采用瑞利-里兹方法，考虑到极值函数所满足的边界条件，可以设

$$y=\left(\sum_n c_n x^n\right)x(x-1) \tag{5-76}$$

如果考虑取一项近似，则 $y=c_0x(x-1)$，代入到原泛函，可以得到

$$J(c_0)=\frac{c_0(9c_0+5)}{30}$$

于是有

$$\frac{\partial J}{\partial c_0}=\frac{3c_0}{5}+\frac{1}{6}=0$$

求解，可得

$$c_0=-\frac{5}{18}$$

上述过程可以使用 MATLAB 的符号工具箱进行推演，容易得到如下代码：

```
syms x c0                                      %定义符号变量
y = c0 * x * (1 - x);                          %定义未知函数的展开形式
phi(c0) = int(diff(y,x)^2 - y^2 + 2 * x * y,x,0,1)   %定义泛函对应的普通函数
c = solve(diff(phi(c0),c0) == 0,c0);           %求解展开系数
Y = subs(y,c0,c);                              %将展开系数代入未知函数
Ay = - double(1/sin(1)) * sin(x) + x;          %精确解
fplot(Y,[0,1],'r');                            %绘制瑞利-里兹方法得到的函数
hold on;                                       %保持模式打开,以便对比两条曲线
fplot(Ay,[0,1],'g');                           %绘制精确解
legend('Approx','Accurate','location','North');   %标注两条曲线
```

该程序运行结果如图 5-17 所示。从图中可以看出，近似解(Approx)与精确解(Accurate)具有相似的形状。

如果考虑取两项，则 $y=(c_0+c_1x)x(x-1)$，代入到原泛函，可以得到

$$J(c_0,c_1)=\frac{3c_0^2}{10}+\frac{3c_0c_1}{10}+\frac{c_0}{6}+\frac{13c_1^2}{105}+\frac{c_1}{10}$$

于是有

$$\frac{\partial J}{\partial c_0}=\frac{3c_0}{5}+\frac{3c_1}{10}+\frac{1}{6}=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_1}=\frac{3c_0}{10}+\frac{26c_1}{105}+\frac{1}{10}=0$$

联立求解，可得

$$c_0=-\frac{71}{369},\quad c_1=-\frac{7}{41}$$

以上过程可以采用 MATLAB 进行符号工具的推演，代码如下：

```
syms x c0 c1                                    % 定义符号变量
y = (c0 + c1 * x) * x * (1 - x);                % 定义未知函数的展开形式
phi(c0,c1) = int(diff(y,x)^2 - y^2 + 2 * x * y,x,0,1); % 定义泛函对应的普通函数
c = solve(diff(phi(c0,c1),c0) == 0,diff(phi(c0,c1),c1) == 0,c0,c1);
                                                % 求解展开系数
Y = subs(y,[c0,c1],[(c.c0),(c.c1)]);           % 将展开系数代入未知函数
Ay = - double(1/sin(1)) * sin(x) + x;           % 精确解
fplot(Y,[0,1],'ro');                            % 绘制瑞利-里兹方法得到的函数
hold on;                                        % 保持模式打开，以便对比两条曲线
fplot(Ay,[0,1],'g');                            % 绘制精确解
legend('Approx','Accurate','location','North'); % 标注两条曲线
```

该程序运行结果如图 5-18 所示。

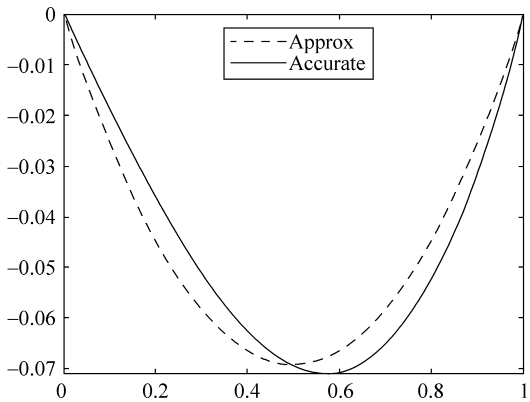


图 5-17　粗略近似解和精确解的对比曲线

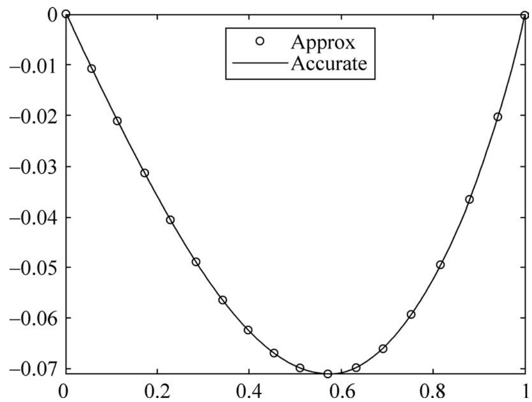


图 5-18　近似解和精确解的对比曲线

从对比曲线可以看出：即使选择两项作为近似，变分法也可以得到很高的精度。此外，当使用更多的近似项时，手工近似和求解非常麻烦，MATLAB 的符号推演就更加能够体现出优势。

2. 一维泊松方程的瑞利-里兹方法求解

用瑞利-里兹方法求解一维泊松方程对应的定解问题，即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=x+1 & 0<x<1\\ \phi\mid_{x=0}=0 \qquad \phi\mid_{x=1}=1\end{cases}\tag{5-77}$$

并与精确值做比较。

容易看出，该问题对应的解析解为

$$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x \tag{5-78}$$

如果考虑采用瑞利-里兹方法,考虑到极值函数所满足的边界条件,可以设

$$y=\left(\sum_n c_n x^n\right)x(x-1)+x \tag{5-79}$$

如果考虑取三项近似,则 $y=(c_0+c_1x+c_2x^2)x(x-1)+x$,代入到原泛函,可以得到

$$J(c_0,c_1,c_2)=\frac{c_0^2}{6}+\frac{c_0c_1}{6}+\frac{c_0c_2}{10}+\frac{c_0}{4}+\frac{c_1^2}{15}+\frac{c_1c_2}{10}+\frac{2c_1}{15}+\frac{3c_2^2}{70}+\frac{c_2}{12}+\frac{4}{3}$$

于是有

$$\frac{\partial J}{\partial c_0}=\frac{c_0}{3}+\frac{c_1}{6}+\frac{c_2}{10}+\frac{1}{4}=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_1}=\frac{c_0}{6}+\frac{2c_1}{15}+\frac{c_2}{10}+\frac{2}{15}=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_2}=\frac{c_0}{10}+\frac{c_1}{10}+\frac{3c_2}{35}+\frac{1}{12}=0$$

联立求解,可得

$$c_0=-\frac{2}{3},c_1=-\frac{1}{6},c_2=0$$

此时,对应的“近似解”为

$$\tilde{y}=\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}x\right)x(1-x)+x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$$

可以看出:此时,近似解就等于精确解。

以上过程可以采用 MATLAB 进行符号工具的推演,代码如下:

```
syms x c0 c1 c2                                                   %定义符号变量
y = (c0 + c1 * x + c2 * x^2) * x * (1 - x) + x;                   %定义未知函数的展开形式
phi(c0,c1,c2) = int(0.5 * diff(y,x)^2 + y * (x + 1),x,0,1)        %定义泛函对应的普通函数
c = solve(diff(phi(c0,c1,c2),c0) == 0,diff(phi(c0,c1,c2),c1) == 0,diff(phi(c0,c1,c2),c2) == 0,c0,c1,c2);
                                                                  %求解展开系数
Y = subs(y,[c0,c1,c2],[(c.c0),(c.c1),(c.c2)]);                    %将展开系数代入未知函数
Ay = 1/6 * x^3 + 1/2 * x^2 + 1/3 * x;                             %精确解
fplot(Y,[0,1],'ro');                                              %绘制瑞利-里兹方法得到的函数
hold on;                                                          %保持模式打开,以便对比两条曲线
fplot(Ay,[0,1],'g');                                              %绘制精确解
hold off;
legend('Approx','Accurate','location','North');                   %标注两条曲线
```

该程序运行结果如图 5-19 所示。从图中可以看出,近似解与精确解完全重合。

3. 一维泊松方程的有限元法求解

在前面的求解过程中,所有的展开函数使用的都是全域函数,即基函数与待求函数的定义域完全相同,可以称为全域基函数。大多数情况下,尤其是对于大型复杂问题,一般将定义域分成若干子域,从而可以定义在子域上的基函数,进一步将未知函数利用子域基函数展开。这就是有限元方法的基础。本节利用有限元方法来求解前述一维泊松方程对应的定解问题。

参考表 5-1 中的内容，则该泊松方程对应的泛函为 $J[\phi]=\frac{1}{2}\int[|\nabla\phi|^2+2g\phi]\mathrm{d}V$，结合一维情况，有

$$J[\phi]=\frac{1}{2}\int_0^1[|\phi_x|^2+2g\phi]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1|\phi_x|^2\mathrm{d}x+\int_0^1(x+1)\phi\mathrm{d}x \tag{5-80}$$

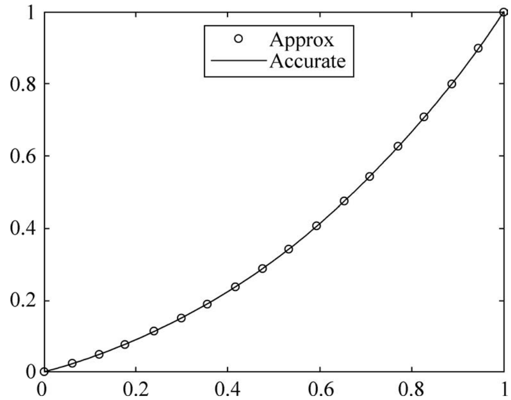


图 5-19 一维泊松方程近似解和精确解的对比曲线

与前面的全域基函数不同，可以定义子域基函数。如图 5-20(a)所示，将定义域划分成 4 个区间，则在每个区间，电势函数可以采用线性插值的形式得到，即

$$\phi(x)=\phi_i\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}+\phi_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \tag{5-81}$$

其中，x_i 是区间的左端点；x_{i+1} 是区间的右端点；ϕ_i 是分割点 i 所对应的电势值。如图 5-20(a)所示，$i=0,1,2,3,4$，且 $\phi_0=0,\phi_4=1$。因此，每个区间上的电势值，都可以使用本区间上的线性“基函数”展开，比如，对于区间 0，其对应的函数展开为

$$\phi(x)=\phi_1\frac{x}{1/4}=4\phi_1x$$

其他各个区间可以类似得到。将各个区间的电势函数代入泛函，并将泛函表示为各个区间的积分之和，则

$$J[\phi]=\sum_0^3\left[\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\mathrm{d}x+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x+1)\left(\phi_i\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}+\phi_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\mathrm{d}x\right]$$

则可以得到对应的函数为

$$J(f_1,f_2,f_3)=\frac{3f_2}{8}-\frac{5f_1}{24}-\frac{57f_3}{16}+2f_3^2+\frac{f_1(96f_1+25)}{48}+$$

$$2(f_1-f_2)^2+2(f_3-f_2)^2+\frac{269}{96}$$

对上述函数求极值，则有

$$\frac{\partial J}{\partial f_1}=8f_1-4f_2+\frac{5}{16}=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial f_2}=8f_2-4f_1-4f_3+\frac{3}{8}=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial f_3}=8f_3-4f_2-\frac{57}{16}=0$$

于是求得

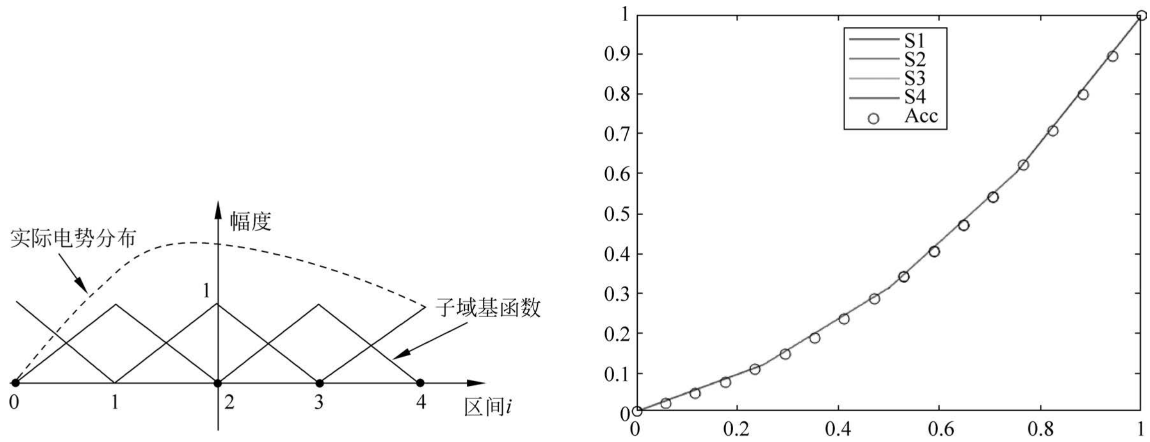
$$f_1=\frac{15}{128},\quad f_2=\frac{5}{16},\quad f_3=\frac{77}{128}$$

上述过程对应的 MATLAB 代码如下：

```
syms x                                             %定义符号变量 x
syms f [1,3]                                       %定义符号变量 f1,f2,f3
```

```
d = 1/4;                                               % 区间间隔
node = [0 f 1];                                        % 区间节点处的电势值,用符号表示
J = 0;                                                 % 给 J 赋初值
for i = 1:4                                            % 对 4 个区间循环
phi = node(i) * ((i) * d - x)/(d) + node(i + 1) * (x - (i - 1) * d)/d; % 定义未知函数的展开形式
tmp = int(0.5 * (node(i + 1) - node(i))^2/d^2 + phi * (x + 1),x,i * d,(i + 1) * d)
                                                       % 定义泛函对应的普通函数
J = J + tmp;                                           % 做累加
end
F = solve(diff(J,f1) == 0,diff(J,f2) == 0,diff(J,f3) == 0,f1,f2,f3); % 求解展开系数
node = [0 F.f1 F.f2 F.f3 1];                           % 重新定义区间端点对应的电势
for i = 1:4
phi = node(i) * ((i) * d - x)/(d) + node(i + 1) * (x - (i - 1) * d)/d;
                                                       % 计算区间内电势函数的展开形式
fplot(phi,[(i - 1) * d, (i) * d]); hold on;            % 绘制该区间的电势函数
end
Ay = 1/6 * x^3 + 1/2 * x^2 + 1/3 * x;                  % 精确解
fplot(Ay,[0,1],'ko');                                  % 绘制精确解
hold off;
legend('S1','S2','S3','S4','Acc','location','North');  % 标注两条曲线,Si 表示第 i 个区间
```

程序运行后的结果如图 5-20(b)所示。其中圆圈表示的是精确解,实线表示的是数值计算的结果。可以看出,二者吻合得非常好。



(a) 各区间上的线性、子域基函数及其图示　　(b) 有限元方法与精确解对比

图 5-20　子域基函数图示以及有限元法与精确解对应曲线比较

5.8　小结

本章介绍了 MATLAB 环境中的符号工具箱。利用该符号工具箱的强大功能,可以辅助进行符号推演,从而将人们从烦琐、易错的劳动中解脱出来,大大提高工作效率。以变换电磁理论的推演、线性方程组求解、张量对角化、椭球坐标系、半无限大平板的衍射和变分法数值计算为例,详细介绍了各个相关命令、函数及其实际应用。符号推演得到的结果相对复杂,因此要通过各种方式进行简化,并需要人工介入,在应用的时候必须留意。