第 5 章

CHAPTER 5

时变电磁场

本章是学习电磁场与电磁波的重要过渡内容，即从静态场、静态场的解法过渡到时变电磁场、电磁波以及电磁辐射等。本章的主要内容是麦克斯韦方程组的引入及其讲解、时谐电磁场的相量表示法及其运算、矢量势和标量势所满足的方程、推迟势的概念及其计算等。要求同学们熟练掌握法拉第电磁感应定律，理解位移电流的含义，并能够利用麦克斯韦方程组进行计算。在内容安排上，首先归纳总结了本章的主要知识点、重点和难点，详细求解了一些典型例题，然后对主教材课后习题进行了详解，并给出相关 MATLAB 编程代码以及所涉及的科技前沿知识，最后列举有代表性的往年考研试题并开展讲解。

5.1 时变电磁场思维导图

利用思维导图勾勒出时变电磁场各部分内容之间的逻辑关系，如图 5-1 所示。本章内容是联系静态场和时变场的桥梁，核心是麦克斯韦方程组及其推导。首先，给出了法拉第电磁感应定律，引入了涡旋电场的概念；其次，针对静态场安培环路定律在时变情况下失效的

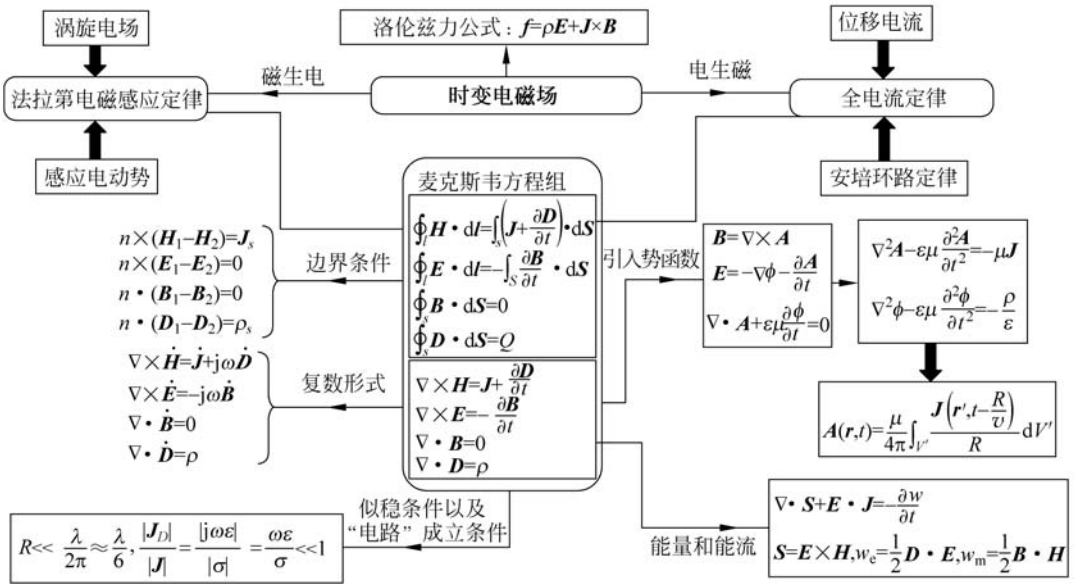


图 5-1　时变电磁场的思维导图

问题，引入了位移电流的概念，从而建立了全电流定律；最后，通过假设高斯定理和磁通连续原理在时变情况下依然成立，便可以得到麦克斯韦方程组的四个完整方程。为了使得方程能够得以求解，必须考虑材料的本构方程，即磁感应强度和磁场强度、电位移矢量和电场强度以及电流密度和电场强度之间的关系。边界条件是两种媒质分界面上麦克斯韦方程组的具体体现，可以使用积分方程得到，事实上，将静电、静磁形式的边界条件合并起来，就得到了时变场的边界条件。在时变电磁场中，最典型、最具研究价值的是随时间做正弦变化的电磁场，即时谐电磁场，可以使用复数形式的“相量”简化计算。因此，瞬时量、相量之间的灵活转换非常重要。此外，时变场情况下的能量守恒、坡印亭矢量等，都是非常重要的研究对象。为了简化麦克斯韦方程组的计算，引入辅助势函数的概念，并得到了其对应的达朗贝尔方程。

5.2　知识点归纳

时变电磁场部分所涉及的知识点有：

法拉第电磁感应定律及其计算；感生电动势及其计算；涡旋电场或感应电场的定义；动生电动势的计算；利用两种方法推导动生电动势的计算公式；麦克斯韦方程组及每个方程的含义；利用麦克斯韦方程组计算电场或者磁场；位移电流及其计算；时谐电磁场的复矢量表示法及其相互转换；坡印亭矢量，瞬时值与平均坡印亭矢量的转化、相关计算；能量守恒定律及其理解；矢量势、标量势满足的方程及其推导，洛伦兹规范条件；如何利用辅助势函数计算电磁场；无界空间中矢量势的表示形式；似稳条件；电路理论与电磁场理论的联系；时变电磁场的边界条件等。

5.3　主要内容及公式

本章主要内容简述如下。

5.3.1　法拉第电磁感应定律

1. 法拉第电磁感应定律的数学表达形式

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{5-1}$$

正确使用上述公式，必须强调参考方向，如图 5-2 所示。也就是说，曲面的法线方向与曲线的环绕方向满足右手螺旋的关系；它们对应的也就是磁通量和感应电动势为正的参考方向。

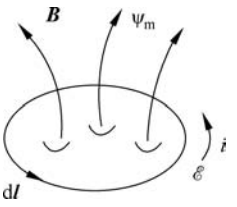


图 5-2　法拉第电磁感应定律的参考方向

2. 感生电动势和动生电动势

(1) 感生电动势

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5-2}$$

与前面相类似，曲面的法线方向(磁通量为正的方向)与曲线的环绕方向(感生电动势为正的方向)，满足右手螺旋的关系。

(2) 动生电动势

$$\mathscr{E}_{\mathrm{m}}=-\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\int_{l}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5-3}$$

式(5-3)中,曲线积分的方向即为动生电动势为正的参考方向。

5.3.2 麦克斯韦方程组及辅助方程

1. 积分形式

$$\oint_{l}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{S}\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\quad\oint_{l}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{S}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_{S}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\quad\oint_{S}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q$$

2. 微分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\quad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\quad\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

3. 正弦电磁场

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}\quad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\quad\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

4. 本构方程

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\quad\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}=\sigma\boldsymbol{E}$$

5. 其他重要公式

洛伦兹力 $\boldsymbol{F}=Q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$

洛伦兹力密度 $\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$

位移电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{D}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$

穿过某曲面的位移电流 $i_{\mathrm{D}}=\int_{S}\boldsymbol{J}_{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

5.3.3 电磁场边值关系

时变电磁场对应的边界条件如表 5-1 所示。

表 5-1 电磁场边界条件一览表

媒质分界面	两种媒质分界面	两种介质分界面	介质与理想导体分界面
边值关系	$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_S$ $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$ $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$ $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S$	$H_{1\mathrm{t}}=H_{2\mathrm{t}}$ $E_{1\mathrm{t}}=E_{2\mathrm{t}}$ $B_{1\mathrm{n}}=B_{2\mathrm{n}}$ $D_{1\mathrm{n}}=D_{2\mathrm{n}}$	$H_{\mathrm{t}}=J_S$ $E_{\mathrm{t}}=0$ $B_{\mathrm{n}}=0$ $D_{\mathrm{n}}=\rho_S$

5.3.4　坡印亭定理和坡印亭矢量

坡印亭定理

$$\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V=-\frac{\partial W}{\partial t}(\text{积分形式}) \tag{5-4}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial w}{\partial t}(\text{微分形式}) \tag{5-5}$$

坡印亭矢量瞬时值

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{5-6}$$

正弦电磁场的复数坡印亭矢量

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}}^{*}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}^{*} \tag{5-7}$$

正弦电磁场的坡印亭矢量时间平均值

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\mathrm{Re}\boldsymbol{S}_{\mathrm{c}}=\mathrm{Re}\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}}^{*}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}^{*} \tag{5-8}$$

5.3.5　电磁场的矢量势和标量势及其微分方程

电磁场辅助势函数所满足的方程、表示式以及场量的求解公式，如表 5-2 所示。

表 5-2　电磁场辅助势函数

<table>
<tr><td rowspan="2">势的方程</td><td colspan="2">动　态　场</td><td rowspan="2">静态场</td></tr>
<tr><td>时　变　场</td><td>正　弦　场</td></tr>
<tr><td>势的方程</td><td>$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}$
$\nabla^2\phi-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$</td><td>$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$
$\nabla^2\phi+k^2\phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$
$(k^2=\omega^2\varepsilon\mu)$</td><td>$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$
$\nabla^2\phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">矢量势和标量势的计算</td><td colspan="2">推迟势(动态势)</td><td>静态势</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}\left(x',y',z',t-\frac{R}{v}\right)}{R}\mathrm{d}V'$
$\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{R}{v}\right)}{R}\mathrm{d}V'$</td><td>$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(x',y',z')\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kR)}}{R}\mathrm{d}V'$
$\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(x',y',z')\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kR)}}{R}\mathrm{d}V'$</td><td rowspan="2">$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(x',y',z')}{R}\mathrm{d}V'$
$\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(x',y',z')}{R}\mathrm{d}V'$</td></tr>
<tr><td colspan="2">似稳场</td></tr>
<tr><td></td><td>$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(x',y',z',t)}{R}\mathrm{d}V'$
$\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(x',y',z',t)}{R}\mathrm{d}V'$</td><td>$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(x',y',z')\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{R}\mathrm{d}V'$
$\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(x',y',z')\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{R}\mathrm{d}V'$</td></tr>
<tr><td>场量</td><td>$\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$</td><td>$\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}$</td><td>$\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$</td></tr>
</table>

5.4 重点与难点分析

结合上述内容，现将本章重点与难点做如下具体分析。

5.4.1 研究正弦电磁场的原因和理论基础

有同学会问，为什么要研究正弦电磁场？为什么不研究普遍意义上的时变电磁场？这是因为，任何一个时变信号（假定是实函数）都可以根据傅里叶变换，看作一系列正弦（包含余弦）信号的叠加，即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{A(\omega)\cos[\omega t+\varphi(\omega)]\}\,\mathrm{d}\omega$$

其中，$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ 称为该信号的傅里叶变换。

对于电磁场而言，以电场强度为例，对时间变量做傅里叶变换，则有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{5-9}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{5-10}$$

对于其他场量，有类似的关系。

大多数情况下，麦克斯韦方程组是线性的，即满足齐次性和叠加性。

也就是说，如果有 N 个场，分别满足麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_i=\boldsymbol{J}_i+\frac{\partial\boldsymbol{D}_i}{\partial t};\quad \nabla\times\boldsymbol{E}_i=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_i}{\partial t};\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}_i=0;\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}_i=\rho_i$$

其中，$i=1,2,\cdots,N$。那么，它们的矢量和所对应的场，也是麦克斯韦方程组的解，即

$$\nabla\times\sum_i\boldsymbol{H}_i=\sum_i\boldsymbol{J}_i+\frac{\partial}{\partial t}\sum_i\boldsymbol{D}_i;\quad \nabla\times\sum_i\boldsymbol{E}_i=-\frac{\partial}{\partial t}\sum_i\boldsymbol{B}_i;$$

$$\nabla\cdot\sum_i\boldsymbol{B}_i=0;\quad \nabla\cdot\sum_i\boldsymbol{D}_i=\sum_i\rho_i$$

同时，方程也满足齐次性，即对于任意常数 λ_i，有

$$\nabla\times\lambda_i\boldsymbol{H}_i=\lambda_i\boldsymbol{J}_i+\frac{\partial\lambda_i\boldsymbol{D}_i}{\partial t};\quad \nabla\times\lambda_i\boldsymbol{E}_i=-\frac{\partial\lambda_i\boldsymbol{B}_i}{\partial t};$$

$$\nabla\cdot\lambda_i\boldsymbol{B}_i=0;\quad \nabla\cdot\lambda_i\boldsymbol{D}_i=\lambda_i\rho_i$$

根据麦克斯韦方程组的线性性质，并结合电磁场的傅里叶变换表达式，则对任意时变电磁场，只需要研究最具代表性的频率为 ω 的正弦形式的场即可，即

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega)+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega)\\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega)=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega)=\rho(\boldsymbol{r},\omega)\end{cases} \tag{5-11}$$

它实质上相当于对麦克斯韦方程组整体上进行了傅里叶变换。对方程中的“相量”（傅里叶变换之后对应的函数）做针对各个频率成分的“求和”，就可以得到任意时变场的情形。比

如，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$，$\rho(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$，即可得到任意电流和电荷激励下的场景；而$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$，就是对应激励下的电场和磁场的表达式。

因此，研究正弦电磁场并没有失掉一般性，但是难度却大大降低。这也是为什么要分析时谐电磁场的原因。

5.4.2　时谐电磁场与复矢量之间的转换

如前所述，在时变电磁场的情况下，我们经常研究的是随时间做正弦（或者余弦）变化的电磁场，也就是时谐电磁场。此时，采用复矢量形式表示正弦电磁场是普遍的做法，而且不失一般性，因此熟练掌握时谐场和复矢量之间的转换具有重要意义。这些复数形式的矢量（或者标量）也称为相量。

比如，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z\\&=E_{x\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_x)\boldsymbol{e}_x+E_{y\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_y)\boldsymbol{e}_y+E_{z\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_z)\boldsymbol{e}_z\\&=\mathrm{Re}\left[E_{x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_x)}\boldsymbol{e}_x+E_{y\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_y)}\boldsymbol{e}_y+E_{z\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_z)}\boldsymbol{e}_z\right]\\&=\mathrm{Re}\left[(\dot{E}_{x\mathrm{m}}\boldsymbol{e}_x+\dot{E}_{y\mathrm{m}}\boldsymbol{e}_y+\dot{E}_{z\mathrm{m}}\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]\end{aligned}\tag{5-12}$$

即

$$\boldsymbol{E}=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}=\dot{E}_{x\mathrm{m}}\boldsymbol{e}_x+\dot{E}_{y\mathrm{m}}\boldsymbol{e}_y+\dot{E}_{z\mathrm{m}}\boldsymbol{e}_z\tag{5-13}$$

称为电场强度复矢量。

对于时谐电磁场其他所有场量，也可以运用类似的表达式。我们这种“简单问题复杂化”的做法有什么好处呢？复数表达式的运用使得数学运算简化，比如将对时间变量的偏微分变为代数运算。例如$\boldsymbol{D}=\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$，则有

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Re}(\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

也就是说，电位移矢量在时域求导，等价于其相量乘$\mathrm{j}\omega$；同理，时域积分操作等价于相量除以$\mathrm{j}\omega$。

对于电场强度随时间做正弦变化的情况，我们可以这样处理

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z\\&=E_{x\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_x)\boldsymbol{e}_x+E_{y\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_y)\boldsymbol{e}_y+E_{z\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_z)\boldsymbol{e}_z\\&=E_{x\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi_x-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_x+E_{y\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi_y-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_y+E_{z\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi_z-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_z\\&=\mathrm{Re}\left[E_{x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\varphi_x-\frac{\pi}{2}\right)}\boldsymbol{e}_x+E_{y\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\varphi_y-\frac{\pi}{2}\right)}\boldsymbol{e}_y+E_{z\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\varphi_z-\frac{\pi}{2}\right)}\boldsymbol{e}_z\right]\\&=\mathrm{Re}\left[(-\mathrm{j}E_{x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_x}\boldsymbol{e}_x-\mathrm{j}E_{y\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_y}\boldsymbol{e}_y-\mathrm{j}E_{z\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_z}\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]\\&=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]\end{aligned}$$

也就是说，如果场量按照正弦变化，电场强度也可以写作类似的复数形式。

事实上，上述操作中，对于具体是取实部还是取虚部，并没有严格的要求，都是正确的。但是在具体应用时，要坚持一种选择，而不能“忽左忽右”，一会儿取实部，一会儿取虚部。

此外，在做题的过程中，一定要识别方程、场量的形式是瞬时值形式还是复数形式；否则，就会闹出大笑话。一般来讲，显含时间变量的形式都是瞬时值形式；而显含纯虚数单位 j 的都是复数形式。一定要根据具体的表达式选择相应的操作。比如：

已知 $\boldsymbol{H}(x,z)=\boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}\ \mathrm{A/m}$，利用麦克斯韦方程组求电场强度。磁场强度就是典型的复数形式；这时，必须采用 $\boldsymbol{E}(x,z)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}$ 这个复数形式的麦克斯韦方程来求解电场。

但是，如果已知 $\boldsymbol{H}(x,z)=\boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t-10\sqrt{3}\pi z)\ \mathrm{A/m}$，这个就是典型的瞬时值形式。此时，必须采用 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}(x,z)}{\partial t}$ 的瞬时值形式的麦克斯韦方程，通过积分来计算电场强度，得到的也是瞬时值形式。

5.4.3 平均坡印亭矢量的严格推证过程

一般情况下，假设正弦电磁场的瞬时值为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z\\&=E_{x\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}x})\boldsymbol{e}_x+E_{y\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}y})\boldsymbol{e}_y+E_{z\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}z})\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{5-14}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=H_x\boldsymbol{e}_x+H_y\boldsymbol{e}_y+H_z\boldsymbol{e}_z\\&=H_{x\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}x})\boldsymbol{e}_x+H_{y\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}y})\boldsymbol{e}_y+H_{z\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}z})\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{5-15}$$

它们的复矢量形式为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}=E_{x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{e}x}}\boldsymbol{e}_x+E_{y\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{e}y}}\boldsymbol{e}_y+E_{z\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{e}z}}\boldsymbol{e}_z\tag{5-16}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{m}}=H_{x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{h}x}}\boldsymbol{e}_x+H_{y\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{h}y}}\boldsymbol{e}_y+H_{z\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{h}z}}\boldsymbol{e}_z\tag{5-17}$$

则按照坡印亭矢量的定义，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\\&=E_{x\mathrm{m}}H_{y\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}x})\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}y})\boldsymbol{e}_z-E_{x\mathrm{m}}H_{z\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}x})\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}z})\boldsymbol{e}_y-\\&\quad E_{y\mathrm{m}}H_{x\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}y})\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}x})\boldsymbol{e}_z+E_{y\mathrm{m}}H_{z\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}y})\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}z})\boldsymbol{e}_x+\\&\quad E_{z\mathrm{m}}H_{x\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}z})\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}x})\boldsymbol{e}_y-E_{z\mathrm{m}}H_{y\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}z})\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}y})\boldsymbol{e}_x\end{aligned}\tag{5-18}$$

可以看出，坡印亭矢量的六项形式相似，因此，仅考虑第一项在一个周期内的平均值，然后写出全部结果。显然

$$\frac{1}{T}\int_0^T E_{x\mathrm{m}}H_{y\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{e}x})\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{h}y})\mathrm{d}t=\frac{1}{2}E_{x\mathrm{m}}H_{y\mathrm{m}}\cos(\varphi_{\mathrm{e}x}-\varphi_{\mathrm{h}y})$$

其中，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。于是坡印亭矢量在一个周期的平均值 $\bar{\boldsymbol{S}}$ 可以表示为

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}[E_{ym}H_{zm}\cos(\varphi_{ey}-\varphi_{hz})-E_{zm}H_{ym}\cos(\varphi_{ez}-\varphi_{hy})]\boldsymbol{e}_x+$$
$$\frac{1}{2}[E_{zm}H_{xm}\cos(\varphi_{ez}-\varphi_{hx})-E_{xm}H_{zm}\cos(\varphi_{ex}-\varphi_{hz})]\boldsymbol{e}_y+ \tag{5-19}$$
$$\frac{1}{2}[E_{xm}H_{ym}\cos(\varphi_{ex}-\varphi_{hy})-E_{ym}H_{xm}\cos(\varphi_{ey}-\varphi_{hx})]\boldsymbol{e}_z$$

这就是坡印亭矢量的平均值形式。在时谐情况下，平均坡印亭矢量更具有实际意义。

对于正弦电磁场而言，多数情况下场量都采用复矢量形式，因此直接用复矢量形式计算得到平均坡印亭矢量更具实际意义。

根据叉乘的定义、复矢量的表示方法，不难看出

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}_m\times\dot{\boldsymbol{H}}_m^*&=(E_{xm}e^{j\varphi_{ex}}\boldsymbol{e}_x+E_{ym}e^{j\varphi_{ey}}\boldsymbol{e}_y+E_{zm}e^{j\varphi_{ez}}\boldsymbol{e}_z)\times\\&\quad(H_{xm}e^{-j\varphi_{hx}}\boldsymbol{e}_x+H_{ym}e^{-j\varphi_{hy}}\boldsymbol{e}_y+H_{zm}e^{-j\varphi_{hz}}\boldsymbol{e}_z)\\&=(E_{ym}H_{zm}e^{j(\varphi_{ey}-\varphi_{hz})}-E_{zm}H_{ym}e^{j(\varphi_{ez}-\varphi_{hy})})\boldsymbol{e}_x+\\&\quad(E_{zm}H_{xm}e^{j(\varphi_{ez}-\varphi_{hx})}-E_{xm}H_{zm}e^{j(\varphi_{ex}-\varphi_{hz})})\boldsymbol{e}_y+\\&\quad(E_{xm}H_{ym}e^{j(\varphi_{ex}-\varphi_{hy})}-E_{ym}H_{xm}e^{j(\varphi_{ey}-\varphi_{hx})})\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

观察可知，

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{H}_m^* \tag{5-20}$$

因此，定义

$$\boldsymbol{S}_c=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{H}_m^*=\boldsymbol{E}_e\times\boldsymbol{H}_e^* \tag{5-21}$$

称为复数形式的坡印亭矢量。使用中应该特别注意最大值和有效值的不同。于是

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\mathrm{Re}\boldsymbol{S}_c=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{H}_m^*=\mathrm{Re}\boldsymbol{E}_e\times\boldsymbol{H}_e^* \tag{5-22}$$

这也就证明了式(5-22)就是平均坡印亭矢量的计算结果。

可以将上述结论做一个推广。假设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$是两个时谐变化的矢量场，$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},\omega)$，$\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},\omega)$是对应的相量表达形式，则基于前面的推证结果，很容易得到

$$\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},\omega)\times\dot{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},\omega) \tag{5-23}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},\omega)\cdot\dot{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},\omega) \tag{5-24}$$

5.4.4　关于波动方程的几个问题

在数学上，标量形式的、一维、非齐次波动方程一般写作

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=h(x,t) \tag{5-25}$$

其通解可以写作 $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)+p(x,t)$，其中

$$p_{tt}-a^2p_{xx}=h(x,t) \tag{5-26}$$

是满足非齐次波动方程的一个特解；而 $f(x-at)$，$g(x+at)$均满足齐次的波动方程，且

$f(x)$，$g(x)$是任意两个函数，它们组成了齐次方程的通解。将 $u=f(x-at)$代入方程中，即可验证上述结论。

$$u_t=-af'(x-at)$$
$$u_{tt}=a^2f''(x-at)$$
$$u_x=f'(x-at)$$
$$u_{xx}=f''(x-at)$$

所以 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$。同理，$u=g(x+at)$也是如此。

图 5-3 给出了函数 $f(x-at)$的图像。当 $t=0$ 时，函数图像如图 5-3 中实线所示，$f(x)$为任意函数；当 $t=t$ 时，函数图像如图 5-3 中虚线所示，相对于 $f(x)$的图像，图像整体向右平移了 at 的距离。因此，当时间连续变化的时候，$f(x-at)$描述的就是一个沿 x 轴正方向水平移动的行波。其传播速度显然就是 $v=\dfrac{at}{t}=a$，与波动方程里面拉氏算符（二阶微分运算）前面的系数相关。同理，$u=g(x+at)$表示的是沿 x 轴负方向水平运动的一个行波。

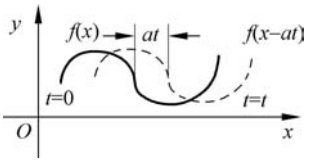


图 5-3　行波示意图

三维情况下，波动方程的形式如下

$$u_{tt}-a^2\nabla^2u=h(x,y,z,t)$$

此时，a 依然表示行波的波速。

基于麦克斯韦方程组，很容易得到如下关于矢量势和标量势的方程，即

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\phi-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}\tag{5-27}$$

式(5-27)分别是矢量形式和标量形式的、非齐次的波动方程。因为矢量形式的方程可以等价为三个直角分量所满足的标量形式的方程，因此式(5-27)也可以用标量形式的波动方程对比做一些较为深入的解释。

一个直观的对比，对于电磁波来讲，可以得到其传播速度为

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{n}\tag{5-28}$$

其中，$c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$表示真空中的波速；$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$表示媒质的折射率。对于大多数非磁性材料，有 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$。

另外，$u=f(x-at)=f\left[-a\left(t-\dfrac{x}{a}\right)\right]=F\left(t-\dfrac{x}{a}\right)$，这是通解的另外一种表示形式。它表示位于 x 位置的场，是由 $x=0$ 处的场在 $t=\left(t-\dfrac{x}{a}\right)$时刻的状态所确定；相对于前者，后者推迟了$\dfrac{x}{a}$的时间，而这正好是电磁波传播所需的时间。

对于 $u=g(x+at)=g\left[a\left(t+\dfrac{x}{a}\right)\right]=G\left(t+\dfrac{x}{a}\right)$，可以做类似的分析。

因此，习惯上把 $u=F\left(t-\dfrac{x}{a}\right)$ 称之为推迟势。

5.4.5　磁型源所对应的麦克斯韦方程组

本章给出的麦克斯韦方程组中，变化的电荷、电流是产生电磁场的源，因此，这个方程组也称为电型源所对应的麦克斯韦方程组。与之相对应，通过类比的方法，也可以得到磁型源的方程。一般通过对各个变量加下标“e”或者“m”来分别表示这两个情形。

虽然磁荷及磁流在客观上并不存在，但引出这种概念可使问题分析简化，它是一种数学上的类比方法；同时，很多情况下可以用等效的办法“产生”磁荷和磁流；更为重要的是，添加了磁荷与磁流后，麦克斯韦方程组和边界条件更加一般化，且可分别改写成对称形式，即

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}=\rho_{\mathrm{e}}\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla\times(-\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}})=\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}=-\dfrac{\partial(-\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}})}{\partial t}\\ \nabla\cdot(-\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}})=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}=\rho_{\mathrm{m}}\end{cases}$$

同样，边界条件分别为

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_{\mathrm{e1}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{e2}})=\boldsymbol{J}_{\mathrm{eS}}\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_{\mathrm{e1}}-\boldsymbol{E}_{\mathrm{e2}})=0\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_{\mathrm{e1}}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{e2}})=0\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_{\mathrm{e1}}-\boldsymbol{D}_{\mathrm{e2}})=\rho_{\mathrm{eS}}\end{cases}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_{\mathrm{m1}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{m2}})=0\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_{\mathrm{m1}}-\boldsymbol{E}_{\mathrm{m2}})=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{mS}}\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_{\mathrm{m1}}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{m2}})=\rho_{\mathrm{Sm}}\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_{\mathrm{m1}}-\boldsymbol{D}_{\mathrm{m2}})=0\end{cases}$$

通过观察这两组方程，可以得到电型源和磁型源之间的对照关系，即所谓的对偶量，如表 5-3 所示。对于对偶量，它们满足相同的麦克斯韦方程组和边界条件，具有同样形式的解。利用对偶关系来求解对偶量的场分布，称为电磁场的对偶原理，也称为电磁场的二重性原理。

表 5-3　电偶极子与磁偶极子的场量的对偶

电量	$\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}$	ε	μ	ρ_{e}	$\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}$
磁量	$-\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$	$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}$	$-\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}$	$\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}$	μ	ε	ρ_{m}	$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$

引入磁型源后，一般情况下的麦克斯韦方程组形式如下

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_{\mathrm{m}}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\end{cases}\tag{5-29}$$

边界条件如下

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_S \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=-\boldsymbol{J}_{Sm} \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=\rho_{Sm} \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S \end{cases} \tag{5-30}$$

在后面第 7 章讨论偶极子辐射时，只要作对偶量的代换，即可由其中电偶极子辐射的解得到磁偶极子辐射的解，反之亦然。这种利用对偶关系来求解对偶量的场分布，称为电磁场的对偶原理，也称为电磁场的二重性原理。

5.4.6 磁型源所对应的辅助势函数

与电型源相似，当给出磁型源所满足的麦克斯韦方程组时，利用类似的做法，可以定义相应的矢量势和标量势，给出所谓的洛伦兹规范，进而得到它们所必须满足的方程。

由$\nabla\cdot(-\boldsymbol{D}_m)=0$，引入磁型源的矢量势，即动态矢量势 $\boldsymbol{F}$，满足

$$-\boldsymbol{D}_m=\nabla\times\boldsymbol{F} \tag{5-31}$$

或

$$\boldsymbol{E}_m=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{F} \tag{5-32}$$

将式(5-32)代入磁型源方程组中的第二方程，得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_m=\frac{\partial\boldsymbol{D}_m}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{F}$$

即

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{H}_m+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\right)=0 \tag{5-33}$$

式(5-33)括号中的矢量是无旋的，与静电场中电势的引入类似，这里我们引入动态标量势 ϕ_m，令

$$\boldsymbol{H}_m+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}=-\nabla\phi_m$$

即

$$\boldsymbol{H}_m=-\nabla\phi_m-\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t} \tag{5-34}$$

式中，ϕ_m 和 $\boldsymbol{F}$ 分别为磁型源对应的标量势和矢量势。它们均是空间坐标和时间的函数，都是人为引入的辅助函数。如果我们已知了两个辅助函数 ϕ_m 和 $\boldsymbol{F}$ 的值，则可以代入式(5-32)和式(5-34)求得 $\boldsymbol{E}_m$ 和 $\boldsymbol{H}_m$，下面我们将由麦克斯韦组的另外两个方程得到两个势函数 ϕ_m 和 $\boldsymbol{F}$ 满足的方程，即达朗贝尔方程。

为了求得势函数 ϕ_m 和 $\boldsymbol{F}$ 与场源之间的关系，将式(5-32)代入磁型源方程组对应方程中的第一方程，并利用矢量微分恒等式，得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_m=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}=-\frac{1}{\varepsilon}(\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F})=-\boldsymbol{J}_m-\frac{\partial\boldsymbol{B}_m}{\partial t}$$

将式(5-34)代入上式，有

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}=\varepsilon\boldsymbol{J}_m-\nabla\left(\varepsilon\mu\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial t^2}$$

即

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial t^2} = -\varepsilon \boldsymbol{J}_m \tag{5-35}$$

同理，再将式(5-34)代入磁型源方程组中的第四方程，得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_m = -\mu \nabla \cdot \left(\nabla \phi_m + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\right) = \rho_m$$

即

$$\nabla^2 \phi_m + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{F} = -\frac{\rho_m}{\mu} \tag{5-36}$$

于是我们得到了两个势函数满足的方程式(5-35)和方程式(5-36)，但是这两个方程都包含有 ϕ_m 和 $\boldsymbol{F}$，是联立方程。

观察 $\boldsymbol{F}$ 和 ϕ_m 的引入可知二者都不是唯一的，它们的取值具有一定的任意性。如果我们假定

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi_m}{\partial t} = 0 \tag{5-37}$$

式(5-37)称为洛伦兹条件，即洛伦兹规范条件，则式(5-35)与式(5-36)可分别简化为

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{F} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial t^2} = -\varepsilon \boldsymbol{J}_m \\ \nabla^2 \phi_m - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \phi_m}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho_m}{\mu} \end{cases} \tag{5-38}$$

在无源空间，$\boldsymbol{J}_m = 0$，$\rho_m = 0$，动态势函数的波动方程变为齐次微分方程，即

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{F} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \phi_m - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \phi_m}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \tag{5-39}$$

对于正弦电磁场，动态势函数的达朗贝尔方程式(5-38)可表示为

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{F} + k^2 \boldsymbol{F} = -\varepsilon \boldsymbol{J}_m \\ \nabla^2 \phi_m + k^2 \phi_m = -\dfrac{\rho_m}{\mu} \end{cases} \tag{5-40}$$

式中，$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 称为波数。洛伦兹条件式(5-37)则变为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\phi_m = 0 \tag{5-41}$$

电场强度和磁场强度的表达式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_m = -\nabla \phi_m - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{E}_m = -\dfrac{1}{\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{F} \end{cases} \tag{5-42}$$

无源空间中，正弦电磁场的势函数所满足的方程组为

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{F} + k^2 \boldsymbol{F} = 0 \\ \nabla^2 \phi_m + k^2 \phi_m = 0 \end{cases} \tag{5-43}$$

但这种情况下我们不采用势函数求解电磁场，因为这时 $\boldsymbol{E}_m$ 和 $\boldsymbol{H}_m$ 也满足相同形式的

方程，该方程称为亥姆霍兹方程。

5.4.7 利用麦克斯韦方程求解场量时的积分常数问题

在时变场的情况下，如果给定了电场或者磁场，那么通过麦克斯韦方程组就可以很快确定磁场或者电场。这里面一般会涉及积分的问题，如已知电场 $\boldsymbol{E}$ 时，利用法拉第电磁感应定律 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，通过对电场求旋度，即可获得磁场对时间的变化率；再通过对时间积分，就可得到磁场 $\boldsymbol{B}$。一般情况下，积分常数我们都会选择为零。这是为什么呢？

可以从麦克斯韦方程组的线性性质和叠加原理来理解这个操作。还以刚才的例子来介绍，当我们对时间变量积分得到磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 时，对应的积分常数一般情况下应该仅仅是空间坐标的函数，即 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$。换句话说，$\boldsymbol{B}_t(x,y,z,t)=\boldsymbol{B}(x,y,z,t)+\boldsymbol{B}_r(x,y,z)$，可以用两个场的叠加来表示。基于同样的想法，其他场量也满足这个关系。因此，麦克斯韦方程组可以表示为

$$\begin{cases}\nabla\times(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_r)=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_r+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}_r}{\partial t}\\ \nabla\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_r)=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}_r}{\partial t}\\ \nabla\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_r)=0\\ \nabla\cdot(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}_r)=\rho+\rho_r\end{cases}\tag{5-44}$$

式(5-44)中，下标 r 表示仅仅是空间坐标的函数。利用叠加原理，可以把式(5-44)中的方程分成两组，即

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}_r=\boldsymbol{J}_r+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}_r}{\partial t}=\boldsymbol{J}_r\\ \nabla\times\boldsymbol{E}_r=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}_r}{\partial t}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}_r=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}_r=\rho_r\end{cases}$$

左侧的方程，电场和磁场都随时间变化且相互耦合，从而产生时变电磁场和电磁波；右侧的方程与时间无关，电场和磁场也是去耦合的，它对应的就是静态电场和磁场的情形。由于静态电磁场已经在前面章节处理过了，因此单纯从计算时变电磁场的角度考虑，完全可以令积分常数为零，从而只计算时变场的问题。这样并没有失掉一般性。

5.5 典型例题分析

例 5.1 如图 5-4 所示，半径为 R 的圆柱形空间存在着轴向均匀磁场，有一长度为 $2R$ 的导体棒 MN 如图 5-4 所示放置，若磁感应强度的大小以 $\dfrac{\partial B}{\partial t}=C$ 变化，其中 C 是一个大于零的常数，试求导体棒上的感应电动势。

解 方法 1：采用感生电动势进行计算，则需要构造一个包括 MN 的闭合回路，而且除

MN 之外，回路上的其他部分对应电动势要么为零，要么很容易计算。这样，就可以得到 MN 上所产生的电动势。如图 5-4 所示，构造三角形 OMN，考虑对称性，则变化磁场所产生的涡旋电场，其方向与 OM 和 ON 垂直，对应的电动势为零。因此，围绕 ONM 以顺时针方向做环路积分，则

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_N^M \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-CS_{\text{阴影}}$$

因此，计算出阴影部分的面积，即可得到导体棒上的电动势。观察图 5-4 中的几何关系，则

$$S_{\text{阴影}}=\frac{R^2}{4}\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

所以，电动势可以表示为

$$\mathscr{E}=-\frac{CR^2}{4}\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

方法 2：直接利用变化的磁场，得到涡旋电场的表达式，然后计算其沿 MN 的积分。如图 5-5 所示。变化的磁场在周围激发涡旋电场，由于对称性，此电场的方向为圆柱坐标系下的 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向，且 $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，因此，构造图 5-5 中虚线部分所示的环路，则有

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=2\pi rE_{\mathrm{i}}=-C\pi r^2,\quad r<R,\text{于是 }\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=-\frac{C}{2}r\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=2\pi rE_{\mathrm{e}}=-C\pi R^2,\quad r>R,\text{于是 }\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}=-\frac{C}{2r}R^2\boldsymbol{e}_\varphi$$

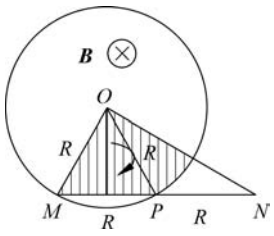


图 5-4　例 5.1 示意图

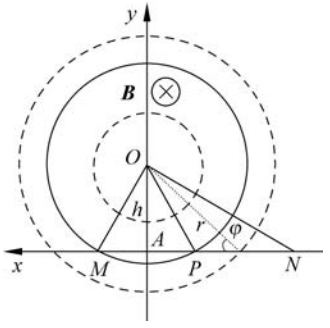


图 5-5　例 5.1 的解法 2 示意图

根据感生电动势的定义，则有

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_N^P \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_P^M \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

代入上述表达式，则有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\mathrm{i}}&=\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_N^P \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_P^M \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=-\int_N^P \frac{C}{2r}R^2\boldsymbol{e}_\varphi\cdot \boldsymbol{e}_x\,\mathrm{d}x-\int_P^M \frac{C}{2}r\boldsymbol{e}_\varphi\cdot \boldsymbol{e}_x\,\mathrm{d}x\\&=-\int_N^P \frac{C}{2r}R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}x-\int_P^M \frac{C}{2}r\sin\varphi\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

利用图 5-5 中的几何关系，则

$$x=-h\cot\varphi,\quad r=\frac{h}{\sin\varphi},\quad \mathrm{d}x=h\csc^2\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

$$h=R\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \angle ONM=\frac{\pi}{6},\quad \angle OPM=\frac{\pi}{3}$$

于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\mathrm{i}}&=-\frac{C}{2}R^2\int_{\pi/6}^{\pi/3}\mathrm{d}\varphi-\frac{C}{2}h^2\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\csc^2\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=-CR^2\frac{\pi}{12}+\frac{C}{2}h^2\cot\varphi\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3}\\&=-CR^2\frac{\pi}{12}-CR^2\frac{\sqrt{3}}{4}\\&=-\frac{CR^2}{4}\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

例 5.2 介质 1 和介质 2 之间的分界面为一个平面，沿 z 轴无限延伸；其在 $z=0$ 的平面上的分布如图 5-6 所示。已知 $\varepsilon_{r1}=2.5$，$\varepsilon_{r2}=5$，在边界附近，介质 1 中的电场强度分布为 $\boldsymbol{E}=25\boldsymbol{e}_x+50\boldsymbol{e}_y+25\boldsymbol{e}_z$，求边界附近介质 2 中的电场是多少。

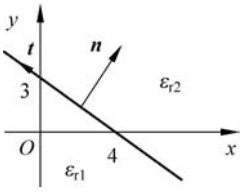


图 5-6 例 5.2 示意图

解 本题目考查的是电磁场的边界条件及其应用。其核心在于找出一般情况下分界面的法线方向，从而可以得到电磁场的法线和切线方向的分量，进而根据边界条件加以具体求解。由图 5-6 可以求出分界面对应的切线（面）t 的方程为 $3x+4y-12=0$，将其看作一个空间平面，则容易得到该平面的法线方向为 $3\boldsymbol{e}_x+4\boldsymbol{e}_y$（我们选择图中的法线方向，另外一个与其方向相反），将幅度归一化得

$$\boldsymbol{n}=\frac{3}{5}\boldsymbol{e}_x+\frac{4}{5}\boldsymbol{e}_y$$

由于介质 1 中的电场强度为 $\boldsymbol{E}_1=25\boldsymbol{e}_x+50\boldsymbol{e}_y+25\boldsymbol{e}_z$。

则 $$E_{1\mathrm{n}}=\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n}=(25,50,25)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)=15+40=55$$

即 $$\boldsymbol{E}_{1\mathrm{n}}=E_{1\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{n}=33\boldsymbol{e}_x+44\boldsymbol{e}_y$$

而 $$\boldsymbol{E}_{1\mathrm{t}}=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_{1\mathrm{n}}=-8\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y+25\boldsymbol{e}_z$$

由于边界条件 $$\boldsymbol{E}_{1\mathrm{t}}=\boldsymbol{E}_{2\mathrm{t}},\quad \boldsymbol{D}_{1\mathrm{n}}=\boldsymbol{D}_{2\mathrm{n}},\quad \text{且 } \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

所以 $$\boldsymbol{E}_{2\mathrm{t}}=\boldsymbol{E}_{1\mathrm{t}}=-8\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y+25\boldsymbol{e}_z$$

$$E_{2\mathrm{n}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1\mathrm{n}}=\frac{1}{2}\times55=27.5$$

$$\boldsymbol{E}_{2\mathrm{n}}=E_{2\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{n}=16.5\boldsymbol{e}_x+22\boldsymbol{e}_y$$

所以 $$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{2\mathrm{t}}+\boldsymbol{E}_{2\mathrm{n}}=8.5\boldsymbol{e}_x+28\boldsymbol{e}_y+25\boldsymbol{e}_z$$

例 5.3 根据要求做计算。

（1）$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$，计算电场强度瞬时值、磁场强度的相量形式和瞬时值形式，以及瞬时和平均坡印亭矢量。

（2）$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_xH_0\cos(\omega t-\beta z)-\boldsymbol{e}_yH_0\sin(\omega t-\beta z)$，计算磁场的相量形式、电场强度，以及

电场能量密度的平均值(考虑无源的情况)。

解　本题目重点考查的是电磁场瞬时值形式与相量形式的互换,利用麦克斯韦方程组进行电场和磁场的求解、坡印亭矢量及平均值,以及能量密度及平均值的计算等。计算过程可以采用瞬时值形式计算,也可以采取相量形式进行计算。大家注意体会其中的选择。

(1) 本题为复数形式,其瞬时值形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\mathrm{Re}(\boldsymbol{e}_x E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z})+\mathrm{Re}(\boldsymbol{e}_y E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})\\&=E_0\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+E_0\cos\left(\omega t-\beta z+\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_y\\&=E_0\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x-E_0\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y\end{aligned}\tag{5-45}$$

根据麦克斯韦方程组$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$,则有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial z}-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z}=\boldsymbol{e}_y E_0\beta\sin(\omega t-\beta z)-\boldsymbol{e}_x E_0\beta\cos(\omega t-\beta z)=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\boldsymbol{e}_y\frac{E_0\beta}{\mu_0}\sin(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_x\frac{E_0\beta}{\mu_0}\cos(\omega t-\beta z)$$

积分可以得到,

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x\frac{E_0\beta}{\omega\mu_0}\sin(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y\frac{E_0\beta}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-\beta z)\tag{5-46}$$

注意,这里积分常数设置为零,可以参见重点和难点分析部分。

如果使用麦克斯韦方程组的相量形式,则有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$$

将$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$代入上式,整理,得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial z}-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}\beta E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\boldsymbol{e}_x E_0\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$$

所以

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\frac{\beta E_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}\frac{E_0\beta}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}=-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}\frac{E_0\beta}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\boldsymbol{e}_y\frac{\beta E_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\tag{5-47}$$

将式(5-47)与式(5-46)对比,可以发现,二者对应是一致的。因此,无论使用哪种方法进行磁场强度的计算,结果都应该一致。大家可以根据自己的喜好,在做题时做出选择。

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{S}}&=\mathrm{Re}\boldsymbol{S}_{\mathrm{c}}=\mathrm{Re}\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_x E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z})\times\left(-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}\frac{E_0\beta}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\boldsymbol{e}_y\frac{\beta E_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\right)^*\\&=\frac{\boldsymbol{e}_z}{2}\left(\frac{\beta E_0^2}{\omega\mu_0}+\frac{E_0^2\beta}{\omega\mu_0}\right)=\frac{\beta E_0^2}{\omega\mu_0}\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{5-48}$$

当然,也可以直接根据瞬时值的公式进行计算。基于式(5-45)和式(5-46),则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}&=[E_0\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x-E_0\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y]\times\\&\quad\left[\boldsymbol{e}_x\frac{E_0\beta}{\omega\mu_0}\sin(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y\frac{E_0\beta}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-\beta z)\right]\\&=\boldsymbol{e}_z\left[\frac{E_0^2\beta}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-\beta z)+\frac{E_0^2\beta}{\omega\mu_0}\sin^2(\omega t-\beta z)\right]\\&=\frac{E_0^2\beta}{\omega\mu_0}\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{5-49}$$

可以发现，瞬时值不随时间变化(这显然是一个特例)。其平均值仍是自身，与式(5-48)结果一致。

(2) 题为瞬时值形式，也可以写为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x H_0\cos(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y H_0\cos\left(\omega t-\beta z+\frac{\pi}{2}\right)$$

其复数形式为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\boldsymbol{e}_y H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}=(\boldsymbol{e}_x+\mathrm{j}\boldsymbol{e}_y)H_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

根据麦克斯韦方程组，$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$，则

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\frac{\partial H_x}{\partial z}-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial H_y}{\partial z}=H_0\beta[\boldsymbol{e}_y\sin(\omega t-\beta z)-\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t-\beta z)]=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{H_0\beta}{\varepsilon_0}[\boldsymbol{e}_y\sin(\omega t-\beta z)-\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t-\beta z)]$$

所以，电场强度为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{H_0\beta}{\omega\varepsilon_0}[\boldsymbol{e}_y\cos(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_x\sin(\omega t-\beta z)]$$

很显然，其对应的相量形式为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{H_0\beta}{\omega\varepsilon_0}[\boldsymbol{e}_y\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}]$$

电场能量密度为

$$w_\mathrm{e}=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{H_0^2\beta^2}{2\omega^2\varepsilon_0}[\cos^2(\omega t-\beta z)+\sin^2(\omega t-\beta z)]$$

电场能量密度的平均值为

$$\bar{w}_\mathrm{e}=\frac{1}{T}\int_0^T w_\mathrm{e}\mathrm{d}t=\frac{H_0^2\beta^2}{2\omega^2\varepsilon_0}$$

事实上，也可以利用相量的办法，直接得到能量密度的平均值，即

$$\bar{w}_\mathrm{e}=\frac{1}{4}\mathrm{Re}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}^*)=\frac{1}{4}\mathrm{Re}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)=\frac{H_0^2\beta^2}{2\omega^2\varepsilon_0}$$

上面例题的求解过程看似烦琐，实际上是通过多种方法进行计算求解。大家在做题的过程中，根据题目条件和个人爱好，对各种方法加以取舍。

例 5.4 人造卫星在空间中接收到的太阳辐射的能流密度大致为 $1366.1\mathrm{W/m^2}$，计算它所对应的最大电场强度是多少？如果太阳光以 37°(相对于电池表面法线方向)入射到 $1\mathrm{m^2}$ 的太阳能电池上，则该电池接收到的功率是多少？

解 本题重点考查的是平均坡印亭矢量及其计算；如何通过坡印亭矢量得到通过某一表面的电磁波功率。同时，对太阳辐射的数量级有一个定量的认识。

(1) 在自由空间中，波阻抗为

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\Omega\approx377\Omega$$

由于能流密度的时间平均值为

$$\bar{S}=\frac{E_{\mathrm{m}}^{2}}{2Z_{0}}$$

所以它所对应的最大电场强度是

$$E_{\mathrm{m}}=\sqrt{2Z_{0}\bar{S}}=\sqrt{2\times377\times1366.1}\approx1014.91\mathrm{V/m}$$

(2) 分析可以得到电池表面法线方向的能流密度为

$$\bar{S}_{\mathrm{n}}=\bar{S}\cos37^{\circ}=1366.1\times\cos37^{\circ}\approx1091.0\mathrm{W/m^{2}}$$

$$P=\int_{S}\bar{\boldsymbol{S}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\bar{S}_{\mathrm{n}}\times1\mathrm{m}^{2}=1091.0\mathrm{W}$$

例 5.5　无源空间中电场强度为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_{y}[E_{0}\sin(\alpha x-\omega t)+E_{0}\sin(\alpha x+\omega t)]$，运用麦克斯韦方程组，计算磁场强度的大小、位移电流的大小。这个场存在的必要条件是什么？

解　本题目要求大家掌握运用麦克斯韦方程组进行场的相互计算；掌握位移电流的定义及其计算；同时，掌握电磁场和电磁波存在的条件。

方法 1：直接基于麦克斯韦方程组求解。根据 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_{0}\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$，可以得到

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_{z}\frac{\partial E}{\partial x}=\boldsymbol{e}_{z}[E_{0}\alpha\cos(\alpha x-\omega t)+E_{0}\alpha\cos(\alpha x+\omega t)]=-\mu_{0}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

所以

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\frac{E_{0}\alpha}{\mu_{0}}\boldsymbol{e}_{z}[\cos(\alpha x-\omega t)+\cos(\alpha x+\omega t)]$$

于是，积分可以得到

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{z}\frac{E_{0}\alpha}{\omega\mu_{0}}[\sin(\alpha x-\omega t)-\sin(\alpha x+\omega t)]$$

注意，这里积分常数设置为零，可以参见重点和难点分析部分。

方法 2：运用第 6 章均匀平面波的结论。该电场为沿 y 轴极化、沿正、负 x 轴传播的两列波。只计算其中一列对应的磁场强度，根据对称性可得完整解。

根据时谐场形式的麦克斯韦方程组

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{e}_{k}\times\boldsymbol{E}}{Z_{0}}$$

取沿 x 轴正向传播项 $\boldsymbol{e}_{k}=\boldsymbol{e}_{x}$，则

$$\boldsymbol{H}_{+}=\frac{E_{0}}{Z_{0}}\sin(\alpha x-\omega t)\boldsymbol{e}_{z}$$

取沿 x 轴负向传播项 $\boldsymbol{e}_{k}=-\boldsymbol{e}_{x}$，则

$$\boldsymbol{H}_{-}=-\frac{E_{0}}{Z_{0}}\sin(\alpha x+\omega t)\boldsymbol{e}_{z}$$

则有

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{+}+\boldsymbol{H}_{-}=\frac{E_{0}}{Z_{0}}[\sin(\alpha x-\omega t)-\sin(\alpha x+\omega t)]\boldsymbol{e}_{z}$$

位移电流为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{D}}=\varepsilon_{0}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\omega\varepsilon_{0}E_{0}[\cos(\alpha x+\omega t)-\cos(\alpha x-\omega t)]\boldsymbol{e}_{y}$$

场存在的必要条件：

如果场存在，则一定需要满足麦克斯韦方程。根据前面的计算，得到了磁场强度之后，应该有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

将 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\frac{E_0\alpha}{\omega\mu_0}[\sin(\alpha x-\omega t)-\sin(\alpha x+\omega t)]$ 代入上式，化简并整理得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_y\frac{\partial H}{\partial x}=-\boldsymbol{e}_y\frac{E_0\alpha^2}{\omega\mu_0}[\cos(\alpha x-\omega t)-\cos(\alpha x+\omega t)]$$

$$=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=-\boldsymbol{e}_y\omega\varepsilon_0E_0[\cos(\alpha x-\omega t)-\cos(\alpha x+\omega t)]$$

所以，

$$\frac{E_0\alpha^2}{\omega\mu_0}=\omega\varepsilon_0E_0$$

即

$$\alpha^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$$

注意：此处并没有考虑磁通连续原理和高斯定理。在无源的情况下，因为电场和磁场互为对方的旋度（系数除外），所以这两个方程自然满足（旋度场的散度必定为零）。

例 5.6 一个无限长的载流导体柱，半径为 R，电导率为 σ，电流为 I 且在截面上均匀分布。计算流入长度为 L 的导体柱的功率，并证明其与这段导体柱的热功率相同。

解 此题重点考查的是坡印亭矢量及其计算问题。首先通过分析得到导体内部电场和磁场的表达式，再利用公式计算得到坡印亭矢量；通过在特定曲面上做坡印亭矢量的通量积分，就可以得到穿过该曲面的电磁波的功率。

柱体内部电场分布为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\frac{I}{\sigma\pi R^2}\boldsymbol{e}_z$$

利用安培环路定理，柱体内部的磁场分布为

$$\boldsymbol{H}=\frac{Ir}{2\pi R^2}\boldsymbol{e}_\varphi$$

在导体外表面处，

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi R}\boldsymbol{e}_\varphi$$

因此，能流密度为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=-\frac{I^2}{2\pi^2R^3\sigma}\boldsymbol{e}_r$$

取流入导体表面的方向为法线正方向，则流入导体柱内部的功率为

$$P=\int\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int|S|_{r=R}\mathrm{d}A=\frac{I^2}{2\pi^2R^3\sigma}\cdot2\pi RL$$

$$=\frac{I^2}{\pi R^2\sigma}L=I^2\frac{L}{S_{截面}\sigma}=I^2R_{柱}$$

于是，问题得证。

例 5.7　如图 5-7 所示，一个长度为 l 的导体杆以速度 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_y u\cos(\omega t)$ 运动，其两端通过柔软的导线连接在伏特计上；空间有一个变化的磁场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x B\cos(\omega t)$，试用两种方法计算感应电动势：(1)利用感生电动势和动生电动势的概念；(2)利用法拉第电磁感应定律。

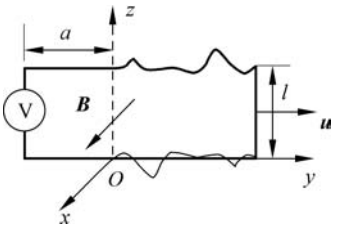


图 5-7　感生和动生电动势的计算示意图

解　对于电动势的计算问题，可以采用两种方法：一种方法是首先计算得到任意时刻穿过线圈平面的磁通量，再利用法拉第电磁感应定律进行求解；另外一种方法是将电动势分成两部分分别计算，即感生电动势和动生电动势，再求和得到总的电动势。

(1) 根据 $\boldsymbol{B}$ 的方向，取逆时针方向为回路正方向。

在任一时刻 t，导体杆的位置为

$$y'=\int_0^t u\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{u}{\omega}\sin\omega t$$

感生电动势为

$$\mathscr{E}_1=-\int_{-a}^{y'}\frac{\partial}{\partial t}(B\cos\omega t)\,l\,\mathrm{d}y=Bl\omega\sin\omega t\cdot\left(a+\frac{u}{\omega}\sin\omega t\right)=Bla\omega\sin\omega t+Blu\sin^2\omega t$$

动生电动势为

$$\mathscr{E}_2=\int_l \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-uBl\cos^2\omega t$$

对于上面的计算，要特别注意方向。所以，有

$$\mathscr{E}=\boldsymbol{B}\omega al\sin\omega t+Blu\sin^2\omega t-Blu\cos^2\omega t=B\omega al\sin\omega t-Blu\cos 2\omega t$$

(2) 法拉第电磁感应定律

$$\psi_t=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{-a}^{y'}B\cos\omega t\cdot l\,\mathrm{d}y=Bl\cos\omega t\left(a+\frac{u}{\omega}\sin\omega t\right)$$

得

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Psi_t}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Blu}{2\omega}\sin 2\omega t+Bal\cos\omega t\right)=-Blu\cos 2\omega t+Bal\omega\sin\omega t$$

可见两种方法结果一致。

5.6　课后习题详解

习题 5.1　设均匀平面电磁波的电场为 $\boldsymbol{E}=E_m\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x$，一长为 a、宽为 b 的矩形线圈的轴线在 x 轴上，且与 xOz 平面夹角为 α。求该线圈中的感应电动势。

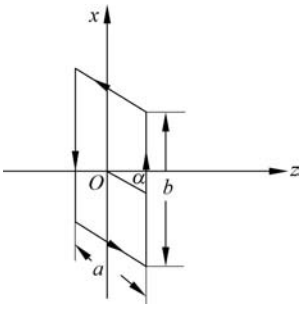


图 5-8　习题 5.1 示意图

解　方法 1：考虑运用公式 $\mathscr{E}=\int\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 计算感应电动势，则在 $z=\pm\frac{a}{2}\cos\alpha$ 处，电场强度为 $\boldsymbol{E}=E_m\sin\left(\omega t\mp\frac{\beta a\cos\alpha}{2}\right)\boldsymbol{e}_x$。如图 5-8 所示，采用逆时针的环路方向为积分方向，则感应电动势的正负反映了相对于此参考方向的相对大小。仅考虑两

个竖直方向边框的积分，感应电动势大小为

$$\mathscr{E}=\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\frac{\beta a\cos\alpha}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t-\frac{\beta a\cos\alpha}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-bE_{\mathrm{m}}\left[\sin\left(\omega t+\frac{\beta a\cos\alpha}{2}\right)-\sin\left(\omega t-\frac{\beta a\cos\alpha}{2}\right)\right]$$

$$=-2bE_{\mathrm{m}}\sin\frac{\beta a\cos\alpha}{2}\cos\omega t$$

此值为正，表明电动势是逆时针方向；此值为负，表明电动势是顺时针方向。

方法 2：由麦克斯韦方程组可以得到

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\beta E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$$

根据法拉第电磁感应定律

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

（注意：线框不动，所以可以将求导符号放进积分符号内）

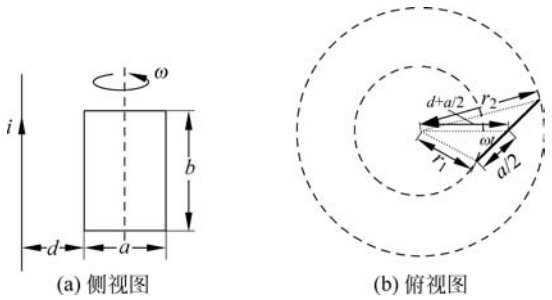
代入上式，并考虑磁通量流出方向为 y 方向（磁通为正的方向），则逆时针方向自然为感应电动势的参考正方向（右手螺旋法则）。于是

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\beta E_{\mathrm{m}}\int_{-(a\cos\alpha)/2}^{(a\cos\alpha)/2}\cos(\omega t-\beta z)b\,\mathrm{d}z$$

$$=E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-\beta z)b\Big|_{-(a\cos\alpha)/2}^{(a\cos\alpha)/2}=-2bE_{\mathrm{m}}\sin\frac{\beta a\cos\alpha}{2}\cos\omega t$$

事实上，根据斯托克斯定理，这两个方法的结果必定一致。

习题 5.2 如图 5-9 所示，尺寸为 $a\times b$ 的矩形线圈与长直线电流 i 共面，且靠近直线电流的边与线电流平行，二者相距为 d，线圈以角速度 ω 绕其中心轴旋转。试求下列两种情况下线圈中的感应电动势。



(a) 侧视图　　(b) 俯视图

图 5-9　习题 5.2 示意图

（1）$i=I_0$（常数）；

（2）$i=I_{\mathrm{m}}\cos\Omega t$。

解　（1）线圈转过角度为 ωt 时，其磁通量为

$$\psi_{\mathrm{m}}=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

其中

$$r_1=\left[\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(d+\frac{a}{2}\right)a\cos\omega t\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r_2=\left[\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)a\cos\omega t\right]^{\frac{1}{2}}$$

此时产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}_1=-\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 I_0 ab\omega\left(d+\frac{a}{2}\right)\sin\omega t}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)$$

(2) 同理求得

$$\psi_{\mathrm{m}}=\frac{\mu_0 I_{\mathrm{m}} b\cos\Omega t}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\mathscr{E}_2=-\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 I_{\mathrm{m}} ab\omega\left(d+\frac{a}{2}\right)\cos\Omega t\sin\omega t}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)+\frac{\mu_0 I_{\mathrm{m}} b\Omega\sin\Omega t}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

习题 5.3　如图 5-10 所示，平行双线与一矩形回路共面，设 $a=0.2\mathrm{m}$，$b=c=d=0.1\mathrm{m}$，$i=0.1\cos(2\pi\times10^7 t)\mathrm{A}$，求回路中的感应电动势。

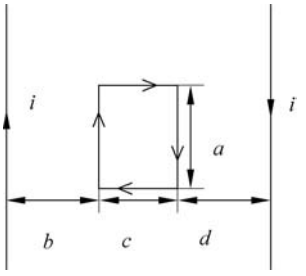


图 5-10　习题 5.3 示意图

解　以左侧电流线为 z 轴，电流 i 在距载流直线 r 处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

则通过矩形线框的磁通量(垂直纸面向里的方向为参考正方向)为

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{m}}&=\int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_b^{b+c}\left[\frac{\mu_0 i}{2\pi r}+\frac{\mu_0 i}{2\pi(b+c+d-r)}\right]a\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\frac{b+c}{b}+\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\frac{c+d}{d}\\&=\frac{\mu_0\ln4}{100\pi}\cos(2\pi\times10^7 t)\mathrm{Wb}\end{aligned}$$

回路中产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=0.348\sin(2\pi\times10^7 t)\mathrm{V}$$

习题 5.4　电子回旋加速器利用空间的交变磁场产生交变电场，从而使带电粒子加速。设加速器中的磁场在圆柱坐标系内只有轴向分量，且只是 r、t 的函数，即 $\boldsymbol{H}=f(r,t)\boldsymbol{e}_z$。试求在半径为 r 处感应电场的大小与方向。若在某一时间间隔内 $f(r,t)=Crt$，其中 C 是常数。试求感应电场强度的具体形式。

解　根据磁场分布的轴对称性可知，感应电场线为与轴线垂直的一族同心圆。由电磁感应定律

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

得
$$E\cdot 2\pi r=-\mu_0\int_0^r 2\pi r'\frac{\partial f(r',t)}{\partial t}\mathrm{d}r'$$

所以

$$E\cdot 2\pi r=-\int_0^r \frac{\partial B}{\partial t}\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r=-\mu_0\int_0^r \frac{\partial}{\partial t}(Crt)\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r=-\frac{2\mu_0\pi C}{3}r^3\Big|_0^r$$

考虑到电场强度的方向,则有

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\mu_0 C}{3}r^2\boldsymbol{e}_\varphi$$

习题 5.5 长为 l 的圆柱形电容器,内外电极的半径分别为 r_1 与 r_2,其中介质的介电常数为 ε。若两极板间所加的电压 $u=U_\mathrm{m}\sin\omega t$,且其角频率 ω 不高,故电场分布与静态场情形相同。试计算介质中的位移电流密度及穿过介质中半径为 $r(r_1<r<r_2)$ 的圆柱形表面的总位移电流;并证明后者等于电容器引线中的传导电流。

解 设圆柱形电容器极板所带电荷量为 Q,则由高斯定理 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon}$ 可求得

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l r}\boldsymbol{e}_r$$

$$U=\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon l r}\mathrm{d}r=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}=U_\mathrm{m}\sin\omega t$$

所以

$$Q=\frac{2\pi\varepsilon l U_\mathrm{m}\sin\omega t}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

即

$$\boldsymbol{E}=\frac{U_\mathrm{m}\sin\omega t}{r\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\boldsymbol{e}_r$$

介质中位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{D}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\varepsilon\omega U_\mathrm{m}\cos\omega t}{r\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\boldsymbol{e}_r$$

圆柱形表面的总位移电流为

$$i_\mathrm{D}=\int_S \boldsymbol{J}_\mathrm{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=J_\mathrm{D}\cdot 2\pi r l=\frac{2\pi l\varepsilon\omega U_\mathrm{m}\cos\omega t}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

电容器引线中传导电流为

$$i_\mathrm{C}=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{Q}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\cdot\omega U_\mathrm{m}\cos\omega t=i_\mathrm{D}$$

所以圆柱形表面的总位移电流等于电容器引线中的传导电流。

习题 5.6　一铜导线中通过 1A 的传导电流，已知铜的介电常数为 ε_0，电导率为 $\sigma=5.8\times10^7\,\mathrm{S/m}$。试分别求出电流的频率为 10kHz 与 100MHz 时导线中的位移电流。

解　导线中传导电流密度为

$$J_C=\sigma E$$

位移电流为

$$J_D=\mathrm{j}\omega D=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E=\mathrm{j}2\pi f\varepsilon_0 E$$

$$\left|\frac{i_D}{i_C}\right|=\left|\frac{J_D}{J_C}\right|=\left|\frac{\mathrm{j}2\pi f\varepsilon_0}{\sigma}\right|=\frac{2\pi f\varepsilon_0}{\sigma}$$

所以

$$i_D\approx 9.6\times10^{-19}fi_C$$

当 $f=10\mathrm{kHz}$ 时，有

$$i_D=9.6\times10^{-15}\,\mathrm{A}$$

当 $f=100\mathrm{MHz}$ 时，有

$$i_D=9.6\times10^{-11}\,\mathrm{A}$$

习题 5.7　一球形电容器内外电极的半径分别为 r_1 与 r_2，其间填充介电常数为 ε 的介质。若两球面极板间所加的电压 $u=U_m\sin\omega t$，且其角频率 ω 不高。试计算介质中的位移电流密度及穿过介质中半径为 $r(r_1<r<r_2)$ 的球面的总位移电流。

解　设球形电容器极板所带电荷量为 Q，半径为 r 处的电场强度为 $\boldsymbol{E}$，由高斯定理可得

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{e}_r$$

则

$$U=\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=U_m\sin\omega t$$

故

$$Q=\frac{4\pi\varepsilon r_1r_2U_m\sin\omega t}{r_2-r_1}$$

因此

$$E=\frac{r_1r_2U_m\sin\omega t}{(r_2-r_1)r^2}$$

位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_D=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\varepsilon\omega U_m\cos\omega t\boldsymbol{e}_r$$

球面的总位移电流为

$$i_D=\int_S\boldsymbol{J}_D\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\frac{1}{r^2}\varepsilon\omega U_m\cos\omega t\cdot4\pi r^2=\frac{4\pi r_1r_2\varepsilon\omega}{r_2-r_1}U_m\cos\omega t$$

习题 5.8　假设真空中的磁感应强度为 $\boldsymbol{H}=0.01\cos(6\pi\times10^6t-2\pi z)\boldsymbol{e}_y\,\mathrm{A/m}$，试求与之相应的位移电流密度。

解　由真空中全电流定律的微分形式 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 得

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{D}}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & H_y & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial H_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial H_y}{\partial x}\boldsymbol{e}_z$$

$$=-0.01\times 2\pi\sin(6\pi\times 10^6 t-2\pi z)\boldsymbol{e}_x$$

$$=-0.02\pi\sin(6\pi\times 10^6 t-2\pi z)\boldsymbol{e}_x\ \mathrm{A/m^2}$$

习题 5.9 已知电场强度矢量为

$$\boldsymbol{E}=E_{\mathrm{m}}[\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y]$$

其中，E_{m}、ω 及 β 均为常数。试由麦克斯韦方程组确定与之相联系的磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$。

解 由麦克斯韦方程组 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 得

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & 0\end{vmatrix}=-E_{\mathrm{m}}\beta[\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y]$$

则

$$\boldsymbol{B}=\int\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}t=-\frac{\beta}{\omega}E_{\mathrm{m}}[\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x-\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y]$$

习题 5.10 试写出下列各场量的复数表示式的瞬时值。

(1) $\boldsymbol{E}=E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_x$；　(2) $\boldsymbol{H}=H_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)z}\boldsymbol{e}_y$；

(3) $\boldsymbol{E}=E_{\mathrm{m}}\sin\beta z\boldsymbol{e}_x$；　(4) $\boldsymbol{E}=40(\sqrt{2}-\mathrm{j}\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20z}\boldsymbol{e}_x$；

(5) $\boldsymbol{H}=(4\boldsymbol{e}_x+5\mathrm{j}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta z)}$；　(6) $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}$；

解 (1) $\boldsymbol{E}=\mathrm{Re}(E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_x)=E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x$

(2) $\boldsymbol{H}=\mathrm{Re}(H_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_y)=H_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$

(3) $\boldsymbol{E}=\mathrm{Re}(E_{\mathrm{m}}\sin\beta z\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_x)=E_{\mathrm{m}}\sin\beta z\cos\omega t\boldsymbol{e}_x$

(4) $\boldsymbol{E}=\mathrm{Re}(80\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_x)=80\cos\left(\omega t-20z-\dfrac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_x$

(5) $\boldsymbol{H}=\mathrm{Re}[(4\boldsymbol{e}_x+5\mathrm{j}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta z)}]=\mathrm{Re}(4\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta z)}\boldsymbol{e}_x)+\mathrm{Re}(5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta z)}\boldsymbol{e}_y)=4\cos(\omega t+\beta z)\boldsymbol{e}_x-5\sin(\omega t+\beta z)\boldsymbol{e}_y$

(6) $\boldsymbol{E}=\mathrm{Re}(10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_y)=10\cos(\omega t-6x-8z)\boldsymbol{e}_y$

习题 5.11 如图 5-11 所示，已知相距为 d 的两无限大平行导体板间的电场强度为 $\boldsymbol{E}=E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x$，试求两板间的磁场强度和导体板上的感应电荷及电流分布。

解 由麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}=-\beta E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$$

则

$$\boldsymbol{B}=\int\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}t=-\int\beta E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}t=\frac{\beta E_{\mathrm{m}}}{\omega}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$$

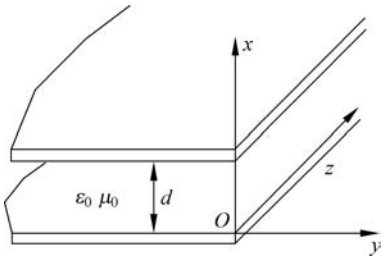


图 5-11　习题 5.11 示意图

两板间的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\frac{\beta}{\omega\mu_0}E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$$

由边界条件可得导体板上的感应电荷及感应电流分布分别为

$$\rho_S\Big|_{x=d}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{D}=-\varepsilon_0E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z)$$

$$\rho_S\Big|_{x=0}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{D}=\varepsilon_0E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z)$$

$$\boldsymbol{J}_S\Big|_{x=d}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\,|_{x=d}=-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}=-\frac{\beta E_{\mathrm{m}}}{\mu_0\omega}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{J}_S\Big|_{x=0}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\Big|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}=\frac{\beta E_{\mathrm{m}}}{\mu_0\omega}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z$$

习题 5.12　长为 l，内、外半径分别为 r_1 与 r_2 的理想导体同轴线，两端用理想导体板短路。内外导体间填充介电常数为 ε、磁导率为 μ_0 的介质。介质内的电磁场分别为

$$\boldsymbol{E}=\frac{A}{r}\sin\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\,\frac{B}{r}\cos\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_\varphi$$

试确定式中 A、B 间的关系，并求出 β 和 $r=r_1,r_2$ 及 $z=0,l$ 面上的电荷面密度与面电流密度。

解　方法 1：由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$ 可得

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_r & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{A\beta}{r}\cos\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\omega\mu_0B}{r}\cos\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_\varphi$$

从而

$$A=\frac{\omega\mu_0}{\beta}B$$

同理，由 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$ 可得

$$B=\frac{\omega\varepsilon}{\beta}A$$

将以上两等式左右分别相乘，约掉 A、B，可得

$$\beta^2=\omega^2\mu_0\varepsilon$$

由边界条件可得导体板上的感应电荷及感应电流分布分别为

$$\rho_S|_{r=r_1}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}|_{r=r_1}=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{D}|_{r=r_1}=\varepsilon E_r|_{r=r_1}=\frac{\varepsilon A}{r_1}\sin\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\rho_S|_{r=r_2}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}|_{r=r_2}=-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{D}|_{r=r_2}=-\frac{\varepsilon A}{r_2}\sin\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\rho_S|_{z=0}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}|_{z=0}=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{D}|_{z=0}=0$$

$$\rho_S|_{z=l}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}|_{z=l}=-\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{D}|_{z=l}=0$$

$$\boldsymbol{J}_S|_{r=r_1}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_{r=r_1}=\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\frac{B}{r_1}\cos\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{J}_S|_{r=r_2}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_{r=r_2}=-\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\frac{B}{r_2}\cos\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{J}_S|_{z=0}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_{z=0}=\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\frac{B}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{J}_S|_{z=l}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_{z=l}=-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\frac{B}{r}\cos\beta l\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_r$$

方法 2：由于$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\nabla\times\boldsymbol{H}=\omega^2\mu_0\varepsilon\boldsymbol{E}$

所以将$\boldsymbol{E}=\frac{A}{r}\sin\beta z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\boldsymbol{e}_r$代入可得

$$\beta^2=\omega^2\mu_0\varepsilon$$

习题 5.13 已知在自由空间传播的均匀平面波的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=0.8(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)\cos(6\pi\times10^8t-2\pi z)\,\mathrm{A/m}$$

(1) 求此电磁波的电场强度矢量；

(2) 计算瞬时坡印亭矢量。

解 (1) 方法 1：由真空中的全电流定律$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$，得

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial H_x}{\partial z}\boldsymbol{e}_y\right)$$

$$=\frac{1.6\pi}{\varepsilon_0}(-\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)\sin(6\pi\times10^8t-2\pi z)$$

$$\boldsymbol{E}=\int\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\mathrm{d}t=\int\frac{1.6\pi}{\varepsilon_0}(-\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)\sin(6\pi\times10^8t-2\pi z)\,\mathrm{d}t$$

$$=96\pi(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y)\cos(6\pi\times10^8t-2\pi z)\,\mathrm{V/m}$$

方法 2：用第 6 章均匀平面波的知识去求。由题意可得，波矢量为

$$\boldsymbol{k}=2\pi\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{m}^{-1}$$

自由空间中该电磁波的电场强度矢量为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=Z_0\boldsymbol{H}(z,t)\times\boldsymbol{e}_k$$

$$=120\pi\cdot0.8(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)\times\boldsymbol{e}_z\cdot\cos(6\pi\times10^8t-2\pi z)\,\mathrm{V/m}$$

$$=96\pi(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y)\cos(6\pi\times10^8t-2\pi z)\,\mathrm{V/m}$$

(2) 瞬时坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=96\pi\times0.8\times(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y)\times(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)\cos^2(6\pi\times10^8t-2\pi z)\text{W/m}^2$$
$$=153.6\pi\cos^2(6\pi\times10^8t-2\pi z)\boldsymbol{e}_z\text{W/m}^2$$

习题 5.14　由半径为 a、相距为 d($d\ll a$)的圆形极板构成的平行板电容器,其中的介质是非理想的,具有电导率 σ、介电常数 ε。假定电容器内的电场是均匀的,可忽略其边缘效应。若电容器有电压为 U_0 的直流电源供电,试求电容器内任一点的坡印亭矢量,并验证其中损耗的功率由电源供给。

解　设电容器极板轴线为 z 轴,向上为正,则

$$\boldsymbol{E}=-\frac{U_0}{d}\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}=-\frac{\sigma U_0}{d}\boldsymbol{e}_z$$

由安培环路定律 $\oint_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,得

$$H\cdot2\pi r=J\cdot\pi r^2$$

有

$$\boldsymbol{H}=\frac{Jr}{2}\boldsymbol{e}_\varphi=-\frac{\sigma U_0 r}{2d}\boldsymbol{e}_\varphi$$

坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{U_0}{d}\frac{\sigma U_0 r}{2d}(-\boldsymbol{e}_z)\times(-\boldsymbol{e}_\varphi)=-\frac{\sigma U_0^2 r}{2d^2}\boldsymbol{e}_r$$

可以看出,能量是从电容器的边沿向轴线方向汇聚。总共流入的能量为

$$P_\mathrm{i}=\int_{\text{侧面}}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_{\text{侧面}}-\frac{\sigma U_0^2 r}{2d^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{e}_r)\Big|_{r=a}=\frac{\sigma U_0^2 a}{2d^2}\cdot2\pi a\cdot d=\frac{\sigma U_0^2\pi a^2}{d}$$
$$=\frac{U_0^2}{d/(\sigma\pi a^2)}=\frac{U_0^2}{R}$$

根据焦耳定律得,损耗的功率为

$$P_l=\int_V\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V=\sigma E^2\cdot\pi a^2 d=\frac{\sigma U_0^2}{d}\cdot\pi a^2=\frac{U_0^2}{d/(\sigma\pi a^2)}=\frac{U_0^2}{R}$$

其中,R 为电容器内的漏电阻。可见,损耗的功率是由电源供给的。

习题 5.15　在同一空间有可能存在静止电荷的静电场 $\boldsymbol{E}$ 和永久磁铁的磁场 $\boldsymbol{H}$,这时有可能存在坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$,但没有能流。试证明:对任一闭合面 S,则有

$$\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

证明　当静止电荷和永久磁铁同时存在时,该区域内既有静电场,又有稳恒磁场。故有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=0,\quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\neq0$$

$$\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V=\int_V[(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}-(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}]\mathrm{d}V=0$$

习题 5.16　由理想导体板构成的波导内的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=E_\mathrm{m}\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$$

内部为空气,如图 5-12 所示。试求:

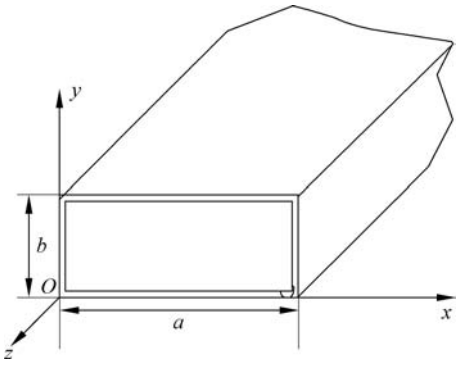


图 5-12　习题 5.16 示意图

(1) 波导内的磁场强度和波导壁上的面电流密度；

(2) 波导内的位移电流密度；

(3) 波导内的坡印亭矢量的瞬时值和平均值；

(4) 穿过波导任一横截面的平均功率。

解　(1) 由麦克斯韦方程组$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$,得

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}=-\beta E_{\mathrm{m}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x-\frac{\pi}{a}E_{\mathrm{m}}\cos\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z$$

波导内的磁感应强度则为

$$\boldsymbol{B}=\int\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}t=\int\left[-\beta E_{\mathrm{m}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x-\frac{\pi}{a}E_{\mathrm{m}}\cos\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\beta E_{\mathrm{m}}}{\omega}\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\pi E_{\mathrm{m}}}{a\omega}\cos\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z$$

磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\frac{E_{\mathrm{m}}}{\omega\mu_0}\left[-\beta\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\right]$$

面电流密度由$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$可得。

$$\boldsymbol{J}_S\big|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\times\frac{E_{\mathrm{m}}}{\omega\mu_0}\left[-\beta\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\right]$$

$$=-\frac{\pi E_{\mathrm{m}}}{a\omega\mu_0}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{J}_S\big|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_x\times\frac{E_{\mathrm{m}}}{\omega\mu_0}\left[-\beta\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\right]$$

$$=\frac{\pi E_{\mathrm{m}}}{a\omega\mu_0}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{J}_S\big|_{y=0}=\boldsymbol{e}_y\times\frac{E_{\mathrm{m}}}{\omega\mu_0}\left[-\beta\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\right]$$

$$=\frac{\pi E_{\mathrm{m}}}{a\omega\mu_0}\cos\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\beta E_{\mathrm{m}}}{\omega\mu_0}\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{J}_S\mid_{y=b}=-\boldsymbol{e}_y\times\frac{E_m}{\omega\mu_0}\left[-\beta\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\right]$$

$$=-\frac{\pi E_m}{a\omega\mu_0}\cos\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_x-\frac{\beta E_m}{\omega\mu_0}\sin\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z$$

(2) 波导内的位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\varepsilon_0\omega E_m\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$$

(3) 波导内坡印亭矢量的瞬时值为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{\pi E_m^2}{4\mu_0 a\omega}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin(2\omega t-2\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\beta E_m^2}{\mu_0\omega}\sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z$$

将波导内的电场强度和磁场强度用复矢量表示为

$$\boldsymbol{E}_m=-\mathrm{j}E_m\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{H}_m=\mathrm{j}\frac{\beta E_m}{\omega\mu_0}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_x+\frac{\pi E_m}{a\omega\mu_0}\cos\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_z$$

波导内坡印亭矢量的平均值为

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{H}_m^*=\frac{\beta E_m^2}{2\mu_0\omega}\sin^2\frac{\pi x}{a}\boldsymbol{e}_z$$

本题也可以直接对瞬时坡印亭矢量在一个周期内做积分，再取平均值

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{T}\int_0^T\left[\frac{\pi E_m^2}{4\mu_0 a\omega}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin(2\omega t-2\beta z)\boldsymbol{e}_x+\frac{\beta E_m^2}{\mu_0\omega}\sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\beta E_m^2}{2\mu_0\omega}\sin^2\frac{\pi x}{a}\boldsymbol{e}_z$$

结果同前。

(4) 穿过波导任一横截面的平均功率为

$$P=\int_S\bar{\boldsymbol{S}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^a\frac{\beta E_m^2}{2\mu_0\omega}\sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{\beta E_m^2 ab}{4\mu_0\omega}$$

习题 5.17　已知时变电磁场中矢量势为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x A_m\sin(\omega t-kz)$，其中 A_m、k 为常数，求电场强度、磁场强度及坡印亭矢量。

解　方法 1：磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=-\frac{kA_m}{\mu}\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_y$$

由洛伦兹条件$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$，得$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$。

所以 ϕ 为常数，电场强度为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\boldsymbol{e}_x\omega A_m\cos(\omega t-kz)$$

坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\frac{\omega k}{\mu}A_m^2\cos^2(\omega t-kz)$$

方法 2：根据矢量势的表达式，以及其所满足的方程$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$，很容易判定空间没有电流存在。因此，$\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$，从而计算可得

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_x\frac{k^2A_{\mathrm{m}}}{\mu\varepsilon\omega}\cos(\omega t-kz)$$

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\frac{\omega k}{\mu}A_{\mathrm{m}}^2\cos^2(\omega t-kz)$$

习题 5.18 如果在良导体中存在正弦电磁波，试证明近似有

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{J}=-\mathrm{j}\omega\sigma\boldsymbol{A}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mathrm{j}\omega\mu\sigma\boldsymbol{A}=0 \quad 与 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

证明 通常情况下，$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$

在低频正弦电路中，工作频率很低，而且满足 $\omega\varepsilon\ll\sigma$，即

$$\frac{\left|\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right|}{|\boldsymbol{J}|}\Leftrightarrow\left|\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{\sigma}\right|=\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}\ll1$$

于是

$$\nabla\times\boldsymbol{H}\approx\boldsymbol{J}$$

同时，与静电场的情形相同，在时变场中，导电媒质内部没有自由电荷。证明如下：

在导体中，似稳电场必将引起传导电流密度 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 和位移电流密度 $\boldsymbol{J}_D=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$。对麦克斯韦第一方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\sigma\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\boldsymbol{D}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

两边取散度，并运用第四方程$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$，有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=0$$

其解为 $$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}=\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中， $$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

称为弛豫时间。金属导体在微波范围的频率下，有 $\varepsilon\approx\varepsilon_0$。若取 $\varepsilon_0\approx10^{-11}\mathrm{F/m}$，$\sigma\approx10^7\mathrm{S/m}$，则 $\tau\approx10^{-18}\mathrm{s}$。因此，在一般情况下金属导体内部有 $\rho=0$，即使最初放入密度为 ρ_0 自由电荷，它将极快地散开并分布于导电媒质的表面。因此，与静电场的情形类似，在时变场中导电媒质内部没有自由电荷。

基于以上分析，导体中的麦克斯韦方程组可以近似为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}\approx\boldsymbol{J} \tag{5-50}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5-51}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{5-52}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0 \tag{5-53}$$

引入电磁场的矢量势，即动态矢量势 $\boldsymbol{A}$，满足

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

或

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{5-54}$$

代入麦克斯韦方程组第二式，有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

即

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

上式括号中的矢量是无旋的，与静电场类似，这里我们引入动态标量势 ϕ，令

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi$$

即

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{5-55}$$

式中，ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 分别为时变电磁场的标量势和矢量势。

为了求得势函数 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 与场源之间的关系，将式(5-54)代入式(5-50)中，并利用矢量微分恒等式，得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu}(\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{J}$$

即

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\mu\boldsymbol{J} \tag{5-56}$$

同理，再将式(5-55) 代入式(5-53) 中，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=-\varepsilon\nabla\cdot\left(\nabla\phi+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

即

$$\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{5-57}$$

于是我们得到了两个势函数满足的方程式(5-56)和式(5-57)。观察 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 可知，二者都不是唯一的，它们的取值具有一定的任意性。若 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 是一组满足式(5-56)及式(5-57)的动态势函数，则由式(5-58)确定的另一组动态势函数 ϕ' 和 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\begin{aligned}\phi'&=\phi-\frac{\partial f}{\partial t}\\ \boldsymbol{A}'&=\boldsymbol{A}+\nabla f\end{aligned} \tag{5-58}$$

也是原方程的解，且对应同一电磁场，其中 f 为任一标量函数。不妨对式(5-58)中取如下限制(不同的限制，会得到不同的规范，如洛伦兹规范、库仑规范等)。

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\phi$$

则标量势函数为零(后面省略撇号，直接考虑标量势函数为零)。于是式(5-55)简化为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{5-59}$$

由式(5-57)可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{5-60}$$

根据 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，并将式(5-59)、式(5-60)代入，则式(5-56)简化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$$

由于是时谐场，并取$\frac{\partial}{\partial t} = \mathrm{j}\omega$，因此题目得证。

习题 5.19 若电磁场矢量势的分量为 $A_x = A_y = 0$，$A_z = f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}$，试求在圆柱坐标系内场量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的表示式。

解 方法 1：由于 $A_x = A_y = 0$，$A_z = f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}$，所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A} \\
&= \frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{e}_r}{r} & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{\boldsymbol{e}_z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{e}_r}{r} & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{\boldsymbol{e}_z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\mu}\left[-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right] \\
&= -\frac{f'(r)}{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}\boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}$$

根据洛伦兹条件$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\phi = 0$，有

$$\phi = \mathrm{j}\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{A}}{\omega\varepsilon\mu}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的表达式代入上式，则有

$$\phi = \mathrm{j}\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{A}}{\omega\varepsilon\mu} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon\mu}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial A_z}{\partial z}\right] = \frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon\mu}f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}$$

根据 $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\nabla\phi - \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} = -\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \mathrm{j}\omega f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \mathrm{j}\omega f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\left[\boldsymbol{e}_r\frac{\beta}{\omega\varepsilon\mu}f'(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)} + \boldsymbol{e}_z\frac{-\mathrm{j}\beta^2}{\omega\varepsilon\mu}f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}\right] - \mathrm{j}\omega f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\boldsymbol{e}_r\frac{\beta}{\omega\varepsilon\mu}f'(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)} + \boldsymbol{e}_z\mathrm{j}\frac{\beta^2 - \omega^2\varepsilon\mu}{\omega\varepsilon\mu}f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}
\end{aligned}$$

方法 2：磁场强度的求解方法同上。

由于$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$，所以

$$\boldsymbol{E} = (\nabla \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{J})/(\mathrm{j}\omega\varepsilon) = (\mu\nabla \times \boldsymbol{H} - \mu\boldsymbol{J})/(\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu)$$

这里，电流密度是一个未知变量。矢量势应该满足方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A} + \omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J}$$

则

$$\boldsymbol{E}=(\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{J})/(\mathrm{j}\omega\varepsilon)=(\mu\nabla\times\boldsymbol{H}+\nabla^2\boldsymbol{A}+\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{A})/(\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu)$$

利用上式，也可以得到和方法 1 完全一致的结果。这是因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=(\mu\nabla\times\boldsymbol{H}+\nabla^2\boldsymbol{A}+\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{A})/(\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu)\\&=(\nabla\times\boldsymbol{B}+\nabla^2\boldsymbol{A}+\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{A})/(\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu)\\&=(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla^2\boldsymbol{A}+\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{A})/(\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu)\\&=(\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla^2\boldsymbol{A}+\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{A})/(\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu)\\&=[\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{A}]/(\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu)\quad(\text{考虑洛伦兹条件})\\&=-\nabla\phi-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

可以看到，上述结果与方法 1 等价。在做题的过程中，可以根据个人爱好选择其中的一种即可。

有些同学在得到了磁场强度的表达式之后，倾向于使用 $\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{H}/(\mathrm{j}\omega\varepsilon)$ 来进行求解。尽管也可以得到看似正确的结果，但是逻辑上不严密。这是因为在推导过程中使用了 $\boldsymbol{J}=0$ 的条件，这显然是一个特例，题目中并没有明确指出。但是当 $\boldsymbol{J}=0$ 时，两个结果一致。

习题 5.20　在无耗的各向同性媒质中，电场 $\boldsymbol{E}$ 的方程为 $\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{E}=0$，试问在什么条件下 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 是上述方程的解？此电场作为麦克斯韦方程的解的条件是什么？

解　将 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 代入 $\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{E}=0$，可得

$$(k^2-\omega^2\varepsilon\mu)\boldsymbol{E}=0$$

只有当 $k^2=\omega^2\varepsilon\mu$ 时，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 才是上述方程的解。

在无耗的各向同性媒质中，$\rho=0$，由 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 可得 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$。

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-\mathrm{j}k_xE_{\mathrm{m}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\mathrm{j}k_yE_{\mathrm{m}y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\mathrm{j}k_zE_{\mathrm{m}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\&=-\mathrm{j}(k_xE_{\mathrm{m}x}+k_yE_{\mathrm{m}y}+k_zE_{\mathrm{m}z})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=0\end{aligned}$$

化简可得 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}=0$。

即，波的传播方向与电场的振动方向相垂直。因此该电场作为麦克斯韦方程的解还必须满足此条件。

习题 5.21　若仅考虑远场区，且设电流沿 z 轴方向流动，试证明 $\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在球坐标系内可以简化为

$$H_\varphi=-\frac{1}{\mu}\sin\theta\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

证明　因电流沿 z 轴方向流动，故有

$$\boldsymbol{A}=A_z\boldsymbol{e}_z$$

对于远区，$1\ll r$，则由 $\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}$，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\frac{1}{\mu r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r&r\boldsymbol{e}_\theta&r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\\dfrac{\partial}{\partial r}&\dfrac{\partial}{\partial\theta}&\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\A_r&rA_\theta&r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}=\frac{1}{\mu r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r&r\boldsymbol{e}_\theta&r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\\dfrac{\partial}{\partial r}&\dfrac{\partial}{\partial\theta}&0\\A_z\cos\theta&-rA_z\sin\theta&0\end{vmatrix}\\&=\frac{1}{\mu r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}(rA_z\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}(A_z\cos\theta)\right]\boldsymbol{e}_\varphi\\&=\frac{1}{\mu r}\left(-A_z\sin\theta-r\sin\theta\frac{\partial A_z}{\partial r}-\cos\theta\frac{\partial A_z}{\partial\theta}+A_z\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\mu r}\left(-r\sin\theta\frac{\partial A_z}{\partial r}-\cos\theta\frac{\partial A_z}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\approx-\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial r}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$$

即

$$H_\varphi=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial r}\sin\theta$$

习题 5.22 长为 l(l 不甚小于波长)的直导线沿 z 轴放置,其中心在原点。设直导线上载有沿 $+z$ 方向为正的交变电流,其复数值为 $I(z)=I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$。试求在远区任一点处电磁场的矢量势及磁场强度。

解 $A_z=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z'}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}z'$

当 $r\gg\lambda$ 时(注意 $\beta=2\pi/\lambda$),在远区可简化为

$$A_z=\frac{\mu_0 I_{\mathrm{m}}}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z'}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(r-z'\cos\theta)}}{r}\mathrm{d}z'=\frac{\mu_0 I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-k\cos\theta)z'}\mathrm{d}z'$$

$$=\frac{\mu_0 I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\frac{1}{-\mathrm{j}(\beta-k\cos\theta)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-k\cos\theta)z'}\Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{\mu_0 I_{\mathrm{m}}l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\mathrm{Sa}\left[\frac{(\beta-k\cos\theta)l}{2}\right]$$

磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0 r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\mu_0 r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & 0\\ A_z\cos\theta & -rA_z\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{I_{\mathrm{m}}l}{4\pi r}\left\{-\mathrm{Sa}\left(\frac{\beta l-kl\cos\theta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sin\theta)-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mathrm{Sa}\left(\frac{\beta l-kl\cos\theta}{2}\right)\cos\theta\right]\right\}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\approx\frac{\mathrm{j}kI_{\mathrm{m}}l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\mathrm{Sa}\left(\frac{\beta l-kl\cos\theta}{2}\right)\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$$

5.7 核心 MATLAB 代码

在麦克斯韦方程组中,最主要的两个运算,或者说是普通人最不易理解的运算,就是矢量场,如电场或者磁场的旋度和散度运算。结合 MATLAB 的可视化工具,可以实现对矢量场散度和旋度的绘制,从而加深对这两个运算和电磁理论的理解。

5.7.1 MATLAB 中的 divergence 函数介绍

divergence 是计算矢量场相对于直角坐标系的散度的函数,其基本格式为

```
div = divergence(X,V)
```

该函数用于求矢量场 V 关于矢量 X 的散度，此处的 V 和 X 均为三维(二维)向量，前者包含矢量在直角坐标系下的三个(两个)分量；后者则是对应于该矢量的相应位置坐标。

下面的例子给出了利用符号工具箱计算矢量场散度的操作。

```
syms x y z;
divergence([x^2 2 * y z],[x y z]);
```

MATLAB 运行结果为：

```
2 * x + 3
```

MATLAB 环境下，也可以利用数值方法直接计算散度，具体格式如下：

```
div = divergence(x,y,z,u,v,w)。
```

该函数用于计算包含分量 u、v 和 w 的三维矢量场的散度。数组 x、y 和 z 用于定义矢量分量 u、v 和 w 的坐标，它们必须是单调的，但无需间距均匀。x、y 和 z 必须具有相同数量的元素，就像由 meshgrid 生成一样。

本节主要采用的是第一种方法。

5.7.2 矢量场散度的可视化

矢量场的散度反映的是矢量场有无“源”和“汇”。矢量场在某一点的散度大于零，说明矢量场在此处有源(好像水龙头)，代表矢量的力线从此处发出；反之，如果散度小于零，说明矢量场在此处有汇(比如下水道)，矢量的力线从外部流入该点；散度等于零，说明矢量的力线从该点穿过。MATLAB 可以计算矢量函数的散度并做可视化处理。

下面的例子对矢量函数 F=[u,v]=[sin(x+y),cos(x−y)]进行求散度的操作，并将结果作图显示出来。

```
syms x y z real                          % 定义符号变量
F = [ sin(x + y),cos(x - y) ];           % 定义函数 F
g = divergence(F,[x y])                  % 求函数 F 的散度,符号形式
divF = MATLABFunction(g);                % 将散度转换为函数形式
x = linspace( - 2.5,2.5,20);
[X,Y] = meshgrid(x,x);                   % 定义网格
Fx = sin(X + Y);                         % F 的 x 分量
Fy = cos(X - Y);                         % F 的 y 分量
div_num = divF(X,Y);                     % 散度的数值形式
pcolor(X,Y,div_num);                     % 用伪彩色图绘制散度
shading interp;                          % 做插值
colorbar;                                % 绘制色条
hold on;                                 % 保持绘图叠加模式打开
quiver(X,Y,Fx,Fy,'k','linewidth',1); % 叠加绘制箭头图
```

MATLAB 窗口显示的散度函数结果如下，绘制的图像如图 5-13 所示。

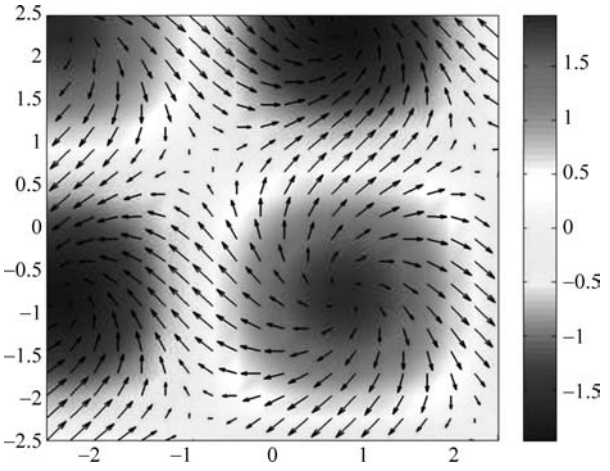


图 5-13　函数 F 的矢量场图及其散度分布图

```
g = sin(x - y) + cos(x + y)
```

上面的代码中，首先利用 MATLAB 下的符号工具箱函数，对函数 F 进行符号形式的散度计算，然后将得到的散度结果 g 显示在 MATLAB 窗口。同时，利用“MATLABFunction”将其转换为函数形式。最后，利用 pcolor 和 quiver 函数，将散度和矢量场绘制在一个图像里面。从图 5-13 可知，散度大于零的地方，即图 5-13 中发亮的区域，箭头呈现发散的情形，表明在对应的区域有“源”；散度小于零的地方，即图 5-13 中发暗的区域，箭头呈现汇聚状态，表明在该区域有“汇”。

在麦克斯韦方程组中，$\nabla \cdot \boldsymbol{D}=\rho$ 反映的就是电荷是电位移矢量的“源”：正电荷处对应电位移矢量从该处发出；负电荷处电位移矢量进入该处；无电荷处电位移矢量在该点连续。而$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$ 表明磁场是无源场，磁感应线处处连续，因此磁通连续的性质成立。

5.7.3　MATLAB 中的 curl 函数介绍

curl 是 MATLAB 中求矢量函数旋度的函数，其基本格式为

```
curl(V,X)
```

该函数用于求矢量场 V 关于矢量 X 的旋度，此处的 V 和 X 均为三维向量，前者包含矢量在直角坐标系下的三个分量；后者则是对应于该矢量的相应位置坐标。

下面的代码用于计算矢量场 V 关于矢量 X=(x,y,z)的旋度。

```
syms x y z
V = [x^3 * y^2 * z,y^3 * z^2 * x,z^3 * x^2 * y];
X = [x y z];
curl(V,X)
```

MATLAB 显示结果如下：

```
ans =
   x^2*z^3 - 2*x*y^3*z
   x^3*y^2 - 2*x*y*z^3
- 2*x^3*y*z + y^3*z^2
```

对一个标量函数的梯度场进行旋度计算，结果为零。换句话说，标量函数的梯度场是无旋的。下面的代码就直接利用 MATLAB 验证上述结论的正确性。

```
syms x y z
f = x^2 + y^2 + z^2;
vars = [x y z];
curl(gradient(f,vars),vars)
```

MATLAB 显示结果为：

```
ans =
 0
 0
 0
```

5.7.4　矢量场旋度的可视化

接下来，对二维矢量函数 F = [sin(x+y),cos(x−y)]，求其旋度并作图。下面的代码中，首先利用 MATLAB 下的符号工具箱函数，对函数 F 进行解析形式的旋度计算；然后将得到的旋度结果 G 转换为函数形式；最后利用 pcolor 和 quiver 函数，将二者绘制在一个图像里面。由于题目给出的是二维函数，因此其旋度只有 z 分量，其他两个分量为零。

```
syms x y z real                          % 定义符号变量
F = [ sin(x+y),cos(x-y) ];               % 定义函数 F
G = curl([F,0],[x y z])                  % 计算 F 的旋度，并赋予 G
curlF = MATLABFunction(G(3));            % 将 G 的 z 分量转换为函数，赋予 curlF
x = linspace( -2.5,2.5,20);
[X,Y] = meshgrid(x,x);                   % 定义网格
Fx = sin(X+Y);                           % 计算 F 的 x 分量
Fy = cos(X-Y);                           % 计算 F 的 y 分量
rot = curlF(X,Y);                        % 计算旋度的值
pcolor(X,Y,rot);                         % 绘制旋度
shading interp;                          % 颜色做插值
colorbar;                                % 绘制色条
hold on;                                 % 保持模式打开
quiver(X,Y,Fx,Fy,'k','linewidth',1);     % 绘制箭头图，并设置颜色为黑色，线宽为 1
```

上述程序的运行时，窗口输出结果为：

```
G =
                              0
                              0
    - sin(x - y) - cos(x + y)
```

上式表示该函数的旋度的解析表达式显然是一个矢量，有三个分量。我们关心的是第三个分量，即 z 分量。

将旋度的 z 分量用图形呈现出来，结果如图 5-14 所示。从图 5-14 中可以看出，旋度大于零的地方，即图中发亮的区域，箭头呈现逆时针旋转的情形；旋度小于零的地方，即图中发黑的区域，箭头呈现顺时针旋转的状态。考虑到图中显示的是 z 方向的旋度(其他两个方向为零)，利用右手螺旋规则，可以看出这个现象是正确的，其真实反映了相关区域的漩涡源状态。与图 5-13 对比，大家能够更加清晰地了解散度和旋度的区别。

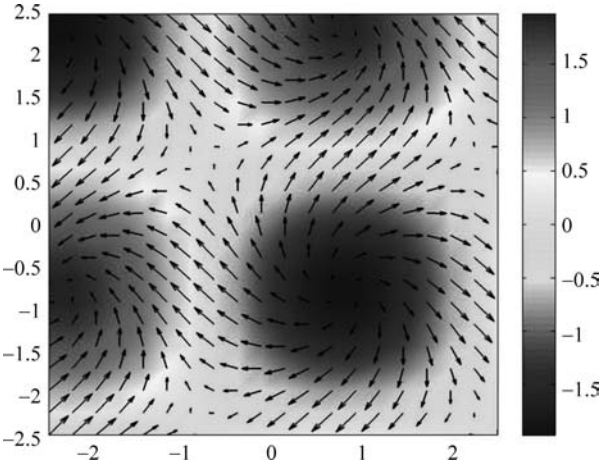


图 5-14　函数 F 的矢量场图及其旋度分布图

在麦克斯韦方程组中，$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，该式表明：电场的旋涡源是磁场随时间的变化率的相反数。有磁场发生变化的地方就有旋涡源，电场围绕该旋涡源旋转。同理，$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$，表示电流和电位移矢量的变化率之和，是磁场强度的旋涡源。在静磁场中，磁场强度总是围绕着电流旋转，就是这个性质的一个具体体现。

5.8　科技前沿中的典型时变电磁场问题分析

2006 年，美国《科学》杂志发表了 Pendry 等的论文《控制电磁场》。文中，作者首次提出了利用麦克斯韦方程组的协变性来控制电磁场的思路，并以此论文为基础，提出了变换光学(变换电磁学)的理论。由此，全球范围内关于电磁隐形的研究成为科研领域的热点。同年，杜克大学的 Smith 等，利用人工电磁超材料，设计并加工了第一个柱状隐形装置，发表在《科学》杂志上，并被该杂志评为当年度全球十大科技进展。接下来，我们就利用正交坐标系的理论，详细分析这两种隐形装置的机理。

5.8.1　球形电磁隐形衣的设计

球坐标系下的隐形衣设计示意图如图 5-15 所示。

Pendry 提出的电磁隐形衣可以用如下的球坐标系下的坐标变换来描述

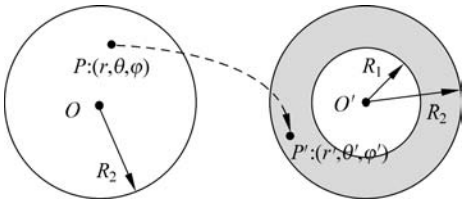


图 5-15　球坐标系下的隐形衣设计示意图

$$r'=R_1+\frac{R_2-R_1}{R_2}r,\quad \theta'=\theta,\quad \varphi'=\varphi$$

$$r=(r'-R_1)\frac{R_2}{R_2-R_1},\quad \theta=\theta',\quad \varphi=\varphi'$$

可以看出，该变换把 O 坐标系（Pendry 称之为虚拟空间）下的一个半径为 R_2 的球形区域映射为 O' 系（物理空间）下内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的一个球壳区域。由于麦克斯韦方程组的协变性，Pendry 认为：对于这两个空间，电磁波的规律是一致的；两个空间中的电磁场分布通过简单的规律建立了联系；与虚拟空间中的空气不同，物理空间的球壳内，填充了各向异性的非均匀电磁材料；由于上述材料的存在，物理空间中的电磁波进入不到球壳内部囊括的球形区域，而球壳外部，电磁波不受影响。正因为如此，可以在隐形区域内部放置各种目标，但是外部观察者或者设备根本探测不到。Pendry 给出了这种隐形材料的设计结果。我们就利用正交坐标系下的麦克斯韦方程组及其变换特性，来分析这些结果。

对于虚拟空间，采用的是球坐标系，因此有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ E_r & rE_\theta & r\sin\theta E_\varphi\end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_r\boldsymbol{H} \tag{5-61}$$

由于虚拟空间中是空气，所以相对磁导率 $\mu_r=1$。

将虚拟空间映射到物理空间时，事实上，就虚拟空间中的各点而言，其既可以用 (r,θ,φ) 表示，也可以用 (r',θ',φ') 来表示。这实际上是一个坐标变换，于是可以将麦克斯韦方程组的形式从不加撇变量变为加撇变量。假设将虚拟空间的球坐标系看作是参考基准，加撇变量看作是新的坐标变量，那么，站在虚拟空间来看，加撇变量就构成了一个新的曲线坐标系，而且一般情况下是非正交系，分析起来比较复杂。现在结合具体的变换形式，分析这个新的曲线坐标系的形式。

当 r' 单独变化时，对应的坐标线为 r'，对应的基矢有

$$\begin{aligned}h_{r'}\boldsymbol{e}_{r'}&=\frac{\partial\boldsymbol{l}}{\partial r'}=\lim_{\Delta r'\to0}\frac{\Delta r\boldsymbol{e}_r+r\Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\Delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi}{\Delta r'}\\&=\frac{\partial r}{\partial r'}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\partial\theta}{\partial r'}\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r'}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{R_2}{R_2-R_1}\boldsymbol{e}_r=k\boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

这里引用了正交坐标系下的线元矢量公式 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。其中，$h_{r'}$ 就是新坐标变量对应的拉梅系数，且 $k=\dfrac{R_2}{R_2-R_1}$。同理，有

$$h_{\theta'}\boldsymbol{e}_{\theta'}=\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial\theta'}=\lim_{\Delta\theta'\to 0}\frac{\Delta r\boldsymbol{e}_r+r\Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\Delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi}{\Delta\theta'}$$

$$=\frac{\partial r}{\partial\theta'}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta'}\boldsymbol{e}_\varphi=r\boldsymbol{e}_\theta$$

$$h_{\varphi'}\boldsymbol{e}_{\varphi'}=\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial\varphi'}=\lim_{\Delta\varphi'\to 0}\frac{\Delta r\boldsymbol{e}_r+r\Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\Delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi}{\Delta\varphi'}$$

$$=\frac{\partial r}{\partial\varphi'}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\partial\theta}{\partial\varphi'}\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi'}\boldsymbol{e}_\varphi=r\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

观察可知

$$\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_{j'}=\delta_{i'j'}=\begin{cases}1, & i'=j'\\ 0, & i'\neq j'\end{cases}$$

其中，$i',j'=r',\theta',\varphi'$。

这说明，新的曲线坐标系就是正交坐标系，其对应的拉梅系数分别为

$$h_{r'}=k,\quad h_{\theta'}=r,\quad h_{\varphi'}=r\sin\theta$$

其基矢与原球坐标系的基矢一样，即

$$\boldsymbol{e}_{r'}=\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{e}_{\theta'}=\boldsymbol{e}_\theta,\quad \boldsymbol{e}_{\varphi'}=\boldsymbol{e}_\varphi$$

因此，在新、旧这两个正交坐标系下，同一个矢量的各个分量相同。

$$E_{r'}=E_r,\quad E_{\theta'}=E_\theta,\quad E_{\varphi'}=E_\varphi$$

根据正交曲线坐标系下的旋度表达式为

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}$$

则在新坐标系下，有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{kr^2\sin\theta}\begin{vmatrix}k\boldsymbol{e}_{r'} & r\boldsymbol{e}_{\theta'} & r\sin\theta\boldsymbol{e}_{\varphi'}\\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\theta'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'}\\ kE_{r'} & rE_{\theta'} & r\sin\theta E_{\varphi'}\end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}$$

由于 $E_{r'}=E_r,E_{\theta'}=E_\theta,E_{\varphi'}=E_\varphi$，

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{kr^2\sin\theta}\begin{vmatrix}k\boldsymbol{e}_{r'} & r\boldsymbol{e}_{\theta'} & r\sin\theta\boldsymbol{e}_{\varphi'}\\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\theta'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'}\\ kE_r & rE_\theta & r\sin\theta E_\varphi\end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}$$

这个就是经过变量替换之后的方程形式，它显然不是标准的球坐标系下的麦克斯韦方程组形式(尽管非常相似)。我们的工作就是将上述形式进行重组，使其满足球坐标系下麦克斯韦方程组的标准形式(物理空间是用球坐标系表示的)。为此，将方程展成三个分量形式，则有

$$\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r^2\sin\theta}\left[r\frac{\partial(\sin\theta E_\varphi)}{\partial\theta'}-r\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_rH_r\boldsymbol{e}_{r'}\tag{5-62a}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{\theta'}}{kr\sin\theta}\left[\frac{\partial kE_r}{\partial\varphi'}-\sin\theta\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}H_\theta\boldsymbol{e}_{\theta'} \tag{5-62b}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{\varphi'}}{kr}\left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r'}-\frac{\partial kE_r}{\partial\theta'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}H_\varphi\boldsymbol{e}_{\varphi'} \tag{5-62c}$$

参考式(5-61)，将标准的方程形式也以加撇变量的形式展开为三个分量形式，以方便对照，有

$$\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2\sin\theta'}\left[r'\frac{\partial(\sin\theta'E_{\varphi'})}{\partial\theta'}-r'\frac{\partial E_{\theta'}}{\partial\varphi'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}H_{r'}\boldsymbol{e}_{r'} \tag{5-63a}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{\theta'}}{r'\sin\theta'}\left[\frac{\partial E_{r'}}{\partial\varphi'}-\sin\theta'\frac{\partial(r'E_{\varphi'})}{\partial r'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}H_{\theta'}\boldsymbol{e}_{\theta'} \tag{5-63b}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{\varphi'}}{r'}\left[\frac{\partial(r'E_{\theta'})}{\partial r'}-\frac{\partial E_{r'}}{\partial\theta'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}H_{\varphi'}\boldsymbol{e}_{\varphi'} \tag{5-63c}$$

为了将式(5-62)凑成式(5-63)的形式，则可以做如下变化(注意变换公式)，即

$$\frac{r'}{r}\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2\sin\theta'}\left[r'\frac{\partial(\sin\theta'E_\varphi)}{\partial\theta'}-r'\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}H_r\boldsymbol{e}_{r'}$$

$$\frac{r'}{kr}\frac{\boldsymbol{e}_{\theta'}}{r'\sin\theta'}\left\{\frac{\partial(kE_r)}{\partial\varphi'}-\sin\theta'\frac{\partial\left[r'\left(\frac{r}{r'}E_\varphi\right)\right\}}{\partial r'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}H_\theta\boldsymbol{e}_{\theta'}$$

$$\frac{r'}{kr}\frac{\boldsymbol{e}_{\varphi'}}{r'}\left\{\frac{\partial\left[r'\left(\frac{r}{r'}E_\theta\right)\right]}{\partial r'}-\frac{\partial(kE_r)}{\partial\theta'}\right\}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}H_\varphi\boldsymbol{e}_{\varphi'}$$

从上式大致可以看出，$E_{r'}=kE_r$，$E_{\theta'}=\frac{r}{r'}E_\theta$，$E_{\varphi'}=\frac{r}{r'}E_\varphi$。将上面公式做进一步的变形，并考虑到当从虚拟空间变化到物理空间时，各个矢量(电场强度或者磁场强度)应该遵守同样的规律，则有

$$\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2\sin\theta'}\left\{r'\frac{\partial\left[\sin\theta'\left(\frac{r}{r'}E_\varphi\right)\right]}{\partial\theta'}-r'\frac{\partial\left(\frac{r}{r'}E_\theta\right)}{\partial\varphi'}\right\}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\left(\frac{r^2}{kr'^2}\mu_\mathrm{r}\right)(kH_r)\boldsymbol{e}_{r'}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{\theta'}}{r'\sin\theta'}\left\{\frac{\partial(kE_r)}{\partial\varphi'}-\sin\theta'\frac{\partial\left[r'\left(\frac{r}{r'}E_\varphi\right)\right]}{\partial r'}\right\}=-\mathrm{j}\omega\mu_0(k\mu_\mathrm{r})\left(\frac{r}{r'}H_\theta\right)\boldsymbol{e}_{\theta'}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{\varphi'}}{r'}\left\{\frac{\partial\left[r'\left(\frac{r}{r'}E_\theta\right)\right]}{\partial r'}-\frac{\partial(kE_{r'})}{\partial\theta'}\right\}=-\mathrm{j}\omega\mu_0(k\mu_\mathrm{r})\left(\frac{r}{r'}H_\varphi\right)\boldsymbol{e}_{\varphi'}$$

上面已经考虑到了磁场的类似变换形式。此时，上式左边已经完全变化为球坐标系下的麦克斯韦方程组的标准形式，而方程右边与标准形式的差异可以用磁导率各个分量的改变来代替，即有

$$\mu_{r'r'}=\frac{r^2}{kr'^2}\mu_\mathrm{r},\quad \mu_{\theta'\theta'}=k\mu_\mathrm{r},\quad \mu_{\varphi'\varphi'}=k\mu_\mathrm{r}$$

同理，对于

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ H_r & rH_\theta & r\sin\theta H_\varphi\end{vmatrix}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} \tag{5-64}$$

可以得到，对于介电常数，其变化规律为

$$\varepsilon_{r'r'}=\frac{r^2}{kr'^2}\varepsilon_r,\quad \varepsilon_{\theta'\theta'}=k\varepsilon_r,\quad \varepsilon_{\varphi'\varphi'}=k\varepsilon_r$$

整理、化简得

$$\varepsilon_{r'r'}=\left(\frac{r'-R_1}{r'}\right)^2\frac{R_2}{R_2-R_1}\varepsilon_r,\quad \varepsilon_{\theta'\theta'}=\frac{R_2}{R_2-R_1}\varepsilon_r,\quad \varepsilon_{\varphi'\varphi'}=\frac{R_2}{R_2-R_1}\varepsilon_r;$$

$$\mu_{r'r'}=\left(\frac{r'-R_1}{r'}\right)^2\frac{R_2}{R_2-R_1}\mu_r,\quad \mu_{\theta'\theta'}=\frac{R_2}{R_2-R_1}\mu_r,\quad \mu_{\varphi'\varphi'}=\frac{R_2}{R_2-R_1}\mu_r。$$

上式就是在物理空间，球坐标系下，材料的电磁参数。可见，虚拟空间中的空气在物理空间已经转变为各向异性的、非均匀材料。可以重新写作

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{r'^2\sin\theta'}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_{r'} & r'\boldsymbol{e}_{\theta'} & r'\sin\theta'\boldsymbol{e}_{\varphi'}\\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\theta'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'}\\ E_{r'} & r'E_{\theta'} & r'\sin\theta'E_{\varphi'}\end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{H} \tag{5-65}$$

其中，

$$\bar{\bar{\mu}}=\begin{bmatrix}\mu_{r'r'} & 0 & 0\\ 0 & \mu_{\theta'\theta'} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{\varphi'\varphi'}\end{bmatrix}\mu_r \tag{5-66}$$

同理，

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r'^2\sin\theta'}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_{r'} & r'\boldsymbol{e}_{\theta'} & r'\sin\theta'\boldsymbol{e}_{\varphi'}\\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\theta'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'}\\ H_{r'} & r'H_{\theta'} & r'\sin\theta'H_{\varphi'}\end{vmatrix}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{5-67}$$

其中，

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{r'r'} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{\theta'\theta'} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{\varphi'\varphi'}\end{bmatrix}\varepsilon_r \tag{5-68}$$

5.8.2 柱状电磁隐形衣设计

同样，仿照前面的过程，可以推导无限长柱状隐形装置的设计。大家可以继续参考图 5-15，只不过把它看作是柱坐标系下的 xOy 平面即可。采用如下的坐标变换

$$r'=R_1+\frac{R_2-R_1}{R_2}r,\quad \varphi'=\varphi,\quad z'=z$$

$$r=(r'-R_1)\frac{R_2}{R_2-R_1},\quad \varphi=\varphi',\quad z=z'$$

可以看出，该变换把虚拟空间中 O 坐标系下的一个半径为 R_2 的圆柱形区域映射为 O' 系（物理空间）下内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的一个柱壳区域。对于虚拟空间，采用的是圆柱坐标系，因此有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_r & rE_\varphi & E_z\end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_r\boldsymbol{H} \tag{5-69}$$

由于虚拟空间中是空气，所以相对磁导率 $\mu_r=1$。同样，站在虚拟空间来看，加撇变量就构成了一个新的曲线坐标系，而且一般情况下是非正交系。现在结合具体的变换形式，分析这个新的曲线坐标系的形式。

当 r' 单独变化时，对应的坐标线为 r'，对应的基矢有

$$\begin{aligned}h_{r'}\boldsymbol{e}_{r'}&=\frac{\partial\boldsymbol{l}}{\partial r'}=\lim_{\Delta r'\to0}\frac{\Delta r\boldsymbol{e}_r+r\Delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+\Delta z\boldsymbol{e}_z}{\Delta r'}\\&=\frac{\partial r}{\partial r'}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\partial\varphi}{\partial r'}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial z}{\partial r'}\boldsymbol{e}_z=\frac{R_2}{R_2-R_1}\boldsymbol{e}_r=k\boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

这里引用了正交坐标系下的线元矢量公式 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。其中，$h_{r'}$ 就是新坐标变量对应的拉梅系数，且 $k=\dfrac{R_2}{R_2-R_1}$。同理，有

$$\begin{aligned}h_{\varphi'}\boldsymbol{e}_{\varphi'}&=\frac{\partial\boldsymbol{l}}{\partial\varphi'}=\lim_{\Delta\varphi'\to0}\frac{\Delta r\boldsymbol{e}_r+r\Delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+\Delta z\boldsymbol{e}_z}{\Delta\varphi'}\\&=\frac{\partial r}{\partial\varphi'}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi'}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial z}{\partial\varphi'}\boldsymbol{e}_z=r\boldsymbol{e}_\varphi\\h_{z'}\boldsymbol{e}_{z'}&=\frac{\partial\boldsymbol{l}}{\partial z'}=\lim_{\Delta z'\to0}\frac{\Delta r\boldsymbol{e}_r+r\Delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+\Delta z\boldsymbol{e}_z}{\Delta z'}\\&=\frac{\partial r}{\partial z'}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial z}{\partial z'}\boldsymbol{e}_z=1\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

观察可知

$$\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_{j'}=\delta_{i'j'}=\begin{cases}1, & i'=j'\\0, & i'\neq j'\end{cases}$$

其中，$i',j'=r',\varphi',z'$。

这说明，新的曲线坐标系就是正交坐标系，其对应的拉梅系数分别为

$$h_{r'}=k,\quad h_{\varphi'}=r,\quad h_{z'}=1$$

其基矢与原球坐标系的基矢一样，即

$$\boldsymbol{e}_{r'}=\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{e}_{\varphi'}=\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \boldsymbol{e}_{z'}=\boldsymbol{e}_z$$

因此，在虚拟空间，新、旧两个正交坐标系下，同一个矢量的各个分量相同，即

$$E_{r'}=E_r,\quad E_{\varphi'}=E_\varphi,\quad E_{z'}=E_z$$

根据正交曲线坐标系下的旋度表达式

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}$$

则在新坐标系下有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{kr}\begin{vmatrix} k\boldsymbol{e}_{r'} & r\boldsymbol{e}_{\varphi'} & \boldsymbol{e}_{z'} \\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ kE_{r'} & rE_{\varphi'} & E_{z'} \end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}\boldsymbol{H}$$

根据 $E_{r'}=E_r$，$E_{\varphi'}=E_\varphi$，$E_{z'}=E_z$，得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{kr}\begin{vmatrix} k\boldsymbol{e}_{r'} & r\boldsymbol{e}_{\varphi'} & \boldsymbol{e}_{z'} \\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ kE_{r} & rE_{\varphi} & E_{z} \end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}\boldsymbol{H}$$

这个就是经过变量替换之后的方程形式，它显然不是标准的柱坐标系下的麦克斯韦方程组形式(尽管非常相似)。我们的工作就是将上述形式进行重组，使其满足球坐标系下麦克斯韦方程组的标准形式(物理空间是用柱坐标系表示的)。为此，将方程重新写作

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{kr}\begin{vmatrix} k\boldsymbol{e}_{r'} & r\boldsymbol{e}_{\varphi'} & \boldsymbol{e}_{z'} \\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ (kE_r) & r'\left(\dfrac{r}{r'}E_\varphi\right) & E_z \end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}\boldsymbol{H}$$

将其展开成三个分量形式，则

$$\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r}\left\{\frac{\partial E_z}{\partial\varphi'}-\frac{\partial\left[r'\left(\dfrac{r}{r'}E_\varphi\right)\right]}{\partial z'}\right\}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}H_r\boldsymbol{e}_{r'} \tag{5-70a}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{\varphi'}}{k}\left[\frac{\partial(kE_r)}{\partial z'}-\frac{\partial(E_z)}{\partial r'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}H_\varphi\boldsymbol{e}_{\varphi'} \tag{5-70b}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{z'}}{kr}\left\{\frac{\partial\left[r'\left(\dfrac{r}{r'}E_\varphi\right)\right]}{\partial r'}-\frac{\partial(kE_r)}{\partial\varphi'}\right\}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}H_z\boldsymbol{e}_{z'} \tag{5-70c}$$

参考式(5-69)，将标准的方程形式也以加撇变量的形式展开为三个分量形式，以方便对照，有

$$\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'}\left[\frac{\partial E_{z'}}{\partial\varphi'}-\frac{\partial(r'E_{\varphi'})}{\partial z'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}H_r\boldsymbol{e}_{r'} \tag{5-71a}$$

$$\boldsymbol{e}_{\varphi'}\left(\frac{\partial E_{r'}}{\partial z'}-\frac{\partial E_{z'}}{\partial r'}\right)=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}H_\varphi\boldsymbol{e}_{\varphi'} \tag{5-71b}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{z'}}{r'}\left[\frac{\partial(r'E_{\varphi'})}{\partial r'}-\frac{\partial E_{r'}}{\partial\varphi'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r}}H_z\boldsymbol{e}_{z'} \tag{5-71c}$$

为了将式(5-70)凑成式(5-71)的形式，则可以做如下变化(注意变换公式)，即

$$\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'}\left\{\frac{\partial E_z}{\partial\varphi'}-\frac{\partial\left[r'\left(\dfrac{r}{r'}E_\varphi\right)\right]}{\partial z'}\right\}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\left(\frac{r}{kr'}\mu_{\mathrm{r}}\right)(kH_r)\boldsymbol{e}_{r'}$$

$$\boldsymbol{e}_{\varphi'}\left[\frac{\partial(kE_r)}{\partial z'}-\frac{\partial(E_z)}{\partial r'}\right]=-\mathrm{j}\omega\mu_0\left(k\,\frac{r'}{r}\mu_{\mathrm{r}}\right)\left(\frac{r}{r'}H_\varphi\right)\boldsymbol{e}_{\varphi'}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_{z'}}{r'}\left\{\frac{\partial\left[r'\left(\frac{r}{r'}E_{\varphi}\right)\right]}{\partial r'}-\frac{\partial(kE_{r})}{\partial\varphi'}\right\}=-\mathrm{j}\omega\mu_{0}\left(\frac{kr}{r'}\mu_{\mathrm{r}}\right)H_{z}\boldsymbol{e}_{z'}$$

上式应用到了场量之间的变换关系 $E_{r'}=kE_{r}$，$E_{\varphi'}=\frac{r}{r'}E_{\varphi}$，$E_{z'}=E_{z}$，并考虑到当从虚拟空间变化到物理空间时，磁场强度应该遵守同样的规律，则有

$$\mu_{r'r'}=\frac{r}{kr'}\mu_{\mathrm{r}},\quad \mu_{\varphi'\varphi'}=k\,\frac{r'}{r}\mu_{\mathrm{r}},\quad \mu_{z'z'}=k\,\frac{r}{r'}\mu_{\mathrm{r}}$$

同理，对于

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_{r} & r\boldsymbol{e}_{\varphi} & \boldsymbol{e}_{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_{r} & rH_{\varphi} & H_{z}\end{vmatrix}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_{0}\varepsilon_{\mathrm{r}}\boldsymbol{E}\tag{5-72}$$

可以得到，对于介电常数，其变化规律为

$$\varepsilon_{r'r'}=\frac{r}{kr'}\varepsilon_{\mathrm{r}},\quad \varepsilon_{\varphi'\varphi'}=k\,\frac{r'}{r}\varepsilon_{\mathrm{r}},\quad \varepsilon_{z'z'}=k\,\frac{r}{r'}\varepsilon_{\mathrm{r}}$$

整理、化简得

$$\varepsilon_{r'r'}=\frac{r'-R_{1}}{r'}\varepsilon_{\mathrm{r}},\quad \varepsilon_{\varphi'\varphi'}=\frac{r'}{r'-R_{1}}\varepsilon_{\mathrm{r}},\quad \varepsilon_{z'z'}=\left(\frac{R_{2}}{R_{2}-R_{1}}\right)^{2}\frac{r'-R_{1}}{r'}\varepsilon_{\mathrm{r}};$$

$$\mu_{r'r'}=\frac{r'-R_{1}}{r'}\mu_{\mathrm{r}},\quad \mu_{\varphi'\varphi'}=\frac{r'}{r'-R_{1}}\mu_{\mathrm{r}},\quad \mu_{z'z'}=\left(\frac{R_{2}}{R_{2}-R_{1}}\right)^{2}\frac{r'-R_{1}}{r'}\mu_{\mathrm{r}}$$

上式就是在物理空间，球坐标系下，材料的电磁参数。可见，虚拟空间中的空气在物理空间已经转变为各向异性的、非均匀材料。可以重新写作

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{r'}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_{r'} & r'\boldsymbol{e}_{\varphi'} & \boldsymbol{e}_{\varphi'}\\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'} & \dfrac{\partial}{\partial z'}\\ E_{r'} & r'E_{\varphi'} & E_{z'}\end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu_{0}\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{H}\tag{5-73}$$

其中，

$$\bar{\bar{\mu}}=\begin{bmatrix}\mu_{r'r'} & 0 & 0\\ 0 & \mu_{\varphi'\varphi'} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{z'z'}\end{bmatrix}\mu_{\mathrm{r}}$$

同理，

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r'}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_{r'} & r'\boldsymbol{e}_{\varphi'} & \boldsymbol{e}_{z'}\\ \dfrac{\partial}{\partial r'} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi'} & \dfrac{\partial}{\partial z'}\\ H_{r'} & r'H_{\varphi'} & H_{z'}\end{vmatrix}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_{0}\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E}\tag{5-74}$$

其中，

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{r'r'} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{\varphi'\varphi'} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{z'z'}\end{bmatrix}\varepsilon_{\mathrm{r}}$$

5.9 著名大学考研真题分析

【考研题 1】（重庆邮电大学 2017 年）在无源（$\rho=0$、$\boldsymbol{J}=0$）的自由空间中，已知电磁场的电场强度复矢量为 $\dot{\boldsymbol{E}}(z)=\boldsymbol{e}_y E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\ \mathrm{V/m}$，式中 k 和 E_0 为常数。求：

（1）磁场强度的复矢量形式 $\dot{\boldsymbol{H}}(z)$；

（2）平均坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}(z)$；

（3）瞬时坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}(z,t)$。

解 （1）由 $\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\dot{\boldsymbol{H}}$ 得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{H}}(z)&=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}\\&=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} & 0\end{vmatrix}\\&=-\boldsymbol{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\end{aligned}$$

（2）平均坡印亭矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}(z)&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}(z)\times\dot{\boldsymbol{H}}^{*}(z)]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\boldsymbol{e}_y E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz})\times\left(\boldsymbol{e}_x-\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right)^{*}\right]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\right]\\&=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0}\end{aligned}$$

（3）电场和磁场的瞬时值分别为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\boldsymbol{e}_y E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=-\boldsymbol{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

瞬时坡印亭矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(z,t)&=\boldsymbol{E}(z,t)\times\boldsymbol{H}(z,t)\\&=\boldsymbol{e}_y E_0\cos(\omega t-kz)\times\left[-\boldsymbol{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)\right]\\&=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)\end{aligned}$$

【考研题 2】（电子科技大学 2016 年）在无源的空气中，已知频率 $f=3\times10^9\ \mathrm{Hz}$ 的电磁波磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(x,z)=\boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}\ \mathrm{A/m}$$

试求：(1) 常数 k_z 的值；

(2) 电场强度复矢量 $E(x,z)$；

(3) 平均坡印亭矢量 $S_{\mathrm{av}}(x,z)$。

解　(1)
$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{3\times10^9}=0.1\mathrm{m}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{0.1}=20\pi$$

由于磁场必须满足波动方程$\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=0$，所以可以推导出 $k_x^2+k_z^2=k^2$，即

$$(10\pi)^2+k_z^2=(20\pi)^2$$

故

$$k_z=\sqrt{k^2-k_x^2}=10\sqrt{3}\pi$$

(2) 因为
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x,z)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\left[\sqrt{3}\pi\mathrm{j}\sin(10\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\sqrt{3}z}\right]\boldsymbol{e}_x+\left[\pi\cos(10\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\sqrt{3}z}\right]\boldsymbol{e}_z$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,z)&=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}\\&=-\mathrm{j}6\left[\sqrt{3}\pi\mathrm{j}\sin(10\pi x)\boldsymbol{e}_x+\pi\cos(10\pi x)\boldsymbol{e}_z\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\sqrt{3}z}\\&=6\left[\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\boldsymbol{e}_x-\mathrm{j}\pi\cos(10\pi x)\boldsymbol{e}_z\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\sqrt{3}z}\end{aligned}$$

(3) 利用公式计算平均坡印亭矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}(x,z)&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{6\left[\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\boldsymbol{e}_x-\mathrm{j}\pi\cos(10\pi x)\boldsymbol{e}_z\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(10\sqrt{3}\pi z)}\times\boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(10\sqrt{3}\pi z)}\right\}\\&=0.3\sqrt{3}\pi\sin^2(10\pi x)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

【考研题 3】（西安电子科技大学 2012 年）已知无源自由空间的电场强度矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)$。

(1) 试由麦克斯韦方程求磁场强度；

(2) 证明 ω/k 等于光速；

(3) 试求坡印亭矢量的时间平均值。

解　方法 1：(1) $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)=\boldsymbol{e}_y E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(kz+\frac{\pi}{2}\right)}$，由麦克斯韦方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$ 可得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\cdot\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}kE_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(kz+\frac{\pi}{2}\right)}=-\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu_0}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(kz+\frac{\pi}{2}\right)}$$

所以
$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu_0}E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)$$

(2) 因为自由空间中有$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\frac{k^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(kz+\frac{\pi}{2}\right)}$$

所以比较后可得$\frac{k^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}=1$，即$\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c$。

(3) 平均坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\mathrm{Re}\left(\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*}{2}\right)=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_{\mathrm{m}}^2}{2\omega\mu_0}$$

此题目也可以通过瞬时值形式直接求解，如方法 2 所示。

方法 2：(1) 由于$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)$，则由麦克斯韦方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{\mu_0}=\boldsymbol{e}_x-\frac{kE_{\mathrm{m}}}{\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

对其进行积分，并忽略积分常数，则有

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_x\frac{k}{\omega\mu_0}E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-kz)$$

(2) 因为自由空间中有$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$，将上面磁场的表达式代入，则有

$$\varepsilon_0\boldsymbol{e}_y(\omega E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-kz))=\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\frac{k^2E_{\mathrm{m}}}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

比较后可得$\frac{k^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}=1$，即$\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c$。

(3)
$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_{\mathrm{m}}^2}{\omega\mu_0}\sin^2(\omega t-kz)$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{T}\int_0^T\frac{kE_{\mathrm{m}}^2}{\omega\mu_0}\sin^2(\omega t-kz)\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_{\mathrm{m}}^2}{2\omega\mu_0}$$

【考研题 4】 (电子科技大学 2011 年)在无源的空气中，已知电磁波的频率$f=3\times10^9\,\mathrm{Hz}$，磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(x,z)=\boldsymbol{e}_y0.1\sin(10\pi x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_zz}\,\mathrm{A/m}$$

试求：(1) 常数k_z的值；

(2) 电场强度复矢量$\boldsymbol{E}(x,z)$和瞬时矢量$\boldsymbol{E}(x,z;t)$；

(3) 平均坡印亭矢量$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}(x,z)$。

解 (1)
$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{3\times10^9}=0.1\,\mathrm{m}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{0.1}=20\pi$$

由于磁场必须满足波动方程$\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=0$，所以可以推导出$k_x^2+k_z^2=k^2$，即

$$(10\pi)^2+k_z^2=(20\pi)^2$$

故

$$k_z=\sqrt{k^2-k_x^2}=10\sqrt{3}\pi$$

(2) 考虑采用瞬时值形式，磁场的瞬时值为

$$\boldsymbol{H}(x,z)=\boldsymbol{e}_y0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9t-10\sqrt{3}\pi z)\,\mathrm{A/m}$$

因为$\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}(x,z)}{\partial t}$，且有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\left[-\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\sin(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_x+\left[\pi\cos(10\pi x)\cos(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_z$$

所以，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\int(\nabla\times\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}t\\&=\int\left\{\begin{matrix}\left[-\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\sin(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_x+\\\left[\pi\cos(10\pi x)\cos(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_z\end{matrix}\right\}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{6\pi\times10^{9}}\left[\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_x+\\&\quad\frac{1}{6\pi\times10^{9}}\left[\pi\cos(10\pi x)\sin(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,z;t)&=\frac{1}{6\pi\times10^{9}\varepsilon_0}\left[\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_x+\\&\quad\frac{1}{6\pi\times10^{9}\varepsilon_0}\left[\pi\cos(10\pi x)\sin(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_z\\&=6\left[\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_x+\\&\quad6\left[\pi\cos(10\pi x)\sin(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

所以，电场强度的复矢量形式为

$$\boldsymbol{E}(x,z)=6(\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\boldsymbol{e}_x-\mathrm{j}\pi\cos(10\pi x)\boldsymbol{e}_z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(10\sqrt{3}z)}$$

（3）瞬时值形式的坡印亭矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(x,z)&=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\\&=\left\{\begin{matrix}6\left[\sqrt{3}\pi\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_x+\\6\left[\pi\cos(10\pi x)\sin(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_z\end{matrix}\right\}\times\\&\quad\left[\boldsymbol{e}_y0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\\&=\left[0.6\sqrt{3}\pi\sin^2(10\pi x)\cos^2(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_z-\\&\quad\left[0.6\pi\sin(10\pi x)\cos(10\pi x)\sin(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\times\right.\\&\quad\left.\cos(6\pi\times10^{9}t-10\sqrt{3}\pi z)\right]\boldsymbol{e}_x\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t-10\sqrt{3}\pi z)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sin(\omega t-10\sqrt{3}\pi z)\cos(\omega t-10\sqrt{3}\pi z)\,\mathrm{d}t=0$$

则

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}(x,z)=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}(x,z)\,\mathrm{d}t=0.3\sqrt{3}\pi\sin^2(10\pi x)\boldsymbol{e}_z$$

读者可以结合【考研题 2】来体会瞬时值形式运算和复矢量形式运算的差别。

【考研题 5】 (电子科技大学 2015 年)同轴线内导体半径为 a,外导体半径为 b,内外导体间为空气。已知内、外导体间的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\rho,z,t)=\boldsymbol{e}_{\rho}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}\cos(\omega t-kz)\mathrm{V/m}$$

(1)求磁场强度 $\boldsymbol{H}(\rho,z,t)$;(2)求导体表面的电流密度;(3)求同轴线中的平均坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}$ 和平均功率 P_{av};(4)若已知空气的击穿电场强度为 E_{br},求此同轴线能传输的最大平均功率 P_{av}。

解 (1) 同轴线中的 TEM 波满足

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{Z_0}\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{377}\boldsymbol{e}_z\times\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_{\rho}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{377}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_{\varphi}$$

当然,也可以从麦克斯韦方程组出发,利用$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$求解,可以得到

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_{\varphi}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}k\sin(\omega t-kz)$$

所以

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\boldsymbol{e}_{\varphi}\frac{1}{\mu_0}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}k\sin(\omega t-kz)$$

于是

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{\varphi}\frac{k}{\omega\mu_0}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}\cos(\omega t-kz)$$

这个表达式实际上与前面的结果完全一致。事实上,

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

所以

$$\boldsymbol{e}_{\rho}\left[-\frac{k}{\omega\mu_0}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}k\sin(\omega t-kz)\right]=-\boldsymbol{e}_{\rho}\varepsilon_0\frac{\omega E_{\mathrm{m}}}{\rho}\sin(\omega t-kz)$$

因此

$$k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

于是有

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{\varphi}\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\omega\mu_0}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}\cos(\omega t-kz)=\boldsymbol{e}_{\varphi}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}\cos(\omega t-kz)=\boldsymbol{e}_{\varphi}\frac{1}{377}\frac{E_{\mathrm{m}}}{\rho}\cos(\omega t-kz)$$

(2) 由于是介质-导体表面,因此满足边界条件 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{S}}$,因此得

当 $\rho=a$ 时,

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{S}}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{\rho}\times\left[\frac{1}{377}\frac{E_{\mathrm{m}}}{a}\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_{\varphi}\right]=\frac{1}{377}\frac{E_{\mathrm{m}}}{a}\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_z$$

当 $\rho=b$ 时,

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_\rho\times\left[\frac{1}{377}\frac{E_m}{b}\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_\varphi\right]=-\frac{1}{377}\frac{E_m}{b}\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_z$$

(3) 将电场强度、磁场强度写为复数形式

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\rho\frac{E_m}{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\ \mathrm{V/m},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\varphi\frac{E_m}{Z_0\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\ \mathrm{V/m}$$

所以，

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\frac{E_m^2}{2Z_0\rho^2}\boldsymbol{e}_z$$

因此，

$$\boldsymbol{P}_{av}=\iint_S\boldsymbol{S}_{av}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_a^b\frac{E_m^2}{2Z_0\rho^2}2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi E_m^2}{Z_0}\ln\frac{b}{a}$$

也可以直接从瞬时值形式出发，则有

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{E_m^2}{Z_0\rho^2}\cos^2(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{E_m^2}{Z_0\rho^2}\cos^2(\omega t-kz)\boldsymbol{e}_z=\frac{E_m^2}{2Z_0\rho^2}\boldsymbol{e}_z$$

同样也可以得到传输功率的表达式。

(4) 在 $r=a$ 处，电场强度最大，要想使得空气不被击穿，必须有

$$\frac{E_m}{a}\leqslant E_{br},\quad \text{即 } E_m\leqslant aE_{br}$$

将 E_m 表达式代入(3)式，得最大平均传输功率 $P_{br}=\dfrac{\pi a^2E_{br}^2}{Z_0}\ln\dfrac{b}{a}$。

【考研题 6】 (西安电子科技大学 2011 年)一段由理想导体构成的同轴线，内导体半径为 a，外导体半径为 b，长度为 L，同轴线两端用理想导体板短路，已知在 $a\leqslant r\leqslant b$，$0\leqslant z\leqslant L$ 区域内的电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{A}{r}\sin kz$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\theta\frac{B}{r}\cos kz$$

(1) 确定 A、B 间的关系；

(2) 确定 k；

(3) 求 $r=a$ 及 $r=b$ 面上的 ρ_S、J_S。

解　(1) 由法拉第电磁感应公式 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$ 得

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{\omega\mu}=\boldsymbol{e}_\theta\frac{\mathrm{j}kA}{r\omega\mu}\cos kz$$

比较可知

$$A=\frac{\omega\mu}{\mathrm{j}k}B$$

同理，由于 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$，所以有

$$\boldsymbol{E}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{H}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}=\boldsymbol{e}_r\frac{kB}{\mathrm{j}r\omega\varepsilon}\sin kz$$

比较可得

$$\boldsymbol{A}=\frac{kB}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}$$

根据 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，解得 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$。

所以

$$A=-\mathrm{j}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}B=-\mathrm{j}ZB$$

其中，Z 是导体内介质的特性阻抗。

(2) 因为同轴线两端用理想导体板短路，所以以两端处(即 $z=0$ 和 $z=L$ 处)的电场强度为 0，则有

$$\boldsymbol{E}\mid_{z=L}=\boldsymbol{e}_r\frac{A}{r}\sin kL=0$$

所以

$$k=\frac{m\pi}{L},\quad m=1,2,3,\cdots$$

此处需要注意，虽然有关系 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，但在本题里，$\omega$ 不是任意数值的已知量，所以不可用来确定 k。事实上，将同轴线两端短路后，构成了一个谐振腔，利用边界条件确定 k，再根据上式确定谐振频率 ω。容易看到，谐振频率是一些离散的数值，不能随意选择。

(3) 在 $r=a$ 的平面上

$$\rho_S=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r\frac{A\varepsilon}{a}\sin kz=\frac{A\varepsilon}{a}\sin kz$$

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta\frac{B}{a}\cos kz=\boldsymbol{e}_z\frac{B}{a}\cos kz$$

在 $r=b$ 的平面上

$$\rho_S=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r\frac{A\varepsilon}{b}\sin kz=-\frac{A\varepsilon}{b}\sin kz$$

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta\frac{B}{b}\cos kz=-\boldsymbol{e}_z\frac{B}{b}\cos kz$$