

第 4 章讨论了无失真信源编码,给出了无失真信源编码定理即香农第一定理。

现在一个自然而然的问题是:在信道传输信息时是否必须完全无失真?回答是:通常不需要。例如,人类主要通过视觉和听觉获取信息,人的视觉大多数情况下对于每秒 25 帧以上的图像认为是连续的,通常只需传送每秒 25 帧的图像就能满足人类通过视觉感知信息的要求,而不必占用更大的信息传输率。而对于人类的听觉,大多数人只能听到几千赫兹到十几千赫兹的声音,即使经过专业训练的音乐家,一般也不过听到二十千赫兹的声音。所以,为了提高信息传输效率,在实际中通常总是要求在保证一定质量的前提下在信宿近似地再现信源输出的信息,或者说在保真度准则下允许信源输出存在一定的失真。

本章将讨论在允许一定失真情况下的信源编码问题,从分析失真函数、信息率失真函数出发,给出限失真编码定理,即香农第三定理。

5.1 失真函数

从本质上看,限失真信源编码就是对数据进行压缩。在实际问题中,被压缩的数据有一定的失真是可以容忍的。但是,当失真大于某一限度后,信息质量将被严重损伤,甚至会丧失其实用价值。要规定失真限度,必须要有一个定量的失真测度,为此需要引入失真函数的概念。

5.1.1 失真度

在数学模型上,可将有失真的信源编码过程看作数据通过一种有干扰的信道。这种干扰信道常被称作试验信道。如图 5.1 所示,信源输出原始数据 $x_1, x_2, \dots$ 给试验信道,而信道输出有失真的数据 $y_1, y_2, \dots$ 给信宿,这就完成了数据压缩。先考虑简单的单符号信源的情况,然后再考虑多符号信源的情况。

设有一个单符号离散无记忆信源 X ,其概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \end{bmatrix}$$



图 5.1 限失真信源编码模型

让试验信道输出符号集表示为 $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 用一个非负函数 $d(x_i, y_j)$ 表示发出 x_i 收到 y_j 的失真度。那么整体失真情况就可用如下矩阵来刻画, 称为失真矩阵。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d(x_1, y_1) & d(x_1, y_2) & \cdots & d(x_1, y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d(x_n, y_1) & d(x_n, y_2) & \cdots & d(x_n, y_m) \end{bmatrix} = [d_{ij}]$$

失真度 $d(x_i, y_j)$ 的函数形式可以根据需要任意选取, 例如平方代价函数、绝对代价函数、均匀代价函数等。常用的失真函数如下:

$$\begin{cases} \text{均方失真} & d(x_i, y_j) = (x_i - y_j)^2 \\ \text{绝对失真} & d(x_i, y_j) = |x_i - y_j| \\ \text{相对失真} & d(x_i, y_j) = \frac{|x_i - y_j|}{|x_i|} \\ \text{误码失真} & d(x_i, y_j) = \delta(x_i, y_j) = \begin{cases} 0, & x_i = y_j \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \end{cases}$$

例 5.1 假定试验信道就是二进制纯删除信道。设输入符号集为 $\mathbf{A} = \{0, 1\}$, 输出符号集为 $\mathbf{B} = \{0, ?, 1\}$, 定义失真矩阵为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

该失真矩阵表明, 发出 0 收到 0 或者发出 1 收到 1 是没有失真, 发出 0 收到 1 或者发出 1 收到 0 是完全失真, 发出 0 或 1 收到删除符号“?”表示有部分失真。

考虑将失真函数概念推广到矢量传输的情况。为此, 需要考虑单符号信源 X 的 K 次扩展信源 X^K 。设试验信道输入的是长度为 K 的信源符号序列

$$\mathbf{x}_i = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_K}], \quad x_{i_k} \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

经信道传输后, 信宿接收到的长度为 K 的符号序列可表示为

$$\mathbf{y}_j = [y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_K}], \quad y_{j_k} \in \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

则发出 x_i 收到 y_j 的失真度可定义为

$$d_K(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(x_{i_k}, y_{j_k}) \quad (5.1)$$

所有这些不同的 $d_K(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ 可形成一个 $n^K \times m^K$ 阶失真矩阵 $\mathbf{D}_K$ 。

例 5.2 在例 5.1 的条件下, 求出 $K=2$ 时的失真矩阵。

解 按定义可以计算出

$$\begin{aligned} d_2(00, 00) &= \frac{1}{2} [d(0, 0) + d(0, 0)] = 0 \\ d_2(00, 0?) &= \frac{1}{2} [d(0, 0) + d(0, ?)] = \frac{1}{4} \\ d_2(00, 01) &= \frac{1}{2} [d(0, 0) + d(0, 1)] = \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ d_2(00, 11) &= \frac{1}{2} [d(0, 1) + d(0, 1)] = 1 \end{aligned}$$

于是有

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

5.1.2 平均失真度

在单符号情况中, x_i, y_j 均是随机变量, 因此失真函数 $d(x_i, y_j)$ 也是随机变量, 称失真度的数学期望为平均失真度, 并记为 $\bar{D}$ 。 $\bar{D}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \bar{D} = E[d] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) d(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i) P(y_j | x_i) d(x_i, y_j) \end{aligned}$$

平均失真度 $\bar{D}$ 是对给定信源分布 $\{P(x_i)\}$ 在给定转移概率分布为 $\{P(y_j | x_i)\}$ 的试验信道中传输时失真的总体量度。

在多符号情况中, 由式(5.1), 平均失真度可表示为

$$\bar{D}_K = E[d_K] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E[d(x_{i_k}, y_{j_k})] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \bar{D}_k$$

其中, $\bar{D}_k$ 是第 k 个位置上符号的平均失真度。显然, 由第3章讨论可知, 如果多符号信源是离散无记忆 K 次扩展信源, 而试验信道是离散无记忆 K 次扩展信道, 则每个位置上符号的平均失真度 $\bar{D}_k$ 相等, 为 $\bar{D}$, 此时有 $\bar{D}_K = \bar{D}$ 。

例 5.3 设信源 X 有 $2n$ 个符号, 其概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{2n} \\ \frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{bmatrix}$$

与输入符号集一样, 试验信道输出符号集也为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{2n}\}$, 而失真函数为

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

假定可允许平均失真度 $\bar{D} \leq \frac{1}{2}$, 试分析信息传输率可压缩程度。

解 信源 X 所有 $2n$ 个符号是等概率分布的, 因此按照熵的性质, 信息熵达到最大值为 $H(X) = \log(2n)$ 。如果对信源 X 进行无失真编码, 即要求 $\bar{D} = 0$, 则相应的试验信道应是无干扰信道, 此时信息传输率就等于 $\log(2n)$ 。

当可允许平均失真度 $\bar{D} \leq \frac{1}{2}$ 时, 一个容易实现的信源编码方案是: 编码器输入为 $x \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 输出为 x ; 输入为 $x \in \{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{2n}\}$, 输出为 x_n 。这样其等效试验信道的信道转移概率为

$$P(y = x_j | x = x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, 1 \leq i \leq n \\ 1, & j = n, n+1 \leq i \leq 2n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由此可以计算出该编码方案的平均失真度为

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} P(x_i) P(x_j | x_i) d(x_i, x_j) = \frac{1}{2}$$

因此,该编码方案满足对平均失真度的要求。由上述信道转移概率表达式可知,该试验信道实际上是一个确定信道,因此有

$$H(Y | X) = 0$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y | X) = H(Y)$$

容易计算出输出符号概率分布为

$$P(y = x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & 1 \leq j \leq n-1 \\ \frac{1+n}{2n}, & j = n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这样

$$I(X; Y) = H(Y) = \log 2n - \frac{n+1}{2n} \log(n+1)$$

此时信息传输率变为 $\log 2n - \frac{n+1}{2n} \log(n+1)$, 或者说信息传输率压缩了

$$\frac{n+1}{2n} \log(n+1)$$

还能进一步压缩吗? 信息传输率最大可压缩到什么程度? 这是 5.2 节要讨论的话题。

5.2 信息率失真函数

我们将有失真的信源编码器视作有干扰的信道,那么就可以用分析信道信息传输的方法来研究限失真编码问题。一个自然而然的问题是,对于给定的信源,在允许一定失真条件下,试验信道中最低信息传输速率(接收端为再现信源消息所应得的最小平均互信息量)是多少呢?

5.2.1 信息率失真函数的定义

对于上述的一定失真条件,通常用平均失真度来表示。如果预先规定平均失真度为 D ,则称信源编码后的平均失真度 $\bar{D}$ 不大于 D 的准则为**保真度准则**。因此,数据压缩问题就是,对于给定的信源,在满足保真度准则($\bar{D} \leq D$)的前提下,使信息传输率尽可能小。将满足保真度准则的这些试验信道称为 **D 失真许可的试验信道**。信道用信道转移概率 $P(y|x)$ 刻画,因此 D 失真许可的试验信道集合可表示为

$$C_D = \{P(y|x) : \bar{D} \leq D\} \quad (5.2)$$

对于单符号离散无记忆信道, D 失真许可的试验信道集合可表示为

$$C_D = \{P(y_j | x_i) : \bar{D} \leq D, 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\} \quad (5.3)$$

考虑对一个单符号离散无记忆信源 X 进行数据压缩, 且允许平均失真度不超过 D , 那么对其最低的压缩率会是多少呢? 这个问题实际上可以变换为这样的问题: 在 D 失真许可的试验信道集合 C_D 中, 寻找一个信道 $P(y_j | x_i)$ 使信源 X 经过此信道传输时, 其信道传输率 $I(X; Y)$ 达到最小。这个最小的信道传输率 $I(X; Y)$ 就是最低的数据压缩率, 将之定义为信息率失真函数, 并简称率失真函数, 记为 $R(D)$, 即有

$$R(D) = \min_{P(y_j | x_i) \in C_D} I(X; Y) \quad (5.4)$$

率失真函数可再写为

$$R(D) = \min_{P(y_j | x_i) \in C_D} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i) P(y_j | x_i) \log \frac{P(y_j | x_i)}{P(y_j)} \quad (5.5)$$

其中, $P(x_i)$ 是信源发出符号概率分布, $i=1, 2, \dots, n$; $P(y_j | x_i)$ 是信道转移概率分布, $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$; $P(y_j)$ 是接收端收到符号概率分布, $j=1, 2, \dots, m$ 。

至于多符号情况, 率失真函数可延伸表示为

$$R_K(D) = \min_{P(y_j | x_i) \in C_D} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (5.6)$$

5.2.2 信息率失真函数的性质

信息率失真函数 $R(D)$ 有如下三个基本性质。

(1) $R(D)$ 是非负函数, 其定义域为 $[0, D_{\max}]$, 其值域为 $[0, H(X)]$ 。

(2) $R(D)$ 是关于失真度 D 的下凸函数。

(3) $R(D)$ 是关于失真度 D 的严格递减函数。

下面分别论证这三个性质。

1. $R(D)$ 的定义域性质

$R(D)$ 的定义域表示为 $[D_{\min}, D_{\max}]$ 。一般情况下, 由失真度的非负性和平移性, 可以假设 $D_{\min}=0$, 这对应于无失真情况, 此时必有 $R(0) \leq H(X)$ 。关于 $D_{\max}$, 显然应该满足 $R(D_{\max})=0$ 。定义 $D_{\max}$ 是满足 $R(D)=0$ 的所有平均失真度 D 中的最小值, 即

$$D_{\max} = \min_{P(y|x) \in C_D^{(0)}} E[d(x, y)]$$

其中, $C_D^{(0)} = \{P(y|x) : I(X; Y)=0\}$ 。

下一个问题是如何能求出 $D_{\max}$ 。由于 $I(X; Y)=0$ 的充分必要条件是 X 与 Y 统计独立, 即对于任意的 x, y 有 $P(y|x)=P(y)$ 成立。这样

$$D_{\max} = \min_y \sum_x P(y) \sum_x P(x) d(x, y) \quad (5.7)$$

式中, $P(x)$ 和 $d(x, y)$ 是已知的, 该最小化问题归结为选择分布 $P(y)$ 使式(5.7)右端达到最小。如果对最小的 $\sum_x P(x) d(x, y)$ 选取 $P(y)=1$, 而对其他的 $\sum_x P(x) d(x, y)$ 选取 $P(y)=0$, 则必有

$$D_{\max} = \min_y \sum_x P(x) d(x, y) \quad (5.8)$$

例 5.4 设输入符号集为 $\mathbf{A}=\{0, 1\}$, 输出符号集为 $\mathbf{B}=\{0, 1\}$, 输入概率分布为 $P(x=0)=\frac{1}{3}, P(x=1)=\frac{2}{3}$, 而失真矩阵为

$$\mathbf{D} = [d(x, y)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试求率失真函数 $R(D)$ 的定义域。

解 如果选择信道转移概率等于

$$\begin{cases} P(y=0 | x=0) = 1 \\ P(y=1 | x=0) = 0 \\ P(y=0 | x=1) = 0 \\ P(y=1 | x=1) = 1 \end{cases}$$

可以计算出此时的平均失真度为

$$\bar{D} = \sum_{x,y} P(x)P(y|x)d(x,y) = 0$$

因此, 有 $D_{\min} = 0$ 。此外, 由式(5.8)可知

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \min_y \sum_x P(x)d(x,y) \\ &= \min \left\{ \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1, \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

故 $R(D)$ 的定义域为 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 。 ■

2. $R(D)$ 的下凸函数性质

假定 D_1 和 D_2 是两个平均失真度, 而 $P_1(y|x)$ 和 $P_2(y|x)$ 是在满足保真度准则 D_1 和 D_2 的前提下使 $I(X;Y)$ 达到极小的信道转移概率, 则有

$$R(D_1) = \min_{P(y|x) \in \mathbf{C}_{D_1}} I[P(y|x)] = I[P_1(y|x)]$$

$$R(D_2) = \min_{P(y|x) \in \mathbf{C}_{D_2}} I[P(y|x)] = I[P_2(y|x)]$$

且

$$\begin{aligned} \sum_x \sum_y P(x)P_1(y|x)d(x,y) &\leq D_1 \\ \sum_x \sum_y P(x)P_2(y|x)d(x,y) &\leq D_2 \end{aligned}$$

令 $0 < \alpha < 1$, 且使

$$D_0 = \alpha D_1 + (1 - \alpha) D_2$$

$$P_0(y|x) = \alpha P_1(y|x) + (1 - \alpha) P_2(y|x)$$

记 D 是 $P_0(y|x)$ 所对应的失真度, 则

$$\begin{aligned} D &= \sum_x \sum_y P(x)P_0(y|x)d(x,y) \\ &= \alpha \sum_x \sum_y P(x)P_1(y|x)d(x,y) + (1 - \alpha) \sum_x \sum_y P(x)P_2(y|x)d(x,y) \\ &= \alpha D_1 + (1 - \alpha) D_2 \\ &= D_0 \end{aligned}$$

所以, $P_0(y|x) \in \mathbf{C}_{D_0}$, 即 $P_0(y|x)$ 是 D_0 失真许可的试验信道。再由信息率失真函数定义式(5.4), 可得

$$\begin{aligned}
R(D_0) &= \min_{P(y|x) \in \mathcal{C}_{D_0}} I[P(y|x)] \leq I[P_0(y|x)] \\
&= I[\alpha P_1(y|x) + (1-\alpha)P_2(y|x)] \leq \alpha I[P_1(y|x)] + (1-\alpha)I[P_2(y|x)] \\
&= \alpha R(D_1) + (1-\alpha)R(D_2)
\end{aligned} \quad (5.9)$$

这符合下凸函数的定义。因此 $R(D)$ 是关于失真度 D 的下凸函数。

此外,值得一提的是, $R(D)$ 显然是连续函数,因为 $I[P(y|x)]$ 是 $P(y|x)$ 的连续函数,由 $R(D)$ 的定义可知 $R(D)$ 是连续函数。

3. $R(D)$ 的严格递减函数性质

$R(D)$ 是非增函数。因为若 $D_1 > D_2$,则满足保真度 D_1 与 D_2 的试验信道集合 $\mathcal{C}_{D_1}$ 和 $\mathcal{C}_{D_2}$ 满足 $\mathcal{C}_{D_1} \supset \mathcal{C}_{D_2}$,进而由 $R(D)$ 的定义有

$$R(D_1) = \min_{P(y|x) \in \mathcal{C}_{D_1}} I[P(y|x)] \leq \min_{P(y|x) \in \mathcal{C}_{D_2}} I[P(y|x)] = R(D_2) \quad (5.10)$$

要证明 $R(D)$ 是严格递减函数,只需证明式(5.10)中等号不成立即可。下面采用反证法来证明。

在 $[0, D_{\max}]$ 中任取两点 D_1 和 D_2 满足 $0 < D_1 < D_2 < D_{\max}$ 。假定 $R(D_1) \geq R(D_2)$ 中的等号成立,则在 $[D_1, D_2]$ 中的所有 $R(D)$ 恒为常数,记为 R 。欲证明在 $[D_1, D_2]$ 中 $R(D)$ 不是常数,则要找一 $D_0 \in [D_1, D_2]$,使 $R(D_0) \neq R$ 。下面运用 $R(D)$ 的下凸性在 $[D_1, D_{\max}]$ 之间构造一个 D_0 使之介于 $[D_1, D_2]$ 且使 $R[D_0] \neq R$ 。

拟选取一个 ϵ , 使 $0 < \epsilon < 1$, 且 $D_1 < (1-\epsilon)D_1 + \epsilon D_{\max} < D_2$, 则 ϵ 必须满足

$$0 < \epsilon < \frac{D_2 - D_1}{D_{\max} - D_1} < 1$$

这样 ϵ 显然存在。现在令 $D_0 = (1-\epsilon)D_1 + \epsilon D_{\max}$, 于是有

$$\begin{aligned}
R(D_0) &= R((1-\epsilon)D_1 + \epsilon D_{\max}) \leq (1-\epsilon)R(D_1) + \epsilon R(D_{\max}) \\
&= (1-\epsilon)R(D_1) \\
&= R(1-\epsilon) < R
\end{aligned}$$

因此, $R(D)$ 是关于失真度 D 的严格递减函数,如图 5.2 所示。

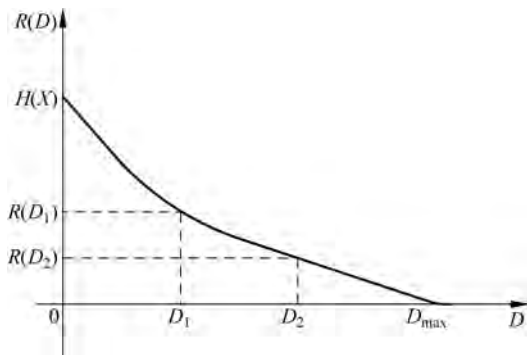


图 5.2 率失真函数 $R(D)$ 关于 D 的严格递减性

5.2.3 二进制信源的率失真函数

1. 平均错误传递概率与汉明失真函数

让试验信道输入符号集表示为 $\mathbf{A} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 输出符号集表示为 $\mathbf{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 而失真函数表示为

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

那么,在 $m=n$ 的情况下,我们称这样的失真函数为**汉明失真函数**。汉明失真矩阵表示为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

汉明失真度是一种常用的失真测度。在汉明失真情况下,平均失真度等于平均错误传递(转移)概率:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(x_i) P(y_j | x_i) d(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n P(x_i) \sum_{j \neq i} P(y_j | x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(x_i) P_e^{(i)} \\ &= P_e \end{aligned}$$

其中, $P_e^{(i)} = \sum_{j \neq i} P(y_j | x_i)$ 。这里 $P(y_j | x_i) (j \neq i)$ 表示试验信道将符号 x_i 错误传递为 y_j 的概率,因而 $P_e^{(i)}$ 表示试验信道错误传递符号 x_i 的概率,故 P_e 表示试验信道平均错误传递概率。

平均错误传递概率 P_e 与信道疑义度 $H(X|Y)$ 有如下的内在联系。

引理 5.1 (费诺不等式)

$$H(X|Y) \leq H(P_e) + P_e \log(n-1) \quad (5.11)$$

证明 用引理 2.2 来证明。由于

$$\begin{aligned} &H(P_e) + P_e \log(n-1) \\ &= -P_e \log P_e - (1-P_e) \log(1-P_e) + P_e \log(n-1) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} P(x_i, y_j) \log \frac{n-1}{P_e} + \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \log \frac{1}{1-P_e} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &H(X|Y) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \log P(x_i | y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} P(x_i, y_j) \log \frac{1}{P(x_i | y_j)} + \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \log \frac{1}{P(x_i | y_i)} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &H(X|Y) - H(P_e) - P_e \log(n-1) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} P(x_i, y_j) \log \frac{P_e/(n-1)}{P(x_i | y_j)} + \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \log \frac{1-P_e}{P(x_i | y_i)} \end{aligned}$$

令 $z_k \leftrightarrow (x_i, y_j)$, 即通过某种排序使一维指标与二维指标一一对应,并定义

$$p_k = P(z_k) = P(x_i, y_j)$$

$$q_k = Q(z_k) = \begin{cases} P_e/(n-1), & j \neq i \\ 1 - P_e, & j = i \end{cases}$$

显然还有

$$\sum_k p_k = 1, \quad \sum_k q_k = 1$$

因此应用引理 2.2 得

$$H(X|Y) - H(P_e) - P_e \log(n-1)$$

$$= \sum_k p_k \log \frac{q_k}{p_k} \leq 0$$

即费诺不等式成立。 ■

值得一提的是,这里面向试验信道引出了费诺不等式。在第 6 章考虑编码信道时,如让 P_e 表示平均错误译码概率,不局限于 $m=n$ 的情况,对于一般的 n 和 m ,费诺不等式均成立。

2. 二进制信源的 $R(D)$ 函数求解

设二进制信源 X , 其概率分布为

$$P(x=0) = \omega, \quad P(x=1) = 1 - \omega, \quad \omega \leq \frac{1}{2}$$

试验信道输入符号集为 $\mathbf{A} = \{0, 1\}$, 输出符号集为 $\mathbf{B} = \{0, 1\}$, 失真矩阵是汉明失真矩阵, 即

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因此,最小允许失真度为 $D_{\min} = 0$ 。容易找到满足最小失真 $D_{\min} = 0$ 的试验信道,这是一个确定无损信道,其信道矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算得

$$R(0) = I(X;Y) = H(\omega)$$

由于是汉明失真,因此可计算出最大允许失真度为

$$D_{\max} = \min_y \sum_x P(x) d(x, y)$$

$$= \min[P(0)d(0,0) + P(1)d(1,0); P(0)d(0,1) + P(1)d(1,1)]$$

$$= \min[(1-\omega); \omega] = \omega$$

可达到最大允许失真度 $D_{\max} = \omega$ 的试验信道能确定为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即这个试验信道能正确传送信源符号 $x=1$ 。当传送信源符号 $x=0$ 时,接收符号一定为 $y=1$; 那么,凡发送符号 $x=0$ 时,一定都错了。既然 $x=0$ 出现的概率为 ω , 所以信道的平均失真度为 ω 。在这种试验信道条件下,可计算出

$$R(D_{\max}) = R(\omega) = I(X;Y) = 0$$

在一般情况下,当 $0 < D < D_{\max} = \omega$ 时,由前面讨论可知,平均失真度为平均错误概率,

即 $\bar{D} = P_e$ 。此时,选取任一试验信道使 $\bar{D} = D$,得平均互信息量

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(\omega) - H(X|Y)$$

当 $n=2$ 时,根据费诺不等式有

$$H(X|Y) \leq H(P_e) = H(D)$$

所以有

$$I(X;Y) \geq H(\omega) - H(D)$$

$H(\omega) - H(D)$ 就是平均互信息量的下限值。根据信息率失真函数的定义,这个下限值就是 $R(D)$ 的数值。为了证实这一点,必须找到一个试验信道,使其平均失真度 $\bar{D} \leq D$,而平均互信息达到这个下限值。

依据平均互信息量的互易性,寻找这个试验信道最好的方法是引进一个“反向”的试验信道,现设这个反向信道为

$$\begin{cases} P(x=0|y=0) = 1-D \\ P(x=1|y=0) = D \\ P(x=0|y=1) = D \\ P(x=1|y=1) = 1-D \end{cases}$$

如图 5.3 所示。容易计算得

$$\begin{cases} P(y=0) = \frac{\omega - D}{1 - 2D} \\ P(y=1) = \frac{1 - \omega - D}{1 - 2D} \end{cases}$$

因为 $0 < D < \omega = \frac{1}{2}$, $0 < P(y) < 1$, 所以所设的反向试验信道

是存在的。在该试验信道的条件下,平均失真度可计算得

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \sum_{x,y} P(x,y) d(x,y) \\ &= \frac{D(1-\omega-D)}{1-2D} + \frac{D(\omega-D)}{1-2D} \\ &= D \end{aligned}$$

这说明平均失真度满足设计的要求。既然

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_{x,y} P(x,y) \log \frac{1}{P(x|y)} \\ &= -[D \log D + (1-D) \log (1-D)] \cdot \sum_y P(y) \\ &= H(D) \end{aligned}$$

那么,在该试验信道中,传输的信息量为

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(\omega) - H(D) \\ &= R(D) \end{aligned}$$

由此可见,平均互信息量达到了最小值,所选择的信道符合设计要求。

综上,信源 X 的信息率失真函数为

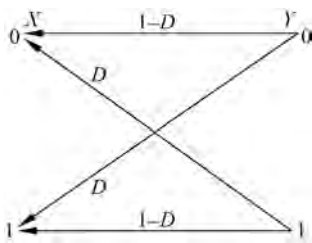


图 5.3 反向试验信道

$$R(D) = \begin{cases} H(\omega) - H(D), & 0 \leq D \leq \omega \\ 0, & D > \omega \end{cases} \quad (5.12)$$

$R(D)$ 的曲线如图 5.4 所示。

图 5.5 给出在不同 ω 值下的 $R(D)$ 曲线。从图 5.5 可以看出,对于同一 D , ω 越大, $R(D)$ 越大,信源压缩的可能性越小。

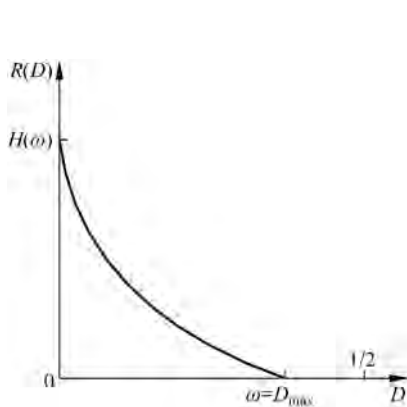


图 5.4 二进制信源 X 的 $R(D)$ 曲线

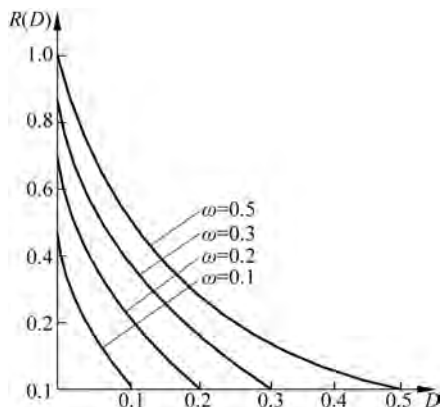


图 5.5 不同 ω 值下的 $R(D)$ 函数

值得一提的是,在前面的计算中,我们是从反向试验信道来计算 $I(X; Y)$ 的。实际上,这个反向试验信道就是正向试验信道,它们只是一个信道从两个不同角度考虑的两种不同表示方法。反向试验信道的转移概率为 $P(x|y)$,而正向试验信道的转移概率为 $P(y|x)$ 。当 $P(x)$ 给定时,就可从 $P(y|x)$ 唯一地确定出对应的 $P(x|y)$,反之亦然。所以,反向试验信道和正向试验信道指的是同一试验信道。依据平均互信息量的互易性,从反向试验信道进行计算就方便了。

对于信源 X ,从寻找所得的反向试验信道可求得正向试验信道为

$$\begin{cases} P(y=0 | x=0) = 1-D \\ P(y=1 | x=0) = D \\ P(y=0 | x=1) = D \\ P(y=1 | x=1) = 1-D \end{cases}$$

如图 5.6 所示。

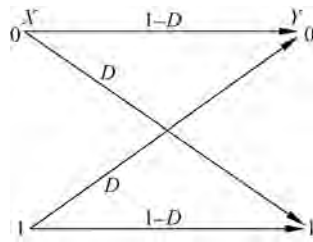


图 5.6 正向试验信道

5.3 信息率失真函数的计算

如果信源概率分布和失真函数已知,求信息率失真函数问题就变成了在保真度准则的约束下求平均互信息量的极小值问题。在一般情况下,这个问题很难求得如 5.2.3 节给出的闭式解,通常要采用参量表述方法或者迭代计算方法来进行求解。

5.3.1 率失真函数的参量表述方法

试验信道的输入概率分布为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \end{bmatrix}$$

输出概率分布为

$$\begin{bmatrix} Y \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ P(y_1) & P(y_2) & \cdots & P(y_m) \end{bmatrix}$$

字符传输的失真函数为

$$d(x_i, y_j), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

为了表达简洁,记

$$\begin{aligned} d_{ij} &= d(x_i, y_j), & p_{ij} &= P(y_j | x_i) \\ p_i &= P(x_i), & q_j &= P(y_j) \end{aligned}$$

其中

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^n P(x_i) P(y_j | x_i) = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}$$

则信息率失真函数 $R(D)$ 的计算问题变为在约束条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i p_{ij} d_{ij} = D \\ \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5.13)$$

下求平均互信息量

$$I(X; Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_j} \quad (5.14)$$

的极小值问题。

在数学上应用著名的拉格朗日乘子法就可将上述条件极值问题转换为无条件极值问题。为此,引入乘子 s 和 $\mu_i, i=1, 2, \dots, n$, 作辅助函数

$$\Omega(\{p_{ij}\}) = I(X; Y) + s \left[D - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i p_{ij} d_{ij} \right] + \sum_{i=1}^n \mu_i \left[1 - \sum_{j=1}^m p_{ij} \right]$$

由辅助函数对各个信道转移概率 p_{ij} 分别求偏导并置之为零,可得 $n \times m$ 个方程

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.15)$$

如果由式(5.15)能解出 $n \times m$ 个 p_{ij} , 代入式(5.14)就会得到在式(5.13)约束条件下的 $I(X; Y)$ 极小值,即为所求的 $R(D)$ 。

对式(5.15)中的辅助函数展开并逐项求偏导后可得

$$p_i \log \frac{p_{ij}}{q_j} - s p_i d_{ij} - \mu_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (5.16)$$

这样

$$p_{ij} = q_j \cdot e^{s d_{ij} + \mu_i / p_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (5.17)$$

式(5.17)可简写为

$$p_{ij} = q_j \cdot \lambda_i \cdot e^{sd_{ij}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (5.18)$$

其中,

$$\lambda_i = e^{\mu_i / p_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.19)$$

式(5.18)给出的 p_{ij} 表达式仍涉及待定常数 s 和 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$, 因此需要结合约束条件式(5.13)进行联合求解。

考虑保留待定常数 s 作为参量, 求出仅含 s 的所有 p_{ij} 与 λ_i 参量表达式。由于 $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$, 故对式(5.18)求和得

$$\lambda_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^m q_j \cdot e^{sd_{ij}}}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.20)$$

另外, 由于 $q_j = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}$, 因此对式(5.18)两边同乘 p_i , 并求和得

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot p_i \cdot e^{sd_{ij}} = 1, \quad 1 \leq j \leq m \quad (5.21)$$

将式(5.20)代入式(5.21)可得关于 q_j 的 m 个方程

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_i \cdot e^{sd_{ij}}}{\sum_{j=1}^m q_j \cdot e^{sd_{ij}}} = 1, \quad 1 \leq j \leq m \quad (5.22)$$

由式(5.22)可解出含有 s 的 m 个 q_j , 再将这些 q_j 代入式(5.20)可解出含有 s 的 n 个 λ_i , 最后将这些解出的 m 个 q_j 和 n 个 λ_i 代入式(5.18)就可解出仅含有 s 的 $n \times m$ 个 p_{ij} 。

将这些解出的 p_{ij} 代入约束条件式(5.13)可得

$$D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i p_i q_j d_{ij} e^{sd_{ij}} \quad (5.23)$$

式(5.23)给出的允许失真度表达式仅含参量 s , 故记为 $D(s)$ 。将极值解式(5.18)代入平均互信息量表达式(5.14)并利用式(5.23)进行化简, 最后可得仅含参量 s 的率失真函数表达式为

$$R(D) = R(s) = \sum_{i=1}^n P_i \log \lambda_i + sD(s) \quad (5.24)$$

一般情况下, 参量 s 无法消去, 因此得不到 $R(D)$ 的闭式解, 只有在一些比较简单情况下才可以消去参量 s , 得到 $R(D)$ 的闭式解。若无法消去参量 s , 就需要进行逐点计算。

与待定常数 $\mu_i (i=1, 2, \dots, n)$ 相比, 待定常数 s 在率失真函数问题的求解中发挥着十分重要的作用。为此, 下面深入分析其特性。

允许失真度 $D(s)$ 是参量 s 的函数, 反过来, s 也可看作 D 的函数, 进而 λ_i 也可看作 D 的函数。这样可以对式(5.24)表示的 $R(D)$ 关于 D 进行求导以获得率失真函数的斜率:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dD} &= \frac{\partial R}{\partial D} + \frac{\partial R}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial D} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial D} \\ &= \frac{\partial R}{\partial D} + \frac{\partial R}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dD} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{d\lambda_i}{dD} \\ &= s + D \cdot \frac{ds}{dD} + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\lambda_i} \cdot \frac{d\lambda_i}{dD} \end{aligned}$$

$$= s + \left[D + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\lambda_i} \cdot \frac{d\lambda_i}{ds} \right] \cdot \frac{ds}{dD} \quad (5.25)$$

为求出 $\frac{d\lambda_i}{ds}$, 在式(5.21)中对 s 求导得

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot e^{sd_{ij}} \frac{d\lambda_i}{ds} + \lambda_i p_i d_{ij} e^{sd_{ij}} = 0 \quad (5.26)$$

对式(5.26)两边同乘以 q_j , 并对 j 求和得

$$\sum_{i=1}^n p_i \left(\sum_{j=1}^m q_j \cdot e^{sd_{ij}} \right) \frac{d\lambda_i}{ds} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m q_j p_i \lambda_i d_{ij} e^{sd_{ij}} = 0 \quad (5.27)$$

将式(5.20)和式(5.23)代入式(5.27)得

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{ds} + D = 0 \quad (5.28)$$

将式(5.28)代入式(5.25)最后可得

$$\frac{dR}{dD} = s \quad (5.29)$$

式(5.29)表明, 保留的待定常数 s 参量, 正好就是允许失真度 D 作为变量的率失真函数 $R(D)$ 的斜率。由于 $R(D)$ 是关于失真度 D 的下凸函数和严格递减函数, 这意味着 $R(D)$ 的斜率 $s = \frac{dR}{dD} < 0$, 且 $\frac{ds}{dD} > 0$, 斜率 s 会随失真度 D 的增加而增加。一般而言, $R(D)$ 的斜率 s 在开区间 $(0, D_{\max})$ 是失真度 D 的连续函数, 但当 $D=0$ 时, $s = -\infty$; 当 $D > D_{\max}$ 时, $R(D)=0$, $s = \frac{dR}{dD} = 0$ 。在 $D=D_{\max}$ 时, 除一些特殊情况外, s 将从负值跳到零, 因而在这一点上, s 是不连续的。率失真函数 $R(D)$ 与其斜率 s 之间关系如图 5.7 所示。

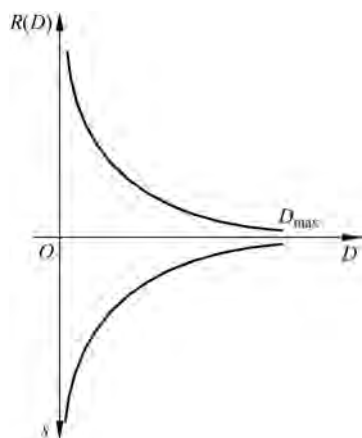


图 5.7 率失真函数 $R(D)$ 与其斜率 s 之间的关系

例 5.5 设信源 X 有 n 个符号, 其概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

试验信道输出符号也有 n 个, 其集合为 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 失真函数定义为

$$d(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

求信息率失真函数 $R(D)$ 。

解 简记

$$d_{ij} = d(x_i, y_j), \quad p_i = P(x_i), \quad q_j = P(y_j)$$

为了求解信息率失真函数 $R(D)$, 先求出带参量 s 的 n 个 q_j 和 n 个 λ_i 表达式。为此, 将已知条件代入式(5.22)得

$$\begin{cases} q_1 + q_2 e^s + \cdots + q_n e^s = \frac{1 + (n-1)e^s}{n} \\ q_1 e^s + q_2 + \cdots + q_n e^s = \frac{1 + (n-1)e^s}{n} \\ \vdots \\ q_1 e^s + q_2 e^s + \cdots + q_n = \frac{1 + (n-1)e^s}{n} \end{cases}$$

解上述方程组可得

$$q_j = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (5.30)$$

将式(5.30)代入式(5.20)得

$$\lambda_i = \frac{n}{1 + (n-1)e^s}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.31)$$

然后再将式(5.30)和式(5.31)代入式(5.23)得

$$D(s) = \frac{(n-1)e^s}{1(n-1)e^s} \quad (5.32)$$

利用式(5.32)解出 s 得

$$s = \log \frac{D}{(n-1)(1-D)} \quad (5.33)$$

将式(5.31)代入式(5.24)得到关于仅含参量 s 的 $R(D)$ 表达式,然后再代入式(5.33),从而有

$$\begin{aligned} R(D) &= \sum_{i=1}^n p_i \log \lambda_i + sD \\ &= \log n - D \log(n-1) - H(D) \end{aligned} \quad (5.34)$$

其中, $H(D) = -D \log D - (1-D) \log(1-D)$ 。

继续考虑例 5.3。应用例 5.5 的最后结果式(5.34),可知

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \log(2n) - \frac{1}{2} \log(2n-1) - 1$$

因此,在可允许平均失真度 $\bar{D} \leq \frac{1}{2}$ 情况下,信息传输率最大可压缩量是

$$\frac{1}{2} \log(2n-1) + 1$$

5.3.2 率失真函数的迭代计算方法

5.3.1 节给出了信息率失真函数 $R(D)$ 的参量表达式 $R(s)$,但是要进行具体计算仍然是相当困难的,一般需要借助计算机进行迭代运算。众所周知,要形成迭代算法的关键是有描述优化函数的具有互为因果关系的两个自变量组。依据率失真函数 $R(D)$ 的定义表达式,选择输出概率分布 $\{q_j\}$ 和信道转移概率 $\{p_{ij}\}$ 作为可产生迭代运算的两个自变量组。下面推导形成迭代运算所需的公式。

依据率失真函数 $R(D)$ 定义表达式,求解 $R(D)$ 的问题就是求在式(5.13)的约束条件

下平均互信息量 $I(X;Y)$ 极小值的问题,而这个问题通过拉格朗日乘子法可转换为求引入待定常数 s 和 $\{\mu_i, 1 \leq i \leq n\}$ 的辅助函数

$$\Omega(s, \{p_{ij}\}) = I(X;Y) + s \left[D - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i p_{ij} d_{ij} \right] + \sum_{i=1}^n \mu_i \left[1 - \sum_{j=1}^m p_{ij} \right]$$

的极小值问题,这已变成了无约束条件下的极值问题。在已知输入概率分布 $\{p_i\}$ 的情况下, $\{q_j\}$ 与 $\{p_{ij}\}$ 是相互关联的。为了导出迭代运算公式,先假定 $\{q_j\}$ 固定不变,与 $\{p_{ij}\}$ 无关。在这种情况下,对辅助函数计算关于各个 p_{ij} 的偏导,并置之为零,可得如下 $n \times m$ 个方程

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.35)$$

完全类似于 5.3.1 节中的推导,有

$$p_{ij}^* = q_j \cdot \lambda_i \cdot e^{sd_{ij}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (5.36)$$

其中,

$$\lambda_i = e^{\mu_i / p_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m q_j \cdot e^{sd_{ij}}}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.37)$$

因此

$$p_{ij}^* = \frac{q_j \cdot e^{sd_{ij}}}{\sum_{j=1}^m q_j \cdot e^{sd_{ij}}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (5.38)$$

这就是在 $\{q_j\}$ 固定不变假定下 $\{p_{ij}\}$ 的优化解。

现在假定 $\{p_{ij}\}$ 固定不变,与 $\{q_j\}$ 无关。可以证明,平均互信息量 $I(X;Y)$ 是关于 $\{q_j\}$ 的下凸函数。因此,在式(5.39)的约束条件下存在关于 $I(X;Y)$ 极小值求解问题

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i p_{ij} d_{ij} = D \\ \sum_{j=1}^m q_j = 1 \end{cases} \quad (5.39)$$

这个问题可通过拉格朗日乘子法转换为引入待定常数 s 和 μ 下关于辅助函数

$$\Psi(s, \{q_j\}) = I(X;Y) + s \left[D - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i p_{ij} d_{ij} \right] + \mu \left[1 - \sum_{j=1}^m q_j \right]$$

的极小值求解问题。在这种情况下,对辅助函数计算关于各个 q_j 的偏导,并置之为零,可得如下 m 个方程

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.40)$$

解上述方程组得

$$q_j^* = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n p_i p_{ij} \quad (5.41)$$

利用约束条件式(5.39)可进一步解出

$$\mu = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p_i p_{ij} = 1 \quad (5.42)$$

因此有

$$q_j^* = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (5.43)$$

这就是在 $\{p_{ij}\}$ 固定不变假定下 $\{q_j\}$ 的优化解。

式(5.43)和式(5.38)形成求解率失真函数 $R(D)$ 迭代算法所需的公式,即

$$\begin{cases} q_j^{(t)} = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}^{(t)}, & 1 \leq j \leq m \\ p_{ij}^{(t+1)} = \frac{q_j^{(t)} e^{sd_{ij}}}{\sum_{j=1}^m q_j^{(t)} e^{sd_{ij}}}, & \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{matrix} \end{cases} \quad (5.44)$$

求 $R(D)$ 迭代算法具体步骤描述如下。

(1) 设定标志算法收敛的误差精度 ϵ , 给定参量 s 值。

(2) 对 $\{p_{ij}^{(1)}\}$ 赋初始值, 一般可取 $p_{ij}^{(1)} = \frac{1}{m}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ 。计算

$$q_j^{(1)} = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}^{(1)}, \quad 1 \leq j \leq m$$

(3) 利用计算出的结果 $\{q_j^{(1)}, 1 \leq j \leq m\}$, 再计算

$$p_{ij}^{(2)} = \frac{q_j^{(1)} e^{sd_{ij}}}{\sum_{j=1}^m q_j^{(1)} e^{sd_{ij}}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

(4) 计算

$$q_j^{(2)} = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}^{(2)}, \quad 1 \leq j \leq m$$

并检验由 $\{q_j^{(1)}\}$ 、 $\{q_j^{(2)}\}$ 、 $\{p_{ij}^{(1)}\}$ 和 $\{p_{ij}^{(2)}\}$ 产生的计算结果是否满足如下收敛性要求

$$|R^{(2)}(s) - R^{(1)}(s)| \leq \epsilon, \quad |D^{(2)}(s) - D^{(1)}(s)| \leq \epsilon$$

(5) 如没有满足收敛性要求, 则继续重复第(3)步和第(4)步, 直至第 t 次迭代达到要求。此时由 $\{q_j^{(t)}\}$ 和 $\{p_{ij}^{(t)}\}$ 产生的 $R^{(t)}(s)$ 和 $D^{(t)}(s)$ 即为所求。这实际上给出了 $R(D)-D$ 坐标图上的一个点。

(6) 再给定参量 s 新的值, 重复第(2)步到第(5)步获得新的 $R(s)$ 和 $D(s)$ 值。这实际上给出了 $R(D)-D$ 坐标图上的另一个点。不断重复上述过程, 就能画出 $R(D)$ 完整曲线。

参量 s 是率失真函数 $R(D)$ 的斜率, 其取值范围是 $(-\infty, 0)$ 。所以, 要得到整个 $R(D)$ 曲线, 可先选取一个绝对值充分大的负值 s 开始上述迭代过程, 计算出相应的 $R(s)$ 和 $D(s)$ 值; 再逐渐增加 s 值, 并计算 $R(s)$ 和 $D(s)$ 值; 当 $R(s)$ 接近零时, 计算过程结束, 从而获得整个曲线。

理论上可以进一步证明上述迭代运算的收敛性, 此处不再赘述。

以上侧重讨论了单符号离散无记忆信源率失真函数的性质、参量表述和迭代运算。尽管比较复杂, 但这些方法和结果可以向多符号离散信源延伸。若多符号信源是平稳无记忆的, 则可以证明当各维允许失真度一致时, 即所有 $D_k = D$ 时, $R_K(D)$ 才会达到最小。

5.4 限失真信源编码定理

设有一个离散无记忆信源 X , 其概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \end{bmatrix}$$

记试验信道输出符号集为 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, 用 $d(x_i, y_j)$ 表示发出 x_i 收到 y_j 的失真度。设试验信道每次输入的是长度为 K 的信源符号序列

$$\mathbf{x}_i = [x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_K}], \quad x_{i_k} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

经信道传输后, 信宿会接收到的长度为 K 的符号序列可表示为

$$\mathbf{y}_j = [y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_K}], \quad y_{j_k} \in \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$$

则发出 $\mathbf{x}_i$ 收到 $\mathbf{y}_j$ 的失真度可表示为

$$d_K(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(x_{i_k}, y_{j_k})$$

从所有上述接收序列 $\mathbf{y}_j$ 选取 M 个序列构成一个码, 并称为码字数目为 M 、码长为 K 的分组码, 记为 $\mathcal{C}(M, K)$ 。采用这样的分组码进行如下信源编码: 输入 $\mathbf{x}_i$, 输出使失真达到最小的码字 $\mathbf{y}_j$ 。记

$$d_K(\mathbf{x}_i | \mathcal{C}) = \min_{\mathbf{y}_j \in \mathcal{C}} d_K(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$$

则该分组码 $\mathcal{C}(M, K)$ 的平均失真度为

$$d_K(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n^K} P(\mathbf{x}_i) d_K(\mathbf{x}_i | \mathcal{C})$$

由于信源是无记忆性的, 因此有

$$P(\mathbf{x}_i) = \prod_{k=1}^K P(x_{i_k})$$

设 D 是预先给定的失真度。如果 $d_K(\mathcal{C}) \leq D$, 则称分组码 $\mathcal{C}(M, K)$ 是满足保真度准则 D 的许可码。对于分组码 $\mathcal{C}(M, K)$, 其信息率表示为 $R = \frac{1}{K} \log M$ 。

定理 5.1 对于离散无记忆信源 X , 其单字符失真度下的信息率失真函数为 $R(D)$ 。则对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $D \geq 0$, 可以找到满足保真度准则 $(D + \epsilon)$ 的许可码 $\mathcal{C}(M, K)$, 当 K 足够大时, 其信息率满足

$$R \leq R(D) + \epsilon \quad (5.45)$$

另外, 对于满足保真度准则 D 的所有许可码, 其信息率应满足

$$R \geq R(D) \quad (5.46)$$

定理 5.1 就是限失真信源编码定理, 即香农第三定理, 它可以推广到离散有记忆信源。定理 5.1 表明, 对于率失真函数为 $R(D)$ 的离散无记忆信源 X , 当信息率 $R > R(D)$ 时, 只要信源序列长度 K 足够长, 一定存在一种编码方法, 其译码失真度小于或等于 $D + \epsilon$, 其中 ϵ 为任意小的正数; 反之若 $R < R(D)$, 则无论采用什么样的编码方法, 其译码失真度必大于 D 。或者说, 在失真限度内使信息率任意接近 $R(D)$ 的编码方法存在, 然而要使信息率小于 $R(D)$, 平均失真一定会超过失真限度 D 。

习题解答

5.1 设输入符号集为 $\mathbf{X}=\{0,1\}$, 输出符号集为 $\mathbf{Y}=\{0,1\}$ 。定义失真函数为

$$d(0,0)=d(1,1)=0$$

$$d(0,1)=d(1,0)=1$$

试求失真矩阵 $\mathbf{D}$ 。

解 根据题意和定义, 容易得到失真矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2 设有离散对称信源 ($r=s$), 信源符号集为 $\mathbf{X}=\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, 接收符号集为 $\mathbf{Y}=\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, 定义单个符号失真度为

$$d(x_i, y_j) = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

求失真矩阵 $\mathbf{D}([d])$ 。

解 在失真度定义下, 失真矩阵是一个方阵 $[d]$, 并有

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

是 $r \times r$ 阶矩阵。

5.3 假定离散矢量信源输出的矢量序列为 $\mathbf{X}=X_1X_2X_3$, 其中 $X_i (i=1,2,3)$ 的取值为 0 和 1, 经信道传输后的输出为 $\mathbf{Y}=Y_1Y_2Y_3$, 其中 $Y_i (i=1,2,3)$ 的取值为 0 和 1, 定义单个符号失真函数

$$d(0,0)=d(1,1)=0$$

$$d(0,1)=d(1,0)=1$$

求矢量失真矩阵 $\mathbf{D}_3=[d_3]$ 。

解 由矢量失真函数的定义得

$$d_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 d(X_i, Y_i) = \frac{1}{3} [d(X_1, Y_1) + d(X_2, Y_2) + d(X_3, Y_3)]$$

所以有

$$d_3(000, 000) = \frac{1}{3} [d(0,0) + d(0,0) + d(0,0)]$$

$$= \frac{1}{3} [0 + 0 + 0] = 0$$

$$d_3(001, 000) = \frac{1}{3} [d(0,0) + d(0,0) + d(1,0)]$$

$$= \frac{1}{3} [0 + 0 + 1] = \frac{1}{3}$$

类似计算其他元素值,最后得其矢量失真矩阵为

$$\mathbf{D}_3 = [d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

5.4 设有一个二元等概率信源: $U=\{0,1\}$, $p_0=p_1=\frac{1}{2}$, 通过一个二进制对称信道(BSC)。

其失真函数 d_{ij} 与信道转移概率 P_{ji} 分别定义为

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}, \quad P_{ji} = \begin{cases} \epsilon, & i \neq j \\ 1 - \epsilon, & i = j \end{cases}$$

试求:

- (1) 失真矩阵 $[d_{ij}]$;
- (2) 平均失真度 $\bar{D}$ 。

解 (1) 失真矩阵 $[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(2) 由信道转移概率矩阵

$$[P_{ji}] = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 - \epsilon \end{bmatrix}$$

及

$$\bar{D} = \sum_i \sum_j p_i P_{ij} d_{ij}$$

得

$$\bar{D} = \epsilon$$

5.5 试证对离散信源, $R(D=0) = H(p)$ (信源熵) 的充要条件是失真矩阵 $\mathbf{D}$ 的每行中至少有一个为 0, 而每列中至多有一个为 0。

证明 必要性: 由于

$$D=0 \Rightarrow \sum_i \sum_j p_i P_{ji} d_{ij} = 0$$

又

$$p_i > 0, \quad d_{ij} \geq 0, \quad P_{ji} \geq 0$$

故

$$D=0 \Rightarrow \forall i, j, p_i P_{ji} d_{ij} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_{ji} \neq 0, & d_{ij} = 0 \\ P_{ji} = 0, & d_{ij} = \infty \end{cases}$$

若 $[d_{ij}]$ 矩阵中某行没有0,则对应的 P_{ji} 全为0,必失真,与 $D=0$ 矛盾。

若 $[d_{ij}]$ 矩阵中某列有超过两个以上的0,则表示有不止一个 i 使得 $P_{ji} \neq 0$,必失真,从而得证。

充分性:当 $D=0$ 却无失真时, i, j 一一对应,即

$$P_{ji} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

即对应的 (d_{ij}) 矩阵某行必有一个0,某列只有一个0。易知

$$R(D) \Big|_{D=0} = \sum_i \sum_j p_i \delta_{ij} \log \frac{\delta_{ij}}{p_i} = \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} = H(P) \quad \blacksquare$$

5.6 某信源含有三个消息,概率分布为 $p_1=0.2, p_2=0.3, p_3=0.5$,失真矩阵为

$$\mathbf{D} = [d] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $D_{\min}$ 和 $D_{\max}$ 。

解 因为有失真,所以 $D_{\min}$ 不为零。

$$\begin{aligned} D_{\min} &= \sum_X p(x_i) \min_Y d(x_i, y_j) \\ &= 1 \times 0.2 + 0 \times 0.3 + 0 \times 0.5 = 0.2 \end{aligned}$$

根据率失真函数的定义域,可得

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \min_Y \left\{ \sum_X p(x) d(x, y) \right\} \\ &= \min \{ 4 \times 0.2 + 2 \times 0.5, 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3, 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 1 \times 0.5 \} = 1.3 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.7 有一离散泊松信源,其分布为 $P_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$,且 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = 1$,设其失真函数为

$$d_{ij} = 1 - \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

试求:

- (1) 信源 $R(D)$ 函数的定义域 D ;
- (2) 若令参数值 $\lambda=1$,具体的 D 值范围。

解 (1) 由 $R(D)$ 函数性质可得

$$\begin{aligned} D_{\min} &= 0 \\ D_{\max} &= \min_j \left(\sum_i p_i d_{ij} \right) = \min_j \left(\sum_i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} d_{ij} \right) \end{aligned}$$

由定义

$$(d_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

再由泊松分布性质可知 $\lambda > 0$, 则

$$\text{当 } j=0 \text{ 时, } D_{\max} = \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \cdots = 1 - e^{-\lambda}$$

$$\text{当 } j=1 \text{ 时, } D_{\max} = e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \cdots = 1 - \lambda e^{-\lambda}$$

$$\text{当 } j=2 \text{ 时, } D_{\max} = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \cdots = 1 - \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$$

因为 $D > 0$, 则由前三项可知

$$\lambda \leq 1$$

所以有

$$1 - e^{-\lambda} < 1 - \lambda e^{-\lambda} < 1 - \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} < \cdots$$

故 $R(D)$ 函数定义域为

$$[0, 1 - e^{-\lambda}]$$

(2) 令 $\lambda = 1$, 则定义域为

$$[0, 1 - e^{-1}]$$

5.8 设输入符号集为 $\{0, 1, 2, 3\}$, 且输入信源的分布为

$$p(x_i) = \frac{1}{4} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

设失真矩阵为

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $D_{\min}$ 和 $D_{\max}$ 及 $R(D)$ 。

解 四元对称信源在汉明失真矩阵下, 它的平均失真度等于信道的平均错误概率 p_E , 即

$$D = \sum_{XY} p(x_i, y_j) = p_E$$

又根据最大允许失真度的定义, 有

$$D_{\max} = \min_Y \sum_x p(x) d(x, y) = 1 - \frac{1}{r} = \frac{3}{4}$$

而最小允许失真度

$$D_{\min} = \sum_{i=1}^4 p(x_i) \min_j d(x_i, y_j) = 0$$

因为是四元对称信源, 又是等概率分布, 所以根据 r 元离散对称信源可得

$$R(D) = \begin{cases} \log 4 - D \log 3 - H(D), & 0 \leq D \leq \frac{3}{4} \\ 0, & D > \frac{3}{4} \end{cases}$$

5.9 设二进制信源为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

失真函数矩阵为

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

求这个信源的 $D_{\min}$ 和 $D_{\max}$ 及 $R(D)$ 。

解 由已知条件可以求得

$$D_{\min} = 0, \quad D_{\max} = \frac{a}{2}$$

(1) 达到 $D_{\min}$ 的信道为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$R(0) = I(X; Y) = H(X) = H\left(\frac{1}{2}\right)$$

(2) 达到 $D_{\max}$ 的信道为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{或} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{bmatrix}, \quad 0 \leq a \leq 1$$

在这些信道中,可计算得

$$R(D_{\max}) = R\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

(3) 一般情况下, $0 < D < \frac{a}{2}$ 时的平均失真度为

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \sum_{XY} p(x)p(y|x)d(x,y) \\ &= p(x=0, y=1)a + p(x=1, y=0)a \\ &= a[p(x=0, y=1) + p(x=1, y=0)] \\ &= ap_E \end{aligned} \tag{5.47}$$

其中, p_E 是二元对称信道的平均错误概率。

根据费诺不等式, $r=2$ 时

$$H(X|Y) \leq H(p_E)$$

根据式(5.47),得

$$H(X|Y) \leq H\left(\frac{D}{a}\right) \tag{5.48}$$

现任选一信道,得平均互信息量为

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H\left(\frac{1}{2}\right) - H(X|Y)$$

由式(5.48)可得

$$I(X; Y) \geq H\left(\frac{1}{2}\right) - H\left(\frac{D}{a}\right)$$

这是平均互信息量的下限值。

现要找一个试验信道,使平均失真度满足保真度准则,而其平均互信量达到这个下限值,则这个下限值就是 $R(D)$ 。引进一个“反向”试验信道,设反向信道的信道矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{D}{a} & \frac{D}{a} \\ \frac{D}{a} & 1 - \frac{D}{a} \end{bmatrix}$$

可计算得

$$p(y=0) = \frac{1}{2}, \quad p(y=1) = \frac{1}{2}$$

因为 $0 < D < \frac{a}{2}$, $0 < p(y) < 1$, 所以反向试验信道存在。在这个试验信道下,平均失真度为

$$\begin{aligned} D' &= E[d] = \sum_{xy} p(xy) d(x, y) \\ &= \frac{a}{2} \frac{D}{a} + \frac{a}{2} \frac{D}{a} = D \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= - \sum_{xy} p(x, y) \log p(x|y) \\ &= - \left[\left(1 - \frac{D}{a}\right) \log \left(1 - \frac{D}{a}\right) + \frac{D}{a} \log \frac{D}{a} \right] \\ &= H\left(\frac{D}{a}\right) \end{aligned}$$

所以在这个反向试验信道中,可得传输的平均互信息为

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H\left(\frac{1}{2}\right) - H\left(\frac{D}{a}\right) \end{aligned}$$

由此可得,所选择的这个试验信道正是满足平均失真度小于 D , 而平均互信息量达到最小值的信道。因此,求得二元对称信道在失真度 D 下的信息率失真函数为

$$R(D) = \begin{cases} 1 - H\left(\frac{D}{a}\right), & 0 \leq D \leq \frac{a}{2} \\ 0, & D > \frac{a}{2} \end{cases}$$

其中, $H\left(\frac{D}{a}\right) = -\frac{D}{a} \log \frac{D}{a} - \left(1 - \frac{D}{a}\right) \log \left(1 - \frac{D}{a}\right)$ 。 ■

5.10 设已知离散无记忆信源在给定失真量度

$$d(i, j), \quad i = 1, 2, \dots, K; \quad j = 1, 2, \dots, J$$

下的信息速率失真函数为 $R(D)$ 。现定义新的失真量度

$$d'(i, j) = d(i, j) - g_i$$

试证:在新的失真量度下信息率失真函数 $R'(D)$ 为 $R'(D) = R(D + G)$, 其中 $G =$

$$\sum_i p(a_i) g_i。$$

证明 对离散无记忆信源

$$R(D) = \min\{I(X; Y), E\{d(X, Y)\} \leq D\}$$

因为

$$\begin{aligned} R'(D) &= \min\{I(X; Y), E\{d'(X, Y)\} \leq D\} \\ &= \min\{I(X; Y), E\{d(i, j) - g_i\} \leq D\} \\ &= \min\{I(X; Y), E\{d(i, j) - E\{g_i\}\} \leq D\} \\ &= \min\{I(X; Y), E\{d(i, j)\} \leq E\{g_i\} + D\} \end{aligned}$$

而 $E\{g_i\} = \sum_i p(a_i)g_i = G$, 故上式可以表示为

$$R'(D) = \min\{I(X; Y), E\{d(i, j)\} \leq D + G\} = R(D + G)$$

得证。 ■

5.11 一个离散无记忆信源输出符号等概率, 失真函数如下所示:

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

试求:

- (1) 信息率失真 $R(D)$ 函数;
- (2) 试验信道转移概率。

解 容易计算

$$D_{\min} = 1, \quad D_{\max} = \frac{4}{3}$$

在信源等概的条件下, 若 $[d]$ 具有对称性, 则在 $p(y|x)$ 具有对称性时, 求出的 $I(X; Y)$ 就等于率失真函数 $R(D)$ 。

在本题中, 根据 $[d]$ 的对称性, 可假设信道转移概率

$$[p(y|x)] = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ a & 1-a \end{bmatrix}, \quad a \text{ 为待定常数 } (a < \frac{1}{2})$$

由假设的信道转移概率计算出信息量

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \sum_Y p(y) \log \frac{1}{p(y)} - \sum_{XY} p(y|x) p(x) \log \frac{1}{p(y|x)} \end{aligned} \quad (5.49)$$

可以求出

$$\begin{cases} p(y_1) = \sum_x p(y_1|x) p(x) = \frac{1}{3} \left(1-a + \frac{1}{2} + a \right) = \frac{1}{2} \\ p(y_2) = 1 - p(y_1) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.50)$$

将式(5.50)代入式(5.49)得

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \log 2 + \frac{1}{3} \sum_{XY} p(y|x) \log p(y|x) \\ &= \log 2 + \frac{1}{3} \times 2 \times \left[(1-a) \log(1-a) + a \log a + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} [\log 2 - H(a)] \quad (5.51)$$

由假设的信道转移概率计算平均失真,得

$$\bar{D} = \sum_{xy} p(y|x)p(x)d(x,y) = \frac{1}{3} \times 2 \times \left[(1-a) + 2a + \frac{1}{2} \right] = 1 + \frac{2}{3}a \quad (5.52)$$

因为 $\bar{D} \leq D$, 由式(5.52)得

$$a \leq \frac{3}{2}(D-1)$$

考虑到 $a < \frac{1}{2}$, 则有

$$\frac{3}{2}(D-1) < \frac{1}{2} \Rightarrow D_{\max} = \frac{4}{3}$$

如图 5.8 所示, 在 $0 < a < 0.5$ 的范围内, $H(a)$ 是单调递增函数。

根据式(5.51), 考虑到 $a \leq \frac{3}{2}(D-1)$, 则有

$$I(X; Y) \geq \frac{2}{3} \left\{ \log 2 - H \left[\frac{3}{2}(D-1) \right] \right\}$$

从而有

$$R(D) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left\{ \log 2 - H \left[\frac{3}{2}(D-1) \right] \right\}, & 1 \leq D \leq \frac{4}{3} \\ 0, & D < 1, D > \frac{4}{3} \end{cases}$$

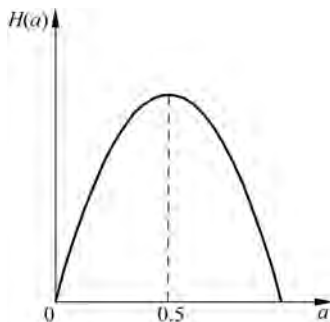


图 5.8 习题 5.11 图

5.12 三元信源的概率分别为 $p_0=0.4, p_1=0.4, p_2=0.2$, 失真函数为

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, 2$$

试求:

- (1) 信息率失真函数 $R(D)$;
- (2) 若此信源用容量为 1bit 和 0.1bit 的信道传送, 其最小误码率 P_e 分别是多少?

解 (1) 根据题意

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[p_{ij}] = (0.4, 0.4, 0.2)$$

$$D_{\min} = 0, \quad D_{\max} = \min_{q_j} \sum_j q_j \sum_i p_i d_{ij} = \min_j D_j$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \sum_i p_i d_{i0} = 0.6 \\ D_1 &= 0.6, D_2 = 0.8 \end{aligned} \right\}$$

则 $D_{\max} = 0.6$ 。

由参量表达式 $\sum_i p_i \lambda_i e^{s d_{ij}} = 1$, 得下列方程组

$$\begin{cases} 0.4\lambda_0 + 0.4\lambda_1 e^s + 0.2\lambda_2 e^s = 1 \\ 0.4\lambda_0 e^s + 0.4\lambda_1 + 0.2\lambda_2 e^s = 1 \\ 0.4\lambda_0 e^s + 0.4\lambda_1 e^s + 0.2\lambda_2 e^s = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \frac{2.5}{1+2e^s} \\ \lambda_1 = \frac{2.5}{1+2e^s} \\ \lambda_2 = \frac{5}{1+2e^s} \end{cases}$$

$$\sum_j q_j e^{sd_{ij}} = \frac{1}{\lambda_i}$$

则有

$$\begin{cases} q_0 + q_1 e^s + q_2 e^s = 0.4(1+2e^s) \\ q_0 e^s + q_1 + q_2 e^s = 0.4(1+2e^s) \\ q_0 e^s + q_1 e^s + q_2 = 0.2(1+2e^s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0 = \frac{0.2(2-e^s)}{1-e^s} \\ q_1 = \frac{0.2(2-e^s)}{1-e^s} \\ q_2 = \frac{0.2(1-3e^s)}{1-e^s} \Rightarrow e^s \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} D(S) &= \sum_i \sum_j p_i q_j \lambda_i e^{sd_{ij}} d_{ij} \\ &= \frac{2e^s}{1+2e^s} \Rightarrow \frac{D}{2(1-D)} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow D \leq \frac{5}{2} = 0.4 \\ R(S) &= SD(S) + \sum_i p_i \log \lambda_i \\ &= S \cdot \frac{2e^s}{1+2e^s} + 0.8 \log \frac{2.5}{1+2e^s} + 0.2 \log \frac{5}{1+2e^s} \\ &= D \cdot \log \frac{D}{2(1-D)} + \log 5 - 0.8 \log 2 + \log(1-D) \\ &= \log 5 - (D+0.8) \log 2 - H(D, 1-D) \quad (D \leq 0.4) \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} R(D) &= 0.15(\text{bit}), \quad D=0.4 \\ R(0) &= 1.522(\text{bit}), \quad D=0 \end{aligned}$$

若 $D > 0.4$, 则 $e^s > \frac{1}{3}$ 。因为必须有 $q_2 = 0$, 所以 $q_0 = q_1 = \frac{1}{2}$ 。由 $\sum_j q_j e^{sd_{ij}} = \frac{1}{\lambda_i}$, 求得

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{2}{1+e^s}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{e^s}$$

所以

$$\begin{aligned} D(S) &= \frac{0.2+e^s}{1+e^s} \Rightarrow e^s = \frac{D-0.2}{1-D} \\ R(S) &= SD + 0.8 \log \frac{2}{1+e^s} + 0.2 \log \frac{1}{e^s} \\ &= (D-0.2) \log(D-0.2) + (1-D) \log(1-D) - 0.8 \log 0.4 \end{aligned}$$

这里 $0.4 \leq D \leq 0.6$ 。当 $D=0.6$ 时, $R(D)=0$ 。

(2) 当信道容量为 1bit 时, $R(D)=1$, 反求得 $D=P_e=0.0885$ 。当信道容量为 0.1bit 时, $R(D)=0.1$, 反求得 $D=P_e=0.436$ 。■