

非正弦交流电路与电路中的过渡过程

在电气工程和电子技术中,除了大量的稳态直流电路和正弦交流电路之外,还经常会遇到非正弦交流电路,以及需要考虑电路的过渡过程的情况。本章主要介绍非正弦周期信号的傅里叶级数;非正弦交流电路的分析方法——谐波分析法;周期信号的功率和有效值;电路的过渡过程;电路的换路定理;求解电路过渡过程的时域分析法及求解一阶电路的三要素法等。

3.1 非正弦周期信号的傅里叶级数

在工程实际中,除直流和正弦交流电路外,还经常会遇到作用于电路的激励信号是周期性变化而不是按正弦规律变化的电路,这种电路称为非正弦周期电路。图 3-1 画出了几种常见的非正弦周期波形。这种非正弦的、周期性变化的电压(电流)常称为非正弦周期信号(函数)。

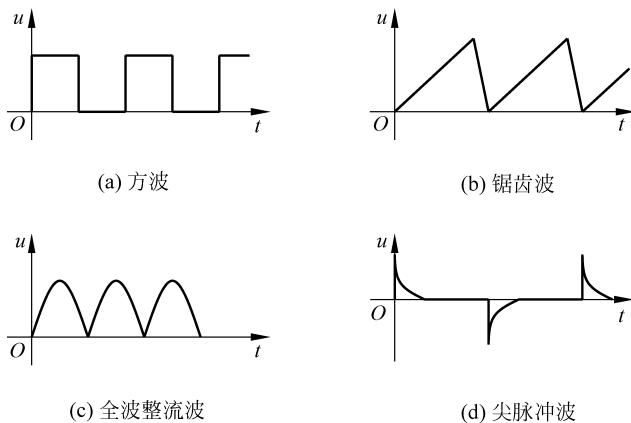


图 3-1 几种常见的非正弦周期波形

非正弦周期电路的主要问题在于激励信号的波形不是正弦波,不能直接运用前面介绍的相量法进行分析计算。但是,根据傅里叶(Fourier)变换理论,可以把非正弦周期信号分解成一系列具有不同幅值、不同频率的正弦分量。根据叠加定理,可以应用相量法分别计算这些分量单独作用于电路时所产生的响应,再把这些不同频率的响应分量叠加起来,就可得到电路的实际响应。这种

方法称为谐波分析法。

凡是满足狄里赫利条件的周期函数,都可以展开为一个收敛的傅里叶级数。具体地说,如果一个以 T 为周期的函数 $f(t)$,在周期 T 内连续,或最多存在有限个第一类间断点,则函数 $f(t)$ 可以展开为一个收敛的傅里叶级数,即

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (3-1)$$

式中, $\omega = 2\pi/T$ 。各系数可按式确定:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k\omega t d(\omega t) \\ b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin k\omega t d(\omega t) \end{cases} \quad (3-2)$$

其中, $k=1, 2, 3, \dots$ 。

若将式(3-1)中的常数项 $a_0/2$ 用 A_0 表示,将余弦项 $a_k \cos k\omega t$ 与同频率的正弦项 $b_k \sin k\omega t$ 合并,则可写成

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \phi_k) \quad (3-3)$$

其中

$$\begin{cases} A_0 = \frac{a_0}{2} \\ A_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \phi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \end{cases} \quad (3-4)$$

式(3-3)中, A_0 为 $f(t)$ 的平均值,称为 $f(t)$ 的直流分量; $A_{km} \sin(k\omega t + \phi_k)$ 称为 $f(t)$ 的 k 次谐波, A_{km} 为 k 次谐波的幅值, ϕ_k 为 k 次谐波的初相位。 $k=1$ 的项为一次谐波,一次谐波又称为基波,其频率与 $f(t)$ 的频率相同。 $k=1$ 以上的项统称为高次谐波。 k 为奇数的项称为奇次谐波, k 为偶数的项称为偶次谐波。

式(3-3)表明,满足狄里赫利条件的非正弦周期函数,都可以分解为一个直流分量和一系列频率为函数频率整数倍的各次谐波分量(正弦量)之和。电路中所遇到的非正弦周期量一般都满足狄里赫利条件,所以可以分解成直流分量和一系列谐波分量之和。部分常见非正弦周期信号的傅里叶级数如表 3-1 所示。

例 3-1 计算图 3-2 所示方波信号的傅里叶级数。

解: 图 3-2 所示方波信号是周期信号,在其周期 $[0, T]$ 信号内可表示为

$$u(t) = \begin{cases} U_m & 0 \leq t \leq T/2 \\ -U_m & T/2 < t \leq T \end{cases}$$

按式(3-2)有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} U_m dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-U_m) dt = 0$$

$a_0 = 0$ 表示信号的直流分量为零。这个结论可以直接从波形图上得出,因为 a_0 代表在一个周期内信号波形在横轴上下面积的代数平均值,当上下面积相等时, a_0 即为零。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_m \cos k\omega t d(\omega t) - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} U_m \cos k\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2U_m}{\pi} \int_0^{\pi} \cos k\omega t d(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi} \left[\frac{1}{k} \sin k\omega t \right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin k\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_m \sin k\omega t d(\omega t) - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} U_m \sin k\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2U_m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\omega t d(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos k\omega t \right]_0^{\pi} = \frac{2U_m}{k\pi} (1 - \cos k\pi) \end{aligned}$$

当 k 为偶数时, $\cos k\pi = 1$ 所以 $b_k = 0$; 当 k 为奇数时, $\cos k\pi = -1$ 所以 $b_k = 4U_m/k\pi$ 由此可写出

$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \left(\sin\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \cdots \right)$$

图 3-3 为取前五次谐波时合成的波形。显然,谐波分量取的越多,合成的结果越接近原来的波形。

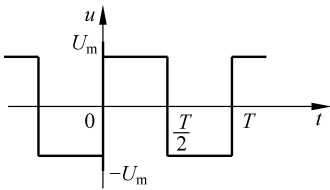


图 3-2 方波信号

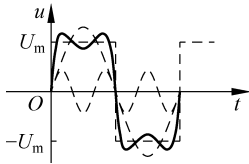
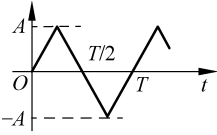
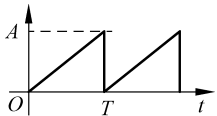
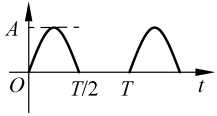
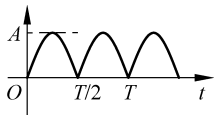


图 3-3 前 5 次谐波合成的方波

表 3-1 常见部分非正弦信号的傅里叶级数

$f(t)$ 的波形	$f(t)$ 的傅里叶级数
	$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \cdots \right)$
	$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \cdots \right)$

续表

$f(t)$ 的波形	$f(t)$ 的傅里叶级数
	$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin\omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\omega t - \cdots \right)$
	$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots \right)$
	$f(t) = \frac{A}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2}\sin\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \cdots - \frac{2}{k^2-1}\cos k\omega t - \cdots \right)$ (k 为偶数)
	$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \cdots - \frac{2}{k^2-1}\cos k\omega t - \cdots \right)$ (k 为偶数)

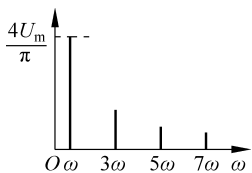


图 3-4 图 3-2 所示方波信号的幅度频谱图

一个非正弦周期信号往往含有多种谐波分量,可以用频谱图直观地描述给定周期信号中含有哪些频率分量及各分量所占的比重。频谱图表示非正弦周期量用长度与各次谐波幅值相对应的线段,按频率的高低顺序依次排列起来所得到的图形。这种表示谐波幅值的频谱图也称为幅度频谱图。若所用线段的长度对应各次谐波的初相位,则称为相位频谱图。图 3-4 是图 3-2 所示方波信号的幅度频谱图。

3.2 非正弦周期电路的谐波分析

把非正弦周期激励信号分解为直流分量和各次谐波分量之后,根据叠加原理,可以分别计算各分量单独作用时电路的响应。对各次谐波单独作用时的计算与正弦电路的计算相同,可以使用相量法。然后,再将各分量单独作用时的响应叠加起来,就可得到所求电路的响应。这就是非正弦周期电路的谐波分析法。在进行谐波分析时需要注意,对于不同频率的谐波,电路的感抗和容抗是不同的;另外,不同频率的响应分量只能按瞬时值进行叠加计算。不同频率的相量叠加运算无意义。下面通过例题来说明非正弦周期电路的谐波分析法。

例 3-2 图 3-5 所示电路中,已知 $R_1=5\Omega$, $R_2=10\Omega$, $L=5\text{mH}$, $C=50\mu\text{F}$, 电源电压为 $u(t)=10+100\sqrt{2}\sin 1000t+50\sqrt{2}\sin(3000t+30^\circ)\text{V}$ 。求各支路电流。

解: 本例所给激励信号由直流分量、基波和三次谐波组成(已分解成傅里叶级数),按照叠加原理,可以分别计算各激励分量产生的电流,然后再叠加。

对于电源电压的直流分量,电感相当于短路,电容相当于开路,各支路电流为

$$I_{20}=0$$

$$I_{30}=I_{10}=\frac{U_0}{R_1}=\frac{10}{5}\text{A}=2\text{A}$$

对于电源电压的基波分量,电路的感抗和容抗分别为

$$X_{L1}=\omega L=1000\times 0.005\Omega=5\Omega$$

$$X_{C1}=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1000\times 50\times 10^{-6}}\Omega=20\Omega$$

各支路电流为

$$\dot{I}_{11}=\frac{\dot{U}_1}{R_1+jX_{L1}}=\frac{100\angle 0^\circ}{5+j5}\text{A}=14.14\angle -45^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_{21}=\frac{\dot{U}_1}{R_2-jX_{C1}}=\frac{100\angle 0^\circ}{10-j20}\text{A}=4.47\angle 63.4^\circ\text{A}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{31} &= \dot{I}_{11} + \dot{I}_{21} = 14.14\angle -45^\circ + 4.47\angle 63.4^\circ\text{A} \\ &= 10 - j10 + 2 + j4\text{A} = 12 - j6\text{A} = 13.42\angle -26.6^\circ\text{A}\end{aligned}$$

对于电源电压的三次谐波,电路的感抗和容抗分别为

$$X_{L3}=3\omega L=3000\times 0.005\Omega=15\Omega$$

$$X_{C3}=\frac{1}{3\omega C}=\frac{1}{3000\times 50\times 10^{-6}}\Omega=6.67\Omega$$

各支路电流为

$$\dot{I}_{13}=\frac{\dot{U}_3}{R_1+jX_{L3}}=\frac{50\angle 30^\circ}{5+j15}\text{A}=3.16\angle -41.6^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_{23}=\frac{\dot{U}_3}{R_2-jX_{C3}}=\frac{50\angle 30^\circ}{10-j6.67}\text{A}=4.16\angle 63.7^\circ\text{A}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{33} &= \dot{I}_{13} + \dot{I}_{23} = 3.16\angle -41.6^\circ + 4.16\angle 63.7^\circ\text{A} \\ &= 2.35 - j2.10 + 1.84 + j3.73\text{A} = 4.19 + j1.63\text{A} = 4.50\angle 21.3^\circ\text{A}\end{aligned}$$

对每一支路,将电流各分量的瞬时值相叠加(注意不是相量相加,不同频率的相量相加无意义),就可得到该支路的总电流。如 $i_3=i_{30}+i_{31}+i_{33}$ 。

例 3-3 本例电路为工频正弦交流全波整流器的 LC 滤波电路,其中 $L=5\text{H}$, $C=$

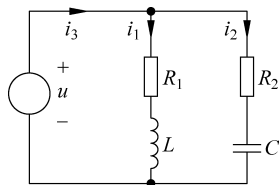
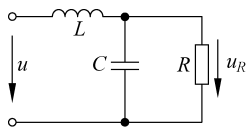
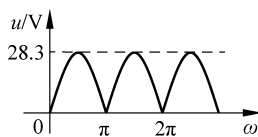


图 3-5 例 3-2 电路图

$100\mu\text{F}$, 负载电阻 $R=2\text{k}\Omega$, 加在滤波电路输入端的电压波形(即全波整流波), 如图 3-6 所示。求负载两端的电压 u_R 。



(a) LC 滤波器电路图



(b) 全波整流波形图

图 3-6 LC 滤波电路和全波整流波形图

解：由表 3-1 可得图 3-6 所示波形的傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \dots \right)$$

将 $A=28.3\text{V}$ 代入上式并取到四次谐波, 可得输入电压的分解式为

$$\begin{aligned} u &= 18 - 12 \cos 2\omega t - 2.4 \cos 4\omega t \\ &= 18 + 12 \sin \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + 2.4 \sin \left(4\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \text{V} \end{aligned}$$

工频电源角频率为 $\omega=314\text{rad/s}$ 。

对直流分量

$$U_{R0} = U_0 = 18\text{V}$$

对二次谐波

$$X_{L2} = 2\omega L = 2 \times 314 \times 5\Omega = 3140\Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\omega C} = \frac{1}{2 \times 314 \times 100 \times 10^{-6}}\Omega = 15.9\Omega$$

RC 并联阻抗为

$$Z_{RC2} = \frac{R(-jX_{C2})}{R - jX_{C2}} = \frac{2000 \times (-j15.9)}{2000 - j15.9}\Omega = 0.126 - j15.9\Omega = 15.9\angle -89.5^\circ\Omega$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{R2} &= \frac{\dot{U}_2}{jX_{L2} + Z_{RC2}} \cdot Z_{RC2} = \frac{12/\sqrt{2}\angle -90^\circ}{j3140 + 0.126 - j15.9} \times 15.9\angle -89.5^\circ\text{V} \\ &= 0.043\angle 90.5^\circ\text{V} \end{aligned}$$

对四次谐波

$$X_{L4} = 4\omega L = 4 \times 314 \times 5\Omega = 6280\Omega$$

$$X_{C4} = \frac{1}{4\omega C} = \frac{1}{4 \times 314 \times 100 \times 10^{-6}}\Omega = 7.96\Omega$$

RC 并联阻抗为

$$Z_{RC4} = \frac{R(-jX_{C4})}{R - jX_{C4}} = \frac{2000 \times (-j7.96)}{2000 - j7.96}\Omega = 0.032 - j7.96\Omega = 7.96\angle -89.8^\circ\Omega$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{R4} &= \frac{\dot{U}_4}{jX_{L4} + Z_{RC4}} \cdot Z_{RC4} = \frac{2.4/\sqrt{2}\angle -90^\circ}{j6280 + 0.032 - j7.96} \times 7.96\angle -89.8^\circ\text{V} \\ &= 0.002\angle 90.2^\circ\text{V} \end{aligned}$$

负载电压为

$$\begin{aligned} u_R &= U_{R0} + u_{R2} + u_{R4} \\ &= 18 + 0.043\sqrt{2}\sin(2\omega t + 90.5^\circ) + 0.002\sqrt{2}(\sin 4\omega t + 90.2^\circ)\text{V} \end{aligned}$$

可以看出,本例所示 LC 滤波器对直流分量没有影响,对二次谐波有较强的抑制作用,而四次谐波几乎全被吸收了,使负载电压基本上是直流电压。

利用电感和电容的电抗随频率而变的特点,可以组成多种含有电感和电容的电路,让某些所需要的频率分量通过而抑制某些不需要的频率分量。这种电路称为滤波器。滤波器在电信工程中应用非常广泛。按其功用,滤波器可分为低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器、带阻滤波器等。本例所示电路就是一种低通滤波器。

3.3 非正弦周期信号的功率和有效值

根据周期性交流电有效值的定义,可以写出非正弦周期电流 $i(t)$ 的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3-5)$$

对于正弦函数,有

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin mx dx &= 0 \\ \int_0^T \sin mx \cdot \sin nx dx &= 0, \quad m \neq n \\ \int_0^T (\sin mx)^2 dx &= \pi \end{aligned}$$

以上定积分式反映了三角函数的正交特性。由于非正弦周期电流可以分解成傅里叶级数,即

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \phi_k)$$

将上式代入式(3-5),并利用三角函数的正交性,经积分运算可得

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots} \quad (3-6)$$

式中, I_0 、 I_1 、 I_2 …分别为周期电流的直流分量、基波及各次谐波的有效值。

式(3-6)说明,非正弦周期电流的有效值为其直流分量和各次谐波分量有效值的平方和的平方根。实际求非正弦周期电流的有效值时,可以利用式(3-5)或式(3-6)。需要注意的是非正弦周期量的有效值和最大值之间不存在 $\sqrt{2}$ 倍的关系。

同理,可以写出非正弦周期电压的有效值为

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots} \quad (3-7)$$

若非正弦周期电路中的电压和电流取相关参考方向,则电路的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt$$

若将非正弦周期电路中的电压和电流分别分解成傅里叶级数,代入上式,经运算推导,可得

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \cdots \quad (3-8)$$

式中, U_0 和 I_0 为电压和电流的直流分量的有效值; U_k 和 I_k 及 φ_k 分别为 k 次谐波的电压和电流的有效值及相位差。

式(3-8)表明,非正弦周期电路的平均功率为其直流分量和各次谐波分量的平均功率之和。不同频率的电压和电流不产生平均功率,这是由三角函数的正交性决定的。

3.4 电路的过渡过程

线性电容器极板上的电荷量 q 和电容器上的电压 u 成正比,即 $q = Cu$ 。按关联参考方向,电容器上的电流和电压的关系可表示为

$$i = C \frac{du}{dt}$$

由上式可知,若电容器上的电压突然变化,则 $du/dt = \infty$,因而电流 i 应为无穷大,而电路的功率也为无穷大,但这是不可能的。所以在实际电路中电容器上的电压不能突变,其变化应该是连续的。

电感元件中电压和电流的关系可表示为

$$u = L \frac{di}{dt}$$

同理可知,在实际电路中电感中的电流不能突变,其变化应该是连续的。

若在某一瞬间电路的拓扑结构发生变化(如电源的接入或断开,某支路的接通或切断)或电路参数改变,则称电路发生了换路。在换路瞬间,电容上的电压不能突变,电感中的电流不能突变。这就是换路定律。若记换路时刻为 $t = 0$,换路前的最后瞬间为 $t = 0_-$,换路后的初始瞬间为 $t = 0_+$,则按换路定律,有

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases} \quad (3-9)$$

若将原来不带电的电容器接通直流电源 U_S ,如图 3-7 所示,则经过一段时间后,电路中的电流为零,电容器极板上将带有电荷量 Q 。电容器上的电荷由零变为 Q (充电)不是瞬间完成的,而是经过一个逐渐变化的过程。这个变化过程称为电路的过渡过程。

同样,若将原来带电的电容器与电阻并接,如图 3-8 所示,经过一段时间后,电路中的电流为零,电容器极板上将没有电荷。电容器上的电荷由初始值变为零(放电)也不是瞬间完成的,也要经过一个过渡过程。

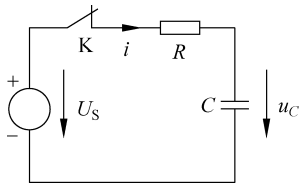


图 3-7 电容接通直流电源

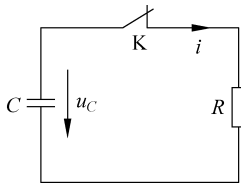


图 3-8 带电电容并接电阻

电路在过渡过程中仍然服从基尔霍夫定律。对于带电电容并接电阻的过渡过程,若取图 3-8 所示参考方向,根据 KVL 可得

$$Ri = u_C$$

而按图 3-8 所示参考方向,有

$$i = -C \frac{du_C}{dt}$$

式中,负号是因为电容上电流和电压的参考方向相反,从而可得描述电路过渡过程的微分方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

这是一个一阶线性常系数齐次微分方程,其通解为

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

式中, A 为积分常数; e 为自然对数的底。关于微分方程的求解问题在高等数学中已有详细讨论。在此只讨论如何根据电路特性确定通解的积分常数。

设换路前电容上的电压为 U_0 , 即 $u_C(0_-) = U_0$, 由换路定律可知, u_C 在换路瞬间是连续的, 即有

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \Big|_{t=0} = A$$

所以上述微分方程满足初始条件的解为

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-10)$$

电路中的电流为

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-11)$$

由以上两式可以看出, 在 RC 电路的放电过程中(也称零输入过程), 电容电压 u_C 和电路电流 i 都是随时间按指数规律衰减的, 其衰减速率取决于 R 和 C 的乘积。 u_C 和 i 的变化曲线如图 3-9 所示。可以看出, 在换路瞬间电容中的电流有突变, 这是正常的。

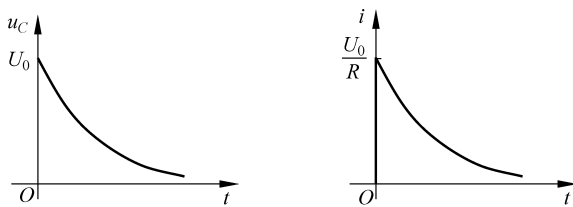


图 3-9 RC 放电电路中电压、电流的变化曲线

对 RC 电路的过渡过程来说, R 和 C 的乘积具有重要意义, 常用 τ 表示, 即 $\tau = RC$, 称其为时间常数。当 R 的单位用欧姆(Ω), C 的单位用法拉(F)时, τ 的单位为秒(s)。时间常数表明了电路过渡过程进行的快慢情况。从数学意义上来说, 指数规律的衰减需要无限长的时间才能结束, 但实际上只需经过 $3\tau \sim 5\tau$ 的时间, 电容电压和电流的衰减分量即

可衰减到可以忽略不计的程度(见表 3-2),可以认为过渡过程结束了。例如,若 $R = 100\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$, 则时间常数 $\tau = 1\text{ms}$, 即只需 $3 \sim 5\text{ms}$ 的时间, 电路的过渡过程即告结束。

表 3-2 时间常数与衰减分量的关系

t	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ	∞
u_C	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.050U_0$	$0.018U_0$	$0.007U_0$	0

对于电容接通直流电源的过渡过程, 按图 3-7 所示参考方向, 根据 KVL 可得

$$Ri + u_C = U_S$$

由 $i = C \frac{du_C}{dt}$, 可得描述电路过渡过程的微分方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

此微分方程的通解为

$$u_C = B + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

式中, A 、 B 为积分常数; e 为自然对数的底。设换路前电容上的电压为 0, 按换路定律有 $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0$; 显然, 电路进入稳态后电容上的电压为 U_S , 即 $u_C(\infty) = U_S$; 从而有 $u_C(0) = B + A = 0$, $u_C(\infty) = B = U_S$ 。

所以 $B = U_S$, $A = -U_S$, 上述微分方程满足初始条件的解为

$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-12)$$

电路中的电流为

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-13)$$

由以上两式可以看出, 在 RC 电路的充电过程中(也称为阶跃输入过程), 电容电压 u_C 可分成一个稳态分量和一个暂态分量。电容电压的稳态分量就是过渡过程结束后, 电容电压的值, 常用 $u_C(\infty)$ 表示, 对图 3-7 所示电路, $u_C(\infty) = U_S$ 。电压的暂态分量和电路电流 i 都是随时间按指数规律衰减的, 其衰减速率取决于 R 和 C 的值。 u_C 和 i 的变化曲线如图 3-10 所示。

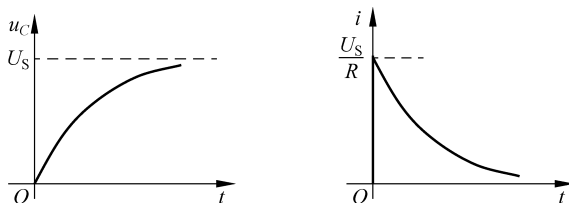


图 3-10 RC 充电电路中电压、电流的变化曲线

按同样的方法, 可以得知, 在 RL 电路接通直流电源的过渡过程中(电感充电, 见图 3-11), 若换路前电感中的电流为零, 则换路后电感中的电流为

$$i_L = \frac{U_S}{R} - \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-14)$$

在带电电感接通电阻的过渡过程中(电感放电,见图 3-12),若换路前电感中的电流为 I_0 ,则换路后电感中的电流为

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-15)$$

其中, $\tau = L/R$, 是 RL 电路的时间常数。当 R 的单位为欧姆(Ω), L 的单位为亨利(H)时, τ 的单位为秒(s)。

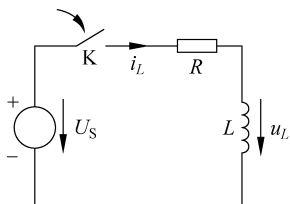


图 3-11 电感接通直流电源

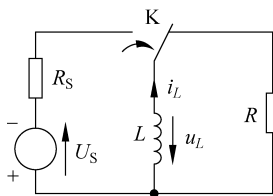


图 3-12 带电电感接通电阻

以上两种 RL 电路的过渡过程中,电感电流随时间变化的曲线如图 3-13 和图 3-14 所示。

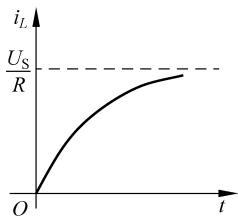


图 3-13 RL 充电电流的变化曲线

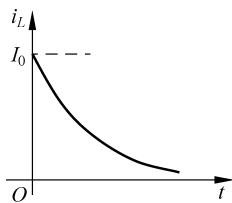


图 3-14 RL 放电电流的变化曲线

3.5 求解一阶电路的三要素法

含有储能元件(电容或电感)的电路,换路后一般要经历过渡过程。电路的过渡过程可以用微分方程描述,通过求解微分方程,可得到电压、电流的表达式。这种直接求解微分方程的方法称为时域分析法。若电路中只有一个储能元件,或可以经过串并联合并成一个储能元件,则其过渡过程可以用一阶微分方程描述,称为一阶电路。一阶电路过渡过程中的电压或电流是随时间按指数规律变化的。若用 $f(t)$ 表示电路的电压或电流,用 $f(0_+)$ 表示其换路后的初始值,用 $f(\infty)$ 表示其换路后的稳态值,用 τ 表示电路的时间常数,则可直接写出其表达式为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

对于直流激励信号,稳态分量 $f(\infty)$ 就是换路后电路的稳态直流量,可将电路中的电

容开路、电感短路,按电阻电路计算得出。初始值 $f(0_+)$ 可由按换路定律所得初态电路计算得到。对于 RC 电路, $\tau=RC$; 对于 RL 电路, $\tau=L/R$ 。

这种由初始值、稳态值和时间常数直接写出电路的电流、电压表达式的方法称为求解一阶电路的三要素法。确定初始值时需注意,换路时只有电容上的电压和电感中的电流不突变,其他量可能有突变,应按换路后的初态电路确定。

例 3-4 图 3-11 所示电路中,已知 $R=2\text{k}\Omega$, $L=40\text{mH}$, $U_S=10\text{V}$, $t=0$ 时 K 闭合,设 K 闭合前电感中没有电流。求电路的时间常数 τ 和电路电流 i_L 。

解: 由换路定律和电感的特性,可做出换路后的初态电路和稳态电路,如图 3-15 所示。

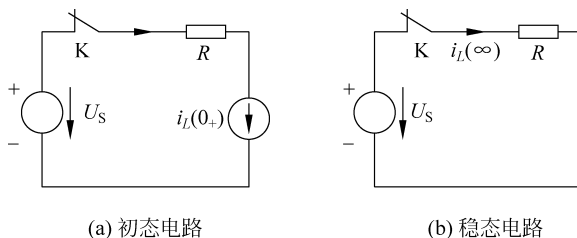


图 3-15 例 3-4 电路图

由初态电路可得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

由稳态电路可得

$$i_L(\infty) = U_S/R = 5\text{mA}$$

电路的时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{40 \times 10^{-3}}{2 \times 10^3} \text{s} = 0.02\text{ms}$$

由三要素法可直接写出电流表达式为

$$i_L = \frac{U_S}{R} - \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{10}{2} - \frac{10}{2} e^{-\frac{t}{0.02}} \text{mA} = 5 - 5e^{-50t} \text{mA}$$

例 3-5 带电容并联电阻电路如图 3-8 所示,已知 $R=1\text{k}\Omega$, $C=400\mu\text{F}$,换路前电容上的电压为 $U_0=300\text{V}$ 。求电路的时间常数 τ 和电路电流 i ,并计算换路后 0.5s 时的电流值。

解: 电路的时间常数为

$$\tau = RC = 1000 \times 400 \times 10^{-6} \text{s} = 0.4\text{s}$$

可由三要素法直接写出电流表达式为

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{300}{1000} e^{-\frac{t}{0.4}} \text{A} = 0.3e^{-2.5t} \text{A}$$

当 $t=0.5\text{s}$ 时

$$i(0.5) = 0.3e^{-2.5 \times 0.5} \text{A} = 0.3e^{-1.25} \text{A} = 0.3 \times 0.287 \text{A} = 0.086 \text{A}$$

例 3-6 图 3-16 所示电路中,已知 $R_1 = 400\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $C = 50\mu\text{F}$, $U_S = 40\text{V}$, $t = 0$ 时开关 K 闭合。K 闭合前电路已处于稳定状态。求 K 闭合后的电压 u_C 和 i 。

解: 本例可由 K 闭合前的电路计算电容电压在换路后的初始值(因为电容电压连续);再由 K 闭合后的等效电路,计算各量的初始值和稳态值;按电源不作用计算电容所连接的等效电阻;各种情况的等效电路如图 3-17 所示。

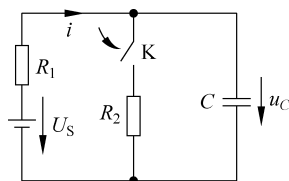
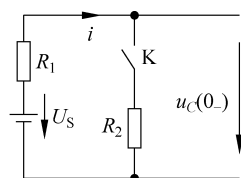
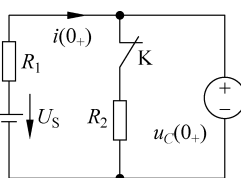


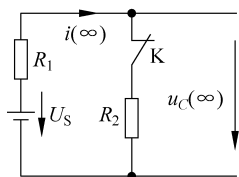
图 3-16 例 3-6 的电路图



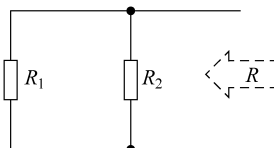
(a) 换路前的稳态电路



(b) 换路后的初态电路



(c) 换路后的稳态电路



(d) 计算等效电阻的电路

图 3-17 各种情况的等效电路

由等效电路和换路定律可知

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_S = 40\text{V}$$

$$i(0_+) = (U_S - u_C(0_+))/R_1 = 0$$

$$i(\infty) = U_S/(R_1 + R_2) = 40/500\text{A} = 0.08\text{A}$$

$$u_C(\infty) = i(\infty) \times R_2 = 0.08 \times 100\text{V} = 8\text{V}$$

$$R = R_1 // R_2 = 400 // 100\Omega = 80\Omega$$

$$\tau = RC = 80 \times 50 \times 10^{-6}\text{s} = 0.004\text{s}$$

按三要素法可直接写出

$$\begin{aligned} u_C &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 8 + (40 - 8)e^{-\frac{t}{0.004}}\text{V} = 8 + 32e^{-250t}\text{V} \\ i &= i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 0.08 + (-0.08)e^{-\frac{t}{0.004}}\text{A} \\ &= 0.08 - 0.08e^{-250t}\text{A} \end{aligned}$$

例 3-7 在图 3-18 所示电路中,已知 $R_1=6\Omega$, $R_2=9\Omega$, $L=1.8\text{H}$, $U_{S1}=6\text{V}$, $U_{S2}=9\text{V}$, $t=0$ 时,开关 K 闭合。K 闭合前电路已处于稳定状态。求 K 闭合后电路中的 i_L 和 u 。

解: 本例可由 K 闭合前的稳态电路计算电感电流在换路后的初始值(因为电感电流连续);再由 K 闭合后的等效电路,计算各量的初始值和稳态值;按电源不作用计算电感所连接的等效电阻;各种情况的等效电路如图 3-19 示。

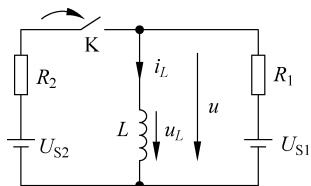


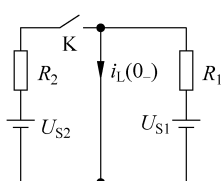
图 3-18 例 3-7 的电路

由等效电路和换路定律可知

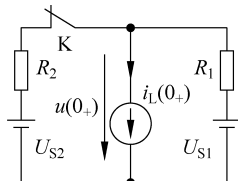
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = U_{S1}/R_1 = 6/6\text{A} = 1\text{A}$$

$$u(0_+) = (U_{S1}/R_1 + U_{S2}/R_2 - i_L(0_+))(R_1 // R_2) = 3.6\text{V}$$

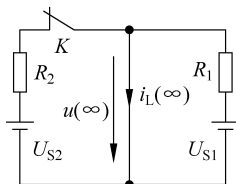
$$i_L(\infty) = U_{S1}/R_1 + U_{S2}/R_2 = 6/6 + 9/9\text{A} = 2\text{A}$$



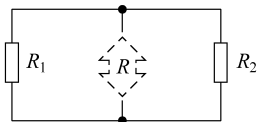
(a) 换路前的稳态电路



(b) 换路后的初态电路



(c) 换路后的稳态电路



(d) 计算等效电阻的电路

图 3-19 各种情况的等效电路

$$u(\infty) = 0$$

$$R = R_1 // R_2 = 6\Omega // 9\Omega = 3.6\Omega$$

$$\tau = L/R = 1.8/3.6\text{s} = 0.5\text{s}$$

其中,计算 $u(0_+)$ 时使用了节点电压法。

按三要素法可直接写出

$$u = u(\infty) + [u(0_+) - u(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 + (3.6 - 0)e^{-\frac{t}{0.5}}\text{V} = 3.6e^{-2t}\text{V}$$

$$i_L = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 + (1 - 2)e^{-\frac{t}{0.5}}\text{A} = 2 - 1e^{-2t}\text{A}$$

当电路中有多个储能元件时,其过渡过程较为复杂,电路方程往往是高阶微分方程或微分方程组,直接求解较为困难,通常使用运算法求解。当电路激励为正弦交流信号时,一般换路时也会出现过渡过程,电路电压、电流的稳态值都是正弦量。当电路中各储能元件所储能量均为零,并且换路恰好发生在正弦激励信号过零的时刻,则电路不会出现过渡过程,称为平稳接入。平稳接入对电力系统的负载并网等有特殊意义。

习题 3

一、思考题

1. 为什么要把非正弦周期信号分解成多个正弦信号?
2. 根据函数的波形特点,说明偶函数和奇函数的傅里叶分解系数 a_k 和 b_k 各应有何特点。
3. 按照谐波分析法,计算非正弦周期信号在电路中产生的响应时,可用相量法分别计算各次谐波的响应,即可以用相量分别表示电路响应的各次谐波分量。电路的总响应能否用一个相量图表示?为什么?
4. “计算直流分量的电路结构和计算交流分量的电路结构是不同的”这种说法是否正确?为什么?
5. 如何理解“不同频率的相量相加无意义”?
6. 对“不同频率的电压和电流不产生平均功率”这一结论进行解释。
7. 用等效复阻抗的概念推导两电容串联的等效电容,两电容并联的等效电容,以及电感串联、并联后的等效电感。
8. 为什么电容上的电压不能突变?电容中的电流能突变吗?如何确定换路后电容电压的初始值?
9. 如何确定换路后电感电压的初始值?如何确定换路后电阻电流的初始值?
10. 在从电路中切断感性负载(如电动机)时,常常会在开关的接点间出现短时间的电弧。试按过渡过程的观点解释这种现象。
11. 很多电子设备在刚关断电源时,触摸其中的某些点仍会使人受到电击,而断电后过一段时间就没事了。解释这种现象。

二、计算题

1. 计算图 3-20 所示波形图的傅里叶级数。
2. 计算图 3-20 中三角波的有效值。
3. 图 3-21 所示电路中,已知 $u = 20\sqrt{2}\sin 1000t + 10\sqrt{2}\sin(10\ 000t - 30^\circ)\text{mV}$, $R = 100\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$, $L = 100\text{mH}$ 。求 i 和 u_C 及电路所消耗的有功功率。

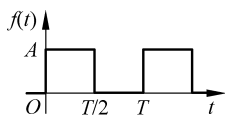


图 3-20 波形图

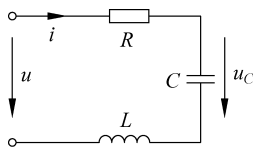


图 3-21 计算题 3 电路图

4. 某二端网络,采用关联参考方向时,端口电压和电流的表达式分别为

$$u = 5 + 12\sqrt{2}\sin 100t + 4\sqrt{2}\sin 300t + 2\sqrt{2}\sin 500t \text{ V}$$

$$i = 40 + 10\sqrt{6} \sin(100t - 30^\circ) + 4\sin(300t - 45^\circ) + \sqrt{2} \sin(500t - 60^\circ) \text{ mA}$$

(1) 若用交流电压表测量此二端网络的端口电压,电压表的读数应为何值?

(2) 计算该二端网络消耗的有功功率。

5. 交流电网中往往会有少量的高频谐波,很多电子设备都在电源输入端设置电源滤波器以消除电网带来的高频干扰。某设备的电源滤波电路如图 3-22 所示,其中 $L = 100\text{mH}$, $C = 4000\text{pF}$ 。若输入电源电压为 $u_i = 220\sqrt{2} \sin 314t + 11\sqrt{2} \sin 31400t \text{ V}$,求滤波电路的输出电压 u_o 。

6. 图 3-23 所示电路中,已知 $e = 2.828\sin(10\,000t) \text{ V}$, $E = 5\text{V}$, $C = 10\mu\text{F}$, $R_b = 200\text{k}\Omega$, $R_{be} = 2\text{k}\Omega$, $R_c = 4\text{k}\Omega$ 。求电流 i_B 。

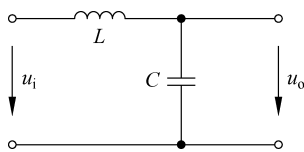


图 3-22 计算题 5 电路图

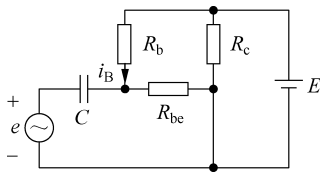


图 3-23 计算题 6 电路图

7. 图 3-24 所示电路中, $C = 200\mu\text{F}$, $R = 5000\Omega$, $E = 20\text{V}$, $t = 0$ 时 K 闭合, K 闭合前电容电压为 -10V 。计算 K 闭合后的 u_C 和 i 。

8. 图 3-25 所示电路中, $C = 50\mu\text{F}$, $R = 4\text{k}\Omega$, $t = 0$ 时 K 闭合, K 闭合前电容电压为 40V 。计算 K 闭合后的 u_R 和 i , 以及整个过渡过程中电阻 R 所消耗的能量。

9. 图 3-26 所示电路中, $t = 0$ 时 K 闭合。计算 K 闭合后的 u_1 和 i 。

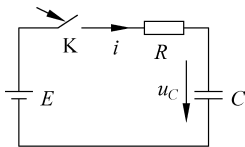


图 3-24 计算题 7 电路图

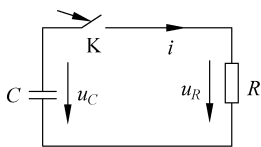


图 3-25 计算题 8 电路图

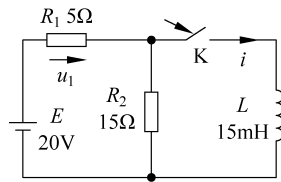


图 3-26 计算题 9 电路图

10. 图 3-27 所示电路处于稳态后,断开开关 K。计算 K 断开后的 u_2 和 i 。

11. 图 3-28 所示电路中, $C = 200\mu\text{F}$, $R_1 = 2\text{k}\Omega$, $R_2 = 3\text{k}\Omega$, $R_3 = 1\text{k}\Omega$, $E = 24\text{V}$, $t = 0$ 时 K 断开, K 断开前电路已处于稳定状态。计算 K 断开后的 u_2 。

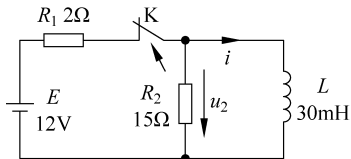


图 3-27 计算题 10 电路图

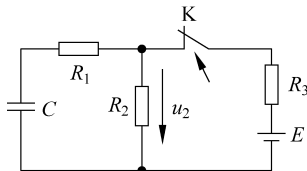


图 3-28 计算题 11 电路图