

第 5 章

信息传输的互连网络技术

系统域互连网络是计算机的重要组成部分。系统总线是一种特殊的系统域互连网络,由于其带宽有限,仅适用于性能要求不高的单处理器计算机。本章将介绍互连网络的概念分类、描述方法、结构特性和性能参数等,讨论常用的互连函数、静态互连网络的分类及其结构特性,以及动态互连网络的分类及其组成逻辑。还将分析 Ω 和 STARAN 等常用多级交叉开关互连网络的结构特点与寻径控制,并将阐述互连网络信息传递的格式与方式、路由选择算法、死锁的避免与解除以及流量控制策略等。

5.1 系统域互连网络概述

【问题小贴士】 一台计算机包含许多功能部件,这些功能部件必须利用所谓的系统域互连网络连接在一起,以实现相互之间的信息交换。通过学习计算机组成原理课程可知:计算机所包含的功能部件是通过系统总线连接在一起,但它有一个致命的弱点,即通信带宽小,所以它仅适用于性能要求不高的计算机,可见系统总线是系统域互连网络的一种。①系统总线是由总线接口和链路组成,其属性有通信定时和仲裁分配,那么一般意义的系统域互连网络有哪些部分组成并且包含哪些属性?②系统总线带宽有限的根源在于分时共享,即在同一时刻仅存在一对节点连接通信,增加带宽的基本途径就是:使系统域互连网络在同一时刻实现更多节点对连接通信,这时应该怎样描述节点对之间的连接关系?节点对之间常用的连接关系有哪些类型?对于系统域互连网络,节点对连接关系的不同描述形式的应用和相互之间的转换还需要通过练习来掌握直至熟悉。

5.1.1 互连网络及其属性

1. 互连网络及其分类

“互连网络”是英文“interconnection network”的译名,有时又翻译为“互联网络”,但“连”与“联”并不是同义字。“连”是指连接,偏重于物理性、直接复制性与时效性;“联”是指联系,偏重于逻辑性、间接变换性与功效性。从计算机工程领域来看,互连(联)网络是指利用电子线路,将许多电子产品(通常称为节点)连接在一起,以实现相互之间的信息交换。

根据互连网络连接节点的特性及其距离不同,可以分为系统域网络 SAN(0.5~25m)、局域网络 LAN(1~2000m)、城域网络 MAN(≥ 25 km)和广域网络 WAN(全球)。长距离互连网络是由短距离互连网络连接而成,它们之间的分层连接的作用关系如图 5-1

所示。系统域网络带宽要求为 $100\text{Mb/s} \sim 100\text{Gb/s}$, 通常可分为总线、交叉开关和多级交叉开关三种, 涉及的技术主要有 SCI、光纤通道、HiPPI 与 Myrinet 等。局域网络带宽要求为 $10\text{Mb/s} \sim 10\text{Gb/s}$, 通常主要包含以太网、HiPPI、光纤通道和 FDDI 四种。城域网络带宽要求为 $20\text{Mb/s} \sim 5\text{Gb/s}$, 主要有光纤通道、FDDI 和 ATM 三种。广域网络带宽要求为 $20\text{Mb/s} \sim 0.55\text{Gb/s}$, 主要有光纤通道和 ATM 两种。

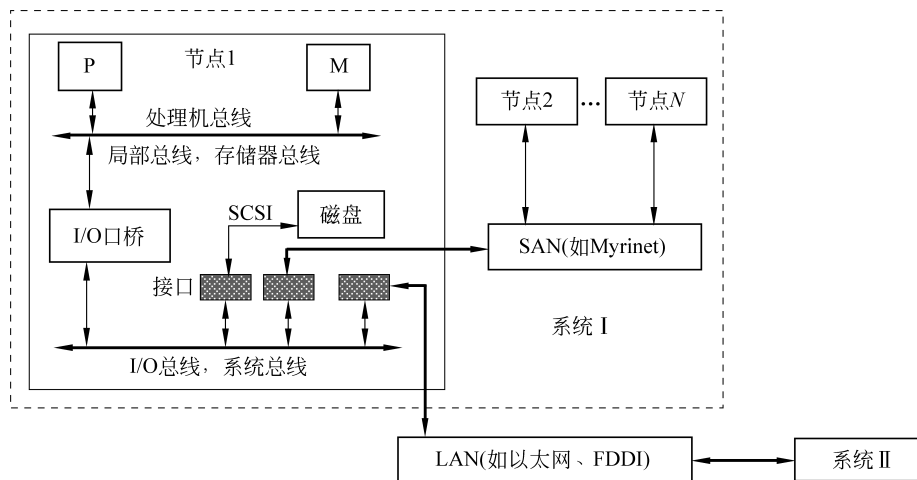


图 5-1 不同互连网络之间分层连接的作用关系

特别地, 局域网、城域网和广域网用于网络之间互联, 通常称为“互连网络”或“互联网”; 系统域网络用于计算机内部功能部件之间互连, 通常称为“互连网络”。

2. 系统域互连网络及其属性

系统域互连网络简称为互连网络, 它由开关元件按照一定的拓扑结构和控制方式构成, 用于实现计算机内部多个处理机或功能部件之间的相互连接及其信息交换。随着各个领域对高性能计算机的要求越来越高, 多处理机与多计算机的规模越来越大, 处理器或处理单元与存储模块之间的通信要求越来越高, 难度也越来越大。所以, 互连网络已成为高性能计算机组成的核心, 对高性能计算机的性能起着决定性作用。对于互连网络, 其属性主要包括定时方式、交换方法、控制策略和拓扑结构四个方面。

(1) 定时方式。互连网络的定时方式有同步定时和异步定时之分。同步定时是指采用统一时钟, 源节点与目的节点按照规定的时间进行通信操作; 异步定时是指没有统一时钟, 源节点与目的节点通过请求应答信号进行通信操作。阵列处理机是典型的同步定时, 多处理机一般均为异步定时。

(2) 交换方法。互连网络的交换方法有线路交换和分组交换之分。线路交换是指在数据传输期间, 源节点与目的节点之间的连接物理通路保持不变; 分组交换是指源节点将传输数据分成若干个数据包, 并分别送入互连网络, 且可以通过不同的物理通路传送到目的节点, 在数据传输期间, 物理通路的链路连接是分段实现的。

(3) 控制策略。互连网络的控制策略有集中式和分散式之分。集中控制是指利用一个全局控制器接收所有通信请求, 并设置相应开关来构成实际连接的物理通路; 分散控制

是指由分布在各个功能部件中的控制逻辑分散地对通信请求进行处理,并设置相应开关来构成实际连接的物理通路。

(4) 拓扑结构。互连网络的拓扑结构有静态拓扑和动态拓扑之分。静态拓扑是指各个节点之间的物理通路是专用的,且固定连接而不能重新组合;动态拓扑是指各个节点之间的物理通路可以通过设置相应开关状态重新组合,连接不固定。

5.1.2 互连网络的组成

互连网络是由交叉开关和链路、网络接口三部分组成(共享介质的互连网络无须交叉开关),其中交叉开关是核心。

1. 交叉开关

交叉开关也称为路由器,用于建立节点对之间连接的开关阵列,它主要包括输入输出端口、交点开关阵列及其控制逻辑,如图 5-2 所示为 4 输入 4 输出的交叉开关组成结构。交点开关可以在程序控制下接通与断开,以同时建立 N 个输入与 N 个输出之间的连接(N 为交叉开关的输入端口或输出端口数)。每个输入端口内有接收器和输入缓冲器,用于处理到达的消息包;每个输出端口内有发送器和输出缓冲器,用于把数据信号传送到链路上。

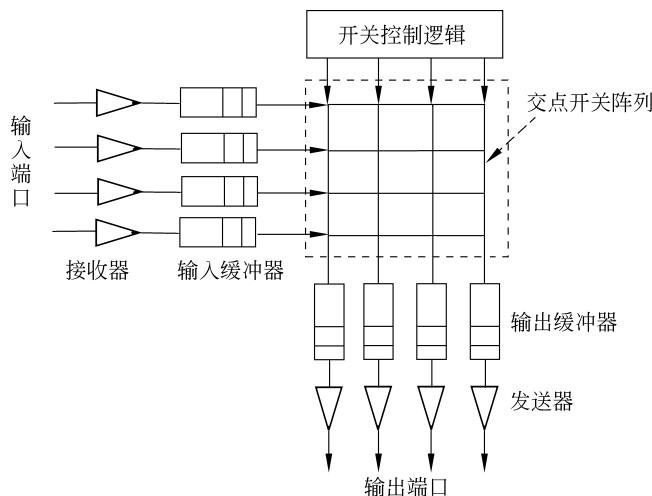


图 5-2 4×4 交叉开关的组成结构

2. 链路

链路也称为通道或电缆,用于实现计算机内部两个处理机或功能部件之间进行物理连接,是互连网络中相邻节点之间进行数据传送的通信线路。一条链路可以连接两个交叉开关,或者连接一个交叉开关与一台处理机或一个功能部件的网络接口。目前链路介质主要有铜线或光纤,铜线链路价格便宜,但长度有限;光纤价格较贵,但长度长,且带宽也高。链路的主要逻辑属性有长度、宽度和驱动时钟。因此,链路不仅可以从使用介质来分类,还可从逻辑属性来分类。

从长度来看,有短链路和长链路之分。一条短链路在任何时刻仅包含一个逻辑信号;

而一条长短链路在任何时刻允许传输一串逻辑信号。从宽度来看,有串行链路和并行链路之分。串行链路(窄链路)仅有一位信号线,多位信息以多路分时复用的方式共享单信号线;并行链路(宽链路)有多位信号线,多位信息可以并行传输。从驱动时钟来看,有同步链路和异步链路之分。同步链路是指链路两端的节点使用相同的时钟;异步链路是指通过嵌入时钟编码,使链路两端的节点使用不同的时钟。

3. 网络接口

网络接口(Network Interface Circuitry, NIC)也称为网卡,用于将处理机或功能部件连接到网络上,实现节点与网络之间的双向数据传输。网络接口功能主要包括消息包格式化、路由通路选择、一致性检查、流量与错误控制等,其复杂性由端口规模、存储容量、处理与控制能力等决定。典型网络接口通常包含嵌入式处理机、输入输出缓冲器、控制存储器和控制逻辑电路。网络接口的体系结构取决于网络与节点,在同一互连网络中,不同的节点可能需要不同的网络接口。

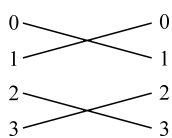
5.1.3 互连网络的描述方法

为了反映不同互连网络的连接特性,以在输入节点与输出节点之间建立相应的连接关系,通常采用图形、对应和函数三种方法来描述。

1. 图形表示法

图形表示法是采用连线图来描述输入节点与输出节点之间的连接关系,如某互连网络连接关系的图形表示法如图 5-3 所示,其表示输入节点 0、1、2、3 分别与输出节点 0、1、2、3 连接。图形表示法虽然直观,但比较烦琐,且难以体现连接的规律性,一般需要结合另外两种表示方法来描述。

图 5-3 互连网络连接关系的图形表示法



2. 数组表示法

数组表示法是采用 2 行若干列的二维数组的表示形式来描述输入节点与输出节点之间的连接关系,如某互连网络连接关系的数组表示法的二维数组如下:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

其表示输入节点 0、1、2、3 分别与输出节点 1、0、3、2 连接。

3. 函数表示法

函数表示法是采用数学式来描述输入节点与输出节点之间的连接关系,若用 x 表示输入端变量,则用函数 $f(x)$ 表示输出端变量,函数 $f(x)$ 称为互连函数。互连网络的输入端与输出端通常采用二进制数编号来指示,则互连函数同数组表示法一样,描述了输入端与输出端之间一一对应相连的连接关系。若 x 为 n 位二进制数,则互连函数一般写成 $f(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0)$ 。特别地,有一种特殊的互连函数 $f(x)$ 称为循环互连函数,其所描述的连接关系为: $f(x_0)=x_1, f(x_1)=x_2, \cdots, f(x_J)=x_0$, 即输入端号 x_0 连接于输出端号 x_1 、输入端号 x_1 连接于输出端号 x_2 、 $\cdots$ 、输入端号 x_J 连接于输出端号 x_0 , 且可以把循环互连函数表示为: $(x_0x_1\cdots x_J)$, $J+1$ 称为循环长度。

在一般情况下,由于一个节点既可以作为输入端,也可以作为输出端,所以通常认为

输入端数与输出端数是相等的。如果互连网络将 N 个节点连接在一起,则其有 N 个输入节点和 N 个输出节点;对于相应的互连函数来说,即有 N 个输入值和 N 个输出值,且输入变量和输出变量的值为 n 位二进制数, $n = \log N$ 。特别地,由于函数本身是一种置换关系,所以互连函数有时也称为置换函数。

5.1.4 常用互连函数

1. 恒等置换

二进制编号相同的输入端与输出端之间对应相连所实现的连接关系称为恒等置换,其互连函数表达式为:

$$I(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0) = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$$

其中, $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ 为输入端二进制编号或输出端二进制编号。当互连网络的 $N=8$ 时,恒等置换实现输入端与输出端连接的图形表示如图 5-4 所示,图中左边为输入端,右边为输出端。如 $I(010)=010$,即输入端 010 与输出端 010 连接。

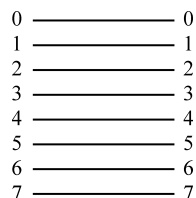


图 5-4 $N=8$ 时的恒等置换连接关系

2. 方体置换(Cube)

二进制编号中第 k 位不同的输入端和输出端之间对应相连所实现的连接关系称为方体置换,其互连函数表达式为:

$$C(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0) = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}\overline{x_k}x_{k-1}\cdots x_1x_0$$

其中, $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0$ 和 $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}\overline{x_k}x_{k-1}\cdots x_1x_0$ 分别为输入端二进制编号和输出端二进制编号 ($0 \leq k \leq n-1$)。显然,对于 N 个节点的互连网络,可以有 n 个方体置换 $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ 。如 $N=8$,则有 $n = \log_2 8 = 3$ 个方体置换,且互连函数表达式分别为:

$$C_0(x_2x_1x_0) = x_2x_1\overline{x_0}, \quad C_1(x_2x_1x_0) = x_2\overline{x_1}x_0, \quad C_2(x_2x_1x_0) = \overline{x_2}x_1x_0$$

3 个方体置换输入端与输出端连接的图形如图 5-5 所示,图中左边为输入端,右边为输出端。对于方体置换,二进制编号中第 0 位不同的输入端和输出端之间对应相连所实现的连接关系 C_0 称为交换置换。如 $C_0(010)=011$,即输入端 010 与输出端 011 连接; $C_1(010)=000$,即输入端 010 与输出端 000 连接; $C_2(010)=110$,即输入端 010 与输出端 110 连接。

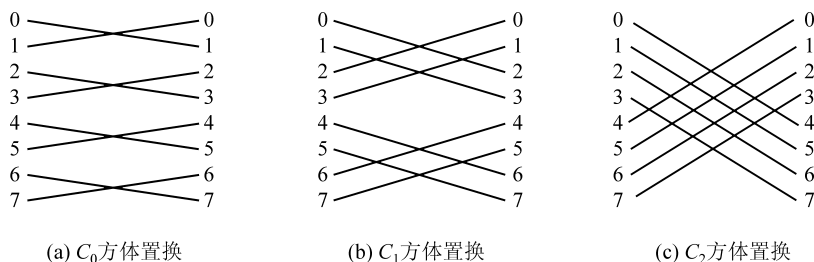


图 5-5 $N=8$ 时的方体置换连接关系

3. 均匀洗牌置换(shuffle)

将输入端二进制编号循环左移一位得到对应相连的输出端二进制编号,由此所实现的连接关系称为均匀洗牌置换,其互连函数表达式为:

$$\sigma(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0) = x_{n-2}\cdots x_1x_0x_{n-1}$$

其中, $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ 为输入端二进制编号, $x_{n-2}\cdots x_1x_0x_{n-1}$ 为输出端二进制编号。当互连网络的 $N=8$ 时,均匀洗牌置换实现输入端与输出端连接的图形如图 5-6(a)所示,图中左边为输入端,右边为输出端。如 $\sigma(010)=100$,即输入端 010 与输出端 100 连接。均匀洗牌的物理意义为:将输入端分成数量相等的两半,前一半与后一半按顺序一个隔一个地从头至尾依次与输出端相连。对于均匀洗牌置换,可以变形定义子洗牌、超洗牌、逆均匀洗牌与 q 洗牌四种互连函数。

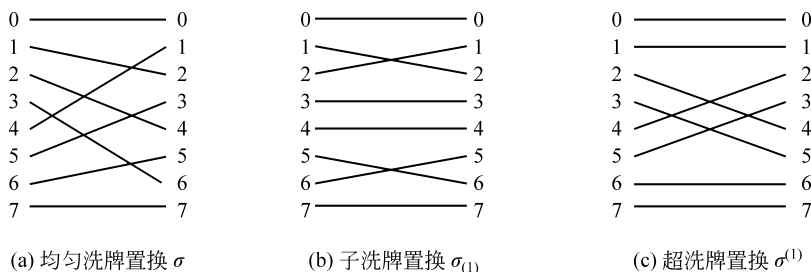


图 5-6 $N=8$ 时的均匀洗牌及子洗牌和超洗牌的置换连接关系

子洗牌是将输入端二进制编号的低 $k+1$ 位循环左移一位得到对应相连的输出端二进制编号,超洗牌则是将输入端二进制编号的高 $k+1$ 位循环左移一位得到对应相连的输出端二进制编号,它们的互连函数表达式分别为:

$$\sigma_{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0) = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0x_k$$

$$\sigma^{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{n-k}x_{n-k-1}x_{n-k-2}\cdots x_1x_0) = x_{n-2}\cdots x_{n-k}x_{n-k-1}x_{n-1}x_{n-k-2}\cdots x_1x_0$$

其中, $0 \leq k \leq n-1$ 。显然,对于 N 个节点的互连网络,则有 n 个子洗牌 $\sigma_{(0)}, \sigma_{(1)}, \cdots, \sigma_{(n-1)}$ 和 n 个超洗牌置换 $\sigma^{(0)}, \sigma^{(1)}, \cdots, \sigma^{(n-1)}$,且有:

$$\sigma_{(n-1)}(x) = \sigma^{(n-1)}(x) = \sigma(x), \quad \sigma_{(0)}(x) = \sigma^{(0)}(x) = x$$

当互连网络的 $N=8$ 时,子洗牌 $\sigma_{(1)}$ 置换和超洗牌 $\sigma^{(1)}$ 置换实现输入端与输出端连接的图形分别如图 5-6(b)和图 5-6(c)所示。如 $\sigma_{(1)}(010)=001$,即输入端 010 与输出端 001 连接; $\sigma^{(1)}(010)=100$,即输入端 010 与输出端 100 连接。从图 5-6(b)和图 5-6(c)中可以看出,子洗牌是将全部节点分成若干个小组,对每个小组进行均匀洗牌;而超洗牌仍对全部节点进行均匀洗牌,但增加了节点连接跨度。

逆均匀洗牌是将输入端二进制编号循环右移一位得到对应相连的输出端二进制编号,由此所实现的连接关系称为逆均匀洗牌置换,其互连函数表达式为:

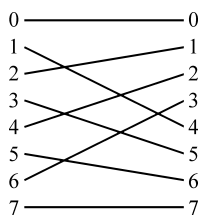
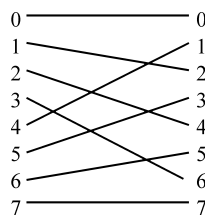
$$\sigma^{-1}(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0) = x_0x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1$$

当互连网络的 $N=8$ 时,逆均匀洗牌实现输入端与输出端连接的图形如图 5-7 所示。如 $\sigma^{-1}(010)=001$,即输入端 010 与输出端 001 连接。

q 洗牌互连函数的表达式为:

$$\sigma_{qr}(i) = \lfloor qi + i/qr \rfloor \bmod qr$$

其中, q 和 r 是正整数, $q \times r = N$, $0 \leq i \leq qr - 1$ 。 q 洗牌的物理意义为: 将 $q \times r$ 张牌分成 q 组, 每组 r 张牌, 洗牌时将第一组的第一张牌放在第一个位置、第二组的第一张牌放在第二个位置……直至取第 q 组的第一张牌放在第 q 个位置之后, 再取第一组的第二张牌放在第 $q+1$ 个位置, 由此直到把各组牌全部取完为止。当互连网络的 $N=8$ 时, $q=2$ 且 $r=4$ 的 q 洗牌置换实现输入端与输出端连接的图形如图 5-8 所示。如 $\sigma_{24}(010)=100$, 即输入端 010 与输出端 100 连接。

图 5-7 $N=8$ 时的逆均匀洗牌连接关系图 5-8 $N=8$ 且 $q=2$ 时的 q 洗牌连接关系

均匀洗牌置换及其变形互连函数在实现多项式求值、矩阵转置和 FFT 等并行排序方面得到广泛应用。

4. 蝶式置换(Butterfly)

将输入端二进制编号的最高位与最低位互换位置得到对应相连的输出端二进制编号, 由此所实现的连接关系称为蝶式置换, 其互连函数表达式为:

$$\beta(x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1x_0) = x_0x_{n-2} \cdots x_1x_{n-1}$$

其中, $x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1x_0$ 为输入端二进制编号, $x_0x_{n-2} \cdots x_1x_{n-1}$ 为输出端二进制编号。对于蝶式置换, 可以变形定义子蝶式与超蝶式两种互连函数。

子蝶式是将输入端二进制编号的第 k 位与最低位互换位置得到对应相连的输出端二进制编号, 超蝶式则是将输入端二进制编号的第 $n-k-1$ 位与最高位互换位置得到对应相连的输出端二进制编号, 它们的互连函数表达式分别为:

$$\beta_{(k)}(x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_{k+1}x_kx_{k-1} \cdots x_1x_0) = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_{k+1}x_0x_{k-1} \cdots x_1x_k$$

$$\beta^{(k)}(x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_{n-k}x_{n-k-1}x_{n-k-2} \cdots x_1x_0) = x_{n-k-1}x_{n-2} \cdots x_{n-k}x_{n-1}x_{n-k-2} \cdots x_1x_0$$

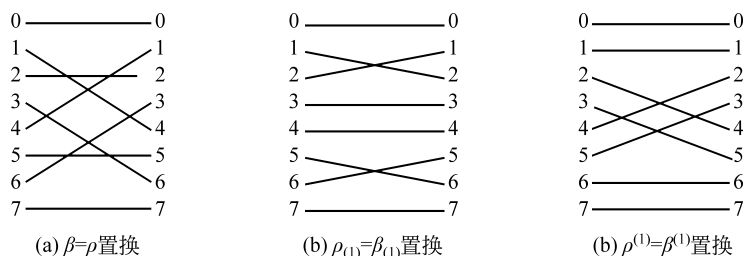
其中, $0 \leq k \leq n-1$ 。显然, 对于 N 个节点的互连网络, 可以有 n 个子蝶式置换 $\beta_{(0)}$ 、 $\beta_{(1)}$ 、 $\cdots$ 、 $\beta_{(n-1)}$ 和 n 个超蝶式置换 $\beta^{(0)}$ 、 $\beta^{(1)}$ 、 $\cdots$ 、 $\beta^{(n-1)}$, 且有:

$$\beta^{(n-1)}(x) = \beta_{(n-1)}(x) = \beta(x), \quad \beta^{(0)}(x) = \beta_{(0)}(x) = \beta(x)$$

当互连网络的 $N=8$ 时, 蝶式置换 β 、子蝶式置换 $\beta_{(1)}$ 和超蝶式置换 $\beta^{(1)}$ 实现输入端与输出端连接的图形分别如图 5-9 所示。如 $\beta(010)=010$, 即输入端 010 与输出端 010 连接; $\beta_{(1)}(010)=001$, 即输入端 010 与输出端 001 连接; $\beta^{(1)}(010)=100$, 即输入端 010 与输出端 100 连接。

5. 位序颠倒置换

将输入端二进制编号的位序颠倒过来得到对应相连的输出端二进制编号, 由此所实

图 5-9 $N=8$ 时的蝶式置换和位序颠倒置换的连接关系

现的连接关系称为位序颠倒置换,其互连函数表达式为:

$$\rho(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0) = x_0x_1\cdots x_{n-2}x_{n-1}$$

其中, $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ 为输入端二进制编号, $x_0x_1\cdots x_{n-2}x_{n-1}$ 为输出端二进制编号。对于位序颠倒置换,可以变形定义子位序颠倒与超位序颠倒两种互连函数。

子位序颠倒是将输入端二进制编号的低 $k+1$ 位的位序颠倒过来得到对应相连的输出端二进制编号,超位序颠倒则是将输入端二进制编号的高 $k+1$ 位的位序颠倒过来得到对应相连的输出端二进制编号,它们的互连函数表达式分别为:

$$\rho_{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0) = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}x_0x_1\cdots x_{k-1}x_k$$

$$\rho^{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{n-k}x_{n-k-1}x_{n-k-2}\cdots x_1x_0) = x_{n-k-1}x_{n-k}\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_{n-k-2}\cdots x_1x_0$$

其中, $0 \leq k \leq n-1$ 。显然,对于 N 个节点的互连网络,可以有 n 个子位序颠倒置换 $\rho_{(0)}$ 、 $\rho_{(1)}$ 、 $\cdots$ 、 $\rho_{(n-1)}$ 和 n 个超位序颠倒置换 $\rho^{(0)}$ 、 $\rho^{(1)}$ 、 $\cdots$ 、 $\rho^{(n-1)}$,且有:

$$\rho_{(n-1)}(x) = \rho^{(n-1)}(x) = \rho(x), \quad \rho_{(0)}(x) = \rho^{(0)}(x) = x$$

当互连网络的 $N=8$ 时,位序颠倒置换 ρ 、子位序颠倒置换 $\rho_{(1)}$ 和超位序颠倒置换 $\rho^{(1)}$ 实现输入端与输出端连接的图形分别如图 5-9 所示。如 $\rho(010)=010$,即输入端 010 与输出端 010 连接; $\rho_{(1)}(010)=001$,即输入端 010 与输出端 001 连接; $\rho^{(1)}(010)=100$,即输入端 010 与输出端 100 连接。

特别地,对于 $N=8$ 个节点的互连网络,正好有 $\rho=\beta$ 、 $\rho_{(1)}=\beta_{(1)}$ 、 $\rho^{(1)}=\beta^{(1)}$,但不能认为位序颠倒置换及其子颠倒与超颠倒置换等价于蝶式置换及其子蝶式与超蝶式置换。

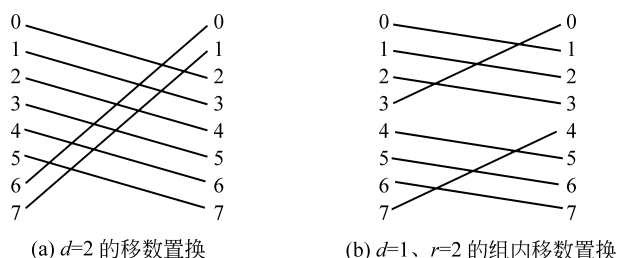
6. 移数置换

将输入端二进制编号以 N 为模循环移动一定的位置得到对应相连的输出端二进制编号,由此所实现的连接关系称为移数置换,其互连函数表达式为:

$$\alpha_d(x) = (x + d) \bmod N, \quad 0 \leq x \leq (N-1)$$

其中, x 为输入端二进制编号, d 为移动位置常数。当互连网络的 $N=8$ 时, $d=2$ 的移数置换实现输入端与输出端连接的图形如图 5-10(a)所示。如 $\alpha_2(010)=100$,即输入端 010 与输出端 100 连接。

另外,可以将全部输入端分成若干组 M ,在组内进行循环移数置换,组内循环移数置换的互连函数表达式为:

图 5-10 $N=8$ 时的移数置换的连接关系

$$\alpha_d(x)_{(N-1) \rightarrow (M-1)2^r} = ((x)_{(N-1) \rightarrow (M-1)2^r} + d) \bmod (M \times 2^r)$$

$$\alpha_d(x)_{(M-1)2^r-1 \rightarrow (M-2)2^r} = ((x)_{(M-1)2^r-1 \rightarrow (M-2)2^r} + d) \bmod ((M-1) \times 2^r)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_d(x)_{(2^r-1) \rightarrow 0} = ((x)_{(2^r-1) \rightarrow 0} + d) \bmod 2^r$$

其中, $(N-1) \rightarrow (M-1)2^r$ 、 $(M-1)2^r \rightarrow (M-2)2^r-1$ 、 $\dots$ 、 $(2^r-1) \rightarrow 0$ 分别为从 $N-1$ 节点到 $(M-1)2^r$ 节点、从 $(M-1)2^r-1$ 节点到 $(M-2)2^r$ 节点、 $\dots$ 、从 2^r-1 节点到 0 节点, $r = \log_2 R$, R 为组内节点数。当互连网络 $N=8$ 时, $d=1$ 、 $M=2$ 、 $R=4$ ($r=2$) 的组内循环移数置换实现输入端与输出端连接的图形如图 5-10(b) 所示。如 $\alpha_1(101)_{7 \rightarrow 4} = 110$, 即输入端 101 与输出端 110 连接; $\alpha_1(010)_{3 \rightarrow 0} = 011$, 即输入端 010 与输出端 011 连接。

从图 5-10 可以看出, 移数置换是循环互连函数, 可以采用循环互连函数来表示, 即有:

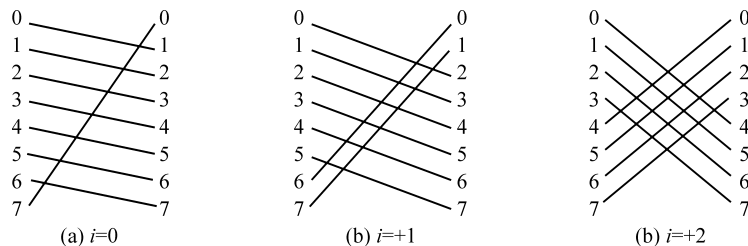
$$\alpha = (0 \ 2 \ 4 \ 6) \ (1 \ 3 \ 5 \ 7), \quad \alpha = (0 \ 1 \ 2 \ 3) \ (4 \ 5 \ 6 \ 7)$$

7. 加减 2I 置换

将输入端二进制编号 x 与输出端编号以 N 为模的 $x \pm 2^i$ 对应相连, 由此所实现的连接关系称为加减 2I 置换, 其互连函数表达式为:

$$\text{PM}_{+i}(x) = (x + 2^i) \bmod N, \dots, \text{PM}_{-i}(x) = (x - 2^i) \bmod N$$

其中, $0 \leq x \leq N-1$, $0 \leq i \leq (n-1)$, $n = \log_2 N$ 。显然, 对于 N 个节点的互连网络, 可以有 $2n$ 个加减 2I 置换 P_{+0} 、 P_{+1} 、 $\dots$ 、 $P_{+(n-1)}$ 和 P_{-0} 、 P_{-1} 、 $\dots$ 、 $P_{-(n-1)}$ 。当互连网络 $N=8$ 时, 加减 2I 置换实现输入端与输出端连接的图形如图 5-11 所示。如 $\text{PM}_{+0}(010) = 011$, 即输入端 010 与输出端 011 连接; $\text{PM}_{+1}(010) = 100$, 即输入端 010 与输出端 100 连接; $\text{PM}_{+2}(010) = 110$, 即输入端 010 与输出端 110 连接。从图 5-11 可见, 加减 2I 置换实际也是一种移数置换。

图 5-11 $N=8$ 时的加减 2I 置换的连接关系

特别地, 加减 2I 置换还是循环互连函数, 对于 $N=8$ 的加减 2I 置换, 共有 $2n=6$ 个互连函数, 采用循环互连函数来表示分别为:

$$\begin{aligned} \text{PM2}_{+0} &= (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) & \text{PM2}_{-0} &= (7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0) \\ \text{PM2}_{+1} &= (0\ 2\ 4\ 6)\ (1\ 3\ 5\ 7) & \text{PM2}_{-1} &= (6\ 4\ 2\ 0)\ (7\ 5\ 3\ 1) \\ \text{PM2}_{+2} &= (0\ 4)\ (1\ 5)\ (2\ 6)\ (3\ 7) & \text{PM2}_{-2} &= (4\ 0)\ (5\ 1)\ (6\ 2)\ (7\ 3) \end{aligned}$$

5.1.5 互连网络的结构特性与传输性能参数

1. 互连网络的结构特性参数

互连网络的拓扑结构可以采用有向边或无向边连接有限个节点的图来表示, 利用图的有关参数可以定义若干互连网络的结构特性参数, 这些参数分为物理结构和逻辑特性两个方面。

1) 物理特性参数

互连网络的物理特性参数主要有网络规模、节点度、节点距离、网络直径和节点线长等。

网络规模是指互连网络中的节点数, 用于体现互连网络所能连接的部件数。节点线长是指互连网络中两个节点之间连接线的长度, 它是影响通信时延等性能参数的因素之一。

节点度是指互连网络中与某节点相连的边(链路)数。当互连网络采用有向图来表示时, 指向节点的边数为入度, 从节点出来的边数为出度, 入度与出度之和则是节点度。

节点距离是指互连网络中两个节点之间相连的最少边数。网络直径是指互连网络中任意两个节点之间节点距离的最大值, 从通信时延来看, 网络直径应尽可能小。

2) 逻辑特性参数

互连网络的逻辑特性主要有等分宽度、对称性和可扩展性等。

等分宽度又称为对剖宽度, 它是指当将互连网络切分为相等的两半时, 沿切口的最小边(通道)数, 相应切口称为对剖平面(一组连线), 而将 $B=b \times \omega$ (b 为对剖宽度, ω 为通道宽度)称为线等分宽度。

若从任何节点看, 互连网络的拓扑结构都是相同的, 则称该互连网络具有对称性, 该互连网络为对称网络。

可扩展性是指在互连网络性能保持不变的情况下可扩充节点的能力。

2. 互连网络的传输性能参数

两台计算机相连接是最简单的互连网络, 从一台计算机向另一台计算机发送数据来看, 互连网络的传输性能参数可分为时延参数和带宽参数两个方面。

1) 时延性能参数

互连网络时延性能参数有发送方开销、接收方开销、飞行时间、传送时间等基本参数和传输时间、总时延等扩展参数, 时延性能参数的直观含义如图 5-12 所示。

发送方开销是指处理器把消息送到互连网络的时间, 包含软硬件花费的时间。接收方开销是指处理器把消息从互连网络接收的时间, 包含软硬件所花费的时间。

飞行时间是指从发送方开始发送消息至第一位信息到达接收方所花费的时间, 它包